AS
222
R633
SER. 8
v. 1
1946
PER

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLIII

1946

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1946

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLII

1945

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME I.

ROMA

1945

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 gennaio 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

Il Presidente nell'aprire la seduta pronunzia le parole seguenti:

Cari Colleghi,

Sono lieto di porgervi un saluto cordiale in questa sede e in questo giorno che segna una data nella storia secolare della nostra Società. La gloriosa Accademia dei Lincei, soppressa nel 1939 dal Governo fascista perchè non si era dimostrata abbastanza docile verso il regime, risorge oggi in clima di libertà, nel solo clima che sia veramente propizio al progresso della scienza.

Nel suo studio o nel suo laboratorio lo scienziato, è superfluo dirvelo, deve indagare la verità senza preoccupazioni estranee e senza vincoli, con la convinzione o la speranza che la verità correttamente intesa e saggiamente applicata finirà sempre per recar vantaggio al genere umano. Ma noi tutti non siamo soltanto cultori della scienza, siamo anche figli di questa Italia che esce ferita e prostrata da una infausta e terribile guerra. Ed oggi più che mai sentiamo i nostri doveri verso la patria e desideriamo servirla per attenuarne le sofferenze e tentare di rialzarla dallo stato in cui essa si trova. Conviene perciò che noi fin da questa prima seduta offriamo al Governo la nostra collaborazione per lo studio di ogni problema ove le nostre competenze possano riuscire utili, e ci dichiariamo lieti di dare il nostro consiglio ogniqualvolta ci venga richiesto. Se questa nostra offerta di consulenza verrà accolta dal Governo, l'Accademia non sarà soltanto un centro di studi austeri, ma sarà pure un vivo organismo operante per la rinascita e il progresso del nostro paese.

Tra pochi minuti riprenderemo, dopo un lungo silenzio, i nostri consueti lavori. Vorrei qui esprimervi un mio desiderio. So bene che parecchie comu-

nicazioni che vengono presentate hanno un carattere molto particolare e sono comprensibili soltanto da pochi specialisti. Ve ne sono altre, però, che possono interessare un pubblico più largo. Per queste, vorrei pregarvi di esporre brevemente i risultati raggiunti, i problemi che sono stati affrontati, in modo da informarne i colleghi e da promuovere discussioni che saranno sempre utili, se non altro per accrescere la nostra cultura.

Negli ultimi tempi prima della chiusura dell'Accademia, era invalsa la consuetudine di dedicare una o due sedute ogni anno alla discussione di temi preventivamente assegnati, sopra relazioni affidate a scienziati particolarmente competenti. A quelle sedute erano invitati i cultori dell'argomento, anche se estranei all'Accademia, ed essi potevano liberamente intervenire nelle discussioni e comunicare i risultati più recenti raggiunti in quel campo di ricerche. Io vorrei che questa ottima iniziativa fosse ripresa appena sarà coperta almeno una parte dei seggi accademici vacanti e, col miglioramento delle comunicazioni, sarà reso più facile ai soci lontani di frequentare le nostre sedute.

È anche opportuno che l'Accademia non si rinchiuda in un austero isolamento, ma faccia conoscere ad un largo pubblico, per mezzo della stampa o di conferenze ad esso accessibili, quella parte dei suoi lavori che meglio si prestano alla divulgazione. Questo compito essa deve svolgere non solo per diffondere la cultura, ma pure nell'interesse della stessa Accademia, la quale deve saper dimostrare che essa costituisce veramente un organo essenziale al progresso del nostro paese.

I tempi nuovi impongono nuovi doveri. Classi sempre più larghe domandano oggi di partecipare alla vita culturale. L'Accademia non può restare indifferente a questa legittima aspirazione. Sarà nostro compito esaminare con quali mezzi possiamo soddisfarla senza che l'Accademia venga meno agli alti fini di produzione scientifica che le sono imposti dalle sue nobili tradizioni.

Purtroppo, molti illustri colleghi e carissimi amici non assistono a questa ripresa della nostra attività. La morte, nei sei anni di silenzio della nostra Accademia, ha mietuto numerose vittime, troppo numerose perchè io possa oggi dedicar loro più di un semplice cenno in questo triste elenco.

Primo per la grandezza dell'opera e per le benemerenze acquistate nei riguardi dei Lincei durante i sei anni in cui ne resse le sorti come vicepresidente e presidente, Vito Volterra, gloria d'Italia, noto in tutto il mondo come uno dei maggiori matematici del nostro tempo.

Comparabile a lui per la produzione scientifica e per la fama internazionale Tullio Levi-Civita, profondo cultore della analisi, della meccanica, della fisica matematica e della geometria differenziale, del quale non sapevamo se più ammirare l'altezza dell'ingegno o la modestia e inesauribile bontà.

Sono scomparsi inoltre tra i matematici Ernesto Pascal, valente cultore dell'analisi matematica, legato da stretti vincoli a questa Accademia, la cui

soppressione gli recò un vivo dolore; GAETANO SCORZA, acuto ricercatore nel campo della geometria e dell'algebra, carattere integro, animo purissimo; GUIDO FUBINI, che ha lasciato profonde ricerche di analisi e di geometria differenziale, riparato negli Stati Uniti per sfuggire alle persecuzioni razziali, e morto a New York, lontano dalla patria.

Tra i cultori di matematiche applicate abbiamo perduto ROBERTO MARCOLONGO, che ha scritto pregevoli Memorie e libri di Meccanica razionale ed ha dedicato gli ultimi anni della sua vita all'esaltazione dell'opera di Leonardo; GAUDENZIO FANTOLI, illustre studioso di idraulica, e CAMILLO GUIDI che era considerato il maestro italiano della scienza delle costruzioni.

È morto EMILIO BIANCHI, valoroso astronomo, fondatore di quell'Osservatorio di Merate presso Milano, che è diventato un fervido centro di astronomia stellare. Sono pure scomparsi due valenti cultori di Geodesia: EMANUELE SOLER, che compì in varie regioni d'Italia determinazioni gravimetriche con la bilancia di torsione, e l'Ammiraglio ALBERTO ALESSIO, che perfezionò i metodi astronomici di determinazione della latitudine e portò il suo contributo alla spedizione geografica italiana sulle montagne dell'India.

Ci ha pure lasciato un chimico molto stimato, il Prof. MARIO BETTI, il quale ha recato contributi essenziali per la conoscenza delle relazioni che intercedono tra struttura chimica e potere rotatorio.

Sono scomparsi CARLO FABRIZIO PARONA, insigne cultore di geologia e paleontologia, e tre valenti studiosi di mineralogia FEDERICO MILLOSEVICH, GIOVANNI D'ACHIARDI e il Principe PIERO GINORI-CONTI, ben noto organizzatore dell'industria boracifera di Larderello che, con lo sfruttamento dei soffioni, ha dato alla Toscana una nuova fonte di energia.

Fra i biologi deploriamo le perdite del botanico ENRICO CARANO, dell'anatomico GIULIO CHIARUGI che ha lasciato ricerche notevoli di embriologia, e di ERCOLE GIACOMINI noto particolarmente per i suoi studi di morfologia della struttura ghiandolare. Abbiamo inoltre perduto un illustre fisiologo, FILIPPO BOTTAZZI, del quale sono in special modo apprezzate le ricerche di chimica fisiologica, ed un insigne patologo, BENEDETTO MORPURGO, morto recentemente a Buenos Ayres dove si trovava profugo da qualche anno.

Piangiamo inoltre la scomparsa di undici soci corrispondenti; il matematico COMESSATTI, l'astronomo A. BEMPORAD, il geodeta BARBIERI, il sismologo VICENTINI, il mineralologo STELLA, ed i biologi STRAMPELLI, CHIOVENDA, VERSARI, VANZETTI, e PEPERE.

Di parecchi di questi soci saranno tenute commemorazioni in future sedute.

Il miglior modo per onorare tanti illustri colleghi scomparsi è di riportare la nostra Accademia all'alto livello che era nei loro voti e che è richiesto dalle sue grandi tradizioni. Dobbiamo anche provvedere a riannodare i legami con le Società culturali straniere, legami che un malinteso

nazionalismo aveva alquanto allentato negli anni che precedettero la guerra. Voi sapete che gli eminenti soci stranieri di cui l'Accademia si onorava, decaddero tutti nel 1939 con la soppressione dei Lincei. Alcuni di questi soci sono purtroppo scomparsi; stiamo ora raccogliendo dati precisi prima di pubblicarne il triste elenco. Agli altri invieremo una lettera per avvertirli che saremo ben lieti di riaverli con noi. Non dubitiamo di ricevere da tutti risposta favorevole.

Questi collaboratori stranieri contribuiranno a far meglio conoscere nel mondo la nostra opera e a render più rapida la ripresa del posto che avevamo conquistato nel movimento scientifico internazionale. Deve essere nostro orgoglio far vedere che l'Italia, pur impoverita e depressa da una funesta guerra scatenata contro la volontà del suo popolo, si trova sempre al primo posto nella gara per il progresso della scienza e per il benessere dell'umanità. Se molte fonti di esportazione sono per il momento esaurite, vogliamo che rimanga viva e fiorente la esportazione della cultura che, anche nei giorni più tristi della sua storia, costituì la gloria maggiore e veramente imperitura del nostro paese.

STATO DELLA PUBBLICAZIONE DEGLI ATTI ACCADEMICI

Al momento della fusione con la R. Accademia d'Italia, avvenuta l'8 giugno 1939, erano pubblicati i seguenti volumi:

Rendiconti Classe scienze fisiche, matem. e nat. – Serie VI – Vol. XXIX.
Rendiconti Classe scienze morali, storiche e fil. – Serie VI – Vol. XV.
Memorie Classe scienze fisiche, matem. e nat. – Serie VI – Vol. VII – Fasc. VII.
Memorie Classe scienze morali, storiche e fil. – Serie VI – Vol. IX – Fasc. II.
Notizie degli Scavi di antichità – Serie VI – Vol. XV.

La R. Accademia d'Italia, dopo la fusione con la R. Accademia Nazionale dei Lincei, ha continuato la pubblicazione degli « Atti » e dal 1939 al 1945 sono usciti i seguenti volumi:

Rendiconti Classe scienze fisiche, matem. e nat. – Serie VII – Voll. I, II, III, IV.
Rendiconti Classe scienze morali e storiche – Serie VII – Voll. I, II, III, IV.
Memorie Classe scienze fisiche, matem. e nat. – Voll. XI, XII, XIII, XIV (1).
Memorie Classe scienze morali e storiche – Serie VII – Voll. I, II, III, IV.
Notizie degli Scavi di antichità – Serie VII – Voll. I, II, III, IV.

(1) Le memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia non avevano Serie.

Con la soppressione della R. Accademia d'Italia, la risorta Accademia Nazionale dei Lincei riprende la pubblicazione degli « Atti » con i seguenti volumi:

Rendiconti Classe scienze fisiche, matem. e nat. – Serie VIII – Vol. I.
Rendiconti Classe scienze morali, storiche e fil. – Serie VIII – Vol. I.
Memorie Classe scienze fisiche, matem. e nat. – Serie VII – Vol. I [1].
Memorie Classe scienze morali, storiche e fil. – Serie VIII – Vol. I.
Notizie degli Scavi di antichità – Serie VIII – Vol. I.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Teoria dei Numeri). — *Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonali.* Nota [2] del Corrisp. Gino Loria.

I.

Secondo una proposizione intuita da Diofanto, enunciata da Bachet de Méziriac e da Fermat e finalmente dimostrata da Lagrange, *qualunque numero intero si può scomporre nella somma di quattro quadrati*, alcuni dei quali possono essere nulli. Essa suggerisce la questione di *scomporre in quadrati un numero dato ad arbitrio.* A stabilirne l'importanza, basti dire che, risolta che sia, ne risulta *ipso facto* la soluzione di problemi che si trovano nell'*Aritmetica* del citato matematico greco.

Non avendone trovato alcun cenno nella letteratura da me diligentemente esaminata [3], ritengo sia il caso di far nota una considerazione da cui si può ricavare una soluzione di carattere ricorrente, tale cioè che, supponendola risolta per tutti i numeri da 1 a un certo limite n, si può ottenere quella relativa a $n + 1$. Nell'esporla, per semplicità mi riferirò ad un esempio.

(1) Nel riprendere la pubblicazione delle Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, l'Accademia Nazionale dei Lincei si riferisce alla Serie VI che, all'atto della fusione era stata chiusa, dando inizio alla Serie VII anzichè alla Serie VIII come per le altre pubblicazioni.

(2) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) Esse furono eseguite con la scorta dell'*History of the Theory of Numbers* (Washington 1920) di L. E. Dickson.

Scegliamo a caso il numero 84. Il quadrato massimo inferiore ad esso è $81 = 9^2$; esso differisce di 3 dal numero dato; perciò ove quella differenza potesse scomporsi in un numero di quadrati inferiori a quattro, condurrebbe insieme a 81 alla soluzione del problema.

Ora, avendo supposto di avere già eseguita la scomposizione di tutti i numeri < 84, ricorrendo ai risultati si conclude essere $84 = 9^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$. Per vedere se esistano altre soluzioni, si devono porre alla prova gli altri quadrati inferiori a 84. Tale è anzitutto $64 = 8^2$; essendo $84 - 64 = 20$ ed essendo $20 = 4^2 + 2^2$ si ottiene $84 = 8^2 + 4^2 + 2^2$. Proseguendo per la stessa via s'incontra il numero $49 = 7^2$, e si ha $84 - 49 = 35$ e poichè $35 = 5^2 + 3^2 + 1^2$ si conclude $84 = 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2$. Continuando ancora si ha $84 - 36 = 48$ e quindi $84 = 6^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2$. Il seguente quadrato $25 = 5^2$ conduce alla differenza $84 - 25 = 59$; e siccome questo numero ammette due scomposizioni trinomie, così nascono due nuove soluzioni del problema cioè $5^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2$ e $5^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2$ la prima delle quali fu già ottenuta prima, epperò non può servire che come verifica. Altrettanto dicasi riguardo i seguenti quadrati 4^2, 3^2, 2^2, 1^2. Si è pertanto autorizzati a concludere che il numero dato ammette le seguenti scomposizioni in quadrati, ed esse soltanto

$$9^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \quad , \quad 8^2 + 4^2 + 2^2 \quad , \quad 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2$$
$$6^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 \quad , \quad 5^2 + 5^2 + 5^2 + 3^2 .$$

Questo schema di calcolo (che può in certi casi abbreviarsi mediante alcune osservazioni, che taccio per brevità) si applica convenientemente alla costruzione di Tavole di scomposizione ed esso fu applicato per tutti i primi cento numeri e diede per risultato la prima delle Tavole con cui si chiude la presente Nota. La semplice ispezione di essa pone in evidenza che *ogni numero intero è in generale scomponibile in parecchi modi nella somma di quattro quadrati.*

È questo un fatto che fu rilevato soltanto per alcune categorie di numeri da Jacobi e da alcuni suoi discepoli, nei loro studi sulle funzioni ellittiche. Cosicchè ai cultori dell'aritmetica superiore si offrono due importanti questioni; cioè la ricerca di un metodo diretto per risolvere la questione di cui trattiamo e poi di dedurne una dimostrazione del riferito teorema.

II.

È risaputo che Fermat ha notevolmente generalizzato il teorema da noi enunciato esordendo, estendendolo ad una vasta categoria di numeri, asserendo che *qualunque numero si può esprimere come somma di un determinato*

numero per ogni specie di numeri poligonali [1], tre per i triangolari, cinque per i pentagonali, ecc. La verità di questa proposizione fu stabilita da Cauchy; essa suggerisce la questione di effettuare la scomposizione per qualsivoglia numero dato; ora il lettore potrà agevolmente convincersi che essa può risolversi applicando l'identico procedimento di cui ci siamo serviti per i quadrati; a tale scopo devesi tenere presente che i primi numeri triangolari (indicando generalmente in carattere *neretto* i numeri poligonali) valgono

$$\mathbf{1} = 1 \quad , \quad \mathbf{2} = 3 \quad , \quad \mathbf{3} = 6 \quad , \quad \mathbf{4} = 10 \quad , \quad \mathbf{5} = 15$$

mentre i primi pentagonali sono:

$$\mathbf{1} = 1 \quad , \quad \mathbf{2} = 5 \quad , \quad \mathbf{3} = 12 \quad , \quad \mathbf{4} = 22 \quad , \quad \mathbf{5} = 35 .$$

Il surriferito procedimento venne da noi applicato per numeri della ora indicata specie a tutti gli interi del primo centinaio; i risultati si trovano nelle nostre Tavole II e III. Esse pongono in evidenza che sussiste anche per i numeri poligonali il fatto generale da noi rilevato per i quadrati (molteplicità delle scomposizioni), onde sussistono questioni analoghe a quelle enunciate alla fine del I §. Richiamare l'attenzione degli specialisti in materia su questo promettente campo d'indagine è lo scopo precipuo della presente Nota.

(1) Ricordiamo che un numero poligonale di specie d, n vertici e l lati è la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di cui 1 è il primo termine e $l - 2$ la differenza costante; perciò la sua espressione è

$$n\left[\frac{(n-1)(l-2)}{2} + 1\right];$$

in particolare i triangolari e i pentagonali valgono rispettivamente $\frac{n(n+1)}{2}$ e $\frac{n(3n-1)}{2}$.

Tavola I [1].

Tavola di scomposizione di un intero in quattro quadrati.

I	II	III	IV	V	VI
1	1	1	33	5+2+2, 4+4+1, 4+3+2+2	3
2	1+1	1	34	5+3, 4+3+3, 5+2+2+1	3
3	1+1+1	1	35	5+3+1, 4+3+3+1	2
4	2, 1+1+1+1	2	36	6, 5+3+1+1, 4+4+2, 3+3+3+3	4
5	2+1	1	37	6+1, 5+2+2+2, 4+4+2+1	3
6	2+1+1	1	38	6+1+1, 5+3+2, 4+3+3+2	3
7	2+1+1+1	1	39	6+1+1+1, 5+3+2+1	2
8	2+2	1	40	6+2, 4+4+2+2	2
9	3, 2+2+1	2	41	6+2+1, 5+4, 4+4+3	3
10	3+1, 2+2+1+1	2	42	6+2+1+1, 5+4+1, 5+3+2+2, 4+4+3+1	4
11	3+1+1	1			
12	3+1+1+1, 2+2+2	2	43	5+4+1+1, 5+3+3, 4+3+3+3	3
13	3+2, 2+2+2+1	2	44	6+2+2, 5+3+3+1	2
14	3+2+1	1	45	6+3, 6+2+2+1, 5+4+2, 4+4+3+2	4
15	3+2+1+1	1	46	6+3+1, 5+4+2+1	2
16	4, 2+2+2+2	2	47	6+3+1+1, 5+3+3+2	2
17	4+1, 3+2+2	2	48	4+4+4, 6+2+2+2	2
18	4+1+1, 3+3, 3+2+2+1	3	49	7, 6+3+2, 5+4+2+2, 4+4+4+1	4
19	4+1+1+1, 3+3+1	2	50	7+1, 6+3+2+1, 5+5, 5+4+3, 4+4+3+3.	5
20	4+2, 3+3+1+1	2			
21	4+2+1, 3+2+2+2	2	51	7+1+1, 5+5+1, 5+4+3+1	3
22	4+2+1+1, 3+3+2	2	52	7+1+1+1, 6+4, 5+5+1+1, 5+3+3+3	4
23	3+3+2+1,	1			
24	4+2+2	1	53	7+2, 6+4+1, 6+3+2+2	3
25	5, 4+3, 4+2+2+1	3	54	7+2+1, 6+4+1+1, 6+3+3, 5+5+2, 5+4+3+2	5
26	5+1, 4+3+1, 3+3+2+2	3			
27	5+1+1, 4+3+1+1, 3+3+3	3	55	7+2+1+1, 6+3+3+1, 5+5+2+1	3
28	4+2+2+2, 3+3+1	2	56	6+4+2	1
29	5+2, 4+3+2	2	57	7+2+2, 6+4+2+1, 5+4+4, 4+4+4+3	4
30	4+3+2+1, 5+2+1	2			
31	5+2+1+1, 3+3+3+2	2	58	7+3, 6+3+3+2, 5+5+2+2, 5+4+4+1	4
32	4+4	1			
			59	7+3+1, 5+5+3, 5+4+3+3	3

(1) In questa e nelle seguenti Tabelle, nelle colonne I e IV sono inscritti i numeri da scomporre, nelle colonne II e V si trovano le scomposizioni e nelle colonne III e VI sono registrati i numeri delle scomposizioni ottenute in ogni singolo caso.

Segue: TAVOLA I.

60	6+4+2+2, 7+3+1+1, 5+5+3+1	3
61	7+2+2+2, 6+5, 6+4+3, 5+4+4+2	4
62	7+3+2, 6+5+1, 6+4+3+1	3
63	7+3+2+1, 6+3+3+3, 6+5+1+1, 5+5+3+2	4
64	8, 4+4+4+4	2
65	8+1, 7+4, 6+5+2, 6+4+3+2	4
66	8+1+1, 7+4+1, 7+3+2+2, 6+5+2+1, 5+5+4, 5+3+4+4	6
67	8+1+1+1, 7+3+3, 7+4+1+1, 5+5+4+1	4
68	8+2, 7+3+3+1, 6+4+4	3
69	8+2+1, 7+4+2, 6+5+2+2, 6+4+4+1	4
70	8+2+1+1, 7+4+2+1, 6+5+3, 6+4+3+3, 5+5+4+2	5
71	7+3+3+2, 6+5+3+1, 5+4+4+2	3
72	8+2+2, 6+6, 6+4+4+2	3
73	8+3, 8+2+2+1, 7+4+2+2, 6+6+1, 5+4+4+4	5
74	8+3+1, 7+5, 7+4+3, 6+6+1+1, 6+5+3+2	5
75	8+3+1+1, 7+5+1, 7+4+3+1, 5+5+5, 5+5+4+3	5
76	8+2+2+2, 7+5+1+1, 7+3+3+3, 6+2+2, 5+5+5+1	5
77	8+3+2, 6+6+2+1, 6+5+4, 6+4+4+3	4
78	8+3+2+1, 7+5+2, 7+4+3+2, 6+5+4+1	4
79	7+5+2+1, 6+5+3+3, 5+5+5+2	3
80	8+4, 6+6+2+2	2
81	9, 8+4+1, 8+3+2+2, 7+4+4, 6+6+3, 6+5+4+2	6
82	9+1, 8+3+3, 8+4+1+1, 7+5+2+2, 7+4+4+1, 6+6+3+1, 5+5+4+4	7
83	9+1+1, 8+4+1+1, 8+3+3+1, 7+5+3, 7+4+3+3	5
84	9+1+1+1, 8+4+2, 7+5+3+1, 6+4+4+4, 5+5+5+3	5
85	9+2, 8+4+2+1, 7+6, 7+4+4+2, 6+6+3+2	5
86	9+2+1, 8+3+3+2, 7+6+1, 6+5+5, 6+5+4+3	5
87	9+2+1+1, 7+6+1+1, 7+5+3+2, 6+5+5+1	4
88	8+4+2+2, 6+6+4	2
89	9+2+2, 8+5, 8+4+3, 7+6+2	4
90	9+3, 9+2+2+1, 8+5+1, 8+4+3+1, 7+6+2+1, 7+5+4, 7+4+4+3, 6+6+3+3, 6+5+5+2	9
91	9+3+1, 8+3+3+3, 8+5+1+1, 7+5+4+1, 5+5+5+4	5
92	9+3+1+1, 7+5+3+3, 6+6+4+2	3
93	9+2+2+2, 8+5+2, 8+4+3+2, 7+7+6+2+2, 6+5+4+4	5
94	9+3+2, 8+5+2+1, 7+6+3, 7++5+4+2	4
95	9+3+2+1, 7+6+3+1, 6+5+5+3	3
96	8+4+2	1
97	9+4, 8+5+2+2, 8+4+4+1, 7+4+4+4, 6+6+5, 6+6+4+3	6
98	9+4+1, 9+3+2+2, 8+5+3, 8+4+3+3, 7+7, 7+6+3+2, 6+6+5+1	7
99	9+3+3, 9+4+1+1, 8+5+3+1, 7+7+1, 7+5+5, 7+5+4+3	6
100	10, 9+3+3+1, 8+6, 8+4+4+2, 7+7+1+1, 7+5+5+1, 5+5+5+5	7

Tavola II.

Tavola di scomposizione di un intero in tre numeri triangolari.

1	1	1	33	6+3+3, 5+5+2	2
2	1+1	1	34	7+3, 7+2+2, 6+4+2	3
3	2, 1+1+1	2	35	7+3+1, 5+4+4	2
4	2+1	1	36	8, 6+5, 5+5+3	3
5	2+1+1	1	37	8+1, 7+3+2, 6+5+1, 6+4+3	4
6	3, 2+2	2	38	8+1+1, 7+4	2
7	3+1, 2+2+1	2	39	8+2, 7+4+1, 6+5+2	3
8	3+1+1	1	40	8+2+1, 7+3+3, 5+5+4	3
9	3+2, 2+2+2	2	41	7+4+2, 6+4+4	2
10	4, 3+2+1	2	42	8+3, 8+2+2, 6+6, 6+5+3	4
11	4+1	1	43	8+3+1, 7+5, 6+6+1	3
12	4+1+1, 3+3, 3+2+2	3	44	7+5+1, 7+4+3	2
13	3+3+1, 4+2	2	45	9, 8+3+3, 6+6+2, 5+5+5	4
14	4+2+1	1	46	9+1, 8+4, 7+5+2, 6+5+4	4
15	5, 3+3+2	2	47	9+1+1, 8+4+1	2
16	5+1, 4+3	2	48	9+2, 8+3+3, 7+4+4, 6+6+3	4
17	5+1+1, 4+3+1	2	49	9+2+1, 8+4+3, 7+6, 7+5+3	4
18	5+2	1	50	7+6+1	1
19	5+2+1, 4+3+2	2	51	9+3, 9+2+2, 8+5, 6+5+5	4
20	4+4	1	52	9+3+1, 8+5+1, 8+4+3, 7+6+2, 6+6+4	5
21	6, 5+3, 4+4+1	3			
22	6+1, 5+3+2	2	53	7+5+4	1
23	6+1+1, 4+4+3	2	54	9+3+2, 8+5+2	2
24	6+2, 5+3+2	2	55	10, 9+4, 7+6+3	3
25	6+2+1, 5+4	2	56	10+1, 9+4+1, 8+4+4, 7+7	4
26	5+4+1, 4+4+3	2	57	10+1+1, 9+3+3, 8+6. 8+5+3, 7+7+1, 6+6+5	6
27	6+3, 6+2+2	2			
28	7, 6+3+1, 5+4+3	3	58	10+2, 9+4+2, 8+6+1, 7+5+5	4
29	7+1	1	59	10+2+1, 7+7+2, 7+6+4	3
30	7+1+1, 6+3+2, 5+5, 4+4+4	4	60	9+5, 8+6+2	2
31	7+2, 6+4, 5+5+1, 5+4+3	4	61	10+3, 10+2+2, 9+5+1, 9+4+3, 8+5+4	5
32	7+2+1, 6+4+1	2	62	10+3+1, 7+7+3	2

Segue: TAVOLA II.

63	9+5+2, 8+6+3, 6+6+6	3
64	10+3+2, 8+7, 7+6+5	3
65	10+4, 9+4+4, 8+7+1	3
66	11, 10+4+1, 9+6, 9+5+3, 8+5+5, 7+7+4	6
67	11+1, 10+3+3, 9+6+1, 8+7+2, 8+6+4	5
68	11+1+1, 10+4+2	2
69	11+2, 9+6+2	2
70	11+2+1, 10+5, 9+5+4, 8+7+3, 7+6+6	5
71	10+5+1, 10+4+3, 7+7+5	3
72	11+3, 11+2+2, 9+6+3, 8+8, 8+6+5	5
73	11+3+1, 10+5+2, 9+7, 8+8+1	4
74	9+7+1, 8+7+4	2
75	11+3+2, 10+4+4, 9+5+5, 8+8+2	4
76	11+4, 10+6, 10+5+3, 9+7+2, 9+6+4	5
77	11+4+1, 10+6+1, 7+7+6	3
78	12, 11+3+3, 8+8+3, 8+6+6	4
79	12+1, 11+4+2, 10+6+2, 9+7+3, 8+7+5	5
80	12+1+1, 10+5+4	2
81	12+2, 11+5, 9+8, 9+6+5	4
82	12+2+1, 11+5+1, 11+4+3, 10+6+3, 9+8+1, 8+8+4	6
83	10+7, 9+7+4	2
84	12+3, 12+2+2, 11+5+2, 10+7+1, 9+8+2, 7+7+7	6
85	12+3+1, 10+5+5, 8+7+6	3
86	11+4+4, 10+7+2, 10+6+4	3
87	12+3+2, 11+6, 11+5+3, 9+8+3, 9+6+6, 8+8+5	6
88	12+4, 11+6+1, 9+7+5	3
89	12+4+1, 10+7+3	2
90	12+3+3, 11+6+2, 9+9	3
91	13, 12+4+2, 11+5+4, 10+8, 10+6+5, 9+9+1, 9+8+4	7
92	13+1, 10+8+1, 8+7+7	3
93	13+1+1, 12+5, 11+6+3, 10+7+4, 9+9+2, 8+8+6	6
94	13+2, 12+5+1, 12+4+3, 11+7, 10+8+2, 9+7+6	6
95	13+2+1, 11+7+1	2
96	12+5+2, 11+5+5, 9+9+3, 9+8+5	4
97	13+3, 13+2+2, 11+7+2, 11+6+4, 10+8+3, 10+6+6	6
98	13+3+1, 12+4+4, 10+7+5	3
99	12+6, 12+5+3	2
100	13+3+2, 12+6+1, 11+7+3, 10+9, 9+9+4, 8+8+7	6

Tavola III.

Tavola di scomposizione di un intero in cinque numeri pentagonali.

1	1	1	33	4+2+2+1	1
2	1+1	1	34	4+3, 4+2+2+1+1, 3+3+2+2	3
3	1+1+1	1	35	5, 4+3+1, 3+3+2+2+1	3
4	1+1+1+1	1	36	5+1, 4+3+1+1, 3+3+3	3
5	2, 1+1+1+1+1	2	37	5+1+1, 4+3+1+1+1, 4+2+2+2, 3+3+3+1	4
6	2+1	1			
7	2+1+1	1	38	5+1+1+1, 4+2+2+2+1, 3+3+3+1+1	3
8	2+1+1+1	1			
9	2+1+1+1+1	1	39	5+1+1+1+1, 4+3+2, 3+3+2+2+2	3
10	2+2	1			
11	2+2+1	1	40	5+2, 4+3+2+1	2
12	3, 2+2+1+1	2	41	5+2+1, 4+3+2+1+1, 3+3+3+2	3
13	3+1, 2+2+1+1+1	2	42	5+2+1+1, 4+2+2+2+2, 3+3+3 2+1	3
14	3+1+1	1			
15	3+1+1+1, 2+2+2	2	43	5+2+1+1+1	1
16	3+1+1+1+1, 2+2+2+1	2	44	4+4, 4+3+2+2	2
17	3+2, 2+2+2+1+1	2	45	5+2+2, 4+4+1, 4+3+2+2+1	3
18	3+2+1	1	46	5+2+2+1, 4+4+1+1, 4+3+3, 3+3+3+2+2	4
19	3+2+1+1	1			
20	3+2+1+1+1, 2+2+2+2	2	47	5+3, 5+2+2+1+1, 4+4+1+1+1, 4+3+3+1	4
21	2+2+2+2+1	1			
22	4, 3+2+2	2	48	5+3+1, 4+3+3+1+1, 3+3+3+3	3
23	4+1, 3+2+2+1	2	49	5+3+1+1, 4+4+2, 4+3+2+2+2, 3+3+3+3+1	4
24	4+1+1, 3+3, 2+2+1+1	3			
25	4+1+1+1, 3+3+1, 2+2+2+2+2	3	50	5+3+1+1+1, 5+2+2+2, 4+4+2+1	3
26	4+1+1+1+1, 3+3+1+1	2	51	6, 5+2+2+2+1, 4+4+2+1+1, 4+3+3+2	4
27	4+2, 3+3+1+1+1, 3+2+2+2	3			
28	4+2+1, 3+2+2+1	2	52	6+1, 5+3+2, 4+3+3+2+1	3
29	4+2+1+1, 3+3+2	2	53	6+1+1, 5+3+2+1, 3+3+3+2	3
30	4+2+1+1+1, 3+3+2+1	2	54	6+1+1+1, 5+3+2+1+1, 4+4+2+2	3
31	3+3+2+1+1	1			
32	4+2+2, 3+2+2+2+2	2	55	6+1+1+1+1, 5+2+2+2+2, 4+4+2+2+1	3
			56	6+2, 4+4+3, 4+3+3+2+2	3
			57	6+2+1, 5+4, 5+3+2+2, 4+4+3+1	4

Segue: TAVOLA III.

58	6+2+1+1, 5+4+1, 5+3+2+2+1, 4+4+3+1+1, 4+3+3+3	5
59	6+2+1+1+1, 5+4+1+1, 5+3+3, 4+4+2+2+2, 4+3+3+3+1	5
60	5+4+1+1+1, 5+3+3+1, 3+3+3+3+3	3
61	6+2+2, 5+3+3+1+1, 4+4+3+2	3
62	6+2+2+1, 5+4+2, 5+2+2+2+2, 4+4+3+2+1	4
63	6+3, 6+2+2+1+1, 5+4+2+1, 4+3+3+3+2	4
64	6+3+1, 5+4+2+1+1, 5+3+3+2	3
65	6+3+1+1, 5+3+3+2+1	2
66	6+3+1+1+1, 6+2+2+2, 4+4+4, 4+4+3+2+2	4
67	6+2+2+2+1, 5+4+2+2, 4+4+4+1	3
68	6+3+2, 5+4+2+2+1, 4+4+4+1+1, 4+4+3+3	4
69	6+3+2+1, 5+4+3, 5+3+3+2+2, 4+4+3+3+1	4
70	7, 6+3+2+1+1, 5+5, 5+4+3+1, 4+3+3+3+3	4
71	7+1, 6+2+2+2+2, 5+5+1, 5+4+3+1+1, 5+3+3+3, 4+4+4+2	6
72	7+1+1, 5+5+1+1, 5+4+2+2+2, 5+3+3+3+1, 4+4+4+2+1	5
73	7+1+1+1, 6+4, 6+3+2+2, 5+5 1+1+1, 4+4+3+3+2	5
74	7+1+1+1+1, 6+4+1, 6+3+2+2+1, 5+4+3+2	4
75	7+2, 6+4+1+1, 6+3+3, 5+5+2, 5+4+3+2+1	5
76	7+2+1, 6+4+1+1+1, 6+3+3+1, 5+5+2+1, 5+3+3+3+2, 4+4+4+2+2	6
77	7+2+1+1, 6+3+3+1+1, 5+5+2+1+1	3
78	7+2+1+1+1, 6+4+2, 6+3+2+2 2, 4+4+4+3	4
79	6+4+2+1, 5+4+4, 5+4+3+2+2, 4+4+4+3+1	4
80	7+2+2, 6+4+2+1+1, 6+3+3+2, 5+5+2+2, 5+4+4+1	5
81	7+2+2+1, 6+3+3+2+1, 5+5+2+2+1, 5+4+4+1+1, 5+4+3+3	5
82	7+3, 7+2+2+1+1, 5+5+3, 5+4 3+3+1	4
83	7+3+1, 6+4+2+2, 5+5+3+1, 5+3+3+3+3, 4+4+4+3+2	5
84	7+3+1+1, 6+4+2+2+1, 5+5+3+1+1, 5+4+4+2	4
85	7+3+1+1+1, 7+2+2+2, 6+4+3, 6+3+3+2+2, 5+5+2+2+2, 5 +4+4+2+1	6
86	7+2+2+2+1, 6+4+3+1, 5+4+3+3+2, 6+5	4
87	7+3+2, 6+5+1, 6+4+3+1+1, 6 +3+3+3, 5+5+3+2	5
88	7+3+2+1, 6+5+1+1, 6+4+2+2+2, 6+3+3+3+1, 5+5+3+2+1, 4+1+4+4	6
89	7+3+2+1+1, 6+5+1+1+1, 5+4+4+2+2, 4+4+4+4+1	4
90	7+2+2+2+2, 6+4+3+2, 4+4+4 +3+3	3
91	6+5+2, 5+4+4+3, 6+4+3+2+1	3
92	8, 7+4, 7+3+2+2, 6+5+2+1, 5+5+4, 5+5+3+2+2, 5+4+4+3+1	7
93	8+1, 7+4+1, 7+3+2+2+1, 6+5+2+1+1, 5+5+4+1, 5+4+3+3+3, 4+4+4+4+2	7
94	8+1+1, 7+4+1+1, 7+3+3, 5+5 +4+1+1, 5+5+3+3	5
95	8+1+1+1, 7+4+1+1+1, 7+3+3 +1, 6+4+4, 5+5+3+3+1	5
96	8+1+1+1+1, 7+3+3+3+1, 6+5+2+2, 6+4+4+1, 5+4+4+3+2	5
97	8+2, 7+4+2, 7+3+2+2+2, 6+5+2+2+1, 6+4+4+1+1, 5+4+43+2	6
98	8+2+1, 7+4+2+1, 6+5+3, 6+4+3+3+1, 5+5+4+2+1	5
99	8+2+1+1, 7+4+2+1+1, 7+3+3+2, 6+5+3+1, 6+3+3+3+3, 5+5+3+3+2	6
100	8+2+1+1+1, 7+3+3+2+1, 6+5+3+1+1, 6+4+4+2, 4, 4+4+4+3	6

Matematica (Geometria). — *Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica.* Nota [1] del Corrisp. E. Bompiani.

1. Ho già avuto occasione di studiare gli intorni di 1° e 2° ordine di una retta appartenente ad una superficie algebrica dello spazio ordinario [2].

Qui tratto alcune questioni riguardanti gli intorni di un S_k appartenente ad una ipersuperficie algebrica V^n_{r-1} di un S_r.

Per scrivere convenientemente l'equazione di V^n_{r-1} separiamo le coordinate non omogenee dei punti di S_r in due gruppi; le variabili di un primo gruppo s'indichino con x^i, $i = 1, \cdots, r-k$, e si annullino su S_k; le variabili del 2° gruppo s'indichino con t^p, $p = 1, \cdots, k$.

Una V^n_{r-1} qualsiasi ha un'equazione

$$\varphi(x;t) = \varphi_0 + \varphi_1(x;t) + \varphi_2(x;t) + \cdots + \varphi_n(x;t)$$

ove le φ_h sono forme di grado h complessivamente nelle variabili x^i, t^p. Distinguiamo in ciascuna di esse i termini di vario grado nelle t^p ponendo

$$\varphi_h(x;t) = \varphi_{h,0}(x) + \psi_{h-1,1}(x;t) + \cdots + \psi_{1,h-1}(x;t) + \psi_{0,h}(t)$$

ove $\psi_{h-s,s}(x;t)$ è una forma di grado $h-s$ nelle x^i e di grado s nelle t^p.

L'ipotesi che V^n_{r-1} contenga lo S_k di equazioni $x^i = 0$ si traduce in $\psi_{0,h}(t) \equiv 0$, $h = 0, \cdots, n$.

2. È immediato che per quanto riguarda gli S_{n-1} tangenti a V^n_{r-1} nei punti di S_k, cioè l'intorno o striscia del 1° ordine di V^n_{r-1} aderente ad S_k, alla V^n_{r-1} può sostituirsi la $\overline{V}^n_{r-1}$ di equazione

$$\psi_{1,0}(x) + \psi_{1,1}(x;t) + \cdots + \psi_{1,n-1}(x;t) = 0.$$

Questa, tagliata con gli S_{r-k} di equazioni $t^p = c^p$ (costanti) che passano tutti per uno S_{r-k-1} (nel riferimento adottato è lo S_{r-k-1} improprio dello S_{r-k} $t^p = 0$, cioè un S_{n-k-1} arbitrario non incidente S_k) dà luogo ad S_{r-k-1}: dal che risulta che la $\overline{V}^n_{r-1}$ è composta di $\infty^k S_{r-k-1}$ tutti incidenti in S_{r-k-2} lo S_{r-k-1} fisso (arbitrario) che è $(n-1)$-plo per $\overline{V}^n_{r-1}$. Quindi, intanto:

La striscia del primo ordine aderente ad un S_k di una V^n_{r-1} può sempre pensarsi appartenente ad una $\overline{V}^n_{r-1}$ per lo stesso S_k composta di $\infty^k S_{r-k-1}$

(1) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) E. Bompiani, *Approssimazione di una superficie algebrica nell'intorno di una sua retta* « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. 78, 1942-43, pp. 68-75.

incidenti in punti S_k *e in* S_{r-k-2} *un* S_{r-k-1} *fissato ad arbitrio (non incidente* S_k*) che risulta multiplo d'ordine* $n-1$ *per* V^n_{r-1}.

Il luogo dei punti di S_k *tali che gli* S_{r-k-1} *per essi (di* V^n_{r-1}*) passino per un punto dello* S_{r-k-1} *fisso è una* V^{n-1}_{k-1}.

Più in generale:

L'intorno d'ordine s di un S_k appartenente ad una V^n_{r-1} può sempre pensarsi appartenente ad una V^n_{r-1} che possegga una S_{r-k-1} arbitrario (non incidente S_k) come spazio $(n-s)$-plo.

3. L'iperpiano tangente a V^n_{r-1} in un punto di S_k $(x^i = 0\,,\ t^p = \mathring{t}^p)$ è rappresentato da

$$\psi_{1,0}(x\,;\mathring{t}) + \psi_{1,1}(x\,;\mathring{t}) + \cdots + \psi_{1,n-1}(x\,,\mathring{t}) = 0$$

cioè da

$$a_i(\mathring{t})\,x^i = 0$$

ove le $a_i(t)$ sono soluzioni delle t^p di grado $n-1$. Esso diviene indeterminato, cioè il punto è almeno doppio, se esistono valori delle $\mathring{t}^p$ per i quali sia

$$a_i(\mathring{t}) = 0\,. \qquad i = 1\,,\cdots,r-k\,.$$

Se $k \geqq r-k$, cioè $r \leqq 2k$, esistono certo punti per i quali queste equazioni sono soddisfatte e perciò:

Se $r \leqq 2k$, *esiste in generale in* S_k *una varietà* V_{2k-r} *di punti doppi, di ordine* $(n-1)^{r-k}$, *per* V^n_{r-1}.

Più in generale se $r \leqq 2k+1$ i punti di S_k aventi uno stesso S_{r-1} tangente si distribuiscono sopra una V_{2k-r+1} di ordine $(n-1)^{r-k-1}$ contenente la varietà dei punti doppi se questa esiste.

Naturalmente non possono escludersi circostanze più particolari, anche indipendentemente dalla limitazione $r \leqq 2k$.

Il caso più particolare si ha quando tutte le ipersuperficie rappresentate in S_k da $a_i(t) = 0$ coincidano, cioè quando risulti $a_i(t) = \alpha_i\,\psi(t)$ con le α_i costanti.

In tal caso esiste in S_k una V^{n-1}_{k-1} luogo di punti doppi, rappresentata da $\psi(t) = 0$, e l'iperpiano tangente in ogni punto di S_k alla V^n_{r-1} è rappresentato da $\alpha_i\,x^i = 0$.

Viceversa, se V^n_{r-1} possiede un S_k ed ha lungo esso un iperpiano tangente fisso, le $a_i(t)$ devono essere della forma precedente e perciò:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V^n_{r-1} *abbia lungo un suo* S_k *un iperpiano tangente fisso, è che esista in* S_k *una* V^{n-1}_{k-1} *luogo di punti doppi per* V^n_{r-1} *(o che ogni suo punto sia almeno doppio).*

Si può precisare di più che se un punto di V^{n-1}_{k-1} ha per essa molteplicità $s-1\ (\geqq 0)$, la molteplicità dello stesso punto per V^n_{r-1} è s e viceversa.

Il teorema precedente può anche enunciarsi così:

Dato un S_{r-1} (in S_r) e in questo un S_k e una V^n_{k-1} in S_k esiste una ed una sola striscia del 1° ordine di ipersuperficie V^n_{r-1} determinata da quegli elementi; cioè due V^n_{r-1} che contengano S_k che abbiano lungo esso lo stesso S_{r-1} tangente fisso e che abbiano in S_k la stessa varietà di punti doppi coincidono necessariamente fino all'intorno del 2° ordine (escluso) di ogni punto di S_k.

Se si fissano soltanto S_k ed in esso V^n_{k-1} si hanno ∞^{r-k-1} di tali striscie.

4. Un'applicazione del teorema precedente può farsi ai monoidi. Per il suo punto $(n-1)$-plo, vertice, si consideri una retta e si supponga che lo S_{r-1} tangente lungo essa sia fisso (qui è $k=1$). Allora sulla retta esistono $n-1$ punti doppi, dei quali però $s-1=n-2$ coincidono col vertice. Quindi:

Se un monoide ha lungo una retta uscente dal suo vertice un S_{r-1} tangente fisso, esso possiede su quella retta (almeno) un altro punto doppio (distinto dal vertice o infinitamente vicino ad esso).

La condizione di contatto dell'iperpiano lungo la retta porta che nella rappresentazione delle sezioni iperpiane del monoide sopra un S_{r-1} mediante F^n_{r-2} passanti per una $F^{n(n-1)}_{r-3}$, quelle F^n_{r-2} si toccano tutte in un punto; quindi la $F^{n(n-1)}_{r-3}$ ha in esso un punto doppio che è proiezione di un effettivo punto doppio del monoide.

5. Se lo S_k è tutto costituito di punti doppi, v'è luogo a ricercare se in esso esistano punti tripli di V^n_{r-1}. In ogni punto di S_k $(x^i=0, t^p=\mathring{t}^p)$ è definito il cono osculatore da

$$\psi_{2,0}(x)+\psi_{2,1}(x;\mathring{t})+\cdots+\psi_{2,n-2}(x;\mathring{t})=0$$

cioè

$$a_{ik}(\mathring{t})\,x^i x^k=0$$

ove le $a_{ik}(t)$ sono polinomi di grado $n-2$ nelle t^p. Si hanno punti tripli se esistono soluzioni delle equazioni $a_{ik}(t)=0$.

Un caso in cui certamente esistono si ha quando queste equazioni siano tutte equivalenti, cioè quando

$$a_{ik}(t)=\alpha_{ik}\,\psi_{n-2}(t)$$

con le α_{ik} costanti. In tal caso, il luogo dei punti tripli è una V^{n-2}_{k-1} e come subito si vede il cono osculatore nei vari punti di S_k, $\alpha_{ik}x^i x^k=0$, è indipendente dal punto. Viceversa, quest'ultima condizione equivale alle ultime relazioni scritte. Allo stesso modo si prova più in generale che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V^n_{r-1} di S_r abbia lungo un suo S_k che sia luogo di punti s-pli un cono osculatore fisso, è che esista in S_k una V^{n-s}_{k-1} luogo di punti $(s+1)$-pli per V^n_{r-1}.

Meccanica. — *Un singolare tensore doppio isotropo.* Nota [1] del Corrisp. U. Cisotti.

Siano y_1, y_2, y_3 le coordinate di un punto rispetto a una terna di assi cartesiani ortogonali e $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ le coordinate del medesimo punto rispetto a una seconda terna pure cartesiana ortogonale. Sia inoltre α_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ il coseno dell'angolo che l'asse y_i della prima terna forma coll'asse $\bar{y}_k$ della seconda terna:

$$\alpha_{ik} = \cos(y_i, \bar{y}_k). \tag{1}$$

È noto che

$$\sum_j^3 \alpha_{ij}\,\alpha_{kj} = \delta_{ik} \tag{2}$$

essendo δ_{ik}, eguale all'unità per $k = i$ e allo zero se $k \neq i$, le componenti cartesiane, sia rispetto alla prima terna quanto alla seconda, del *tensore fondamentale* δ [2].

Considerando α_{ik} componenti di un tensore doppio rispetto alla terna y_1, y_2, y_3, le componenti, diciamo $\bar{\beta}_{jh}$, dello stesso tensore rispetto alla seconda terna $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ sono legate alle α_{ik}, com'è noto [3], dalle relazioni seguenti:

$$\bar{\beta}_{jh} = \sum_{ik}^3 \alpha_{ik}\,\alpha_{ij}\,\alpha_{kh};$$

ma il secondo membro, tenute presenti (2), si può trasformare nel modo seguente:

$$\sum_{ik}^3 \alpha_{ik}\,\alpha_{ij}\,\alpha_{kh} = \sum_k^3 \alpha_{kh} \sum_i^3 \alpha_{ik}\,\alpha_{ij} = \sum_k^3 \alpha_{kh}\,\delta_{kj} = \alpha_{jh};$$

dunque

$$\bar{\beta}_{jh} = \alpha_{jh}. \tag{3}$$

(1) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Cfr. la mia *Meccanica razionale*, Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1945; quinta edizione, pp. 343, 353.

(3) Loc. cit., p. 350.

Che se le α_{ik} si considerano componenti di un tensore doppio rispetto alla seconda terna cartesiana $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$, chiamando γ_{ik} le componenti dello stesso tensore rispetto alla prima terna y_1, y_2, y_3, si ha [1]

$$\gamma_{ik} = \sum_{jh}^{3} \alpha_{jh}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh};$$

ma il secondo membro può trasformarsi, tenendo conto che

$$\sum_{h}^{3} \alpha_{jh}\, \alpha_{kh} = \delta_{jk}, \tag{4}$$

nel seguente modo:

$$\sum_{jh}^{3} \alpha_{jh}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{kh} = \sum_{j}^{3} \alpha_{ij} \sum_{h}^{3} \alpha_{jh}\, \alpha_{kh} = \sum_{j}^{3} \alpha_{ij}\, \delta_{jk} = \alpha_{ik},$$

per cui

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik}. \tag{5}$$

Da (3) e (5) risulta che, in ogni caso, α_{ik} sono invariantive, cioè si comportano come le componenti di un tensore *isotropo* [2].

2. Si rilevi che il modulo del tensore in discorso è [3]

$$\sqrt{\sum_{ik} \alpha_{ik}^2} = \sqrt{3},$$

cioè, coincide col modulo del tensore fondamentale [4].

Da (2) e (4) scende la stretta relazione tra il tensore in discorso e il tensore fondamentale: il tensore fondamentale risulta dalla composizione del tensore (1) con se stesso mediante saturazione di un indice comune [5].

3. È manifesta la estensione a coordinate generali x_i e $\bar{x}_k$ e a un numero qualunque di dimensioni del tensore in discorso: le cui componenti covarianti sono $\dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}$.

(1) Loc. cit., p. 350.
(2) Loc. cit., p. 352.
(3) Loc. cit., p. 359.
(4) Loc. cit., p. 359.
(5) Loc. cit., p. 368.

Meccanica (Meccanica celeste). — *Su una condizione necessaria per la stratificazione d'un astro fluido rotante in equilibrio relativo.* Nota [1] del Corrisp. C. Mineo.

Il Wavre ha dato una relazione notevole tra densità, stratificazione e gravità nel caso degli astri fluidi eterogenei rotanti in equilibrio relativo. Egli si serve delle linee di forza del campo gravitazionale, ma adopera un calcolo abbreviato (rappresenta, per esempio, con un solo parametro la doppia infinità di tali linee), che può dar luogo a equivoci e a deduzioni non legittime. Non sembra, in particolare, che da quella relazione segua senz'altro l'impossibilità d'una stratificazione omotetica d'equilibrio: bisogna ancora ammettere, come risulta dal calcolo effettivo contenuto in questa Nota, che tra le linee di forza ce ne siano due rettilinee (e questo, a quel che pare, ammette implicitamente il Wavre). Nè segue, col metodo del Wavre, una condizione puramente geometrica *effettiva* per la stratificazione omotetica d'equilibrio [2]. L'effettiva equazione, indipendentemente dalla densità e da ogni altro elemento meccanico, cui deve verificare ogni stratificazione omotetica, è stata da me data con un altro metodo, col quale ho escluso rigorosamente la stratificazione omotetica d'equilibrio per gli astri fluidi eterogenei, senza introdurre nè le linee di forza nè il teorema del Bruns [3].

1. Sia

$$r = r(\theta, \Phi, a) \tag{1}$$

l'equazione, in coordinate polari r, θ, Φ, della famiglia di superficie, che, al variare del parametro a, costituiscono la stratificazione dell'astro. Le equazioni parametriche di questa superficie sono

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\Phi \,, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Phi \,, \quad z = r\cos\theta \,, \tag{2}$$

(1) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Vedi Wavre, *Figures planétaires et Géodésie*. Gauthier-Villars, 1932, pp. 52–59.

(3) Vedi Mineo, *Sulla impossibilità d'una stratificazione d'equilibrio omotetica per gli astri fluidi rotanti*. «Rend. Acc. Naz. Lincei», Classe di Sc. fis. mat. e nat., vol. XXVI, novembre 1937, pp. 260–262.

dove r è dato dalla (1). I coefficienti della I^a forma fondamentale sono

$$(3)\qquad E = r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 \quad , \quad F = \frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial \Phi} \quad , \quad G = r^2 \operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2.$$

Posto

$$(4)\qquad H = \sqrt{EG - F^2},$$

i coseni direttori della normale alla generica superficie della famiglia sono

$$(5)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{r}{H}\left[\dfrac{\partial r}{\partial \Phi}\operatorname{sen}\Phi + \left(r\operatorname{sen}\theta - \dfrac{\partial r}{\partial \theta}\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta\cos\Phi\right], \\ Y = \dfrac{r}{H}\left[-\dfrac{\partial r}{\partial \Phi}\cos\Phi + \left(r\operatorname{sen}\theta - \dfrac{\partial r}{\partial \theta}\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\Phi\right], \\ Z = \dfrac{r}{H}\left[\dfrac{\partial r}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\right]\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Le equazioni differenziali delle traiettorie ortogonali delle (1) sono quindi (escludendo il caso di superficie cilindriche)

$$(6)\qquad \frac{dr}{r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{-d\theta}{\dfrac{\partial r}{\partial \theta}\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{-d\Phi}{\dfrac{\partial r}{\partial \Phi}},$$

dove s'intende che il parametro a dev'essere eliminato dai denominatori per mezzo della (1). Gl'integrali delle (6) sono della forma

$$(7)\qquad \theta = \theta(r, c_1, c_2) \quad , \quad \Phi = \Phi(r, c_1, c_2),$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie. Se ci moviamo su una traiettoria ortogonale e chiamiamo dn il suo elemento d'arco, avremo, per le (6) e tenendo presente l'espressione dell'elemento lineare di spazio in coordinate polari:

$$(8)\qquad dn = L\,dr,$$

essendo

$$(9)\qquad L = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2}.$$

Supponiamo che la (1), al secondo membro della quale, al posto di θ e Φ, si siano sostituiti i secondi membri delle (7), definisca r come funzione di a: possiamo allora dire che, su una determinata traiettoria ortogonale, r è funzione di a; e si trova facilmente:

$$(10)\qquad \frac{dr}{da} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial r}{\partial a}.$$

Su ogni traiettoria ortogonale si ha pure:

$$(11)\qquad \frac{d\theta}{da} = -\frac{1}{r^2 L^2}\frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial a}, \qquad \frac{d\Phi}{da} = -\frac{1}{r^2 L^2}\frac{\partial r}{\partial \Phi}\frac{\partial r}{\partial a}.$$

Dalle (8) e (10) si trae:

$$(12)\qquad \frac{dn}{da} = \frac{1}{L}\frac{\partial r}{\partial a}.$$

La funzione che il Wavre designa con N, non è altro che la derivata di n rispetto al parametro a, cioè

$$(13)\qquad N = \frac{dn}{da} = \frac{1}{L}\frac{\partial r}{\partial a}.$$

2. Ci occorre considerare la curvatura media delle superficie della stratificazione. Introduciamo quindi i coefficienti della 2ª forma differenziale quadratica $D\,d\theta^2 + 2D'\,d\theta\,d\Phi + D''\,d\Phi^2$ della generica superficie. Si trova:

$$(14)\qquad \begin{cases} D = \dfrac{r}{H}\left(r\dfrac{\partial^2 r}{\partial\theta^2} - 2\left(\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 - r^2\right)\operatorname{sen}\theta, \\ D' = \dfrac{r}{H}\left(r\dfrac{\partial^2 r}{\partial\theta\,\partial\Phi}\operatorname{sen}\theta - 2\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\dfrac{\partial r}{\partial\Phi}\operatorname{sen}\theta - r\dfrac{\partial r}{\partial\Phi}\cos\theta\right), \\ D'' = \dfrac{r}{H}\left(r\dfrac{\partial^2 r}{\partial\Phi^2} + r\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 2\left(\dfrac{\partial r}{\partial\Phi}\right)^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Si deduce quindi per il doppio c della curvatura media [1]:

$$(15)\qquad c = \frac{1}{H^2}(2FD' - ED'' - GD).$$

Ci limitiamo a dare il risultato del calcolo di c nel caso d'una stratificazione rotonda $\left(\dfrac{\partial r}{\partial\Phi} = 0\right)$. Si ha in tal caso:

$$(16)\qquad c = \frac{2r^2 + 3\left(\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 - r\dfrac{\partial^2 r}{\partial\theta^2}}{\left[r^2 + \left(\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\cos\theta}{\left[r^2 + \left(\dfrac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} r\operatorname{sen}\theta}.$$

3. Supponiamo ora che la stratificazione sia di connessione sferica (superficie chiuse riducibili a punto nel centro dell'astro). Sia W il poten-

(1) Vedi BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, parte I, Bologna, Zanichelli, 1927, pp. 192 e 197.

ziale (newtoniano e della forza centrifuga) dell'astro. Come si sa, l'unica condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio relativo è che W si riduca a una costante su ogni superficie della stratificazione; cioè W deve essere una funzione del parametro a (che a sua volta s'intende implicitamente definito dalla (1) in funzione di r, θ e Φ). Sia g la gravità in un punto qualunque dell'astro; si ha:

$$g = -\frac{dW}{dn}, \tag{17}$$

dove la derivata normale di W è da calcolare sulla superficie della stratificazione passante per il punto (il segno meno, perchè dalle nostre formole risulta positiva la normale esterna).

Segue dalle (17) e (12):

$$g = -\frac{W'}{N}, \tag{18}$$

dove W' denota la derivata di W rispetto ad a.

Abbiamo

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -gX \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -gY \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -gZ;$$

dalle quali

$$\Delta_2 W = -\frac{dg}{dn} - g\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \tag{19}$$

essendo $\Delta_2 W$ il laplaciano di W. Ma, per una formola ben nota, è

$$-c = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}; \tag{20}$$

epperò possiamo scrivere

$$\frac{dg}{dn} = gc - \Delta_2 W, \tag{21}$$

che è la formola del Bruns. Se ne deduce, tenendo presenti la (13) e la (18):

$$\frac{dg}{da} = -N\Delta_2 W - cW'.$$

Segue ancora dalla (18):

$$\frac{d}{da}(gN) = -N^2\Delta_2 W - \left(cN + \frac{1}{N}\frac{dN}{da}\right)W' = -W''. \tag{22}$$

Il Wavre scrive differentemente la (22). La funzione gN dipende soltanto da a ed è quindi costante su ogni superficie della stratificazione: si può dunque scrivere

$$(g\mathrm{N})_{l_1} = (g\mathrm{N})_{l_2},$$

dove s'intende che gN è calcolato in due punti distinti d'una stessa superficie equipotenziale, e l_1, l_2 denotano le due traiettorie ortogonali che passano per quei punti, rispetto alle quali vanno calcolati i valori di N (che è una derivata di direzione secondo le linee di forza o secondo le normali alle superficie equipotenziali). Si può allora scrivere:

$$\frac{\Delta_2 \mathrm{W}}{\mathrm{W}'} = -\frac{\left(c\mathrm{N} + \frac{1}{\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{N}}{da}\right)_{l_1} - \left(c\mathrm{N} + \frac{1}{\mathrm{N}}\frac{d\mathrm{N}}{da}\right)_{l_2}}{(\mathrm{N}^2)_{l_1} - (\mathrm{N}^2)_{l_2}}, \tag{23}$$

che (salvo le notazioni) è la formola del Wavre.

È una formola notevole. Ma quale valore euristico può avere? Il Wavre nota che introducendo una terza linea di forza ci si può liberare del primo membro della (23), ottenendo una relazione puramente geometrica, cui deve sodisfare la stratificazione d'ogni massa fluida in equilibrio relativo. In fatti, scegliendo due particolari linee di forza e considerandone una terza affatto generica, si avrebbe una equazione a derivate parziali del 2° ordine per la funzione $r(\theta, \Phi, a)$ che definisce la stratificazione. Ma, a parte la lunghezza dei calcoli, in quella equazione entrano costanti incognite (legate da relazioni sconosciute), che la complicano e le tolgono ogni valore euristico, eccetto che non si abbiano ragioni per ammettere l'esistenza di due particolari linee di forza, che semplifichino notevolmente l'espressione del 1° membro della (23) e quindi l'equazione in parola. Se, per esempio il raggio vettore (θ_1, Φ_1) é una linea di forza, dalle (6) segue subito, per $\theta = \theta_1, \Phi = \Phi_1$:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \Phi} = 0,$$

qualunque sia a; inoltre, lungo tale particolare traiettoria, si ha

$$\mathrm{L} = 1 \quad , \quad \mathrm{N} = \frac{\partial r}{\partial a};$$

e se $\frac{\partial^2 r}{\partial a^2}$ è nullo per $\theta = \theta_1, \Phi = \Phi_1$, N, come si può dedurre dalla (13) e dalle formole precedenti, si riduce a una costante lungo la predetta linea di forza rettilinea; ecc.

Il Wavre si serve della (23) per escludere la stratificazione omotetica per gli astri eterogenei. Egli applica la (23) a due raggi vettori, ammet-

tendo implicitamente che essi costituiscano due linee di forza della stratificazione (senza di che la (23) non è applicabile), e ne deduce che la stratificazione non può essere omotetica altro che per gli astri omogenei. Ma neanco in questo caso semplice segue dalla (23) l'effettiva equazione della stratificazione omotetica, come mostrerò subito.

4. Come ho detto, io ho escluso, nella Nota citata, la stratificazione omotetica per gli astri eterogenei, e ho dato l'equazione della stratificazione omotetica omogenea, senza ricorrere nè alle linee di forza nè al teorema del Bruns. Nell'ipotesi d'una stratificazione omotetica, si può scrivere, in luogo della (1):

$$r(1+\zeta) = a \quad , \quad \zeta = \zeta(\theta, \Phi). \tag{24}$$

E per l'equazione della stratificazione ho trovato:

$$\Psi = 3(1+\zeta)^2 + \frac{1+\zeta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{1+\zeta}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\Phi^2} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\Phi}\right)^2 - c_3 = 0. \tag{25}$$

Vediamo che cosa si possa dedurre dalla (23) in questo caso. Mi limito per semplicità a una stratificazione rotonda $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\Phi} = 0\right)$. Le formole generali dei numeri 1 e 2 dànno in questo caso:

$$L^2 = 1 + \frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2, \quad N = \frac{1}{(1+\zeta)L}, \quad \frac{d\theta}{da} = \frac{1}{a(1+\zeta)L^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta},$$

$$\frac{dN}{da} = \frac{1}{a(1+\zeta)^3 L^3}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2\left\{1 - \frac{1}{L^2}\left[\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{1+\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}\right]\right\},$$

$$c = \frac{2(1+\zeta)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 + (1+\zeta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}}{a(1+\zeta)L^3} + \frac{1}{aL}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\operatorname{cotg}\theta.$$

E la (23) si può scrivere

$$\frac{cN + \frac{1}{N}\frac{dN}{da} - \alpha}{N^2 - \beta} = \gamma, \tag{26}$$

dove α e β sono funzioni dipendenti soltanto da a, relative a una particolare traiettoria, che hanno una espressione piuttosto semplice se la particolare traiettoria è un raggio vettore $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right.$ nullo, per un certo $\theta\Big)$. Ma

neanco con questa semplificazione la (26) si riduce alla (25). Bisogna tener conto che è

$$\gamma = -\frac{c_3}{a},$$

come si dimostra col mio metodo, e che

$$(\alpha - \beta\gamma)\, a = 1,$$

come risulta dall'equazione (25), stabilita col mio metodo (la relazione ora scritta è verificata, ben s'intende nel punto dove $\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$ si annulla), affinchè la (26) si riduca alla (25)! Si trova precisamente

$$L^2 \Psi = 0,$$

che equivale alla (25), nel caso, beninteso, della stratificazione omotetica omogenea rotonda.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1943 ed andamento del ciclo solare*[1]. Nota[2] del Socio Giorgio Abetti.

I risultati delle osservazioni della cromosfera solare effettuati con l'equatoriale di Amici ad Arcetri nel 1943, come usualmente di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella. Scegliendo i giorni in cui si avevano migliori immagini, sono state eseguite dal personale dell'Osservatorio, in maggioranza da A. Colacevich e da M. G. Fracastoro, 52 osservazioni che dànno le seguenti medie:

Arcetri.

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	10″.53	— 90° S	10″.95
+ 60 E	9 .97	— 60 W	10 .23
+ 30 E	9 .72	— 30 W	9 .23
0 E	9 .76	0 W	9 .51
— 30 E	9 .45	+ 30 W	9 .70
— 60 E	10 .06	+ 60 W	10 .05

(1) Lavoro eseguito all'Osservatorio di Arcetri, Firenze.
(2) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

Da questi dati si ricava per l'altezza media per il 1943: ***9".93*** che messa a confronto con quella dell'anno precedente dà:

$$1943 - 1942 = -0''.50.$$

Mentre già da qualche anno si era osservata un'altezza media costante, quest'anno si è registrata una decisa diminuzione, rimanendo la cromosfera più alta ai poli di rotazione di circa 1" rispetto alle latitudini medie e all'equatore confermando quanto è stato notato nei precedenti cicli. Il fenomeno ciclico è quindi ormai certo ed è in relazione all'attività generale del sole, dimostrando che la distribuzione dei gas costituenti la cromosfera è variabile, come in altro modo avviene per i gas della corona nel corso del ciclo undecennale.

L'area totale delle protuberanze dedotta dalle osservazioni di Arcetri risulta ancora diminuita di ***54*** unità di protuberanze rispetto al 1942, così che stiamo tutt'ora andando verso il minimo.

Confrontando l'attività delle protuberanze nei due emisferi, si nota che l'emisfero sud è stato più attivo di quello nord come lo fu nel 1942, con distribuzione notevolmente diversa delle protuberanze fra i due emisferi avendosi un solo massimo esteso a 32° nell'emisfero boreale, mentre in quello australe si ha un accenno di massimo secondario a −12° e quello principale a −52°. La maggiore attività di questo emisfero e la migrazione decisa delle protuberanze verso il polo sud, confermano che esso è più avanzato nel corso del ciclo undecennale dell'emisfero boreale.

Quanto alle altre caratteristiche dell'attività solare, dalle osservazioni di Arcetri si hanno per il 1943 i seguenti dati:

Numero relativo delle macchie: 20.4.
Numeri caratteristici su di una scala empirica (da 0 minima attività, a 5 massima).
Flocculi chiari di calcio (K_3): 0.98.
Flocculi chiari di idrogeno (H_α): 0.63.
Flocculi oscuri di idrogeno (H_α): 0.90.

Anche questi in diminuzione rispetto al 1942, da notarsi però che il numero caratteristico dei flocculi di idrogeno oscuri è rimasto quasi costante. La maggiore attività per quanto riguarda le macchie si è avuta alla fine di febbraio, con un gruppo a 10° di latitudine nord nel quale si ebbero anche vivaci eruzioni cromosferiche. A metà maggio è comparso nell'emisfero australe alla latitudine media di −42° un gruppo bipolare annunziatore del nuovo ciclo; su di esso si è già riferito in questi « Rendiconti ». Un altro piccolo gruppo, con tutta probabilità appartenente al nuovo ciclo, si è presentato verso la metà di ottobre, sempre nell'emisfero australe a 29° di latitudine.

Fisica (Fisica atomica). — *Effetti di diffrazione nello sparpagliamento dei neutroni veloci* [1]. Nota di E. Amaldi, D. Bocciarelli, B. N. Cacciapuoti, e G. C. Trabacchi, presentata [2] dal Corrisp. G. C. Trabacchi.

Nella teoria generale dell'urto [3] di un neutrone contro un nucleo si possono distinguere i due seguenti modi di interagire di queste particelle fra loro:

1°) il neutrone penetra nel nucleo e dà luogo alla formazione di un nucleo composto, il quale, in un secondo tempo, si libera dell'energia di eccitazione fornitagli dal neutrone incidente, emettendo una o più particelle o « quanti gamma »;

2°) Il neutrone subisce il cosidetto « potential scattering » ossia, senza penetrare nel nucleo, subisce l'azione delle forze nucleari che si manifestano nella zona di contorno del nucleo stesso e viene così sparpagliato elasticamente.

È bene chiarire fin d'ora che uno sparpagliamento elastico (ossia senza diminuzione della energia cinetica del neutrone, salvo per quanto corrisponde all'energia di rinculo del nucleo) si può avere anche in seguito al processo di interazione 1°) purchè il nucleo composto, nel passare allo stato finale, emetta un neutrone dotato della stessa energia cinetica posseduta da quello incidente. È però chiaro che le onde corrispondenti ai neutroni sparpagliati elasticamente in questo modo sono incoerenti con l'onda del neutrone incidente e vengono emesse con eguale intensità in tutte le direzioni (distribuzione isotropa della radiazione diffusa) grazie alla relativamente lunga vita media del nucleo composto.

Le onde corrispondenti ai neutroni sparpagliati in seguito al processo di interazione 2°) sono invece coerenti con l'onda incidente e potranno dar quindi luogo a distribuzioni angolari fortemente anisotrope delle particelle sparpagliate.

Nel seguito quindi, parlando di sparpagliamento elastico, distingueremo tra sparpagliamento coerente e sparpagliamento incoerente dei neutroni da parte dei nuclei.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.
(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.
(3) H. A. Bethe, « Rev. Mod. Phys. », *9*, 69, 1937.

Da un punto di vista sperimentale, ben poco è noto sullo sparpagliamento elastico dei neutroni veloci. Kikuchi, Aoki e Wakatuki [1] hanno studiato a mezzo di una camera di jonizzazione piena di idrogeno a 50 atmosfere connessa ad un elettrometro, la distribuzione angolare dei neutroni della D + D e della D + Li sparpagliati da Al, Fe e Pb trovandola fortemente anisotropa. Essi interpretarono le loro curve come dovute alla sovrapposizione di due fenomeni; uno sparpagliamento coerente concentrato in avanti e uno sparpagliamento incoerente più sparpagliamento anelastico isotropo [2]; infatti la tecnica di rivelazione impiegata da questi autori non permette di selezionare i neutroni di diverse energie, rendendo così difficile l'interpretazione dei risultati sperimentali, specialmente nel caso dei neutroni della D + Li, il cui spettro si estende da meno di 1 MeV fino a circa 15 MeV.

Anche altri autori hanno trovato che i neutroni veloci vengono sparpagliati principalmente in avanti dai nuclei di peso medio ed elevato; si tratta però sempre di risultati indicativi [3].

Ci è quindi sembrato interessante intraprendere uno studio sistematico dello sparpagliamento coerente dei neutroni veloci da parte di vari nuclei.

Tali ricerche, iniziate nella primavera del 1943 e più volte interrotte per ragioni di carattere generale, sono tuttora in corso; tuttavia la vasta mole dei dati sperimentali già raccolti e l'interesse dei risultati ottenuti ci sembrano giustificare la pubblicazione di una breve Nota preliminare.

È opportuno far notare fin dall'inizio che, data la natura del fenomeno in esame, il parametro più conveniente per caratterizzare il neutrone incidente è la sua lunghezza d'onda di De Broglie λ la quale, applicando note formule, risulta legata alla energia E del neutrone, espressa in elettroni volt, dalla relazione

$$(1) \qquad \lambda = \frac{2.86 \cdot 10^{-9}}{E^{\frac{1}{2}}} = \text{cm}.$$

I criteri posti a base della nostra ricerca sono stati i seguenti:

1° usare una radiazione neutronica il più monocromatica possibile;

2° usare una radiazione di lunghezza d'onda possibilmente inferiore alle dimensioni lineari del nucleo, in modo che la radiazione neutronica sparpagliata coerentemente potesse dar luogo a fenomeni di diffrazione, facilmente riconoscibili.

Disponendo di un impianto di 1 milione di Volt, queste condizioni vengono soddisfatte nel miglior modo possibile: 1°) usando i neutroni emessi

(1) H. Aoki, «Proc. Mat. Phys. Jap.», *21*, 232, 1939; S. Kikuchi, H. Aoki, T. Wakatuki, «Proc. Mat. Phys. Jap.», *21*, 410, 1939; «Phys. Rev.», *55*, 1264, 1939; T. Wakatuki, S. Kikuchi, «Proc. Mat. Phys. Jap.», *21*, 656, 1939.

(2) S. Kikuchi, T. Wakatuki, «Proc. Mat. Phys. Jap.», *22*, 142, 1940.

(3) R. F. Backer, «Phys. Rev.», *57*, 352, 1940.

nella D + Li, il cui spettro si estende fino a circa 14,5 MeV, 2°) rivelandoli a mezzo dell'attività indotta nel ^{63}Cu secondo il processo

$$(2) \qquad \begin{cases} {}^{63}Cu\,(n\,,\,2\,n)\,{}^{62}Cu \\ {}^{62}Cu \xrightarrow{9,9\,min} {}^{62}Ni + \beta^{+} \end{cases}$$

la quale possiede una soglia a 11 MeV [1].

Tenendo conto del fatto che la sezione d'urto del processo (2) cresce rapidamente al crescere dell'energia dei neutroni al di sopra della soglia, si valuta che l'energia media dei neutroni emessi della D + Li a 90° con la direzione dei neutroni incidenti di 0,9 MeV, e rivelati con il processo (2) corrisponde a $\bar{E} \cong 14$ MeV, valore che introdotto nella (1) dà

$$(3) \qquad \lambda = 7{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{cm}.$$

ossia una lunghezza di poco inferiore al raggio dei nuclei di peso atomico elevato (Pb ~ 8–$9 \cdot 10^{-13}$ cm).

Fissati in tal modo il rivelatore e la sorgente di neutroni abbiamo eseguito le tre seguenti esperienze destinate a completarsi scambievolmente:

1° in buone condizioni geometriche (ossia con rivelatore e diffusore di piccole dimensioni, rispetto alle loro distanze dalla sorgente) abbiamo misurato per 19 diversi elementi la sezione d'urto totale

$$(4) \qquad \sigma_t = \sigma_{nc} + \sigma_{sc}$$

ossia la somma della sezione d'urto per formazione del nucleo composto σ_{nc} e della sezione d'urto per sparpagliamento coerente σ_{sc}.

Per quanto le condizioni geometriche fossero molto buone [2] i risultati di queste esperienze riportati nella seconda colonna della tabella I andrebbero lievemente corretti, per tener conto che, a causa della anisotropia dei neutroni sparpagliati coerentemente, una parte di questi andava ancora a colpire il rivelatore. Tale correzione, che ci riserviamo di discutere quantitativamente in altra sede, tende a fare aumentare i valori dati nella 2° colonna della tabella I.

2°) Con un rivelatore disposto il più vicino possibile ad un assorbitore di grandi dimensioni, abbiamo misurato la sezione d'urto per assorbimento + urto anelastico dei neutroni in quattro diversi elementi (3ª colonna della tabella I).

(1) R. Sagane, «Phys. Rev.», *53*, 492, 1938; G. C. Baldwin, H. W. Koch, «Phys. Rev.», *67*, 1, 1945.

(2) M. Ageno, E. Amaldi, D. Bocciarelli, G. C. Trabacchi, «N. Cimento», *1*, 253, 1943.

Anche in questo caso sarebbe necessario introdurre una correzione analoga alla precedente e che ci riserviamo di discutere in altra sede. Dal confronto dei dati delle colonne 2ª e 3ª di tale tabella, si vede che per i quattro elementi Al, Fe, Hg, Pb si ha, specialmente qualora si tenga conto delle accennate correzioni, che la sezione d'urto totale è circa doppia della sezione d'urto per assorbimento più urto anelastico, mentre la differenza tra le due è da attribuirsi allo sparpagliamento elastico (coerente più incoerente). Nell'ipotesi che lo sparpagliamento incoerente sia trascurabile, come è ragionevole ritenere in base alla considerazione dei vari processi in competizione con la riemissione di un neutrone di elevata energia da parte del nucleo composto, si può concludere che

$$(5) \qquad \sigma_t \sim 2\sigma_{nc} \quad ; \quad \sigma_{nc} \sim \sigma_{sc} \quad ; \quad \sigma_t \sim 2\sigma_{sc}$$

in accordo con quanto è stato previsto teoricamente da Bethe [1].

3ª) Per mettere in evidenza la radiazione sparpagliata coerentemente, abbiamo studiato uno speciale dispositivo focalizzante a mezzo del quale ci è possibile misurare la radiazione diffusa elasticamente dal Pb sotto diversi angoli con una indefinizione angolare di solo 3°–4°.

La sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma_{sc}}{d\omega} = \sigma'(\vartheta)$ in funzione dell'angolo è riportata nella fig. 1: i punti $a\vartheta = 20°, 30°, 40°$ e $50°$ sono stati misurati direttamente con questo metodo: il punto a $\vartheta = 10°$ è stato dedotto imponendo che:

$$\int \frac{d\sigma_{sc}(\vartheta)}{d\omega} \frac{1}{2} \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta = \sigma_{sc} \cong 2.2 \cdot 10^{-24}$$

in accordo con l'esperienza precedente.

Infine, il punto a $\vartheta = 0°$ rappresenta un limite inferiore di $\sigma'_{sc}(0)$ dedotto, secondo quanto ci è stato suggerito da G. C. Wick applicando la sua relazione [2]

$$(6) \qquad \sigma'_{sc}(0) \geqq \left(\frac{\sigma_t}{2\lambda}\right)^2$$

ponendovi per λ il valore (3) e per σ_t il nostro valore sperimentale dato nella Tabella I.

(1) H. A. Bethe, «Phys. Rev.», *57*, 1125, 1940.
(2) G. C. Wick, «Atti Acc. d'Italia», *13*, 1203, 1943.

TABELLA I.

	$\sigma_t \cdot 10^{24}$	$\sigma_{assorb+urto\ anelastico} \cdot 10^{24}$
4 Be	0.23 ± 0.03	
5 B	1.04 ± 0.10	
6 C	1.23 ± 0.016	
13 Al	1.66 ± 0.04	0.98 ± 0.04
14 Mg	1.64 ± 0.05	
16 S	1.39 ± 0.04	
26 Fe	2.22 ± 0.04	1.42 ± 0.05
28 Ni	2.26 ± 0.04	
29 Cu	2.52 ± 0.03	
30 Zn	2.49 ± 0.04	
34 Se	2.96 ± 0.08	
47 Ag	3.18 ± 0.07	
48 Cd	3.54 ± 0.06	
50 Sn	3.64 ± 0.07	
51 Sb	3.57 ± 0.08	
79 Au	3.62 ± 0.20	
80 Hg	4.54 ± 0.08	2.47 ± 0.12
82 Pb	4.08 ± 0.06	2.21 ± 0.02
83 Bi	4.10 ± 0.09	

La curva della fig. 1 ha il tipico andamento di una figura di diffrazione, fornendoci così la prova che la radiazione sparpagliata elasticamente è costituita, almeno per la maggior parte, da onde coerenti.

Un confronto quantitativo della curva della fig. 1 con la formula data da Bethe e Placzek [1]

$$\frac{d\sigma_{sc}}{d\omega} \cdot \left\{ R \frac{J_1\left(\frac{R\vartheta}{\pi}\right)}{\vartheta} \right\}^2 \tag{7}$$

(1) H. A. BETHE, G. PLACZEK, «Phys, Rev.», *57*, 1075, 1939; S. FRANKEL, «Phys. Rev.», *59*, 216, 1941.

non ha tuttavia molto senso, dato che la (7) vale per neutroni di lunghezza d'onda piccola rispetto al raggio R del nucleo e per angoli di sparpagliamento ϑ piccoli. In attesa che vengano dedotte formule più adeguate allo scopo [1], è forse interessante far notare, che facendo coincidere il primo minimo ($\sim 30°$) della curva della fig. 1 con il primo zero della J_1, si deduce per il Pb

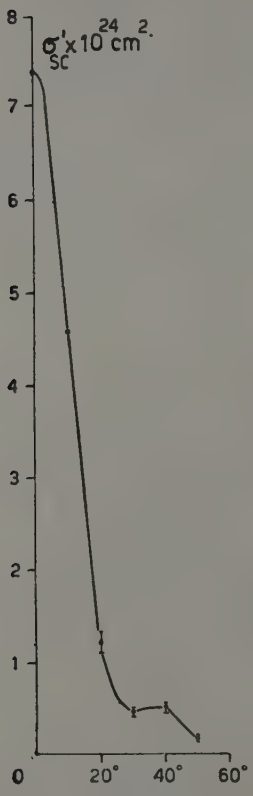


Fig. 1.

$$(8) \quad R = \frac{3,83}{0,52} 1,19 \cdot 10^{-13} = 8,7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

in accordo più che soddisfacente con i risultati di altre valutazioni certo meno dirette delle dimensioni nucleari; dal valore (8) di R si deduce inoltre $\pi R^2 = 2.4 \cdot 10^{-24}$ cm^2 in assai buon accordo con il valore di σ_{sc} quale risulta dalle nostre misure; come mostra Bethe (7), si deve infatti avere

$$(9) \quad \sigma_{sc} \simeq \pi R^2.$$

Attualmente sono in corso altre misure tendenti a completare ed estendere la curva della fig. 1 relativa al Pb; sono in programma analoghe misure con altre lunghezze d'onda ed altri elementi (possibilmente costituiti da un solo isotopo); il metodo da noi impiegato richiede l'uso di notevoli quantità di metallo (dell'ordine di 1 tonnellata di Pb) circostanza questa che limita la scelta degli elementi da studiare. Comunque, è chiaro dalla fig. 1 che in linea di principio è anche possibile dall'andamento della curva di diffrazione dedurre l'eventuale allungamento o schiacciamento del nucleo sparpagliante.

(1) Calcoli di questo tipo sono in corso presso l'Istituto di Fisica della Università di Roma.

Fisica (Fisica Chimica). — *L'effetto Volta e il calcolo termochimico della forza elettromotrice delle pile*[1]. Nota [2] del Corrisp. O. Scarpa.

1. L'applicazione della equazione fotoelettronica di Einstein:

$$\left(h\nu = h\nu_0 + \frac{1}{2} mv^2\right)$$

allo studio dell'effetto Volta fra metalli, corroborata dalle misure di parecchi fisici e in particolare di Millikan, aveva fatto ritenere definitivamente risolta la secolare questione relativa alla esistenza di notevoli differenze di potenziale (dell'ordine fino a più decimi di Volt) fra i punti interni di due metalli eterogenei a contatto (differenze di potenziale che, in precedenti pubblicazioni [3], ho proposto di chiamare *Effetti Volta interni* perchè furono genialmente intuite da Alessandro Volta, e perchè è necessario ben distinguerle da quelle fra i punti esterni ma vicinissimi alle rispettive superfici, le quali proposi di chiamare: *Effetti Volta esterni*).

L'applicazione della statistica di Fermi e la considerazione dei potenziali intrinseci dei metalli [4], hanno successivamente confermato (dal punto di vista teorico) la esistenza di tali effetti Volta interni, con valori enormemente maggiori di quelli che si deducono dalle misure dei calori Peltier; ma poichè il calcolo deve venir effettuato in base alla conoscenza dei potenziali intrinseci dei due metalli a contatto (la cui grandezza vien dedotta da esperienze sulla diffrazione degli elettroni, con risultati affetti da errori che possono raggiungere $\pm$ 3 Volt), non è ancor possibile assegnare con sufficiente precisione le singole grandezze degli effetti Volta interni, quali risultano da quest'ultima teoria.

Ciò malgrado, la questione deve venir nuovamente esaminata poichè il noto fisico F. Krüger [5] pubblicò numerose sue esperienze dalle quali risulta

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrochimica del Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) *Le leggi di Volta e la elettrochimica* (Memoria premiata con il premio Jona dell'A. E. I.) in «Atti XXIV Riunione dell'A. E. I.», Pescara 1929. Vedere inoltre in: *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta* in «Rendiconti R. Acc. Lincei», maggio 1939 e in «Rendiconti R. Acc. d'Italia» (sei note) dal 1939 in poi.

(4) Per brevità, mi riferisco a quanto scritto nella Nota di Perucca e Wataghin in «Nuovo Cimento», anno 1930.

(5) F. Krüger and G. Schulz, «Annalen der Physik», V, 26, 1936.

che operando con metalli degasati in modo quanto è possibile perfetto, e mantenuti nel vuoto più spinto, l'effetto Volta assume (o almeno tende ad assumere) valori nulli. Fatto è che in accordo con la cosidetta *teoria chimica* dell'effetto Volta. Bensì vero la causa dei risultati del Krüger venne attribuita dal Perucca [1] a un ipotetico rivestimento della superficie del metallo avente minor tensione di vapore, con uno straterello sottilissimo dell'altro metallo, in modo da divenirne eguali le proprietà Voltaiche superficiali, ipotesi che non mi sembra possibile di accettare per le ragioni diffusamente esposte in altra pubblicazione [2], le quali si fondano non soltanto sulla considerazione della piccolissima tensione di vapore del Platino alla temperatura di 600° C. (alla quale il Krüger operò gli sgasamenti) ma su considerazioni di ordine metallurgico, relative alla esistenza e alla rapida formazione in tali condizioni di soluzioni solide fra il Platino e i metalli più refrattari impiegati dal Krüger (Tungsteno, Molibdeno, Tantalio), ragione per cui ove avvenisse la distillazione supposta dal Perucca, si formerebbe alle superfici di questi metalli non già un deposito sottilissimo di Platino, ma bensì soluzioni solide povere di platino e ricche del metallo sottoposto, alle quali competono proprietà Voltaiche che si possono prevedere in base ai risultati delle mie ricerche sugli effetti Volta posseduti dalle leghe metalliche [3]. Inoltre, non si può dimenticare che, secondo il Krüger, l'effetto Volta si ristabilisce con il valore normale appena si lasciano rientrare piccolissime quantità di aria nel recipiente (di quarzo) contenente i metalli già degasati.

Nè il risultato negativo a cui arrivarono Gysae e Wagener [4] sperimentando *con una sola* delle coppie metalliche saggiate dal Krüger, può esser assunto come sufficiente per dirimere la questione.

Ricordo infine che sia le esperienze che il Perucca si proponeva di eseguire, sia quelle più estese che io avevo progettato per controllare in modo possibilmente definitivo i risultati del Krüger [5], non poterono venir effettuate in causa della guerra.

Ma i sostenitori della teoria chimica dell'effetto Volta non si fondano soltanto sui risultati di vecchie misure e di quelle più recenti del Krüger e dei suoi allievi, ma appoggiano le loro affermazioni anche sul fatto di cui nel seguito, il quale, a prima vista, appare decisamente probativo. Esso venne

(1) « Nuovo Cimento », luglio 1937.

(2) « La Ricerca Scientifica » C. N. R., serie II, vol. I°, anno 1938.

(3) « Rendiconti R. Acc. Lincei », gennaio 1938.

(4) « Zeit. für Physik », vol. 110, 1938.

(5) Il mio progetto comprendeva misure fotoelettroniche del tipo di quelle effettuate dal Krüger, e, parallelamente, misure con il metodo del condensatore con capacità variabile, adottando una disposizione simile a quella del Dubois (« Annales de Physique », 44, 1930) che concede di contenere tutto il sistema entro a recipienti interamente in quarzo. Dovevano venir eseguiti anche esami dello stato superficiale dei metalli mediante spettri di diffrazione di elettroni. A causa della guerra, gli apparecchi in quarzo ordinati in Germania non arrivarono.

più esplicitamente esposto e strenuamente sostenuto dal noto elettrochimico De Kay Thomson in una lettura alla 63ª Riunione annuale della Società elettrochimica Americana [1]. Ed è notevole che contro di esso vennero portate ragioni che non convinsero nè il De Kay Thomson, nè la maggioranza degli elettrochimici [2].

Poichè se le affermazioni del De Kay Thomson avessero valore decisivo, verrebbero radicalmente contrastate alcune fra le più importanti teorie elettroniche, e poichè non consta che altro sia stato pubblicato su questo argomento, ho ritenuto utile redigere la presente Nota.

2. Premetto che se si considerano i sistemi chimico-fisici costituenti le pile elettrochimiche, e per fissare le idee mi riferisco alla pila Daniell, risulta che i VERI poli della pila (cioè i terminali ai quali viene riferito il valore della forza elettromotrice della pila) non sono i due metalli che ne costituiscono gli elettrodi, ma bensì i morsetti costituiti con un egual metallo (per esempio: rame od ottone) fissati ai due elettrodi. Ne segue che nel caso della pila Daniell lo schema REALE è:

$$(1) \qquad \underset{+}{Cu} \mid CuSO_4\,(sol.) \mid ZnSO_4\,(sol.) \mid Zn \mid \underset{-}{Cu}$$

e non già:

$$(2) \qquad \underset{+}{Cu} \mid CuSO_4\,(sol.) \mid ZnSO_4\,(sol.) \mid \underset{-}{Zn}$$

La forza elettromotrice della pila comprende quindi la differenza di potenziale al contatto fra Zinco e Rame (l'effetto Volta interno: $\underset{+}{Zn} \mid \underset{-}{Cu}$), differenza di potenziale che secondo la teoria chimica dell'effetto Volta (come secondo alcune teorie dette dell'anticontatto) sarebbe dell'ordine dei decimillesimi di Volt, e quindi trascurabile rispetto alla forza elettromotrice della pila (1.08 Volt); mentre secondo la teoria di Einstein-Millikan e le misure con il metodo del condensatore con capacità variabile, è dell'ordine di 0,7 Volt, e appare ancora maggiore se si accettano i risultati delle esperienze sulla diffrazione degli elettroni.

Ora, il fatto è, che se si calcola il valore della forza elettromotrice della pila Daniell mediante la equazione di Gibbs-Helmholtz (che direttamente discende dai due principî della termodinamica):

$$(3) \qquad E = \frac{J\Delta U}{nF} + T\frac{dE}{dT} + \frac{P\Delta V}{nF}$$

(1) « Trans. Electrochemical Society », vol. 63, 1933.
(2) « Trans. Electrochemical Society », vol. 63, 1933, pp. 161 e seg.

sostituendo a ΔU la somma algebrica dei calori termochimici delle reazioni corrispondenti alla trasformazione chimico–fisica che avviene nella pila mentre eroga nF Coulomb, si ottengono valori che coincidono con gli sperimentali. Fatto che pur si verifica per le altre pile (Weston, Clark, ecc.) aventi funzionamento elettrochimico particolarmente semplice e ben noto. E poichè in tal calcolo non vien tenuto alcun conto dell'effetto Volta interno fra i due metalli [1], il De Kay Thomson, ed altri con lui, deducono esser questa una prova indiscutibile della non esistenza di un contributo portato alla forza elettromotrice della pila dalla sopradetta differenza di potenziale di contatto. La quale, quindi, dovrebbe aver valore nullo o trascurabile, come vuole la teoria chimica dell'effetto Volta.

Questa conclusione non può, a mio parere, esser ritenuta valida per le seguenti ragioni.

3. Poichè le moderne teorie elettroniche (e in particolare quelle fondate sulla statistica di Fermi) stabiliscono che gli elettroni liberi nell'interno dei metalli posseggono, a parità di temperatura, energie differenti nei diversi metalli [2] ne segue che la variazione della energia interna del sistema chimico–fisico costituente la pila Daniell, mentre essa eroga 2 F Coulomb (e quindi 2 N elettroni passano dallo Zinco al Rame attraverso il loro contatto), è misurata dalla variazione di energia corrispondente a questo passaggio con quella corrispondente allo svincolamento di un grammo–ione di Zinco dal reticolo cristallino dello Zinco metallico e alla solvatazione dei corrispondenti ioni (i quali entrano a far parte della soluzione di solfato di Zinco), diminuita di quelle corrispondenti alla desolvatazione di altrettanti ioni Rame, pari a un grammo–ione di rame, contenuti nella soluzione di solfato di rame e al collegamento di tali ioni, dopo desolvatati, al reticolo cristallino del rame massiccio che costituisce l'elettrodo positivo della pila; ove ne vengono bilanciate le cariche positive da quelle dei sopraindicati 2 N elettroni.

In corrispondenza di questi fenomeni, lo stato chimico–fisico del sistema costituente la pila (stato che è definito dalla temperatura, dalla pressione e dalla costituzione chimica) passa da una condizione iniziale **A** a una finale **B**. Ma dal medesimo stato iniziale **A** al medesimo stato finale **B** del dato sistema, si può anche giungere non facendo funzionare la pila, ma (operando in modo opportuno) mediante una successione di reazioni chimiche entro

(1) Per brevità mi riferisco a quanto è riportato nella sopracitata Nota di Perucca e Wataghin.

(2) Il termine $T\frac{dE}{dT}$ nelle pile Daniell, Weston, ha valore pressochè trascurabile. Esso include il contributo portato dal fenomeno corrispondente all'effetto Peltier fra i due metalli a contatto. Lo stesso dicasi per $\frac{P\Delta V}{nF}$ (dove ΔV indica la variazione di volume della pila mentre eroga nF Coulomb).

ad adatte bombe calorimetriche (facendo ad esempio avvenire la diretta ossidazione di un atomo–grammo di Zinco metallico e la successiva dissoluzione dell'ossido, trattandolo con acido solforico di giusta concentrazione; e le analoghe – ma di senso opposto – per il rame), con la qual cosa la variazione della energia interna del sistema (valutabile mediante la somma algebrica dei calori di reazione) è misurata da una quantità che, per il principio fondamentale della energetica, deve esser numericamente eguale alla precedente. Quindi la variazione della energia interna del sistema nel passaggio dallo stato **A** al **B**, calcolata come somma algebrica (Q) dei calori di reazione, dovendo eguagliare la *variazione complessiva* della energia interna che avviene nella pila mentre, in conseguenza del suo funzionamento, il sistema onde è costituita passa dal medesimo stato iniziale al medesimo stato finale, comprende *implicitamente* il contributo corrispondente al passaggio di 2 N elettroni dallo Zinco metallico al rame metallico.

Il fatto per cui l'equazione di Gibbs–Helmholtz conduce a calcolare valori delle forze elettromotrici di molte pile elettrochimiche, coincidenti con gli sperimentali, non costituisce quindi alcun appoggio alla validità delle teorie che sostengono esser nulla (o trascurabile) *la differenza di potenziale fra metalli eterogenei a contatto.* E quindi non infirma le teorie per cui la forza elettromotrice delle pile con elettrodi metallici eterogenei riceve un notevole contributo dalla differenza di potenziale di contatto (dall'effetto Volta interno).

Alla medesima conclusione sono anche giunto, forse con maggiore evidenza, considerando separatamente il meccanismo dei fenomeni elettrochimici nella pila e quello secondo cui avvengono le dette reazioni chimiche. Per facilitare i ragionamenti ho, all'uopo, considerato gli atomi nei metalli scissi negli ioni (fissati ai nodi del reticolo cristallino) e negli elettroni liberi (che, mediamente, ne neutralizzano le cariche), fatto che può venir espresso indicando la massa di un atomo–grammo di Zinco, quando è contenuta nello Zinco metallico, con il simbolo: $\boxed{Zn^{++} + 2\,N\Theta}$ e quella di un atomo–grammo di Rame con il simbolo: $\boxed{Cu^{++} + 2\,N\Theta}$ (per brevità di trattazione suppongo i rispettivi atomi scissi in ioni bivalenti e nei corrispondenti elettroni). Ne segue che se si considerano tutte le reazioni chimiche sopraccennate atte a condurre il sistema dallo stato **A** al **B**, (tenendo presente che la reazione diretta di ossidazione dei metalli con ossigeno gassoso implica la preventiva formazione di ioni ossigeno, con conseguente uscita dal metallo, per ogni ione–grammo di ossigeno, di 2 N elettroni) e si sommano tutte le corrispondenti equazioni termochimiche, mettendo in evidenza che gli ioni contenuti nelle soluzioni acquose si trovano allo stato idratato, risulta l'equazione:

$$\boxed{Zn^{++} + 2\,N\Theta} + Cu^{\ddagger} \cdot m H_2O + (n - m) H_2O =$$

$$Zn^{\ddagger} \cdot n H_2O + \boxed{Cu^{++} + 2\,N\Theta} + Q$$

la quale indica, in modo molto evidente, che il complessivo calore termochimico (Q) include il contributo di energia portato dalla estrazione di 2 N elettroni dallo Zinco metallico e dalla loro entrata nel Rame metallico. Cioè, include quella quantità di energia, che, espressa in unità di lavoro, viene presa in conto quando si calcola il valore dell'effetto Volta fra Zinco e Rame, mediante le moderne teorie elettroniche.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra due particolari problemi misti di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace* [1]. Nota di A. Ghizzetti, presentata [2] dal Corrisp. M. Picone.

In questa Nota riassumo i risultati che ho ottenuto nello studio di due particolari problemi misti di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace in due variabili. Tali problemi rientrano in una più vasta categoria di questioni sulle funzioni analitiche di una variabile, già trattate da altri Autori [3]; però, essi sono stati da me risolti con altro metodo (quello delle *trasformate*) che consente una trattazione più generale e la precisazione di tutte le condizioni atte ad assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Il primo problema considerato è quello di costruire una funzione armonica in un angolo T, assegnando su un lato i valori della funzione e sull'altro quelli della derivata normale; il secondo consiste nel costruire una funzione armonica in un cerchio C, assegnando su un arco della frontiera i valori della funzione e sull'arco residuo quelli della derivata normale. Il secondo si riduce al primo con una rappresentazione conforme.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) Vedi V. Volterra, *Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa.* « Annali di Matematica », ser. II, to. XI, 1882 83, pp. 1-55; A. Signorini, *Sopra un problema al contorno della teoria delle funzioni di variabile complessa.* Ibidem, ser. III, to. XXV, 1916, pp. 253-273 e *Sur un problème mixte.* « Comptes Rendus », to. 190, 1930, p. 712.

I dettagli di questa ricerca saranno esposti in una Memoria di prossima pubblicazione.

1. Consideriamo il primo problema. Riferito il piano a coordinate polari r, θ, sia T l'angolo $0 \leq \theta \leq \omega$ $(0 < \omega < 2\pi)$, $u(r, \theta)$ la funzione incognita e si richieda che sia $u(r, 0) = f(r)$, $u_\theta(r, \omega) = g(r)$. Facendo uso delle trasformate

$$u_n(r) = \int_0^\omega u(r, \theta) \sin \frac{(2n+1)\pi\theta}{2\omega} d\theta, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

sono pervenuto al seguente teorema di unicità e di esistenza:

I. *Se le funzioni $f(r)$, $g(r)$ sono continue per $r > 0$ e gli integrali*

$$\int_0^{r_0} r^{\frac{\pi}{2\omega}-1} f(r)\, dr \quad , \quad \int_0^{r_0} r^{\frac{\pi}{2\omega}-1} g(r)\, dr \quad ,$$

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{f(r)\, dr}{r^{\frac{\pi}{2\omega}+1}} \quad , \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{g(r)\, dr}{r^{\frac{\pi}{2\omega}+1}} \quad , \quad (r_0 > 0),$$

assolutamente convergenti, esiste una e una sola funzione $u(r, \theta)$ che verifichi le seguenti condizioni:

α) *sia continua per $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \omega$, risultando $u(r, 0) = f(r)$ per $r > 0$;*

β) *abbia la derivata parziale u_θ continua per $r > 0$, $0 < \theta \leq \omega$, risultando $u_\theta(r, \omega) = g(r)$ per $r > 0$;*

γ) *abbia le derivate parziali u_r, u_{rr}, $u_{\theta\theta}$ continue per $r > 0$, $0 < \theta < \omega$, soddisfacenti ivi alla $\Delta u = 0$;*

δ) *abbia per $r \to 0$ e per $r \to \infty$ il comportamento prescritto dalle*

$$(1) \quad \lim_{r \to 0} \left[\frac{0}{\log \frac{2\pi}{\omega - \theta}} - r^{\frac{\pi}{2\omega}} u(r, \theta) \right] = \lim_{r \to \infty} \left[\frac{0}{\log \frac{2\pi}{\omega - \theta}} r^{-\frac{\pi}{2\omega}} u(r, \theta) \right] = 0 \,(1)$$

che devono sussistere uniformemente per $0 \leq \theta \leq \omega$.

(1) Il fattore $\theta / \log \frac{2\pi}{\omega - \theta}$ può essere sostituito da una qualsiasi funzione $p(\theta)$ continua nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \omega$, positiva nei punti interni di questo, *infinitesima del 1° ordine per $\theta \to 0$ e come $1/\log(\omega - \theta)$ per $\theta \to \omega$.*

Tale soluzione è data dalla formula:

$$(2)\qquad u(r,\theta) = \frac{1}{\omega} r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\frac{\pi\theta}{2\omega} \int_0^\infty \frac{r^{\frac{\pi}{\omega}} + s^{\frac{\pi}{\omega}}}{r^{\frac{2\pi}{\omega}} - 2r^{\frac{\pi}{\omega}} s^{\frac{\pi}{\omega}} \cos\frac{\pi\theta}{\omega} + s^{\frac{2\pi}{\omega}}} s^{\frac{\pi}{2\omega}-1} f(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \log \frac{r^{\frac{\pi}{\omega}} + 2r^{\frac{\pi}{2\omega}} s^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin\frac{\pi\theta}{2\omega} + s^{\frac{\pi}{\omega}}}{r^{\frac{\pi}{\omega}} - 2r^{\frac{\pi}{2\omega}} s^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin\frac{\pi\theta}{2\omega} + s^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \frac{g(s)}{s}\,ds .$$

Giova notare come siano essenziali, per l'unicità della soluzione, le condizioni (1). Ed invero, per esempio, le funzioni $r^{\pm\frac{\pi}{2\omega}} \sin\frac{\pi\theta}{2\omega}$ verificano le $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ con $f(r) \equiv g(r) \equiv 0$, ma non entrambe le (1) [1].

2. Passiamo al secondo problema. Considerato nel piano $Z = \rho e^{i\varphi}$ il cerchio $C(\rho \leq 1)$ e fissati sulla sua frontiera due punti $A(\varphi = 0)$, $B(\varphi = \alpha)$ con $0 < \alpha < 2\pi$, si vuol costruire una funzione armonica in C, conoscendo i valori della derivata normale sull'arco $AB\,(0 < \varphi < \alpha)$ e quelli della funzione stessa sull'arco residuo BA $(\alpha < \varphi < 2\pi)$. Colla sostituzione lineare

$$\zeta = \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}} Z}{1 - Z}, \qquad (\zeta = x + iy = re^{i\theta}),$$

si rappresenta conformemente C sul semipiano $T\,(y \geq 0)$ del piano ζ; all'arco AB corrisponde la semiretta $x < 0$, a BA la $x > 0$. Possiamo individuare i punti P di C mediante le coordinate polari r, θ del corrispondente punto Q di T; si ottiene così nel piano Z un particolare sistema di coordinate curvilinee r, θ le cui linee coordinate sono le circonferenze passanti per A, B e quelle ad esse ortogonali $\left(\text{è } r = \overline{PB}/\overline{PA}\ ,\ 0 = \gamma = \frac{\alpha}{2}\right.$ ove γ è l'angolo, opportunamente computato, sotto cui da P si vede il segmento $\left.AB\right)$. Introdotte queste coordinate, si richiede che sia $u = f(r)$

(1) Condizioni di comportamento all'infinito, come la seconda delle (1), sono sempre necessarie per rendere determinati i problemi di integrazione in domini illimitati. Vedi le questioni nn. 122-123 124 125-126 poste da M. Picone nella rubrica *Problemi, risultati e discussioni* pubblicata nei «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni» (R. Università di Roma e Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica), ser. V, vol. 3, 1942, pp. 66-69; vedi anche L. Amerio, *Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine, di tipo ellittico, nei domini illimitati.* «Rendiconti R. Accademia d'Italia», ser. VII, vol. IV. 1943, pp. 287–298.

(su BA, cioè per $r > 0$, $\theta = 0$), $u_\theta = g(r)$ (su AB cioè per $r > 0$, $\theta = \pi$); allora dal teorema I (con $\omega = \pi$) si trae immediatamente il seguente:

II. *Se* $f(r)$, $g(r)$ *sono continue per* $r > 0$ *e gli integrali*

$$(3) \qquad \int_0^{r_0} \frac{f(r)\,dr}{\sqrt{r}} \quad , \quad \int_0^{r_0} \frac{g(r)\,dr}{\sqrt{r}} \quad , \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{f(r)\,dr}{r\sqrt{r}} \quad , \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{g(r)\,dr}{r\sqrt{r}}, \qquad (r_0 > 0),$$

assolutamente convergenti, esiste una e una sola funzione $u(r, \theta)$ *che verifichi le seguenti condizioni:*

α) *sia continua nell'insieme ottenuto dal cerchio* C *col togliergli i punti* A , B, *risultando* $u = f(r)$ *nei punti interni all'arco* BA;

β) *abbia la derivata parziale* u_θ *continua nell'insieme ottenuto da* C *col togliergli tutti i punti dell'arco* BA, *risultando* $u_\theta = g(r)$ *nei punti interni all'arco* AB;

γ) *abbia le derivate parziali* u_r , u_{rr} , $u_{\theta\theta}$ *continue nell'interno di* C *e soddisfacenti ivi all'equazione* $\Delta u = 0$;

δ) *si comporti in prossimità dei punti* A , B *nel modo prescritto dalle*

$$\lim_{P \to A} \left[\frac{\theta}{\log \frac{2\pi}{\pi - \theta}} \sqrt{\overline{PA}} \cdot u(P) \right] = \lim_{P \to B} \left[\frac{\theta}{\log \frac{2\pi}{\pi - \theta}} \sqrt{\overline{PB}} \cdot u(P) \right] = 0.$$

Tale soluzione è data dalla (2) *scritta con* $\omega = \pi$.

È opportuno trasformare questa formula risolutiva in coordinate polari ρ , φ. Posto $u(1, \varphi) = F(\varphi)$ (per $\alpha < \varphi < 2\pi$), $u_\varrho(1, \varphi) = G(\varphi)$ (per $0 < \varphi < 2\pi$), con $F(\varphi)$, $G(\varphi)$ continue negli intervalli indicati, si trova che le (3) equivalgono alla sommabilità di

$$\frac{F(\varphi)}{\sqrt{\sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2}}} \quad , \quad \sqrt{\sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}}\, G(\varphi),$$

rispettivamente in $(\alpha , 2\pi)$, $(0 , \alpha)$, e che la formula risolutiva diventa

$$(4) \quad u(\rho, \varphi) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha} \log \frac{\sqrt{H(\rho, \varphi, \psi)} + \sqrt{M(\rho, \varphi) - N(\rho, \varphi)} + \sqrt{K(\rho, \varphi, \psi)}}{\sqrt{H(\rho, \varphi, \psi)} - \sqrt{M(\rho, \varphi) - N(\rho, \varphi)} + \sqrt{K(\rho, \varphi, \psi)}} \cdot G(\psi)\, d\psi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{M(\rho, \varphi) + N(\rho, \varphi)}} \int_{\alpha}^{2\pi} \frac{\sqrt{H(\rho, \varphi, \psi)} + \sqrt{K(\rho, \varphi, \psi)}}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2} \cdot F(\psi)\, d\psi,$$

ove per brevità si è posto

$$H(\rho, \varphi, \psi) = \frac{\sin \frac{|\alpha - \psi|}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} (1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2) \quad ,$$

$$K(\rho, \varphi, \psi) = \frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{|\alpha - \psi|}{2}} (1 - 2\rho \cos (\varphi - \alpha) + \rho^2),$$

$$M(\rho, \varphi) = 2\sqrt{H \cdot K} \quad , \quad N(\rho, \varphi) = 2\left(\cos \frac{\alpha}{2} - 2\rho \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) + \rho^2 \cos \frac{\alpha}{2}\right).$$

Nei lavori citati, le formule (2), (4) non sono date esplicitamente; sono invece calcolate delle funzioni analitiche la cui parte reale coincide con la (2) (nel caso $\omega = \pi$) oppure con la (4), ma in tali funzioni la separazione del reale dall'immaginario appare ben laboriosa. Gli enunciati I e II mettono inoltre in evidenza che il metodo delle trasformate permette di trovare tutte le condizioni necessarie e sufficienti per l'unicità e l'esistenza della soluzione. Aggiungiamo, con riferimento, per esempio, al primo problema, che tale metodo è anche applicabile al caso in cui sui due lati dell'angolo Γ sono assegnate due diverse combinazioni lineari della funzione e della derivata normale; di ciò si sta attualmente occupando un ricercatore dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Matematica. — *Sulla sommabilità delle serie trigonometriche di Fourier.* Nota di G. SANSONE, presentata [1] dal Corrisp. E. BOMPIANI.

a) È noto che se $f(x)$ è una funzione sommabile, periodica, di periodo 2π, per le somme parziali $S_0(x), S_1(x), \cdots, S_n(x), \cdots$

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \quad (n = 0, 1, \cdots);$$

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha, \; b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} k\alpha \, d\alpha, \quad (k = 0, 1, \cdots),$$

della sua serie trigonometrica di Fourier

$$(1) \qquad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

sussiste il teorema di Lebesgue [2]: eccettuato al più un insieme di punti x di misura nulla si ha

$$(2) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n} = f(x),$$

ossia la somma (C, 1) della serie (1) vale quasi ovunque $f(x)$.

Z. Zalcwasser [3] ha dimostrato successivamente che salvo al più un insieme di punti x di misura nulla colla (2) sussiste la relazione

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{S_1^2(x) + S_2^2(x) + \cdots + S_n^2(x)}{n} = f(x),$$

ed ha posto la questione di trovare se nell'ipotesi che la successione dei numeri interi positivi $\{p_n\}$ sia tale che

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots,$$

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) H. LEBESGUE, *Leçons sur les séries trigonométriques.* (Paris, 1906), p. 94.

(3) Z. ZALCWASSER, *Sur la sommabilité des séries de Fourier.* « Studia Mathematica », VI (Lwów, 1936), pp. 82–88.

salvo al più un insieme di punti x di misura nulla, esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{p_1}(x) + S_{p_2}(x) + \cdots + S_{p_n}(x)}{n} .$$ (4)

Lo stesso ragionamento di Zalcwasser è atto a provare, come si verifica immediatamente, che *per*

$$p_n = an^2 + bn + c , \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

con a, b, c, interi, $a > 0$, *salvo al più un insieme di punti x di misura nulla, si ha* (5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{a\nu^2+b\nu+c}(x) = f(x) , \tag{4}$$

e noi dimostreremo in *b*), che *se*

$$p_n = bn + c , \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

con b e c interi, $b > 0$, $c \geqq 0$, *salvo al più un insieme di punti x di misura nulla, sussiste la relazione*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} S_{b\nu+c}(x) = f(x) . \tag{5}$$

b) Si ha (6)

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, \alpha) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} d\alpha ,$$

dove

$$\varphi(x, \alpha) = f(x + 2\alpha) + f(x - 2\alpha) - 2f(x) ,$$

perciò

$$S_{2\nu^2+b\nu+c+1}(x) - S_{b\nu+c}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,\alpha) \frac{\operatorname{sen}(2\nu^2+1)\alpha \cos(2\nu^2+2b\nu+2c+2)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,\alpha) \frac{\operatorname{sen}(2\nu^2+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} d\alpha - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,\alpha) \frac{\operatorname{sen}(2\nu^2+1)\alpha \operatorname{sen}^2(\nu^2+b\nu+c+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} d\alpha ,$$

(4) Cfr. Z. ZALCWASSER, lav. cit. in (3), p. 88.

(5) Cfr. Z. ZALCWASSER, lav. cit. in (3), teorema 1, pp. 82–85. Nel nostro caso, nell'applicare il lemma di J. G. VAN DER CORPUT si farà $g(u) = \frac{(au^2 + bu)\, t}{2\pi}$, $\rho = \frac{at}{\pi}$. Nel caso considerato in *b*), risultando $\rho = 0$ non ci si può valere del lemma ora richiamato.

(6) Cfr., ad es., G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1935), p. 61.

da cui

$$S_{b\nu+c}(x) - f(x) = [S_{2\nu^2+b\nu+c+1}(x) - f(x)] - 2\,[S_{\nu^2}(x) - f(x)] +$$

$$+ \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}(2\nu^2+1)\alpha \operatorname{sen}^2(\nu^2+b\nu+c+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha\,,$$

e poichè per le successioni $\{S_{2\nu^2+b\nu+c+1}(x)\}$, $\{S_{\nu^2}(x)\}$ vale la (4), basterà dimostrare che posto per $\nu = 1, 2, \cdots$

$$(6)\qquad \omega_\nu(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,\alpha)\,\frac{\operatorname{sen}(2\nu^2+1)\alpha \operatorname{sen}^2(\nu^2+b\nu+c+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\,d\alpha\,,$$

salvo al più un insieme di punti x di misura nulla, si ha

$$(7)\qquad \lim_{\nu\to\infty} \omega_\nu(x) = 0.$$

Posto per $\nu = 1, 2, \cdots$

$$\Phi(x,\nu,\alpha) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\alpha} \varphi(x,\beta)\,\frac{\operatorname{sen}^2(\nu^2+b\nu+c+1)\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}\,d\beta\,,$$

$$\Phi^*(x,\nu,\alpha) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\alpha} |\varphi(x,\beta)|\,\frac{\operatorname{sen}^2(\nu^2+b\nu+c+1)\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}\,d\beta\,,$$

dalla (6), integrando per parti, si ottiene

$$(8)\qquad \omega_\nu(x) = \pm\,\Phi\left(x,\nu,\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(x,\nu,\alpha)\,[\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(2\nu^2+1)\alpha]'\,d\alpha\,.$$

Si ha per $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $\nu = 1, 2, \cdots$

$$|\Phi(x,\nu,\alpha)| \leq \Phi^*\left(x,\nu,\frac{\pi}{2}\right),$$

ed eccettuato al più un insieme di punti x di misura nulla, fissato x, ad ogni σ positivo arbitrario si può far corrispondere un intero positivo ν_0 tale che per $\nu \geq \nu_0$ sia (7)

$$\left|\Phi^*\left(x,\nu,\frac{\pi}{2}\right)\right| < \sigma\,,$$

(7) Cfr., ad es., G. Sansone, op. cit. in (6), p. 87.

e quindi

$$|\Phi^*(x,\nu,\alpha)| < \sigma, \quad \nu \geqq \nu_0, \qquad 0 \leqq \alpha \leqq \pi/2 .$$

Per i considerati valori di ν e di x, il primo termine del secondo membro della (8) non supera σ in valore assoluto; indicando poi con $V\left(x,\nu,\frac{\pi}{2}\right)$ la variazione totale di $\Phi(x,\nu,\alpha)$ quando α varia in $(0,\pi/2)$ si ha [8]

$$V\left(x,\nu,\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,\beta) \left| \frac{\operatorname{sen}^2(\nu^2+b\nu+c+1)\beta}{\operatorname{sen}^2\beta} \right| d\beta \quad \Phi^*\left(x,\nu,\frac{\pi}{2}\right) < \sigma ,$$

e per il secondo teorema della media [9] il valore assoluto dell'integrale del secondo membro della (8) non supera

$$\left| 2\sigma \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(2\nu^2+1)\alpha]' \, d\alpha \right|$$

con $0 \leqq \xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \pi/2$, ed è perciò minore di 4σ; allora dalla (8) per $\nu \geqq \nu_0$ risulta $|\omega_\nu(x)| < 5\sigma$, e quindi la (7).

(8) Cfr., ad es., G. Vitali, *Moderna Teoria delle funzioni di variabile reale*, (2ª ed., Bologna, 1943), p. 158.

(9) Se $f(x)$ è una funzione a variazione limitata in (a,b) ed M è il suo estremo superiore, V la sua variazione totale, e se $g(x)$ è sommabile in (a,b) si ha $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = (M+V)\int_{\xi_1}^{\xi_2} g(x)\,dx$, con ξ_1 e ξ_2 punti appartenenti ad (a,b). Cfr. M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, (Napoli, 1940), p. 248.

Matematica (Geometria). — *Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche.* Nota I di A. Franchetta, presentata [1] dal Socio F. Enriques.

Supponiamo di avere una superficie algebrica F dello spazio S_3 dotata di un punto doppio isolato O. Proiettiamo la F da un punto generico P su un piano π. Si otterrà un piano multiplo con curva di diramazione D la quale avrà, nella proiezione O′ di O, un punto singolare: *La singolarità presentata dalla curva* D *in* O′ *definisce la singolarità della superficie in* O *a meno di una trasformazione analitica regolare dell'intorno del punto,* nel senso che se un'altra superficie $\overline{F}$ con punto doppio in O dà luogo per proiezione da P su π ad una curva $\overline{D}$ la quale abbia in O′ la stessa singolarità della D, in modo che i rami corrispondenti di $\overline{D}$ e D abbiano un determinato contatto, per un intorno finito di O la superficie $\overline{F}$ è trasformata di F per mezzo di una trasformazione analitica regolare nell'intorno del punto [2]; sicchè i punti doppi possono essere classificati, rispetto alle trasformazioni analitiche, in base alla singolarità della curva D [3].

Trasformiamo ora birazionalmente la superficie in modo da sciogliere la singolarità che essa presenta in O. Essa farà corrispondere all'intorno del punto su F l'intorno di una curva $\overline{\Omega}$, in generale riducibile in più curve $\omega_1, \omega_2 \cdots, \omega_n$, semplice per la superficie trasformata F′. Se $|C|$ è un sistema lineare di curve su F che non abbia un punto base in O la curva $\overline{\Omega}$ sarà fondamentale per il sistema trasformato $|C'|$ e staccando la Ω da $|C'|$ le sue componenti si staccheranno con certe molteplicità $h_1, h_2, \cdots, h_n$, in modo che la curva

$$\Omega = h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 + \cdots + h_n \omega_n$$

abbia, come l'intorno di O, il genere virtuale zero e il grado virtuale — 2.

Scopo di questo lavoro è di determinare, per ogni tipo di punto doppio, ossia per ogni possibile singolarità della curva D, i caratteri delle curve $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$; precisamente il loro genere e grado virtuale, la molteplicità con

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) La dimostrazione di questo teorema sarà data in altro lavoro.

(3) Questo fatto è stato sostanzialmente osservato fino da K. Rohn, *Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotepunkte,* « Math. Ann. », Bd. 22, 1883, ma il teorema ora enunciato che ne dà la giustificazione rigorosa, non mi pare sia stato finora rilevato in modo esplicito.

cui ciascuna di esse compare in Ω e la loro connessione. Il problema si semplifica notevolmente osservando che, in base al teorema enunciato sopra, si può sostituire alla superficie F una superficie rappresentabile sul piano doppio. Infatti, supposto il punto O nell'origine delle coordinate, si assuma come centro di proiezione (generico) il punto all'infinito dell'asse della z, e come piano π il piano $z = 0$. Sia $D(x, y) = 0$ l'equazione della curva di diramazione; la superficie $\overline{F}$ di equazione

$$z^2 = D(x, y) \tag{1}$$

ha anch'essa un punto doppio in O, che risulta equivalente, agli effetti della nostra ricerca, a quello della superficie data.

Volendo dunque procedere all'analisi dei punti doppi, potremo limitarci a studiare i punti doppi presentati dalla superficie (1) nell'origine, in corrispondenza alla singolarità della D. I caratteri delle curve ω si determinano sciogliendo effettivamente la singolarità della (1) con opportune trasformazioni cremoniane dello spazio; la molteplicità e la connessione delle ω si ottengono rapidamente valendosi dei risultati di Barber e Zariski sulle curve eccezionali riducibili, che trovano qui una naturale estensione [1].

Infine applico le considerazioni fatte allo studio di alcune particolari singolarità, per le quali s'inverte il risultato, dimostrando che ogni curva avente i caratteri determinati attraverso la trasformazione, quando sia fondamentale per un sistema lineare semplice ∞^3 di curve $|C|$, dà luogo, costruendo l'immagine proiettiva del sistema $|C|$, ad una singolarità del tipo di quella da cui si è partiti.

1° Supponiamo lo spazio S_3 riferito ad un sistema di coordinate omogenee x, y, z, t. Le trasformazioni cremoniane che adopreremo nello scioglimento dei punti doppi sono le seguenti:

a) La trasformazione quadratica (di prima specie) Q di equazioni

$$x' = yt \quad ; \quad y' = xt \quad ; \quad z' = zt \quad ; \quad t' = xy$$

(che ha per inversa la trasformazione di equazioni

$$x = y't' \quad ; \quad y = x't' \quad ; \quad z = z't' \quad ; \quad t = x'y').$$

Essa trasforma in sè stessi il piano $z = 0$ e la stella delle rette passanti per il punto $(0, 0, 1, 0)$. Sul piano $z = 0$ subordina la trasformazione quadratica di equazioni $x' = yt \; ; \; y' = xt \; ; \; t' = xy$ la quale fa corrispondere

(1) Barber e Zariski, *Reducible exceptional curves of the first Kind*. « Am. Journal of Math. », 1935. Vedi anche P. Duval, « Am. Journ. of Math. », 1936. A. Franchetta, « Boll. dell'U. M. I. », 1940, 1941.

all'intorno dell'origine la retta $t = 0$. I piani $x = 0$, e $y = 0$ sono eccezionali e si trasformano nelle rette

$$y = t = 0 \quad ; \quad x = t = 0.$$

Useremo, più in generale, la trasformazione quadratica analoga alla precedente in cui i punti $(0,0,0,1)$; $(0,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$ siano sostituiti da tre punti arbitrari del piano $z = 0$, non allineati.

b) La trasformazione cremoniana T di equazioni

$$x' = xyt^k \quad ; \quad y' = x^2 t^k \quad ; \quad z' = x^{k+1} z \quad ; \quad t' = yt^{k+1}$$

che ha per inversa la trasformazione di equazioni

$$x = x'^k y' \quad ; \quad y = x'^{k+1} \quad ; \quad z = z' t'^k \quad ; \quad t = x'^{k-1} y' t'.$$

Essa lascia fermo il piano $z = 0$, su cui subordina la trasformazione quadratica di equazioni

$$x' = xy \quad ; \quad y' = x^2 \quad ; \quad t' = yt.$$

Inoltre, muta in sè il fascio di piani per l'asse z facendo corrispondere al piano $x = \lambda y$ il piano $y = \lambda x$. Fra questi due piani subordina una trasformazione di De Jonquières che ha k punti base semplici infinitamente vicini al punto all'infinito della retta secondo cui i detti piani incontrano $z = 0$; e ai punti dell'intorno di ordine k corrispondono i punti della retta secondo cui il piano corrispondente sega $t = 0$, in modo che la trasformazione cremoniana dello spazio fa corrispondere all'intorno di ordine k della retta all'infinito di $z = 0$, su questo piano, il piano $t = 0$.

Più in generale, adopreremo la trasformazione del tipo precedente in cui i punti $(0,0,1,0)$; $(0,1,0,0)$; $(1,0,0,0)$ sono sostituiti da altri tre punti non allineati del piano $z = 0$.

c) Eseguendo nello spazio successivamente una trasformazione del tipo T ed una del tipo Q, in cui i punti fondamentali del piano $z = 0$ siano distinti, si ottiene una trasformazione che fa corrispondere all'intorno di ordine k di una conica, (trasformata mediante la Q della retta di cui si parla sopra), il cono proiettante la conica stessa, dal punto all'infinito dell'asse z. In generale si potrà costruire una trasformazione cremoniana che muti l'intorno di ordine k di una curva trasformata cremoniana di una retta mediante un prodotto di trasformazioni quadratiche del tipo Q, nel cono proiettante questa curva dal punto all'infinito dell'asse delle z.

2° Sia data la superficie di equazione

$$z^2 = D_n(x, y)$$

che in coordinate omogenee si scrive:

$$z^2 t^{n-2} = D_n(x, y, t);$$

la curva di diramazione, quando si proietti la superficie dal punto all'infinito dell'asse delle z sul piano xy è costituita da

$$t^{n-2} D_n(x, y, t) = 0$$

spogliata delle componenti multiple di ordine pari. Quando la $D = 0$ presenta un punto singolare in O, la superficie ha nel punto stesso un punto doppio: più in generale, supporremo data la superficie di equazione

$$C_{n-2}(x, y, t) z^2 = D_n(x, y, t)$$

con $C_{n-2}(0, 0, 1) \neq 0$. La $C_{n-2}(x, y, t) = 0$ è la traccia del cono osculatore alla superficie nel punto $(0, 0, 1, 0)$; l'ipotesi che essa non passi per l'origine è giustificata dalla genericità del centro di proiezione rispetto alla singolarità della superficie in O.

Premettiamo alcune osservazioni.

a) Supponiamo che la $D_n = 0$ possegga un punto r-plo nell'origine ($r \geq 2$) con tangenti distinte dagli assi. Se poniamo

$$D_n = d_0 t^n + d_1 t^{n-1} + \cdots + d_n \; ; \; C_{n-2} = c_0 t^{n-2} + c_1 t^{n-3} + \cdots + c_{n-2}$$

(ove $d_0, d_1, \cdots, d_n$; $c_0, c_1, \cdots, c_{n-2}$) sono forme in x e y di grado uguale all'indice) le ipotesi fatte dànno luogo alle relazioni

$$c_0 \neq 0 \; ; \; d_0 = d_1 = \cdots = d_{r-1} = 0 \; ; \; d_r \neq 0 \; ; \; d_r(0, 1) \neq 0 \; ; \; d_r(1, 0) \neq 0.$$

Applichiamo la trasformazione quadratica Q; la superficie trasformata avrà l'equazione:

$$[c_0 x^{n-2} y^{n-2} + c_1 x^{n-3} y^{n-3} t + \cdots + c_{n-2} t^{n-2}] z^2 =$$
$$= t^{r-2} [d_r x^{n-r} y^{n-r} + d_{r+1} x^{n-r-1} y^{n-r-1} t + \cdots + d_n t^{n-r}]$$

ove nelle c e nelle d risultano scambiati gli argomenti x e y.

La superficie trasformata ha dunque ancora un'equazione del tipo

$$C'_{m-2} z^2 = D'_m$$

($m = 2n - 4$). Posto $D'_m = t^{r-2-1} \bar{D}'_{m-r+2}$ la $\bar{D}' = 0$ e la $\bar{C}' = 0$ sono le curve trasformate di $D_n = 0$ e di $C_{n-2} = 0$ mediante la trasformazione quadratica subordinata dalla Q nel piano $z = 0$.

Se $r = 2$ questa prima trasformazione scioglie già la singolarità della superficie. La curva corripondente all'intorno di O è l'intersezione della superficie trasformata con $t = 0$, ed ha le equazioni

$$c_0 z^2 = d_2(x, y) \quad , \quad t = 0 ;$$

è una conica che può essere riducibile solo quando $d_2(x, y)$ sia un quadrato; e ciò avviene quando le tangenti nell'origine alla curva $D_n = 0$ coincidano.

Se invece $r > 2$, posto $k = \left[\frac{r-2}{2}\right]$ la superficie trasformata presenterà k rette doppie, infinitamente vicine alla $t = 0$ sul piano $z = 0$, l'ultima retta essendo nodale se $r = 2k+2$; cuspidale se $r = 2k+3$. Sciogliamo la singolarità costituita da queste rette doppie, con la trasformazione T. Conviene distinguere i casi $r = 2k+2$ ed $r = 2k+3$.

1° Sia $r = 2k+2$. La superficie trasformata ha l'equazione

$$[c_0 x^{2n-4} + c_1 x^{2n-6} t + \cdots + c_{n-2} t^{n-2}] z^2 = x^{2k} [d_{2k+2} x^{2n-4k-4} +$$
$$+ d_{2k+3} x^{2n-4k-6} t + \cdots + d_n t^{n-2k-2}].$$

Le curve rappresentate dalle forme fra parentesi uguagliate a zero, sono le trasformate delle primitive curve $D_n = 0$, $C_{n-2} = 0$ mediante la trasformazione quadratica

$$x' = xt \quad , \quad y' = yt \quad , \quad t = x^2$$

che fa corrispondere all'intorno dell'origine la retta $t = 0$; la superficie è ancora della forma

$$C_{p-2} z^2 = D_p .$$

La curva $D_p = 0$ possiede, sulla retta $t = 0$ quelle singolarità che la $D_n = 0$ aveva nell'intorno del prim'ordine dell'origine, a prescindere dal punto $k = 0$ che risulta introdotto attraverso gli elementi eccezionali delle successive trasformazioni e che, come si vedrà, non ha alcuna influenza sulle considerazioni che dobbiamo fare.

La curva trasformata dell'intorno della retta, e quindi dell'intorno del punto doppio, ha dunque le equazioni

$$c_0 x^{2k} z^2 = d_{2k+2} , \quad t = 0 .$$

Essa si rappresenta sulla retta doppia $z = 0$ ed ha come gruppo di diramazione quello rappresentato dall'equazione $d_{2k+2} = 0$, tolte le radici di molteplicità pari; il gruppo delle diramazioni si può quindi studiare sulla stessa curva in quanto l'equazione $D_n = 0$ dà le tangenti a questa curva nell'origine. In particolare, questa curva è riducibile se le tangenti coincidono

a coppie; in questo caso entrambe le curve sono irriducibili e si intersecano in $k+1$ punti.

b) Sia $s = 2k+3$. L'equazione della superficie trasformata è

$$[c_0 x^{2n-4} + c_1 x^{2n-6} t + \cdots + c_{n-2} t^{n-2}] z^2 =$$
$$= x^{2k} [d_{2k+3} x^{2n-4k-6} + d_{2k+4} x^{2n-4k-8} t + \cdots + d_n t^{n-2k-3}]$$

e la curva corrispondente all'intorno della retta doppia si riduce alla retta $t = 0, z = 0$, contata due volte. Anche qui le forme tra parentesi uguagliate a zero rappresentano le curve trasformate di $D_n = 0$ e $C_{n-2} = 0$ mediante una trasformazione quadratica che muta l'intorno dell'origine nella retta $t = 0$. Ma qui, scritta la superficie nella forma

$$C_{p-2} z^2 = D_p,$$

la curva $D_p = 0$ viene a contenere come componente semplice la retta $t = 0$; quindi $D_p = 0$ presenta sulla retta $t = 0$ le singolarità che la $D_n = 0$ presentava nell'intorno del prim'ordine dell'origine, aggiuntovi per ciascun punto il ramo $t = 0$, ossia, riferendosi allo schema della singolarità di $D_n = 0$, il punto prossimo consecutivo a ciascun dei punti considerati.

Le osservazioni fatte sin qui si possono riassumere nel modo seguente:

data la superficie di equazione $C_{n-2} z^2 = D_n$ in cui la curva $D_n = 0$ possegga un punto multiplo, non appartenente a $C_{n-2} = 0$, nel punto O, è possibile eseguire una trasformazione cremoniana dello spazio in modo che la superficie trasformata sia ancora della forma $C_{p-2} z^2 = D_p$ ed in cui:

1) l'intorno del prim'ordine del punto O sulla superficie si trasforma in una curva semplice di cui si sanno determinare i caratteri a partire dalla configurazione delle tangenti alla $D_n = 0$ nell'origine; 2) la curva $D_p = 0$, a meno di una componente fissa che è estranea alla singolarità che si studia, è costituita dalla trasformata della curva $D_n = 0$ mediante una trasformazione quadratica che fa corrispondere al punto O una retta o, sommata alla o stessa, se la molteplicità di O per la $D_n = 0$ è dispari.

b) Supponiamo che la curva $D_n = 0$ contenga una retta passante per l'origine e distinta dagli assi, con una certa molteplicità s; e che la curva residua $D^*_{n-s} = 0$ abbia l'origine come punto r–plo, con tangenti distinte dagli assi e dalla retta multipla. Complessivamente, la curva $D_n = 0$ possiede l'origine come punto $(r+s)$–plo, in modo che eseguendo la trasformazione quadratica Q, la superficie trasformata, di equazione $C_{m-2} z^2 = D_m$ possiederà $\left[\frac{r+s-2}{2}\right]$ rette doppie vicine alla $t = 0$ nel piano $z = 0$. Vogliamo esaminare come si connettano le curve trasformate delle due rette doppie, quando queste vengano sciolte con la trasformazione T. Occorre distinguere i casi seguenti:

1° r ed s sono entrambi pari, in modo che r ed $r+s-2$ siano pari: allora, siccome la curva di diramazione non va a passare per il punto comune alle due rette, la connessione avrà luogo in due punti semplici e distinti.

2° Dei due numeri r e $r+s-2$ uno sia dispari e l'altro pari (e ciò avviene quando r è pari ed s è dispari, e quando siano entrambi dispari). Allora una delle due curve trasformate si riduce ad una retta contata due volte e l'altra si appoggia semplicemente ad essa.

3° r sia dispari ed s pari, in modo che r e $r+s-2$ siano entrambi dispari; in questo caso trasformiamo con la Q l'intorno del punto comune che darà luogo per la curva $D = 0$ della superficie trasformata ad una componente contata $2r+s-2$ volte, ossia pari. Trasformando poi le tre rette con la T, l'ultima dà luogo ad una curva razionale (poichè possiede due soli punti di diramazione). Le prime due curve saranno quindi sconnesse, tra di loro, e connesse semplicemente a quest'ultima.

c) Consideriamo infine il caso in cui la curva $D_n = 0$ contenga due rette per l'origine $\alpha=0$ e $\beta=0$, distinte dagli assi, con le molteplicità r ed s e che la curva residua $D^*_{n-r-s} = 0$ abbia nell'origine un punto di molteplicità t. Distinguiamo due casi:

1° r ed s pari e la $D^* = 0$ passi semplicemente per l'origine. Se la tangente nell'origine a $D^* = 0$ è distinta dalle due rette $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, le due curve si toccano in un punto semplice per entrambe. Se il ramo della curva $D^* = 0$ ha un contatto di un certo ordine i con una delle due rette, la curva corrispondente presenta $\left[\frac{i}{2}\right]$ punti doppi successivi, e l'altra si connette ad essa, passando semplicemente per il punto doppio.

2° Non si verifichi il caso precedente: allora si trasforma l'intorno dell'origine con la Q e si ottiene una retta che fa parte della $D = 0$ della superficie trasformata $r + s + t - 2$ volte. Le due curve corrispondenti alle due rette $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ saranno sconnesse fra di loro e si connetteranno all'ultima in uno dei modi esaminati sopra.

3° Premesse le osservazioni precedenti, passiamo ad esporre brevemente il metodo che intendiamo seguire, riservandoci di completare l'esposizione e di fornire delle esemplificazioni nella Nota II.

Data la superficie $C_{n-2}\zeta^2 = D_n$, la curva $D_n = 0$ abbia una qualunque singolarità nell'origine, supponendo solo che le tangenti siano distinte dagli assi. Detta O l'origine, rappresentiamo, come è d'uso, con $O_1, O_2, \cdots O_h$ i punti della curva nell'intorno del prim'ordine di O; e con $r_1; r_2, \cdots r_h$ le relative molteplicità; con $O_{i1}, O_{i2}, \cdots, O_{ih_i}$ i punti dell'intorno di O_i ed $r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{ih_i}$ le molteplicità in questi punti, e così di seguito.

Trasformiamo la superficie con la Q; essa fa corrispondere all'intorno del prim'ordine di O la retta $t = 0, \zeta = 0$ che indichiamo con o; essa

avrà la molteplicità $r-2$ per la curva $D = 0$ della superficie trasformata, e risulterà doppia, con $\left|\frac{r-2}{2}\right| - 1$ rette doppie infinitamente vicine sul piano $z = 0$.

Detta $D^* = 0$ la curva residua della $D_n = 0$ quando si tolga la o, si è già osservato che essa è la trasformata di $D_n = 0$ con la trasformazione quadratica subordinata su $z = 0$ dalla Q; quindi essa possiederà sulla o i medesimi punti singolari che la $D_n = 0$ possedeva nell'intorno del prim'ordine di O; continueremo a chiamare con $O_1, O_2, \cdots, O_h$ questi punti. Se $r-2$ è pari, trasformiamo, in modo analogo, gli intorni di quelli fra i punti $O_1, O_2, \cdots, O_h$ che sono singolari per $D^* = 0$ e quindi per $D_n = 0$. Se è dispari, trasformiamo anche gli intorni dei punti semplici. Otterremo in corrispondenza al punto O_i la retta o_i, di molteplicità $r+r_i-4$ per la curva $D = 0$ della superficie trasformata. Poi passiamo a trasformare gli intorni dei punti vicini ad O_i che continueremo a chiamare $O_{i1}, O_{i2}, \cdots, O_{ih_i}$. Se $r+r_i-4$ è pari, ci limiteremo a trasformare i punti singolari per la curva residua. In corrispondenza al punto O_{ij} otterremo una retta o_{ij}, che avrà per la curva $D = 0$ della superficie trasformata la molteplicità $r+r_i+r_j-6$ se O_{ij} è punto libero, e $2r+r_i+r_j-8$ se O_{ij} è prossimo ad O, poichè, in quest'ultimo caso, il punto O_{ij} è comune alle rette o ed o_i. E così di seguito. Per determinare la molteplicità, che indicheremo con $R_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$, con cui la curva $o_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$ compare nella curva $D = 0$ della superficie trasformata vale la seguente regola (che dimostreremo nella Nota II).

si consideri il ramo di ordine minimo passante per i punti $O, O_{i_1}, O_{i_1 i_2}, \cdots, O_{i_1 i_2 \ldots i_\varepsilon}$. *Esso avrà, in questi stessi punti, delle molteplicità che indicheremo con* $s, s_{i_1}, \cdots, s_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$, *mentre, come si è detto, la curva* $D = 0$ *ha in essi le molteplicità* $r, r_{i_1}, \cdots r_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$. *Si avrà*

$$R_{i_1 \ldots i_\varepsilon} = s(r-2) + s_{i_1}(r_{i_1}-2) + \cdots + s_{i_1 i_2 \ldots i_\varepsilon}(r_{i_1 i_2 \ldots i_\varepsilon}-2).$$

La discussione fatta suggerisce di introdurre accanto allo schema della singolarità che la $D = 0$ presenta in O, uno schema alterato che indichi la natura effettiva dei punti vicini ad O per la superficie. Precisamente:

se il punto $O_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$ è prossimo ad $O_{i_1 \ldots i_{\varepsilon-\varepsilon}}$, la sua molteplicità va aumentata di 1 se uno dei due numeri $R_{i_1 \ldots i_{\varepsilon-1}}, R_{i_1 \ldots i_{\varepsilon-\varepsilon}}$ è dispari, di 2 se sono entrambi dispari. Se $O_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$ è punto libero, la molteplicità va aumentata di 1 se $R_{i_1 i_2 \ldots i_{\varepsilon-1}}$ è dispari, va mantenuta inalterata se è pari.

Si noti che la regola ora enunciata porta di conseguenza che per due punti consecutivi $O_{i_1 \ldots i_\varepsilon}, O_{i_1 \ldots i_{\varepsilon+1}}$ che hanno entrambi molteplicità dispari va introdotto nello schema anche il punto prossimo ad $O_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$ e consecutivo ad $O_{i_1 \ldots i_{\varepsilon+1}}$, anche se esso non appartiene affatto alla curva $D = 0$. Infatti, in tal caso la molteplicità del detto punto satellite è $0+2=2$ ed il punto risulta singolare per la superficie.

Lo schema modificato mostra chiaramente fino a qual punto bisogna adoperare la trasformazione Q per sciogliere le singolarità originarie, o acquisite attraverso la trasformazione.

Quando gli intorni di tutti i punti che compaiono nello schema sono trasformati in curve, con l'applicazione della trasformazione T (o di quella dedotta da essa con un certo numero di successive trasformazioni Q), si sciolgono le rette doppie così ottenute, facendo corrispondere ormai all'intorno del punto doppio una curva semplice che indichiamo con Ω. Le sue componenti, provenienti dalle curve o, verranno indicate con ω. La $\omega_{i_1 \ldots i_e}$ è costituita di una curva semplice, eventualmente spezzata in due parti distinte, se $R_{i_1 \ldots i_e}$ è pari; di una curva contata due volte se $R_{i_1 \ldots i_e}$ è dispari. Vale ora il teorema:

La molteplicità con cui la curva $\omega_{i_1 \ldots i_e}$ *fa parte della curva* Ω *è uguale a quella con cui la curva* $o_{i_1 \ldots i_e}$ *fa parte della curva eccezionale riducibile trasformata (sul piano* $z = 0$*) del gruppo dei punti* $O_{i_1 \ldots i_e}$ [6].

Infatti, si osservi che un cono proiettante dal punto all'infinito dell'asse z una curva C del piano $z = 0$, si trasforma, mediante la Q, nel cono che proietta dallo stesso punto la curva $\bar{C}$ trasformata di C. Consideriamo un sistema lineare di curve $|C|$ che non abbia un punto base in O; esso darà luogo ad un sistema lineare di coni proiettanti e quindi ad un sistema lineare di curve $|\Gamma|$ sulla superficie. Quando le curve C e quindi le Γ vanno a passare per O, le $\bar{C}$ si spezzano, contenendo le curve $o_{i_1 \ldots i_e}$ con certe molteplicità; i coni proiettanti le $\bar{C}$ si spezzano contenendo i coni proiettanti le $o_{i_1 \ldots i_e}$, con le medesime molteplicità e quindi le $\bar{\Gamma}$ vengono a contenere con uguale molteplicità gli intorni delle o e quindi le ω.

La determinazione degli altri caratteri delle ω non presenta molte difficoltà e verrà fatta nella Nota II.

(6) Questa è stata determinata da BARBER e ZARISKI (loc. cit.) giungendo al seguente risultato: *la molteplicità della curva* $o_{i_1 \ldots i_2}$ *è uguale all'ordine del ramo di ordine minimo passante per i punti* $O, O_{i_1}, O_{i_1 i_2}, \ldots, O_{i_1 i_2 \cdots i_e}$.

Matematica (Geometria). — *Un teorema sopra gli spigoli di Green di una superficie.* Nota di U. Salini, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

1. Consideriamo una superficie φ dello spazio ordinario, non rigata, e in un suo punto P il piano tangente α, la quadrica di Lie e il fascio principale di quadriche [2].

Indichiamo con π_1 la polarità rispetto alla quadrica di Lie, con π_2 quella rispetto alla generica quadrica Γ del fascio principale e con π la proiettività prodotto di π_1 e π_2.

Scopo di questa Nota è di far vedere che la proiettività π è generalmente, una omografia assiale che ha per asse il secondo spigolo di Green, mentre il sostegno del fascio di piani uniti è il primo spigolo di Green.

Inoltre, nel fascio principale esiste una ed una sola quadrica Γ^* che insieme alla quadrica di Lie dà luogo ad una proiettività π che è una omografia biassiale i cui assi sono i due spigoli di Green. Si viene così ad individuare, in maniera proiettiva, una quadrica del fascio principale.

2. Riferendo la superficie φ alle linee asintotiche, facciamo corrispondere alle coordinate proiettive non omogenee (x'', y'', z'') di un qualunque punto dello spazio le coordinate locali (x^*, y^*, z^*) mediante la posizione:

$$x'' = x + x^* \frac{\partial x}{\partial u} + y^* \frac{\partial x}{\partial v} + z^* \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

(e le analoghe in y e z), essendo (x, y, z) il punto della superficie.

Sappiamo allora che rispetto alle dette coordinate locali la quadrica di Lie è rappresentata dalla equazione [3]:

$$z^* - x^* y^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right) z^{*2} = 0$$

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Vedi: E. Bompiani, *Invarianti di intersezione di due curve sghembe.* «Rend. Lincei», XIV, 1931, p. 456; cfr. pure U. Salini, *Sopra un fascio di quadriche definito in un punto di una superficie.* «Rend. Lincei», vol. XXVII, ser. 6ª, fasc. I, 1938; cfr. pure P. Lane, *Invariants of intersection ecc.* «American Journal of Mathematics», October 1932, p. 699.

(3) Vedere R. Calapso, *Un teorema sullo spigolo di Green.* «Rend. Lincei», vol. XIII, ser. 6ª, 1931.

ed il fascio principale di quadriche dalla

$$cz^{*2} - \frac{1}{3} x^* y^* + \frac{1}{3} M_1 x^* z^* + \frac{1}{3} M_2 y^* z^* + z^* = 0,$$

dove si è posto [1]

$$M_1 = a - \frac{1}{2b} \frac{\partial b}{\partial u} \quad ; \quad M_2 = q - \frac{1}{2p} \frac{\partial p}{\partial v}.$$

Ciò posto, sostituiamo alle dette coordinate locali le coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 ed indichiamo con $A(x_1, x_2, x_3 x_4)$ ed $A'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ due punti corrispondenti nella proiettività π. Si trova allora che le coordinate dei detti punti sono legate dalle relazioni:

$$\begin{cases} \rho x_1 = x'_1 - M_2 x'_3 \quad ; \quad \rho x_2 = x'_2 - M_1 x'_3 \\ \rho x_3 = 3 x'_3 \quad ; \quad \rho x_4 = M_1 x'_1 + M_2 x'_2 + 3 \Delta x'_3 + 3 x'_4, \end{cases}$$

dove si è posto:

$$\Delta = 2C - \left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp \right).$$

I punti uniti della detta proiettività π debbono allora soddisfare con le loro coordinate al sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} (1-\rho) x'_1 - M_2 x'_3 = 0 \quad ; \quad (1-\rho) x'_2 - M_1 x'_3 = 0 \\ (3-\rho) x'_3 = 0 \quad ; \quad M_1 x'_1 + M_2 x'_2 + 3 \Delta x'_3 + (3-\rho) x'_4 = 0 \end{cases}$$

e queste equazioni sono soddisfatte da valori non tutti nulli delle x'_i sempre e solo quando ρ è radice della equazione di 4° grado:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1-\rho & 0 & -M_2 & 0 \\ 0 & 1-\rho & -M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\rho & 0 \\ M_1 & M_2 & 3\Delta & 3-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione ammette quattro radici reali, due delle quali coincidono con 1 e le altre due hanno il valore 3. La radice $\rho = 1$ fa assumere al

(1) I coefficienti a, b, p, q sono quelli che figurano nelle equazioni

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial x}{\partial v}$$

che definiscono la superficie φ riferita alle linee asintotiche.

determinante del primo membro della equazione precedente la caratteristica 2. Ne segue che sostituendo nelle (1) al posto di ρ il valore 1, due delle equazioni sono conseguenza delle altre due. Le equazioni indipendenti sono:

$$M_1 x'_1 + M_2 x'_2 + 2 x'_4 = 0 \quad ; \quad x'_3 = 0.$$

Alla radice $\rho = 1$ corrispondono perciò infiniti punti uniti appartenenti alla retta s_2 che ha le equazioni ora dette. Si vede poi che se la espressione:

$$\xi = 3\Delta - M_1 M_2$$

è diversa da zero, come in generale avviene per la generica quadrica Γ del fascio principale, la radice $\rho = 3$ fa assumere al determinante che figura nella (2) la caratteristica 3. Allora, per $\rho = 3$, dalle (1) si deducono le equazioni indipendenti:

$$(3) \quad 2 x'_1 + M_2 x'_3 = 0 \; ; \; 2 x'_2 + M_1 x'_3 = 0 \; ; \; M_1 x'_1 + M_2 x'_2 + 3\Delta x'_3 = 0$$

il cui determinante dei coefficienti è diverso da zero, avendo già supposto che $\xi \neq 0$. Si ha perciò che la sola soluzione di questo sistema è

$$x'_1 = 0 \quad ; \quad x'_2 = 0 \quad ; \quad x'_3 = 0.$$

Ciò prova che la proiettività π ammette fuori della retta s_2 due punti uniti, coincidenti col punto che ha le coordinate

$$x'_1 = 0 \quad ; \quad x'_2 = 0 \quad ; \quad x'_3 = 0,$$

cioè, col punto P della superficie φ.

La retta s_2, che nelle coordinate locali non omogenee ha le equazioni,

$$M_1 x^* + M_2 y^* + 2 = 0 \quad ; \quad z^* = 0,$$

rappresenta il 2° spigolo di Green.

Riferendoci poi alle coordinate omogenee di piano, attraverso la (2), si può provare che l'asse del fascio dei piani uniti della omologia assiale è la retta di equazioni:

$$2 x^* + M_2 z^* = 0 \quad , \quad 2 y^* + M_1 z^* = 0,$$

e questa retta è proprio il primo spigolo s_1 di Green. L'omologia ha fuori di questo fascio un altro piano unito, che è il piano α tangente alla superficie φ nel punto P. Si ha perciò il risultato:

La proiettività π, determinata nel modo detto al n. 1 dalla quadrica di Lie e dalla generica quadrica del fascio principale, è una omografia assiale che ha per asse il secondo spigolo di Green e per sostegno del fascio di piani uniti il primo spigolo di Green.

3. Proponiamoci adesso di vedere quando avviene che la detta omografia è biassiale. Perchè ciò sia, occorre e basta che la radice $\rho = 3$ della (2) renda uguale a due la caratteristica del determinante che rappresenta il primo membro della (2) stessa. Ma allora occorre e basta che sia

$$\xi = 0, \quad \text{cioè} \quad 3\Delta - M_1 M_2 = 0.$$

Tenendo conto che

$$\Delta = 2C - \left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right)$$

si deduce allora che deve essere:

$$(3) \qquad C = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right) + \frac{1}{6}\left(a - \frac{1}{2b}\frac{\partial b}{\partial u}\right)\left(q - \frac{1}{2p}\frac{\partial p}{\partial v}\right).$$

Cioè, perchè la proiettività π sia una omografia biassiale, deve essere determinata nel modo detto al n. 1 attraverso la quadrica di Lie e la quadrica Γ^* del fascio principale corrispondente al valore di C dato dalla (3). Tale quadrica ha perciò l'equazione locale:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + bp\right) + \frac{1}{6}\left(a - \frac{1}{2b}\frac{\partial b}{\partial u}\right)\left(q - \frac{1}{2p}\frac{\partial p}{\partial v}\right)\right] z^{*2} - \frac{1}{3} x^* y^* +$$

$$+ \frac{1}{3} M_1 x^* z^* + \frac{1}{3} M_2 y^* z^* + z^* = 0.$$

Si viene così a staccare proiettivamente una particolare quadrica del fascio principale.

Nella omografia biassiale così determinata uno degli assi è il secondo spigolo s_2 di Green ed esso corrisponde alla radice $\rho = 1$ della (2). Per la radice $\rho = 3$ si ha che le (1) si riducono a due sole equazioni indipendenti

$$2x'_1 + M_2 x'_3 = 0 \quad , \quad 2x'_2 + M_1 x'_3 = 0$$

le quali rappresentano il primo spigolo di Green. Questa retta è il secondo asse della omologia biassiale.

Le coppie di punti corrispondenti di questa omologia sono perciò distribuite sopra le ∞^2 rette della congruenza lineare che ha per direttrici i due spigoli di Green.

Si può quindi enunciare il risultato:

Nel fascio principale di quadriche esiste una ed una sola quadrica (che ha l'equazione (4)) tale che insieme alla quadrica di Lie determina, nel modo detto al n. 1, una proiettività π che è una omografia biassiale avente per assi i due spigoli di Green.

Matematica (Geometria). — *Sopra una classe di curve e sopra certe rappresentazioni equivalenti delle superficie.* Nota di M. Mineo, presentata [1] dal Corrisp. M. De Franchis.

Il Vincensini si è occupato della determinazione di tutte le curve dello spazio che con un movimento (in particolare con una rotazione attorno a un asse) descrivono aree proporzionali agli archi; e si giova di tali curve per la rappresentazione equivalente di una superficie di rotazione sopra un'altra, pure di rotazione, in modo che sulle due superficie si corrispondano due famiglie di curve aventi la proprietà anzidetta e che brevemente chiamerò *curve di Vincensini*. L'autore, nella sua importante ricerca, si serve di procedimenti elementari di carattere intuitivo, spesso ingegnosi, ma che qualche volta lasciano a desiderare dal punto di vista del rigore; e nel caso delle rappresentazioni non riesce, faticosamente, se non a costruirne qualche esempio assai semplice [2]. In questa breve Nota pongo rigorosamente il problema della ricerca delle curve del Vincensini e trovo che rappresentando parametricamente (parametro l'arco) una di queste curve e dando arbitrariamente una certa funzione, due delle tre funzioni incognite si determinano algebricamente e la terza con una semplice quadratura. Passando alla rappresentazione equivalente d'una superficie di rotazione su di un'altra di rotazione, in modo che si corrispondano due famiglie di curve del Vincensini, trovo naturalmente che resta sempre dell'arbitrarietà e stabilisco la più generale di tali rappresentazioni, nella quale entrano funzioni arbitrarie: la rappresentazione data dal Vincensini non è che un caso particolarissimo.

1. Siano

$$(1) \qquad x = \varphi(u) \quad , \quad y = \chi(u) \quad , \quad z = \psi(u)$$

le equazioni parametriche d'una curva di arco u. Abbiamo quindi

$$(2) \qquad \varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2 = 1 .$$

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Vedi P. Vincensini, *Sur une famille de courbes et la représentation géographique des surfaces.* «L'Enseignement mathématique», vol. 37, 1936, Paris, pp. 146–172.

Le equazioni parametriche della superficie generata dalla rotazione di (1) attorno all'asse z, sono:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \varphi(u)\cos v - \chi(u)\operatorname{sen} v, \\ y = \varphi(u)\operatorname{sen} v + \chi(u)\cos v, \\ z = \psi(u). \end{cases}$$

Ponendo

$$(4)\qquad E = 1 \quad , \quad F = \varphi\chi' - \varphi'\chi \quad , \quad G = \varphi^2 + \chi^2,$$

il quadrato dell'elemento lineare di (3) è

$$(5)\qquad ds^2 = du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Le $u = \text{cost.}$ sono i paralleli di (3); le $v = \text{cost.}$ sono curve congruenti alla curva (1). L'elemento d'area della (3) è

$$(6)\qquad dA = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2 - (\varphi\chi' - \varphi'\chi)^2}\,du\,dv.$$

Dalle (5) e (6) segue immediatamente che condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1), ruotando attorno all'asse z, descriva aree proporzionali agli archi, cioè sia una curva del Vincensini, è che si abbia

$$(7)\qquad \varphi^2 + \chi^2 - (\varphi\chi' - \varphi'\chi)^2 = K^2,$$

essendo K una costante.

Si ponga

$$(8)\qquad \Phi = \frac{\chi}{\varphi}.$$

La (7) diventa

$$(9)\qquad 1 + \Phi^2 - \varphi^2\Phi'^2 = \frac{K}{\varphi^2}.$$

Supponiamo data ad arbitrio la funzione Φ di u; allora dalla (9), algebrica rispetto a φ, possiamo determinare la stessa φ; poi dalla (8) si ricava la χ, e in fine dalla (2) si ha

$$(10)\qquad \psi = \int \sqrt{1 - \varphi'^2 - \chi'^2}\,du,$$

e con questa quadratura il problema di trovare tutte le curve del Vincensini è risoluto.

2. Passiamo ora a stabilire la proprietà caratteristica delle curve del Vincensini. Se chiamiamo α l'angolo che una qualunque curva della nostra

superficie forma con i paralleli, cioè con le curve $u = \text{cost.}$, abbiamo, per note formole della teoria delle superficie:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(G\frac{dv}{ds} + F\frac{du}{ds}\right) \quad , \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}}\frac{du}{ds}.$$

Se in particolare si tratta di una curva del Vincensini ($v = \text{cost.}$), è allora $ds = du$, e quindi si ha, per la (7):

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{K}{\sqrt{\varphi^2 + \chi^2}}. \tag{11}$$

Chiamando r il raggio del parallelo passante per il punto generico della nostra superficie, abbiamo

$$r = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2}. \tag{12}$$

E quindi segue per le curve del Vincensini

$$r \operatorname{sen}\alpha = K. \tag{13}$$

Ora, sulle geodetiche della superficie si ha, per il teorema di Clairaut:

$$r \operatorname{sen}\omega = K,$$

dove ω è l'angolo che la geodetica forma con i meridiani della superficie.

Confrontando questa equazione con la (13), si vede che una geodetica, il cui parametro di Clairaut sia K (cioè che tocca il parallelo di raggio K), passante per un punto generico M della superficie, e una delle due curve del Vincensini, dello stesso parametro K, uscenti da M (simmetriche rispetto al piano meridiano di M), sono ortogonali. Dunque:

Le curve del Vincensini di parametro K, *sopra una superficie di rotazione, sono le traiettorie ortogonali delle geodetiche della superficie, il cui parametro di Clairaut è* K [1].

Giovandosi di questa proprietà caratteristica, il Vincensini determina (per quadratura) le sue curve sulla sfera, sui coni di rivoluzione, ecc. [2].

3. Veniamo in fine alla rappresentazione equivalente di due superficie di rotazione l'una sull'altra, in modo che due famiglie di curve del Vincensini si corrispondano. Abbiamo visto che il quadrato dell'elemento lineare di una superficie di rotazione, sulla quale le $v = \text{cost.}$ siano curve del Vincensini, è dato dalla (5), in cui F e G sono funzioni della sola u, verifi-

(1) Il Vincensini ricava la (13) con questa considerazione intuitiva: l'area generata dall'arco du della curva, attorno all'asse z, è la stessa di quella generata dalla proiezione di du sul piano meridiano passante per il punto dal quale si spicca, per così dire, il du, ed è quindi eguale a $2\pi r \operatorname{sen}\alpha\, du$, ecc.

(2) Vedi loc. cit., pp. 150–154.

canti la (7). E reciprocamente si dimostra subito che una superficie il cui ds è dato dalla (5) in cui F e G sono funzioni di sola u, verificanti la (7), dove K è una costante, è applicabile sopra una superficie di rotazione in modo che le linee $u = \text{cost.}$ si distendano sui paralleli e le $v = \text{cost.}$ su curve del Vincensini.

Si consideri quindi una seconda superficie il cui elemento lineare sia dato da

$$ds_1^2 = du_1^2 + 2F_1\,du_1 dv_1 + G_1\,dv_1^2, \tag{14}$$

con

$$E_1 = 1 \quad , \quad F_1 = \varphi_1\chi_1' - \varphi_1'\chi_1 \quad , \quad G_1 = \varphi_1^2 + \chi_1^2; \tag{15}$$

le quali funzioni di sola u_1 verifichino la condizione

$$E_1 G_1 - F_1^2 = K_1^2, \tag{16}$$

con K_1 costante. Le formole

$$u_1 = u_1(u, v) \quad , \quad v_1 = f(v)$$

dànno una rappresentazione dell'una superficie sull'altra in modo che a una curva $v = \text{cost.}$ corrisponde una curva $v_1 = \text{cost.}$, cioè in modo che si corrispondono due famiglie del Vincensini. Se vogliamo che la rappresentazione sia anche equivalente (cioè, che le aree di figure corrispondenti abbiano rapporto costante), bisogna imporre, come discende subito dalle formole precedenti, la condizione

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{\lambda}{f'(v)} \qquad (\lambda\,, \text{costante}). \tag{17}$$

Potremo dare ad arbitrio la funzione $f(v)$; e allora l'integrale generale della (17) è

$$u_1 = \frac{\lambda}{f'(v)}\,u + f_1(v),$$

essendo f_1 simbolo di funzione arbitraria. Dunque

$$u_1 = \frac{\lambda}{f'(v)}\,u + f_1(v) \quad , \quad v_1 = f(v) \tag{18}$$

dànno la più generale rappresentazione equivalente (dipendente da due funzioni arbitrarie) dell'una superficie sull'altra, in modo che si corrispondano due famiglie di curve del Vincensini. Se vogliamo inoltre che si corrispondano i paralleli e che le aree siano conservate in vera grandezza, abbiamo il caso particolarissimo

$$u_1 = u \quad , \quad v_1 = v,$$

contemplato dal Vincensini.

Meccanica. — *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità.* Nota I di C. Cattaneo, presentata [1] dal Corrisp. A. Signorini.

In un generico mezzo elastico possono propagarsi, in determinate circostanze, onde di discontinuità; ad ogni istante e in ogni punto del fronte d'onda, la discontinuità, che non riguarda direttamente le componenti di spostamento ma le loro derivate parziali (prime o seconde o d'ordine più elevato, a seconda del tipo d'onda), è complessivamente caratterizzata da un vettore λ, la cui direzione prende il nome di direzione di discontinuità. Questo vettore e la velocità d'avanzamento a del fronte, che sono gli elementi caratteristici dell'onda, risultano determinati, in ogni punto del mezzo e in corrispondenza a ogni direzione di propagazione, dai caratteri elasto-meccanici, locali, del mezzo e dallo stato di tensione preesistente alla perturbazione ondosa. Nel caso generale di un mezzo elastico eterogeneo e anisotropo sono notoriamente possibili, almeno per le onde d'accelerazione, tre direzioni di discontinuità, mutuamente ortogonali, coincidenti con le direzioni principali di una quadrica, detta di polarizzazione, la quale fornisce anche, con gli inversi dei suoi tre semiassi, le rispettive velocità di avanzamento. Perchè tutte codeste velocità risultino finite e non nulle, perchè in altri termini si possa parlare di effettiva propagazione, è necessario naturalmente che finiti e non nulli siano i tre semiassi, sì che il più delle volte si parla senz'altro di *ellissoide* di propagazione, sottintendendone l'effettiva esistenza. Alla domanda, che spontaneamente si pone, se o quando si possa esser certi di questa esistenza, risponde un criterio, di vastissima portata, formulato dall'Hadamard nelle sue celebri *Leçons sur la propagation des ondes* [2]: a garantire l'esistenza di un ellissoide reale di propagazione in ogni punto e per ogni direzione di propagazione basta che il mezzo elastico si trovi, prima del fenomeno ondoso, in condizioni di equilibrio stabile. La stabilità è naturalmente intesa in senso globale: lavoro complessivo delle forze intime e delle forze esterne negativo in corrispondenza a ogni spostamento, non rigido, del sistema. L'importanza del teorema è evidente: praticamente in tutti i casi di interesse effettivo ha senso sicuro parlare di ellissoide di propagazione. Tanto più grande appare la sua portata se si pensa che, anche in assenza di forze esterne, dalla stabilità

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes.* Paris, Hermann, 1903, chap. VI.

globale non consegue, in generale, che sia ovunque negativo il lavoro locale delle forze intime, sì che se quella è assicurata si può parlare di propagazione ondosa anche in zone localmente instabili.

L'enunciato dell'Hadamard si riferisce tanto al caso di deformazioni infinitesime quanto al caso più generale di deformazioni finite. In realtà, una critica approfondita del prof. Signorini svolta in un corso tenuto presso il R. Istituto Nazionale di Alta Matematica [1] ha mostrato che per deformazioni finite il teorema non è accettabile incondizionatamente e successivamente il prof. Tolotti [2] ha precisato che esso è valido solo per particolari forme del potenziale termoelastico. Ma anche nell'ambito delle deformazioni infinitesime la dimostrazione dell'Hadamard ha offerto il fianco ad autorevoli critiche. Il Duhem, nelle sue *Recherches sur l'Elasticité* [3] mette in evidenza un punto discutibile, *un point litigieux*, com'egli dice, essenziale nella dimostrazione e quindi tale da infirmarne il valore probativo. Il Duhem stesso propone di sostituire al punto in discussione un'altra proposizione, equivalente per la dimostrazione, che egli ritiene verosimile, ma che egli stesso riconosce « malaisé de demontrer par un raisonnement rigoureux ».

Di fronte a queste difficoltà, tali da mettere in dubbio, anche per deformazioni infinitesime, l'incondizionata validità di un teorema di importanza fondamentale ma in pari tempo privo di ogni carattere intuitivo, la questione di rigore acquistava un particolare interesse. Nelle pagine che seguono riprenderemo l'argomento, per deformazioni infinitesime, arrivando a confermare pienamente, anzi con qualche maggiore generalità e credo senza incertezze, il teorema dell'Hadamard. La generalizzazione cui ora ho alluso starà nel considerare la propagazione ondosa di perturbazioni infinitesime entro un mezzo elastico che si trovi in istato di equilibrio forzato *qualsiasi*, anche non infinitamente prossimo allo stato naturale. Utilizzerò allo scopo le equazioni del Signorini relative ai piccoli moti attorno a una qualunque posizione di equilibrio spostato, equazioni che ho già avuto occasione di applicare a un problema di propagazione nell'atmosfera [4].

Direttamente le considerazioni che seguono si riferiscono a onde di discontinuità ordinarie (onde di accelerazione). Non è tuttavia privo di interesse notare che il teorema dell'Hadamard può estendersi senza modificazioni anche alle onde d'urto, come rapidamente indicherò a conclusione del presente lavoro.

(1) Nell'anno 1942.

(2) C. Tolotti, *Deformazioni elastiche finite: onde ordinarie di discontinuità e caso tipico di solidi elastici isotropi.* « Rendiconti di Matematica » (1943), ser. V, vol. IV, pp. 34-59.

(3) P. Duhem, *Recherches sur l'Elasticité.* Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 141 e sgg.

(4) *Sulla propagazione del suono nell'atmosfera con riguardo alla gravità e al gradiente termico.* « Nuovo Cimento », Nuova serie, anno 1942, pp. 230-253.

Dovendosi, per completezza, premettere qualche richiamo, l'argomento non potrà esaurirsi in questa Nota e verrà perciò completato in una Nota successiva.

1. Piccoli moti attorno a una configurazione di equilibrio forzato. Onde di accelerazione. Quadrica di polarizzazione. – Un sistema elastico S, del tutto generico, ammetta, sotto l'azione di una certa sollecitazione invariabile $[\mathbf{F}^{(0)}, f^{(0)}]$ (1), una configurazione di equilibrio stabile C* che assumeremo come configurazione di riferimento; non è affatto escluso che essa provenga dallo stato naturale di S, se pure esiste, mediante una deformazione finita. Introdotta una terna cartesiana, siano y_1, y_2, y_3 le coordinate del punto generico P* di C*, $(F_1^{(0)}, F_2^{(0)}, F_3^{(0)})$, $(f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_3^{(0)})$ le componenti della suddetta sollecitazione invariabile, di massa e di superficie, $X_{rs}^{(0)}$ $(r, s = 1, 2, 3)$ le caratteristiche euleriane di tensione corrispondenti allo stato di equilibrio considerato. Sia poi C una generica configurazione infinitamente prossima a C*, $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ la posizione in C della particella che in C* occupa la posizione P*, ed $\boldsymbol{s} = P^* P$ lo spostamento locale, di componenti (u_1, u_2, u_3).

Se ora supponiamo che oltre alle forze invariabili $[\mathbf{F}^{(0)}, f^{(0)}]$ agisca su S una sollecitazione addizionale qualunque $[\mathbf{F}, f]$, le equazioni indefinite dei piccoli moti attorno a C* sotto codesta azione complessiva si scrivono, indicate con Y_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ le caratteristiche lagrangiane di tensione corrispondenti allo stato attuale,

$$(1) \qquad k^*\left(F_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right) = \sum_s^3 \frac{\partial^2 Y_{is}}{\partial y_s} + \sum_{rs}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial y_r \partial y_s} X_{rs}^{(0)} + k^* \sum_s^3 \frac{\partial u_i}{\partial y_s} F_s^{(0)}$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

A queste, andrebbero aggiunte altrettante condizioni al contorno che qui non è il caso di considerare, anche se nella genesi delle onde di discontinuità esse intervengono in modo essenziale. La stessa locuzione « piccoli moti » chiarisce che le (1) sono equazioni approssimate, del tutto analoghe a quelle dell'Elasticità ordinaria, ricavate rigorosamente quali primi termini di opportuni sviluppi in serie (2). Anzi, a rigore, nè le u_i, nè le Y_{is}

(1) Indicheremo con $\mathbf{F}^{(0)}$ l'intensità della forza di massa, funzione del posto ma indipendente da t, e con $f^{(0)}$ l'intensità della forza superficiale, anch'essa generalmente variabile da punto a punto ma invariabile nel tempo.

(2) Per tutto ciò che concerne cinematica ed equazioni generali della termoelasticità per deformazioni finite si consulti: A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite.* Memoria 1ª, « Annali di Matematica », ser. 4ª, to. XXII (1943), pp. 33–143. Riguardo poi alle equazioni (1), in attesa della pubblicazione della 2ª Memoria del prof. Signorini rimando il lettore alla mia Nota sopra citata, in cui sono richiamati gli elementi essenziali della loro deduzione.

che vi compaiono rappresentano i valori esatti delle componenti di spostamento e delle caratteristiche lagrangiane di tensione, ma solo le loro parti principali in analoghi sviluppi, interpretazione, questa, che del resto si impone anche nell'Elasticità ordinaria. Ad ogni modo, per evitare ingombranti notazioni non stiamo a distinguerle con speciali contrassegni.

L'elasticità di S si traduce poi in una corrispondenza biunivoca lineare con le caratteristiche linearizzate di deformazione [1]

$$(2) \qquad Y_r = -\sum_1^6{}_s M_{rs}\,\varepsilon_s .$$

Le quantità invariabili M_{rs} che figurano in queste formule, da intendersi soltanto funzioni di P*, altro non sono, a meno del fattore k^*, che le derivate seconde del potenziale elastico, isotermico o adiabatico a seconda del caso, rispetto alle caratteristiche di deformazione, valutate nello stato di equilibrio C*

$$M_{rs} = -k^* \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_r \, \partial \varepsilon_s} \qquad (r, s = 1, \cdots, 6).$$

Le equazioni (2), corrispondenti alle legge dell'Hooke nell'ordinaria teoria, consentono, insieme con le (1), l'impostazione del problema delle piccole oscillazioni di S attorno alla configurazione C*, la quale, ricordiamolo, è posizione di equilibrio stabile comunque forzato.

Le (1) differiscono dalle equazioni indefinite dell'ordinaria elasticità linearizzata [2], figurando in esse esplicitamente lo stato di tensione e la sollecitazione esterna già esistente nello stato di riferimento prescelto. È ben noto che il primo a segnalare l'influenza sul moto elastico di un preesistente stato di tensione è stato il Poincaré. Le (1), stabilite dal Signorini, godono di un'assoluta generalità.

(1) Le caratteristiche lagrangiane di tensione risultano in corrispondenza biunivoca con le caratteristiche (esatte) di deformazione, anche nel caso di deformazioni finite, subordinatamente all'esistenza d'un potenziale elastico $A(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_6)$, ciò che è naturalmente sottinteso. Si ha allora notoriamente $Y_r = \dfrac{\partial A}{\partial \varepsilon_r}$ $(r = 1, \cdots, 6)$. Il potenziale d'elasticità nei casi isotermici coincide con la prima funzione caratteristica $\Theta(\varepsilon \mid T)$, nei casi adiabatici con l'espressione, cambiata di segno, dell'energia specifica interna in termini delle ε e dell'entropia. Se ci si limita a considerare trasformazioni infinitesime, le relazioni ora scritte si approssimano nella forma (2), ove le ε che vi compaiono sono le caratteristiche di deformazione linearizzate (cfr. successiva formula (4)).

Per quanto riguarda l'uso alternato delle notazioni a due indici o a un solo indice per le Y e le ε, si veda la nota a p. 232 del mio lavoro citato sopra.

(2) È chiaro però che se C* coincide collo stato naturale di S, ciò che comporta $X_{rs}^{(0)} \equiv 0$, $F_s^{(0)} = 0$, $Y_{is} = X_{is}$, le (1) si riducono alle ordinarie equazioni di Cauchy, e quindi, mediante le (2), alle equazioni dell'elasticità classica.

Ciò premesso, esaminiamo se, compatibilmente con le (1) e (2) possano propagarsi, in seno al mezzo elastico considerato, onde di discontinuità del secondo ordine. Su un ipotetico fronte d'onda σ_t, di discontinuità per le $\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_r \partial y_s}$ $(i, r, s = 1, 2, 3)$, le condizioni geometrico-cinematiche dell'Hugoniot notoriamente si scrivono, indicando con [ ] un simbolo di brusca variazione nell'attraversamento del fronte, con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ il vettore della discontinuità, con $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ il vettore della normale a σ_t nel suo verso d'avanzamento e con a la velocità di propagazione [1],

$$\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right] = \lambda_i a^2 \quad , \quad \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_r \partial y_s}\right] = \lambda_i N_r N_s \quad (i, r, s = 1, 2, 3).$$

Queste condizioni, applicate alle (1), dànno subito le condizioni di compatibilità dinamica

$$(3) \qquad -\lambda_i a^2 k^* = \sum_1^3{}_s \left[\frac{\partial Y_{is}}{\partial y_s}\right] + \lambda_i \sum_1^3{}_{rs} X_{rs}^{(o)} N_r N_s \quad (i = 1, 2, 3),$$

che occorre ora esplicitare completamente. Per ricavare la discontinuità delle $\frac{\partial Y_{is}}{\partial y_s}$ bisogna riferirsi alle formule (2) nonchè alle espressioni esplicite delle caratteristiche linearizzate di deformazione

$$(4) \qquad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial y_r} \quad , \quad \varepsilon_{r+3} = \frac{\partial u_{r+1}}{\partial y_{r+2}} + \frac{\partial u_{r+2}}{\partial y_{r+1}} \quad (r = 1, 2, 3) \text{ [2]}.$$

Ponendo

$$(5) \qquad e_s = \lambda_s N_s \quad , \quad e_{s+3} = \lambda_{s+1} N_{s+2} + \lambda_{s+2} N_{s+1} \quad (s = 1, 2, 3),$$

si ha

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y_s}\right] = N_s e_r \quad (r = 1, \cdots, 6 \, ; \, s = 1, \cdots, 3)$$

donde subito si trae

$$\left[\frac{\partial Y_h}{\partial y_k}\right] = N_k \sum_1^6{}_j M_{hj} e_j .$$

A sostituzioni effettuate si riconosce che, posto

$$(6) \qquad Q(\lambda \mid N) = \sum_{rs} M_{rs} e_r e_s - \frac{1}{k^*} \sum_{hke} \lambda_i^2 N_h N_k X_{hk}^{(o)},$$

(1) Si veda, ad esempio, J. HADAMARD, op. cit., cap. II.

(2) È evidente che $u_4, u_5, u_6, y_4, y_5, y_6$ equivalgono a $u_1, u_2, u_3, y_1, y_2, y_3$ rispettivamente; analogamente $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, N_4, N_5, N_6$ stanno per $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, N_1, N_2, N_3$.

alle equazioni di compatibilità dinamica può darsi la forma

$$\lambda_i a^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

o anche, in modo equivalente,

$$\lambda_i a^2 = \sum_1^3{}_k q_{ik} \lambda_k ; \tag{7'}$$

avendo indicato con q_{ik} i coefficienti della Q, considerata quale forma quadratica nelle λ. Le q_{ik}, a loro volta, sono forme quadratiche nelle N, ulteriormente dipendenti da P*.

Un'onda di discontinuità del secondo ordine può dunque sussistere purchè si possa soddisfare con valori non tutti nulli delle λ, chè altrimenti le discontinuità sarebbero illusorie, alle condizioni (7'). Si tratta, per le λ, di un sistema lineare e omogeneo che ammette soluzioni non tutte nulle se e solo se è nullo il determinante dei coefficienti; allora cioè che a^2 è radice dell'equazione cubica

$$\begin{vmatrix} q_{11} - a^2 & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} - a^2 & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} - a^2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{8}$$

La (8), come equazione secolare, ha certo reali tutte le radici, ma solo se queste sono anche positive saranno reali i valori delle velocità d'avanzamento. Vediamo a quali condizioni è subordinato il verificarsi di questa circostanza. Allo scopo, assunta una terna d'assi ξ_1, ξ_2, ξ_3 paralleli e concordi con gli assi coordinati e con l'origine in P*, consideriamo la quadrica, con centro in P*, di equazione

$$Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_1^3{}_{ik} q_{ik} \xi_i \xi_k = 1 , \tag{9}$$

e determiniamone l'intersezione L con la semiretta d'appartenenza del vettore $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, supposto applicato in P*. Le coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 di questo punto, stanti le (7') risultano determinate, a meno di un comune fattore, dalle equazioni

$$a^2 \xi_i = \sum_1^3{}_k q_{ik} \xi_k \qquad (i = 1, 2, 3)$$

che sono le medesime che definiscono le direzioni principali della quadrica (9). Da esse, ordinatamente moltiplicate per ξ_i, e sommate poi m. a m., si trae

$$a^2 = \sum_1^3{}_i \xi_i^2 = 1$$

ossia

$$(10) \qquad a = \frac{1}{|P^* L|}.$$

Da quanto precede deduciamo che le possibili direzioni di discontinuità coincidono con quelle degli assi della (9), per la quale resta così giustificato il nome di *quadrica di polarizzazione*. Le relative velocità d'avanzamento sono poi date dagli inversi dei corrispondenti semiassi. Perchè tutte queste velocità risultino diverse da zero e finite, occorre e basta che l'equazione (9) rappresenti un ellissoide reale o, in altri termini, che sia definita positiva la forma quadratica $Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Resta a vedere quando ciò accade. Secondo l'Hadamard *la quadrica* (9) *è un effettivo ellissoide tutte le volte che* C* *è configurazione di equilibrio stabile.* È questo importante teorema che discuteremo esaurientemente in una prossima Nota.

Astronomia. — *Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, eseguita in primo verticale.* Nota I di M. Cimino, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

1. La nuova determinazione di latitudine che presento in questa Nota si inserisce nell'attività che, da oltre un ventennio, l'Osservatorio Astronomico di Roma va svolgendo allo scopo di portare un contributo al delicato ed interessante problema sulla variazione *locale* della latitudine. Dopo il trasporto dell'Osservatorio dal Campidoglio nella nuova sede di Monte Mario, lo scrivente effettuò una determinazione di latitudine col metodo di Horrebow–Talcott, servendosi di uno strumento dei passaggi Bamberg stabilmente situato nel giardino dell'Osservatorio [2]. Successivamente, egli collegò trigonometricamente lo strumento col punto fondamentale di Monte Mario [3]; ma il valore ottenuto per la latitudine di tale punto (dopo la usuale riduzione al polo medio) risultò di 0″.40 inferiore a quello stabilito da G. Silva sulla base di numerose osservazioni eseguite da diversi autori nel primo decennio del nostro secolo.

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) M. Cimino, *Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico su Monte Mario.* « Rend. R. Acc. d'Italia », serie VII, vol. I, 1939, pp. 32–41.

(3) Per questa riduzione cfr. M. Cimino, *Collegamento trigonometrico degli strumenti dei passaggi del R. Osservatorio di Roma col punto fondamentale di Monte Mario.* « Rend. R. Acc. d'Italia », serie VII, vol. IV, 1942, pp. 150–155.

Specialmente allo scopo di indagare quanto vi fosse eventualmente di reale nel divario messo in evidenza, ho voluto, – su consiglio dello stesso prof. Silva –, eseguire questa nuova determinazione di latitudine con strumento e metodo differenti. Perciò ho scelto il metodo di Struve dei passaggi in primo verticale, servendomi di un altro strumento Bamberg pur esso stabilmente situato nello stesso giardino dell'Osservatorio. Per le ragioni che dirò in seguito, le declinazioni stellari furono tratte da due cataloghi differenti, ed i valori così ottenuti per il centro dello strumento risultarono:

(1) $\varphi = 41^\circ\ 55'\ 19''.84 \pm 0.015$; { Epoca 1943.27 / Declinazioni dall'*FK3*

(2) $\varphi = 41^\circ\ 55'\ 19''.68 \pm 0''.014$; { Epoca 1943.27 / Declinazioni dal *General Cat. di Boss.*

ovvero, riducendo al punto trigonometrico fondamentale di Monte Mario, rispettivamente:

(1′) $\varphi = 41^\circ\ 55'\ 25''.64 \pm 0''.015$

(2′) $\varphi = 41^\circ\ 55'\ 25''.48 \pm 0''.014$.

A questi valori *non è stata apportata alcuna correzione per la riduzione al polo medio*, mancandomi, all'epoca della presentazione di questa Nota, i dati necessari allo scopo. Per ora si rende perciò impossibile un confronto significativo sia con il valore da me precedentemente ottenuto, sia con i valori ottenuti in passato da altri autori [1].

2. Lo strumento che ho adoperato per la nuova determinazione di latitudine è stato, come ho già accennato, uno strumento dei passaggi Bamberg a cannocchiale spezzato di 88 mm. di apertura libera e 95 cm. di distanza focale. Il micrometro porta 15 fili fissi verticali disposti in 3 fascetti di 5 fili ciascuno; ingrandimento adoperato, cento volte circa. Ho sempre tenuti i fili oscuri su campo illuminato. Gli appulsi al cronografo sono stati presi, in generale, al passaggio delle stelle su 5 fili laterali e, quando è stato possibile, anche su 2 del fascetto centrale. Durante il pas-

(1) Per le osservazioni di latitudine al Campidoglio e la loro riduzione al punto fondamentale di Monte Mario le indicazioni bibliografiche si trovano riassunte in: G. L. Andrissi, *Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934*. «Rend. Acc. Lincei», serie 6ª, vol. XXV, 1937, pp. 462–467. Per le osservazioni eseguite in passato nei pressi della Torre del Primo Meridiano, cfr. G. Silva, in *Verbali della 40ª riunione plenaria della R. Comm. Geodetica Ital.*, Bologna 1941, pp. 40–47.

saggio della stella il cannocchiale veniva mosso dolcemente in altezza mediante la vite dei piccoli movimenti, in modo da annullare la componente verticale del moto diurno.

Come è noto, il metodo di osservazione in primo verticale col perfezionamento introdotto da Struve richiede un doppio rovesciamento, al passaggio ad Est e a quello ad Ovest, in modo da rendere il risultato indipendente dall'errore di collimazione. Durante tali operazioni, molta cura è stata posta per non dare scosse allo strumento e in particolar modo alla livella. Questa è portata da una armatura che si appende all'asse di rotazione del cannocchiale ed è protetta da una guaina di vetro foderata di feltro. La livella è stata accuratamente rettificata rispetto alla sua armatura in modo da renderla ben parallela all'asse di rotazione. Il valore del passo è [1]:

$$d = 1''.280 \pm 0''.005 .$$

Per ogni stella ho eseguito quattro determinazioni dell'inclinazione dell'asse, due ad Est, due ad Ovest, prima e dopo il passaggio della stella, apprezzando il decimo di divisione. Delle quattro determinazioni si è presa la media. Comunque, si è avuta speciale cura a che l'inclinazione dell'asse risultasse la più piccola possibile in modo che un eventuale piccolo errore nel valore del passo della livella non venisse, praticamente, ad influenzare il risultato finale.

I tempi dei passaggi stellari sui fili del micrometro sono stati presi per mezzo di un cronografo a tasto comandato dal pendolo *Dent* ad asta di *invar*, regolato a tempo siderale. Continui controlli sono stati effettuati dallo scrivente sull'andamento dell'orologio, il quale è risultato molto costante, di $+0^s.13$ *al giorno* fino al 6 aprile e di $0^s.25$ da tale data in poi, con oscillazioni di 1 o 2 centesimi di secondo.

Dopo le prime serate di osservazione, l'azimut dello strumento, – che era stato trovato un pò forte (20^s circa) –, è stato subito corretto e portato a 2^s circa, tale cioè da non influire in alcun modo sul risultato. Temibili variazioni dell'azimut durante l'intervallo di tempo tra i due passaggi ad Est e ad Ovest della stella – intervallo che non ha mai superato le 3 ore, ma che è stato quasi sempre assai minore –, sono da ritenere improbabili data la grande stabilità dello strumento, i cui tondelli di appoggio delle viti di base sono incassati e murati nel marmo del pilastro. Inoltre, ho sempre aperto la cupola non meno di due ore prima dell'inizio delle osservazioni, in modo che la temperatura dello strumento risultasse ben stabilizzata con quella esterna. Il controllo *serale* dell'azimut ha dimostrato la

(1) È stato ottenuto dal dott. Andrissi (*Determinazione di latitudine in primo verticale.* «Rend. Acc. Lincei», serie 6ª, vol. XIX, 1934, pp. 635-639) con una serie di misure al comparatore di livelle Bamberg.

stabilità dello strumento, perchè è stata riscontrata una variazione *giornaliera* dell'ordine di $0^s.2$ in media, ciò che induce logicamente a riguardare come irrilevante una eventuale variazione durante il tempo delle osservazioni in cui si aveva una escursione della temperatura di due gradi al più.

3. Applicando il metodo di Struve ho usato le formule di riduzione [1]:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos s \cdot \cos u} \cdot \cos \Delta$$

$$\begin{cases} s = \left[\dfrac{(t_4 - t_1) + (t_3 - t_2)}{4}\right] \cdot (1 + m) \\ u = \left[\dfrac{(t_4 - t_1) - (t_3 - t_2)}{4}\right] \cdot (1 + m) \\ \Delta = \dfrac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} + C - \alpha \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi_1 + i$$

ove t_1, t_2, t_3 e t_4 sono i tempi (senza correzione dello stato dell'orologio) del passaggio della stella allo stesso filo del micrometro ad Est e a Ovest nelle due posizioni dello strumento, m è l'andamento *orario*, α l'ascensione retta e δ la declinazione apparente al tempo del passaggio della stella al meridiano dello strumento, C la correzione dell'orologio a questo stesso tempo, i l'inclinazione dell'asse di rotazione del cannocchiale, φ la latitudine cercata. Si noti che il fattore $\cos \Delta$ ha senso solo quando non sia trascurabile l'azimut dello strumento; nella nostra determinazione – eccettuate le poche serate dal 20–II al 4–III in cui si ebbe $\cos \Delta = 0.9999990$ –, si è sempre avuto praticamente $\cos \Delta = 1$. L'andamento orario m dell'orologio è stato di $+0^s.005$ fino al 6 aprile, di $+0^s.01$ da tale data in poi con influsso quasi evanescente sui valori della latitudine.

Le stelle utilizzate sono quelle della Tabella I, e sono state scelte tutte tra le fondamentali dell'*F.K. 3* (*Dritter Fundamental Katalog* dell'*Astr. Berl. Jahrb.*) in modo che la loro distanza zenitale non superasse i 2°30′, ciò che porta ad un massimo di circa 3 ore per l'intervallo tra i due passaggi della stella ai verticali Est ed Ovest. Nella tabella, oltre ad un numero progressivo col quale le stelle saranno indicate nel seguito, sono riportati: il numero dell'*F. K. 3*, quello dell'*N.G.C.* (Nuovo *General Catalogue* di B. Boss), la grandezza, l'ascensione retta e la declinazione medie al 1943.0 secondo il *Berl. Astr. Jahrb.* La riduzione al luogo apparente per l'epoca del passaggio

(1) Cfr., ad esempio, Th. Albrecht, *Formeln und Hilfstafeln.* Verlag W. Engelmann, Leipzig, 1908, p. 86.

di ciascuna stella al meridiano dello strumento è stata fatta per interpolazione dal *Berl. Astr. Jahrb.* per le stelle *1, 3, 4, 7, 8*, tenendo conto anche delle differenze seconde; utilizzando invece le opportune tabelle dello stesso annuario per le rimanenti. Per tutte ho poi calcolato i termini a corto periodo.

Tabella I.

N°	FK3	NGC	*m*	$\alpha_{1943.0}$	$\delta_{1943.0}$
1	185	6226	3.3	$5^h02^m\ 31^s$	$+41°09'34''.24$
2	1145	6494	4.8	5 15 08	+40 03 01 .91
3	250	8648	5.7	6 34 43	+39 26 35 .12
4	274	9490	5.1	7 07 44	+39 24 55 .68
5	276	9677	5.7	7 14 05	+40 59 11 .78
6	374	13700	5.2	9 54 12	+41 19 40 .81
7	386	14232	3.2	10 18 56	+41 47 12 .96
8	470	17127	4.3	12 31 02	+41 40 01 .11

La scelta dell'*F.K.* 3 come autorità per le posizioni stellari è naturale, data l'importanza e la preferenza accordata al catalogo dalla maggioranza degli astronomi; senonchè, in considerazione che anche l'*N.G.C.* viene assai spesso utilizzato a tale scopo, specialmente quando il metodo impiegato per la determinazione di latitudine è quello di Horrebow-Talcott, lo scrivente ha ritenuto cosa non del tutto priva di interesse – anche in vista di eventuali raffronti dei risultati con quelli ottenuti in precedenza da lui stesso e da altri autori – , ripetere il calcolo delle latitudini osservate utilizzando le posizioni stellari date dall'*N.G.C.* Per far ciò, alle declinazioni apparenti dedotte dall'*F.K. 3* ho aggiunto le correzioni Δ_δ della prima linea della Tabella II, che rappresentano le differenze al 1943,0 tra le declinazioni delle singole stelle secondo l'*N.G.C.* e quelle secondo l'*F.K. 3* ($\Delta_\delta = N.G.C. - F.K.\ 3$).

Tabella II.

N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Δ_δ	−0''.21	+0''.14	+0''.03	+0''.13	−0''.07	−0''.15	−0''.22	−0''.31
Δ'_δ	+0 .05	+0 .04	+0 .02	+0 .02	+0 .02	+0 .08	+0 .10	−0 .24

Ora, dato che una variazione nella δ si ripercuote integralmente (anzi, leggermente aumentata) [1] sul valore della latitudine, la media pesata (peso = numero delle osservazioni di ogni stella) dei valori della riga Δ_δ deve dare il divario tra i valori finali della latitudine dedotti con le declinazioni dell'*N.G.C.*, e quelli dedotti con le declinazioni dell'*F.K. 3*. Detta media pesata è: $-0''.16$, e tale è appunto la differenza tra i valori (2) e (1) del § 1 ottenuti per calcolo diretto.

Ma il passaggio dall'uso dell'uno all'altro catalogo si può anche pensare di effettuarlo aggiungendo alle declinazioni dell'*F.K. 3* le correzioni Δ'_δ della seconda linea della stessa Tabella II, che rappresentano ancora le differenze tra le declinazioni secondo l'*N.G.C.* e quelle secondo l'*F.K. 3*, dedotte però questa volta non dal semplice confronto delle posizioni *individuali* di ciascuna stella, ma invece dalle differenze *sistematiche* tratte dal confronto generale dei due cataloghi [2].

In tale caso, la media pesata dei valori della riga Δ'_δ darebbe soltanto: $-0''.01$. Possiamo pertanto affermare che il divario tra i valori (1) e (2) della latitudine, dedotti rispettivamente utilizzando le declinazioni stellari dell'*F.K. 3* e quelle dell'*N.G.C.*, non deriva dalle differenze *sistematiche* che corrono tra le posizioni stellari dei due cataloghi, ma soltanto dalle differenze *individuali* dedotte dal confronto delle posizioni di ciascuna stella. E poichè sembrerebbe logico di riguardare le differenze *individuali* come casuali, sembrerebbe anche lecito, in conseguenza, di assumere per le declinazioni stellari il valore medio tra quello fornito dall'*F.K. 3* e dall'*N.G.C.*, o, ciò che è lo stesso, di assumere per il valore della latitudine la media dei valori (1) e (2).

In una prossima Nota darò un conto dettagliato delle osservazioni, che furono eseguite in *32* serate differenti, con *36* passaggi e con un totale di *209* (numero dei fili) determinazioni di latitudine. Per ora mi limito a dire che *l'errore probabile di una osservazione* risulta di $\pm 0''.21$, che è dell'ordine di grandezza di quello che si ottiene con strumento analogo a quello da noi adoperato anche col metodo di Talcott.

Sebbene richieda maggiore dispendio di tempo sia nelle osservazioni che nella loro riduzione, il metodo di Struve non sembra dunque dare risultati inferiori a quelli forniti dal più usato metodo di Horrebow–Talcott; anzi – qualora lo strumento sia ben situato e si abbia ogni cura per la livellazione – esso sembra andare meno soggetto di quest'ultimo ad eventuali errori sistematici.

(1) Si ha infatti: $\Delta\varphi = \frac{\text{sen}\, 2\varphi}{\text{sen}\, 2\delta}\,\Delta\delta$; cd è sempre $\delta < \varphi$, sebbene poco differente.

(2) Cfr. B. Boss, *General Catalogue*, etc., Washington, 1937, vol. I, p. 330.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere.* Nota II di L. Gialanella, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

In questa Nota espongo i risultati di una seconda serie di osservazioni meridiane dell'ascensione retta dei pianeti interni Mercurio e Venere, da me eseguite nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario) nei giorni prossimi alle loro massime elongazioni degli anni 1943 e 1944. Nella Nota precedente [2] ho esposto i dettagli dello strumento adoperato (invertibile meridiano Bamberg di mm. 89 di apertura e m. 0,95 di focale) e del metodo seguìto per le osservazioni, sia dei pianeti che delle stelle di confronto. Qui mi limito, pertanto, a riferire i nuovi risultati di questa seconda serie, che comprende 13 osservazioni di Mercurio (distribuite in 5 elongazioni) e 12 di Venere (in 4 elongazioni).

La Tabella I contiene l'elenco delle stelle di riferimento, con le rispettive posizioni medie, desunte dal *Berliner Jahrbuch*. La Tabella II raccoglie, poi, i risultati delle osservazioni stellari e i Δt conclusi in ogni giornata, e cioè i valori della correzione dell'orologio corrispondente all'istante del passaggio in meridiano del pianeta: $t_{oss.}$ è il tempo di osservazione desunto dallo spoglio delle striscie cronografiche, già corretto per l'andamento dell'orologio, i e a sono i coefficienti di inclinazione e di azimut, z è la distanza zenitale. La Tabella III, infine, contiene i risultati delle osservazioni dei pianeti, e i confronti dei valori dell'Effemeride del *Berliner Jahrbuch*, ottenuti per interpolazione con le differenze seconde. A causa delle fasi, si osservava il bordo lucido dei pianeti e l'ascensione retta osservata è stata ridotta a quella del centro del pianeta con il valore del semidiametro ricavato dall'Effemeride dell'*Almanaque Nautico* [Mercurio 3″,34 (Le Verrier) e Venere 8″,41 (Auwers), alla distanza media]. In proposito, per Mercurio nelle elongazioni dell'aprile, agosto 1943 e aprile, agosto 1944 è stato osservato il 1° bordo, in quella dell'ottobre 1943 il 2° bordo; per Venere nelle elongazioni dell'aprile e agosto 1943 e agosto 1944 il 1° bordo, in quella dell'ottobre 1943 il 2° bordo.

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) « Rend. Fisici R. Acc. d'Italia », vol. IV, fasc. 8 (1942) = « Contributi Scientifici R. Osservatorio di Roma », n. 110.

Tabella I.

Stelle di riferimento.

N.	*	Mag.	$\alpha_{1943,0}$	$\delta_{1943,0}$
1	α Tauri	$1^m.06$	$4^h\ 32^m\ 38^s.80$	$+16°23'46''.7$
2	α Aurigae	0 .21	5 12 28 .44	+ 45 56 32 .3
3	ε Orionis	1 .75	5 33 19 .17	— 1 14 12 .3
4	α Orionis	0 .92	5 52 05 .08	+ 7 23 53 .2
5	α Leonis	1 .34	10 05 20 .29	+ 12 14 47 .6
6	α Ursae maioris	1 .95	11 00 13 .61	+ 62 03 32 .9
7	α Virginis	1 .21	13 22 11 .18	— 10 51 51 .8
8	η Ursae maioris	1 .91	13 45 17 .76	+ 49 35 49 .9
9	α Bootis	0 .24	14 13 03 .61	+ 19 28 42 .2
			$\alpha_{1944,0}$	$\delta_{1944,0}$
10	α Persei	1 .90	3 20 18 .75	+ 49 39 49 .1
11	α Tauri	1 .06	4 32 42 .25	+ 16 23 54 .0
12	α Aurigae	0 .21	5 12 32 .88	+ 45 56 36 .0
13	α Ursae maioris	1 .95	11 00 17 .32	+ 62 03 13. 5
14	ε Ursae maioris	1 .68	12 51 34 .26	+ 56 15 48 .5
15	α Virginis	1 .21	13 22 14 .34	— 10 52 10 .6
16	η Ursae maioris	1 .91	13 45 20 .13	+ 49 35 32 .0
17	α Bootis	0 .24	14 13 06 .34	+ 19 28 23 .5
18	γ Bootis	3 .00	14 29 49 .35	+ 38 33 08 .7
19	ε Bootis (1)	2 .70	14 42 32 .42	+ 27 18 33 .8
20	β Ursae minoris	2 .24	14 50 50 .70	+ 74 23 03 .8
21	β Librae	2 .74	15 13 59 .36	— 9 10 39 .2
22	α Coronae bor.	2 .31	15 32 18 .91	+ 26 54 07 .5

(1) Dall'*Almanaque Nautico*.

Tabella II.

Osservazioni stellari.

Data	Stella	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos z \sec \delta$	$a \operatorname{sen} z \sec \delta$	Δt	Medie Δt
1943							
Aprile 29	1	$32^m\ 37^s.94$	$31^m\ 42^s.99$	$+0^s.02$	$+0^s.17$	$+54^s.76$	$+54^s.75$
	2	12 27 .43	11 32 .79	-0 .06	-0 .04	+ 54 .74	
	3	33 18 .46	32 23 .49	+ 0 .02	+ 0 .25	+ 54 .70 (1)	
	4	52 04 .47	51 09 .44	+ 0 .04	+ 0 .21	+ 54 .78	
Agosto 24	8	22 11 .78	21 21 .07	-0 .07	+ 2 .57	+ 48 .21	+ 48 .21
	9	45 17 .26	44 29 .92	-0 .20	-0 .67	+ 48 .21	
	10	13 04 .03	12 14 .61	-0 .06	+ 1 .27	+ 48 .21	
25	7	22 11 .77	21 20 .64	-0 .04	+ 2 .55	+ 48 .62	+ 48 .63
	8	45 17 .24	44 29 .36	-0 .11	-0 .66	+ 48 .65	
	9	13 04 .02	12 14 .15	0 .00	+ 1 .26	+ 48 .61	
Ottobre 5	5	5 20 .83	4 14 .79	-0 .03	+ 1 .60	+ 64 .47	+ 64 .47
	6	0 12 .35	59 10 .49	-0 .28	-2 .34	+ 64 .48	
13	5	5 20 .98	4 12 .05	+ 0 .08	+ 1 .69	+ 67 .16	+ 67 .18
	6	0 12 .59	59 07 .80	-0 .04	-2 .45	+ 67 .20	
14	5	5 21 .02	4 11 .91	0 .00	+ 1 .53	+ 67 .58	+ 67 .58
	6	0 12 .62	59 07 .45	-0 .17	-2 .24	+ 67 .58	
15	6	0 12 .66	59 07 .09	-0 .17	-2 .24	+ 67 .98	+ 67 .98 (2)
1944							
Aprile 12	10	20 17 .10	20 34 .67	-0 .01	0 .00	-17 .58	+ 17 .58 (3)
	11	32 41 .23	32 58 .81	+ 0 .01	0 .00	-17 .57	

(1) Immagine debolissima; perduti tre fili dopo il rovesciamento.

(2) Le osservazioni sono state fatte tra le nuvole; non è stato possibile osservare nessun'altra stella. Il Δt ottenuto è in ottimo accordo con quello che si ricava dal giorno precedente aggiungendovi il valore $+0^s.40$ andamento del pendolo. Il controllo dell'azimut è stato fatto più tardi nella serata.

(3) Osservazioni ostacolate dalle nuvole, che hanno impedito l'osservazione di altre stelle. Il controllo dell'azimut è stato fatto nella serata.

Segue: TABELLA II.

Data	Stella	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos z \sec \delta$	$a \operatorname{sen} z \sec \delta$	Δt	Medie Δt
Aprile 14	11	$32^m\ 41^s.21$	$32^m\ 58^s.47$	$0^s.00$	$0^s.00$	$-17^s.26$	$-17^s.22$ (1)
	12	12 31 .71	12 48 .83	—0 .06	0 .00	—17 .18	
Agosto 8	14	51 33 .51	50 43 .55	—0 .07	0 .00	+50 .03	**+50 .05**
	16	45 19 .99	44 29 .99	—0 .06	0 .00	+50 .06	
	17	13 06 .86	12 16 .79	0 .00	0 .00	+50 .07	
	19	42 33 .06	41 43 .04	—0 .01	0 .00	+50 .03	
12	14	51 33 .42	50 40 .57	—0 .06	—0 .01	+52 .92	**+52 .94**
	15	22 14 .82	21 21 .87	—0 .03	+0 .02	+52 .96	
	16	45 19 .90	44 27 .00	—0 .01	0 .00	+52 .91	
	17	13 06 .80	12 13 .83	—0 .01	+0 .01	+52 .97	
	18	29 49 .68	28 56 .75	0 .00	0 .00	+52 .93	
14	13	00 15 .59	59 21 .43	—0 .20	—0 .07	+54 .43	**+54 .44**
	14	51 33 .37	50 39 .09	—0 .10	—0 .04	+54 .42	
	15	22 14 .80	21 20 .36	—0 .06	+0 .07	+54 .43	
	17	13 06 .77	12 12 .32	—0 .04	+0 .04	+54 .45	
	19	42 32 .96	41 38 .53	—0 .06	+0 .03	+54 .46	
15	15	22 14 .79	21 19 .56	—0 .03	—0 .12	+55 .38	**+55 .35**
	16	45 19 .83	44 24 .47	—0 .05	+0 .04	+55 .37	
	17	13 06 .76	12 11 .45	+0 .03	—0 .06	+55 .34	
	18	29 49 .62	28 54 .26	+0 .05	—0 .01	+55 .32	
	19	42 32 .95	41 37 .60	+0. 03	—0 .04	+55 .36	
17	16	45 19 .78	44 22 .94	—0 .05	+0 .01	+56 .88	**+56 .88**
	20	50 49 .17	49 52 .42	—0 .25	+0 .12	+56 .88	
	21	14 00 .39	13 03 .60	—0 .04	—0 .05	+56 .88	
	22	32 19 .71	31 22 .85	0. 00	—0 .02	+56 .88	

(1) V. (3) pag. precedente.

Tabella III.

Ascensione retta di Mercurio e Venere.

Data T. U.	$t_{oss.}$	$i \cos z / \sec \delta$	$a \operatorname{sen} z / \sec \delta$	Δt	$\alpha_{oss.}$	semid.	α_{centro}	$\alpha_{calc.}$	O — C
MERCURIO									
1943 Aprile 29,519213	$3^h\ 42^m\ 53^s.90$	$+ 0^s.04$	$+ 0^s.13$	$+ 54^s.75$	$3^h\ 43^m\ 48^s.82$	$0^s.27$	$49^s.09$	$49^s.01$	$+ 0^s.08$
Agosto 24,534764	11 46 44 .35	— 0 .08	+ 2 .13	+ 48 .21	11 47 34 .61	0 .22	34 .39	34 .30	+ 0. 09 (1)
25,534709	11 50 35 .18	— 0 .02	+ 2 .30	+ 48 .64	11 51 26 .10	0 .22	26 .32	26 .20	+ 0 .12
Ottobre 13,413466	12 08 24 .02	+ 0 .04	+ 2 .20	+ 67 .18	12 09 33 .44	0 .22	33. 22	33 .08	+ 0 .14
14,414229	12 13 26 .51	— 0 .01	+ 2 .01	+ 67 .60	12 14 36 .11	0 .21	35 .90	35 .74	+ 0 .16
15,415147	12 18 42 .19	— 0 .03	+ 2 .00	+ 67 .98	12 19 52 .14	0 .20	51 .94	51 .77	+ 0 .17 (2)
1944 Aprile 12,515318	2 34 28 .00	+ 0 .01	0 .00	— 17 .58	2 34 10 .43	0 .26	10 .69	10. 72	— 0 .03 (3)
14,514479	2 41 08 .62	— 0 .01	— 0 .01	— 17 .22	2 40 51 .38	0 .28	51 .66	51 .73	— 0 .07 (4)
Agosto 8,540440	10 54 50 .03	+ 0 .01	0 .00	+ 50 .05	10 55 40 .09	0 .24	40 .33	40 .39	— 0 .06
12,538472	11 07 43 .39	— 0 .03	+ 0 .01	+ 52 .94	11 08 36 .31	0 .25	36 .56	36 .64	— 0 .08
14,536701	11 13 01 .11	— 0 .06	+ 0 .06	+ 54 .43	11 13 55 .54	0 .27	55 .81	55 .86	— 0 .05 (5)
15,535591	11 15 20 .89	0 .00	— 0 .09	+ 55 .35	11 16 16 .15	0 .27	16 .42	16 .51	— 0 .09
17,532905	11 19 19 .76	— 0 .01	— 0 .04	+ 56 .89	11 20 16 .60	0 .28	16 .88	16 .95	— 0 .07 (6)

(1) Immagine estremamente debole. Osservato il 2° bordo; nel calcolo è stato tenuto conto dell'effetto di fase.
(2) Osservazione tra le nuvole. Immagine debolissima, ma calma.
(3) Molto prossimo al Sole. Immagine assai mossa e oscillante. Cielo con cumuli vaganti; cirri e veli vicino al Sole.
(4) Osservazione molto difficile per le nuvole e i vapori che velano il cielo. Immagine estremamente debole; perduto qualche filo dopo l'inversione dello strumento.

Data T. U.	$t_{oss.}$	$i \cos z \sec \delta$	$a \operatorname{sen} z \sec \delta$	Δt	$\alpha_{oss.}$	semid.	α_{centro}	$\alpha_{calc.}$	O — C
VENERE									
1943 Aprile 29,571394	$4^h\ 58^m\ 15^s.67$	$-0^s.09$	$+0^s.12$	$+54^s.75$	$4^h\ 59^m\ 10^s.45$	$0^s.50$	$10^s.95$	$11^s.07$	$-0^s.12$ (1)
Agosto 24,507447	11 07 15 .97	— 0 .08	+ 2 .15	+ 48 .21	11 08 06 .33	1 .81	08 .14	08 .53	— 0 .39 (2)
25,503626	11 05 40 .77	— 0 .03	+ 2 .21	+ 48 .63	11 06 31 .58	1 .84	33 .42	33 .75	— 0 .33 (2)
Ottobre 5,361192	10 21 27 .15	— 0 .02	+ 2 .01	+ 64 .47	10 22 33 .61	1 .45	32 .16	32. 16	0 .00
13,349325	10 35 49 .40	+ 0 .05	+ 2 .05	+ 67 .18	10 36 58 .68	1 .28	57 .40	57 .39	+ 0 .01
14,348166	10 38 04 .03	+ 0 .02	+ 1 .84	+ 67 .58	10 39 13 .47	1 .27	12 .20	12 .19	+ 0 .01
15,347048	10 40 23 .63	+ 0 .03	+ 1 .84	+ 67 .98	10 41 33 .48	1 .24	32 .24	32 .20	+ 0 .04 (3)
1944 Agosto 8,502393	9 59 53 .70	+ 0 .01	0 .00	+ 50 .05	10 00 43 .76	0 .34	44 .10	44 .00	+ 0 .10
12,504584	10 18 47 .21	— 0 .03	+ 0 .02	+ 52 .94	10 19 40 .14	0 .34	40 .48	40 .39	+ 0 .09
14,505618	10 28 08 .08	— 0 .01	+ 0 .08	+ 54 .42	10 29 02 .57	0 .34	02 .91	02 .79	+ 0 .12 (4)
15,506116	10 32 47 .05	+ 0 .05	— 0 .08	+ 55 .34	10 33 42 .36	0 .34	42 .70	42 .60	+ 0 .10
17,507083	10 42 02 .57	0 .00	— 0 .05	+ 56 .87	10 42 59 .39	0 .34	59. 73	59 .64	+ 0 .09

(1) Immagine mossa e saltellante.
(2) Pianeta vicinissimo al Sole. Falce sottilissima. Immagine debole e sfumata, assai mossa.
(3) Immagine tremolante.
(4) Immagine saltellante.

Raggruppando tutte le osservazioni da me eseguite dal 1942 ad oggi – sia quelle già in precedenza pubblicate e sia quelle di cui forma oggetto la Nota presente – si ottengono i seguenti luoghi normali con i relativi O — C:

Data T. U.			O — C	Bordo osservato	Numero delle osservazioni
			MERCURIO		
1942	Maggio	18,692245	— 0^{s}.09	I	6
	Luglio	8,906537	+ 0 .13	II	4
1943	Aprile	29,519213	+ 0 .08	I	1
	Agosto	25.034737	+ 0 .11	I	2
	Ottobre	14.414281	+ 0 .16	II	3
1944	Aprile	13,514899	— 0 .05	I	2
	Agosto	13,736822	— 0 .07	I	5
			VENERE		
1942	Giugno	12,021104	+ 0 .08	II	3
	Luglio	6,081873	+ 0 .10	II	7
1943	Aprile	29,571394	— 0 .12	I	1
	Agosto	25.005537	— 0 .37	I	2
	Ottobre	12,101433	+ 0 .02	II	4
1944	Agosto	13,705159	+ 0 .10	I	5

Fisica. — *Contributo alla teoria dell'acceleratore ad induzione.* Nota di E. Amaldi e B. Ferretti, presentata [1] dal Corrisp. G. C. Trabacchi.

Vari autori [2] hanno considerato la possibilità di accelerare gli elettroni a mezzo del campo elettrico associato con un campo magnetico variabile nel tempo.

Questa possibilità apparve subito molto promettente in quanto il campo magnetico può essere usato per curvare la traiettoria dell'elettrone lungo un cerchio, o una spirale, mentre l'aumento istantaneo del flusso magnetico concatenato con l'orbita dà luogo a un campo elettrico tangenziale capace di accelerare l'elettrone.

L'aumento di energia subìta dall'elettrone in un giro è eguale al prodotto della carica dell'elettrone per la forza elettromotrice che verrebbe indotta in una spira di filo disposta lungo l'orbita.

Dato che l'elettrone può compiere un elevato numero di giri in un tempo molto breve, esso può in tal modo acquistare una energia assai elevata. Detto H il campo magnetico (in oersted) sull'orbita di raggio r (in cm), l'energia cinetica acquistata dall'elettrone risulta, in condizioni relativistiche (ossia per velocità prossime a c) data dalla espressione (in MeV)

$$T = 3 \times 10^{-4} H \cdot r - 0.51 \quad \text{MeV}. \tag{1}$$

Dalla (1) risulta che bastano campi di alcune migliaia di oersted e raggi di qualche decina di cm per raggiungere energie di alcune diecine di MeV, ossia energie che solo assai difficilmente potrebbero venir raggiunte con impianti ad alta tensione.

La realizzazione pratica di tale principio non è stata scevra da assai gravi difficoltà tanto che solo in tempi relativamente recenti D. W. Kerst [3] è riuscito a costruire una macchina, basata su questo principio, detta comunemente betatrone. Dopo il primo betatrone capace di fornire elettroni di

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) G. Breit, M. A. Tuve, « Carnegie Institution Year Book » (1927–28), n. 27, p. 290; R. Videröe, « Arch. f. Electrotechnik », *21*, 400, 1928; E. T. S. Walton, « Proc. Camb. Phil. Soc. », *25*, 469, 1929; W. W. Jassinsky, « Arch. f. Electrotechnik », *30*, 500, 1936.

(3) D. W. Kerst, « Phys. Rev. », *60*, 47, 1941.

2.3 MeV, Kerst [1] ne ha costruito un secondo capace di fornire elettroni fino a 20 MeV e si ha notizia che sullo stesso principio sono ora in costruzione dispositivi capaci di accelerare elettroni fino a 100 MeV [2].

Il successo ottenuto da Kerst è dovuto in gran parte all'aver progettato la macchina tenendo conto dei risultati teorici ottenuti da Kerst e Serber [3], i quali hanno eseguito uno studio assai approfondito delle traiettorie percorse dagli elettroni.

Uno dei più importanti risultati di tale ricerca è stato che in opportune condizioni esiste un cerchio di equilibrio, di raggio r_0, sul quale l'elettrone si muove durante tutto il tempo di accelerazione; la condizione affinchè esista tale cerchio di equilibrio è che durante tutto il tempo di accelerazione, venga rispettata la condizione

$$2\pi r_0^2 H(t) = \Phi(t) \qquad (2)$$

dove $\Phi(t)$ è il flusso concatenato con l'orbita di equilibrio ed $H(t)$ il valore del campo sull'orbita.

In realtà, Kerst e Serber hanno mostrato che l'elettrone non si muove sempre esattamente lungo il cerchio di equilibrio, ma, purchè il campo H nell'intorno di $r = r_0$, varii con il raggio r come

$$\frac{1}{r^n} \quad \text{con} \quad n < 1$$

esegue delle oscillazioni smorzate attorno al cerchio di equilibrio stesso.

Se si esamina la (2) ci si accorge subito che essa impone una limitazione al massimo valore raggiungibile in pratica per $H(t)$, dato che un aumento di $H(t)$ impone un aumento del flusso concatenato $\Phi(t)$ il quale, una volta fissato il raggio r_0, non può crescere oltre i limiti imposti dalla saturazione del ferro di cui è fatto il magnete.

Una volta fissato il raggio r_0 del cerchio di equilibrio, la suddetta limitazione dei valori raggiungibili per $H(t)$ si riflette in una limitazione della massima energia raggiungibile con un betatrone del tipo di quello di Kerst; per esempio con $r_0 = 20$, si trova $T < 36$ MeV.

Ci siamo allora proposti di cercare se non fosse possibile, a parità di dimensioni dell'orbita e quindi del magnete impiegato, costruire un acceleratore ad induzione che permettesse di superare tale limite anche a costo di una maggiore complicazione costruttiva.

In una discussione avuta con il prof. G. M. Pestarini e l'ing. F. Salmi a proposito della costruzione di un acceleratore a induzione per il Centro di Fisica

(1) D. W. Kerst, «Scient. Instr.», *12*, 387, 1942.
(2) «Scient. Instr.», *13*, 444, 1942.
(3) D. W. Kerst, R. Serber, «Phys. Rev.», *60*, 53, 1941.

Nucleare del C. N. R., il prof. Pestarini ci fece presente la possibilità, da un punto di vista costruttivo, di realizzare un magnete con due circuiti magnetici ad eccitazioni indipendenti, dei quali l'uno fosse responsabile del campo magnetico centrale e l'altro del campo magnetico periferico ossia nella zona dove si svolge l'orbita.

Una volta riconosciuta questa possibilità, abbiamo studiato due diversi tipi di acceleratori ad induzione con entrambi i quali è possibile, a parità di dimensioni del magnete, raggiungere una energia quasi doppia che con il betatrone di Kerst.

Nella presente Nota ci limitiamo a comunicare il principio su cui sono basate queste macchine, rimandando ad altra sede per una esposizione dettagliata degli sviluppi matematici relativi al calcolo delle orbite degli elettroni [1].

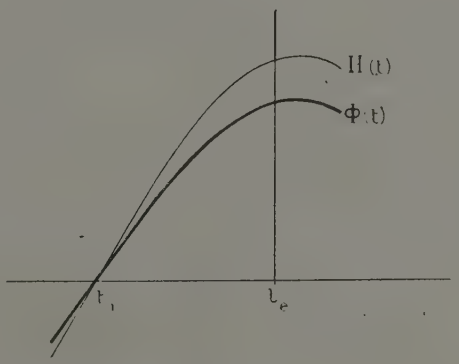


Fig. 1.

Dato che in queste macchine la condizione (2) non è più rispettata, non esiste più un cerchio di equilibrio nel senso precedentemente chiarito; ne segue che l'elettrone, una volta iniettato nel campo, tenderà in generale ad uscirne prima di essere stato sufficientemente accelerato. Si possono però realizzare delle condizioni tali che il raggio dell'orbita varii adiabaticamente (rispetto al moto di rivoluzione) mantenendosi, durante tutto il tempo di accelerazione, nell'intorno di un valore costante $r = r_0$.

Purchè il campo periferico varii in funzione di r secondo la (3), l'elettrone esegue, come nel caso di Kerst e Serber, delle oscillazioni smorzate attorno all'orbita circolare il cui raggio varia adiabaticamente.

Betatrone di Kerst. – Il funzionamento di questa macchina è chiarito dalla fig. 1; $H(t)$ e $\Phi(t)$ variano mantenendosi proporzionali fra loro nel

(1) Una esposizione dettagliata degli sviluppi matematici e dei risultati dei calcoli numerici verrà pubblicata nel « Nuovo Cimento » e nella « Review of Scientific Instruments ».

rapporto imposto dalla (2), nell'intervallo di tempo che decorre fra l'istante di iniezione t_i e l'istante di estrazione t_e. L'energia acquistata dall'elettrone è proporzionale alla variazione di flusso avvenuta in questo intervallo di tempo.

Betatrone a sfasamento. – Il funzionamento di questa macchina è chiarito dalla fig. 2; il campo H periferico è opportunamente anticipato di fase rispetto al campo centrale, il quale è eccitato da correnti sufficientemente elevate da portare il ferro quasi in saturazione sia all'istante t_i che all'istante t_e; la variazione di flusso avvenuta in tale intervallo di tempo è evidentemente

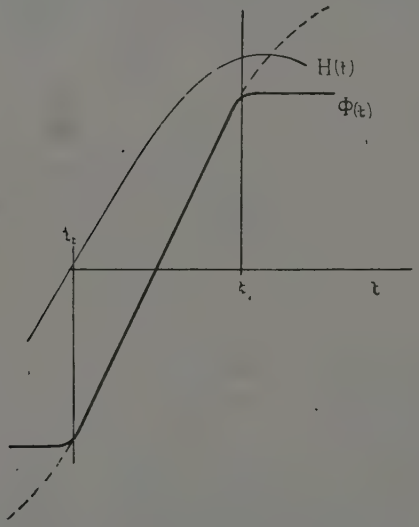


Fig. 2.

circa doppia che nel betatrone di Kerst; ne segue che l'energia degli elettroni risulta maggiore nello stesso rapporto.

Betatrone a campo costante. – Il funzionamento di questa macchina è chiarito dalla fig. 3. Alla parte variabile del campo periferico è sovrapposta una parte costante tale che H (t) si mantiene positivo per la quasi totalità del tempo. Anche in questo caso la variazione di flusso che ha luogo nell'intervallo di tempo $t_i - t_e$ è quasi doppia che nel caso di Kerst.

Rimandando ad altra sede [1] per una discussione dettagliata di queste macchine, si può notare fin d'ora quanto segue:

(1) Loc. cit. in (1) a p. 87.

1) Nel betatrone a sfasamento la scala dei tempi risulta contratta rispetto a quanto si verifica nel betatrone di Kerst in quanto in un minor tempo di accelerazione $t_e - t_i$ si ha un aumento di energia circa doppio; nel betatrone a campo costante invece la scala dei tempi non viene alterata

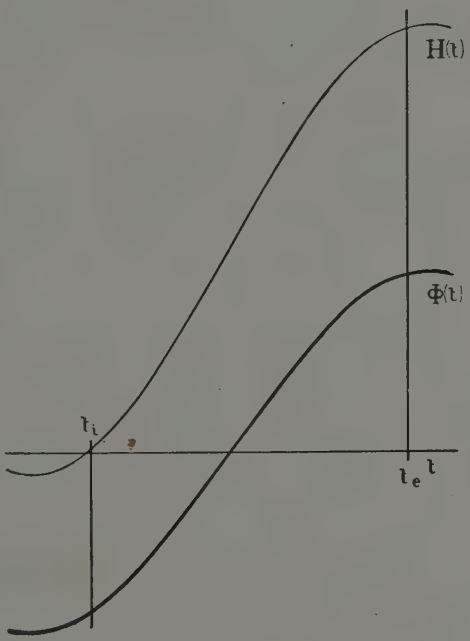


Fig. 3.

rispetto al caso di Kerst, in quanto l'aumento, circa doppio, dell'energia avviene in un tempo circa doppio (fig. 3);

2) È chiaro come sia possibile costruire una macchina, in cui siano applicati contemporaneamente i principî del betatrone a sfasamento e del betatrone a campo costante, la quale risulta dotata di caratteristiche assai interessanti.

Chimica. — *L'azione batteriostatica dei chinoni e il meccanismo d'azione di alcune sostanze antibiotiche* [1] Nota di G. B. Marini-Bettòlo ed E. Del Pianto, presentata [2] dal Corrisp. G. Bargellini.

L'antagonismo biologico tra microorganismi, e cioè la proprietà di alcuni funghi e batteri di inibire lo sviluppo di altri funghi e batteri, è già conosciuto da molto tempo in botanica ed in microbiologia [3], senza che ne sia stato approfondito il meccanismo di azione.

L'azione antibiotica, secondo Waksman, può essere distinta in una azione diretta di un microorganismo sull'altro ed in un'azione indiretta dovuta ai prodotti del metabolismo di uno dei microorganismi. Esempi classici dell'antibiosi per azione diretta sono le osservazioni di Pasteur, il quale riusciva a preservare gli animali da esperimento dall'infezione carbonchiosa, inoculando, insieme col bacillo del carbonchio, batteri banali.

Quanto agli esempi di antibiosi per azione indiretta, possiamo affermare che essi sono attualmente oggetto di numerosi studi, specialmente dopo la scoperta della penicillina da parte di Fleming [4] e il suo impiego in terapia. Anzi, i risultati oltremodo lusinghieri ottenuti con la penicillina hanno indotto in questi ultimi anni numerosi ricercatori ad estendere le attuali conoscenze sull'azione antibiotica presentata dai microorganismi in genere ed in particolare dai prodotti del loro ricambio. Sono state così successivamente scoperte l'actinomicina A e B, la tirotricina, la gramicidina, la piocianina, la gliotossina, la patulina ecc., tutte sostanze ad azione batteriostatica anche elevata, ma che non sono ancora entrate nella pratica terapeutica perchè presentano, al contrario della penicillina, un'azione tossica sugli organismi superiori.

Solo di alcune di queste sostanze attualmente si conosce con esattezza la costituzione chimica, così ad esempio la piocianina e la clororafina sono semichinoni del gruppo della fenazina, la gliotossina è un derivato eterociclico azotato contenente anche zolfo.

Fino ad oggi il maggior numero di studi chimici sui prodotti del metabolismo dei microorganismi, si deve al Raistrick, dell'Ospedale delle

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto chimico della R. Università di Roma – Centro di chimica generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) S. A. Waksman, «Chron. Bot.», VI, n. 7 (1940).

(4) A. Fleming, «Brit. Med. Journ. ex. path.», *10*, 226 (1929).

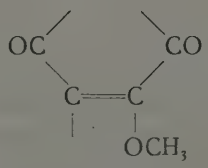
Malattie Tropicali di Londra, ed ai suoi Collaboratori, chimici e biologi, tra i quali si devono ricordare R. Robinson, A. Oxford, H. Haworth, P. W. Clutterbuck, J. H. Birkinshaw e tanti altri ancora.

Esaminando e confrontando i risultati di tutti questi lavori, abbiamo osservato che i numerosi prodotti isolati si possono raggruppare, secondo la loro natura chimica, in sei gruppi distinti, e precisamente: in fenoli (ed acidi fenolici), in chinoni (compresi gli antrachinoni), in derivati aliciclici, in derivati eterociclici (comprese le porfirine), in derivati dell'acido metil–tetronico, in alcooli e acidi della serie alifatica [1].

Data la brevità concessa a questa Nota, non ci soffermiamo ad esaminare singolarmente tutte queste sostanze, ma facciamo rilevare che il maggior numero di esse appartiene al gruppo dei chinoni (spinulosina, fumigatina, citrinina ecc.) ed ai derivati dell'acido γ–metil–tetronico (acido carlico, acido penicillico ecc.).

Eseguendo il confronto tra le formule di costituzione di tali sostanze, abbiamo osservato come gran parte delle sostanze antibiotiche conosciute nella loro struttura chimica, come pure alcuni prodotti del metabolismo dei microorganismi, appartengono a sistemi reversibili di ossido–riduzione, onde viene spontaneo chiedersi se l'azione antibiotica non possa essere, almeno in parte, legata a tale loro proprietà. Per questo motivo abbiamo rivolto la nostra attenzione allo studio delle sostanze organiche appartenenti a sistemi reversibili di ossido–riduzione, iniziandolo con quello dei chinoni.

Sui chinoni aveva già sperimentato A. E. Oxford, [2] partendo dalla osservazione che la fumigatina (3–ossi–4–metossi–toluenchinone), prodotto del metabolismo dell'Aspergillus fumigatus, possedeva una notevole azione batteriostatica. Per stabilire a quale aggruppamento dovesse attribuirsi tale azione, l'Oxford aveva eseguito prove comparative con quindici chinoni, giungendo alla conclusione, che l'azione batteriostatica dei chinoni fosse da ascrivere al gruppo:



che è pure presente nell'acido penicillico. Questa ipotesi non spiega tuttavia il perchè dell'azione batteriostatica di altre sostanze (piocianina, clororafina, ecc.) nelle quali non è presente tale aggruppamento. Invece è interessante

(1) Una ampia bibliografia su questo argomento è raccolta nei nostri due lavori, *Contributo alla conoscenza del meccanismo d'azione dell'antibiosi tra microorganismi*, che sono stati presentati alla Pontificia Accademia delle Scienze, rispettivamente nell'aprile e nell'ottobre del 1945, e che sono in corso di pubblicazione nelle «Pont. Ac. Sc. Commentationes».

(2) A. E. Oxford, citato da M. Kiese in «Klinische Wochens.», 22 agosto (1943).

notare, come già abbiamo sopra accennato, che non solo i chinoni studiati da A. E. Oxford, ma molte altre sostanze batteriostatiche, che non rientrano nello schema precedente, come i derivati dell'acido γ-metil-tetronico, la piocianina, la violaceina, ecc., costituiscono sistemi reversibili di ossido-riduzione.

Per questa ragione abbiamo intrapreso, sin dal gennaio 1945, una serie di esperienze sull'azione batteriostatica dei chinoni al fine di:

1° vedere se esiste effettivamente una relazione tra potenziale di ossido-riduzione delle sostanze e azione batteriostatica,

2° vedere se altri chinoni possiedono azione batteriostatica e in quale grado,

3° cercare di chiarire il meccanismo di tale azione.

Le esperienze sono state condotte con ventisette chinoni contenenti nella loro molecola l'anello benzenico o i sistemi della naftalina, dell'antracene e del fenantrene.

Abbiamo scelto, come primo teste batterico, lo Stafilococco aureo per le sue note qualità colturali che ben si adattano alle nostre esperienze. Questo infatti è un batterio aerobio e anaerobio facoltativo, che tollera assai bene alti scarti di ph e che sviluppa molto rapidamente in terreni ordinari, dando, in brodo semplice, già nelle prime ore, un intorbidamento omogeneo. Lo sviluppo delle colture è stato seguito comparando ad occhio nudo l'intorbidamento da esse raggiunto con quello delle colture di controllo.

Per seguire anche le minime variazioni di sviluppo, ci siamo serviti di un metodo nefelometrico, misurando al fotometro di Pulfrich l'intorbidamento raggiunto dalla coltura come valore di opacità relativa.

La semina è stata sempre eseguita con la stessa carica batterica (una goccia di brodocoltura di 24 ore). Si è cercato di usare in tutte le esperienze brodo della stessa composizione e comunque esso è stato sempre controllato rispetto a chinoni per i quali avevamo già fissato il potere batteriostatico.

Alcuni chinoni sono stati sperimentati a diversi potenziali di ossido-riduzione, facendo variare il ph del mezzo. Abbiamo così osservato che, sebbene non vi sia stretto parallelismo tra l'azione batteriostatica dei chinoni sullo Stafilococco aureo ad il loro potenziale di ossido-riduzione, pure quasi tutti i chinoni sperimentati possiedono, in vario grado, proprietà batteriostatiche, indipendentemente dalla presenza o no del gruppo che secondo A. E. Oxford è caratteristico. Queste osservazioni avvalorano l'ipotesi da noi espressa che queste proprietà siano da attribuire più che alla loro formula di costituzione, alla loro particolare capacità di ossido-riduzione.

Tra i vari chinoni da noi sperimentati alcuni fanno risentire la loro azione inibente fino a concentrazioni di 1/200.000, mentre ritardano ancora sensibilmente lo sviluppo a concentrazioni di 1/1.000.000.

Abbiamo inoltre constatato che l'azione batteriostatica dei chinoni viene diminuita dall'introduzione di un gruppo $-NO_2$, $-SO_3H$ ed $-OH$ e che ha inoltre influenza la posizione occupata dal gruppo $-NO_2$.

Abbiamo altresì iniziato lo studio sulle possibili reazioni che possono intervenire tra chinoni e ammino-acidi e tra chinoni e proteine, per cercare di interpretare il meccanismo d'azione di questi chinoni e chiarire quali possano essere gli effetti di tali sostanze sui prodotti del metabolismo dei batteri come pure sulle loro proteine cellulari.

Abbiamo così potuto osservare che non tutti i chinoni reagiscono nello stesso modo con sostanze contenenti gruppi $-NH_2$, e in questo comportamento si differenziano notevolmente i para dagli orto-chinoni, infatti mentre i primi ossidererebbero l'ammino-acido, o la proteina, riducendosi in parte e legandosi al substrato [1], i secondi non reagirebbero direttamente ma fungerebbero da enzimi deidrogenanti.

Questo fatto è in buon accordo con l'ipotesi da noi sopra espressa in quanto, secondo la teoria di Langenbeck sugli enzimi deidrogenanti, condizione essenziale perchè una sostanza funga da enzima, è che costituisca un sistema di ossido-riduzione reversibile e che si trovi entro determinati valori di tale potenziale [2].

Risulta inoltre che esiste effettivamente una certa relazione tra potere deidrogenante dei chinoni e la loro azione batteriostatica.

In queste esperienze ci siamo limitati a prendere in esame i soli chinoni ma desideriamo sin d'ora richiamare l'attenzione sul fatto che numerose sostanze di natura chinonica, pur non possedendo i gruppi $=CO$ caratteristici dei chinoni, ma possedendo sempre i legami degli orto e dei para-chinoni (ad esempio i derivati coloranti del difenilmetano, trifenil-metano, ossazina, tiazina, diazina, acridina, ecc.) vengono usate per la loro azione batteriostatica sia in batteriologia che in terapia. Non è qui il caso di addentrarsi nell'esposizione di numerosi esempi; per accennare solamente ai composti più noti si ricorderà il verde malachite, il verde brillante, il violetto cristalli, che sono tutt'ora usati per la preparazione di noti terreni isolanti per il gruppo tifo-coli; il violetto di metile, la fuxina basica, la pironina, la tionina, che vengono usate per la prova batteriostatica delle brucelle; il bleu di metilene, la cui azione antisettica è ben nota in terapia, ecc.

Molti altri esempi si potrebbero qui citare, ma su questo argomento torneremo in successivi lavori nei quali ci proponiamo di esaminare altri gruppi di composti costituenti anche essi sistemi reversibili di ossido-riduzione funzionanti in determinati intervalli di potenziale, al fine di vedere se anche essi possiedono proprietà batteriostatiche.

(1) E. Fischer e Schraeder, « Ber. deut. Chem. Ges. », *43*, 525 (1910); E. A. Cooper e S. D. Nicholas, « Journ. Ind. Chem. », *43*, 59 (1927); J. M. Gulland, « Biochem. Journ. », *26*, 32 (1932); S. Hilpert, « Biochem. Zeit. », *166*, 71 (1925).

(2) W. Langenbeck, « Ber. deut. Chem. Ges. », *75*, 1483 (1942).

Chimica. — *Ricerche polarografiche sul sistema allossana–acido dialurico* [1]. Nota di G. Sartori e A. Liberti presentata [2] dal Corrisp. G. Bargellini.

L'allossana secondo studi recenti di Jacobs [3], Dunn e coll. [4] e Bailey [5] riveste un particolare interesse biologico in quanto la sua introduzione nella circolazione provoca lesioni ed alterazioni analoghe a quelle che si hanno nel diabete. Alfine di osservarne l'azione diabetogena e di trovare una relazione fra questa disfunzione ed il ricambio delle basi puriniche è stata iniziata una serie di ricerche sull'allossana e suoi derivati nei liquidi fisiologici.

Ci è parso interessante vedere quindi se era possibile affrontare il problema della determinazione dell'allossana col metodo polarografico che per le sue caratteristiche di rapidità e di esattezza offre diversi vantaggi ormai generalmente noti.

Naturalmente, prima di iniziare la determinazione nei liquidi fisiologici abbiamo intrapreso uno studio completo del sistema ossido–riduttore allossana–acido dialurico al catodo a goccia di mercurio, e poichè questo lavoro inziale ci ha fornito dei dati interessanti, crediamo opportuno riferirne brevemente.

Il sistema allossana–acido dialurico era stato studiato potenziometricamente per primo da Biilmann [6], successivamente da Richardson e Cannan [7] e recentemente da Hill e Michaelis [8].

Tutti gli autori concordano nell'ammettere che solo a valori di pH inferiori a 5 si hanno valori del potenziale riproducibili e che si stabilizzano in un breve tempo. A pH superiori a 5 il potenziale varia col tempo e Richardson e Cannan ammettono che ciò sia dovuto probabilmente alla trasformazione della allossana nell'acido allossanico; gli autori considerano quale potenziale termodinamico quello ottenuto estrapolando i valori al tempo zero.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica inorganica dell'Istituto Chimico della R. Università di Roma – Centro di chimica generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) « Proc. Soc. Exper. Biol. e Med. », *37*, 407 (1937).

(4) « Jour. Am. Med. Ass. », *122*, 676 (1943).

(5) « Jour. Am. Med. Ass. », *122*, 1165 (1943).

(6) « Ann. der Chem. », *19*, 137 (1923).

(7) « Bioch. Jour. », *23*, 68 (1929).

(8) « Science », *78*, 485 (1933).

Risulta pure dai lavori citati che l'allossantina, cui normalmente si attribuiscono le caratteristiche di un chinidrone nel sistema, in cui l'allossana corrisponde al chinone e l'acido dialurico all'idrochinone, non esiste in soluzione e non dà un poteziale di ossidoriduzione come sarebbe da aspettarsi. Michaelis ha osservato che il potenziale si stabilizza solamente per aggiunta di un sale ferroso e cerca una spiegazione di questo fatto nella possibilità della formazione di un complesso fra acido dialurico e ferro.

In base a questi risultati abbiamo intrapreso l'esame polarografico del sistema allossana–acido dialurico–allossantina e acido allossanico.

Tecnica delle ricerche.

Allossana. - È stata preparata col metodo di Biltz e Heyn [1] per ossidazione dell'acido urico con cloro. Per le esperienze polarografiche sono state usate soluzioni molari duecentesime nel tampone di Britton [2] impiegando una cella di Kalouseck [3] modificata con un dispositivo di Maassen [4] per la variazione in modo continuo per pH dell'ambiente.

In queste condizioni l'allossana presenta due onde di riduzione distinte ai potenziali dati dalla tabella seguente:

pH	E_1	E_{1c}	E_2	E_{2c}
1.81	+ 0.058	+ 0.075	— 0.682	— 0.695
2.56	+ 0.036	+ 0.033	— 0.741	— 0.736
3.29	+ 0.009	+ 0.002	— 0.800	— 0.779
4.10	— 0.021	— 0.025	— 0.851	— 0.853
4.56	0.035	0.034	— 0.879	— 0.879
5.02	0.058	0.053	— 0.910	— 0.919
5.72	0.067	0.075	— 0.927	— 0.967
6.80	0.100	0.105	— 0.984	— 0.982
7.24			— 1.038	— 1.008
7.96			— 1.056	— 1.050
8.65			— 1.082	— 1.093
9.15			— 1.094	— 1.118

(1) « Ann. der Chem. », *413*, 60 (1917).
(2) « Hydrogen Jons », 225 (1932).
(3) « Coll. Trav. Chem. Tschec. », *10*, 475 (1938).
(4) « Z. Angew. Chem. », *50*, 375 (1937).

Nella tabella E_1 ed E_2 rappresentano i potenziali misurati della prima e seconda onda, E_{1c} e E_{2c} i potenziali calcolati come vedremo appresso.

L'altezza della prima onda è inizialmente maggiore della seconda, ma col tempo, la prima onda decresce mentre la seconda cresce. L'inclinazione della prima onda è pari a quella di un processo di secondo ordine mentre quella della seconda onda è pari ad un processo di primo ordine.

Allossantina. – È stata usata allossantina pura della British Drug House sciolta fino a saturazione, trattandosi di sostanza pochissimo solubile, nello stesso tampone di Britton. I polarogrammi sono stati eseguiti con la stessa modalità dell'allossana. L'allossantina presenta due onde, una di ossidazione e una di riduzione i cui potenziali coincidono con quelli delle due onde dell'allossana. Se nella soluzione si fa passare una corrente di ossigeno la prima onda che era di sola ossidazione, passa oltre lo zero del galvanometro e diventa un'onda di ossidoriduzione. Anche nel caso dell'allossantina la seconda onda è inizialmente inferiore alla prima ma col tempo la prima onda diminuisce. (Tale variazione avviene in modo più rapido in presenza di aria che in corrente di idrogeno). La seconda onda cresce invece col tempo.

Acido dialurico. – È stato preparato per riduzione dell'allossantina con idrogeno solforato secondo Wöhler e Liebig [1]. Le modalità di misura sono analoghe a quelle precedenti tenendo presente, che data la facilità di ossidarsi della sostanza, si sono dovute osservare particolari pracauzioni per evitare il contatto dell'aria con la soluzione. L'acido dialurico dà un'onda di ossidazione perfettamente analoga e allo stesso potenziale della prima onda dell'allossantina; manca la seconda onda. Se la soluzione acquosa di ac. dialurico viene lasciata in contatto con l'aria l'onda passa oltre lo zero, per dare una curva di ossido–riduzione e col tempo compare anche un'onda di riduzione ad un potenziale identico a quello della seconda onda dell'allossana.

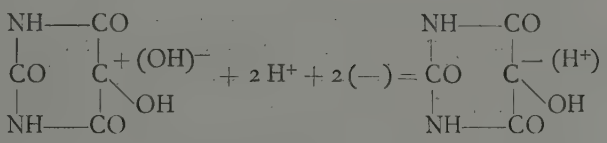
Acido allossanico. – Per chiarire quanto esposta sopra, abbiamo preparato anche l'acido allossanico secondo Biltz [2] per trattamento dell'allossana con idrato di bario e successivo spostamento dell'acido allossanico dal sale di bario con acido solforico.

Le modalità di ricerca sono state esattamente quelle precedenti. L'acido allossanico presenta solamente una curva di riduzione coincidente nel valore del potenziale e nell'ordine di reazione con la seconda onda della allossana.

(1) « Ann. der Chem. », *26*, 276 (1838).
(2) « Ann. der Chem. », *413*, 69 (1917).

Discussione dei risultati.

Si è già detto che il coefficiente $\frac{\Delta i}{\Delta E}$ della prima onda è quello di un processo di secondo ordine. L'onda si riferisce perciò senza dubbio alla riduzione



Se si considera però il valore del potenziale in funzione del pH si nota che esso non varia linearmente col coefficiente $\frac{\Delta E}{\Delta pH} = 0.029$ come sarebbe da aspettarsi, ma la curva presenta tre punti di flesso, pari a tre costanti di dissociazione acida i cui valori sono $p_{K_1} = 2.83$ $p_{K_1'} = 7.20$ e $p_{K_2'} = 10$. Ne risulta che sia l'allossana che l'acido dialurico contengono degli atomi di idrogeno ionizzabili ed infatti per l'allossana Richardson e Cannan hanno determinato due costanti di dissociazione acida pari a $K_1' = 6.31 \cdot 10^{-8}$ e $K_2' = 1 \cdot 10^{-10}$ e per l'acido dialurico una costante pari a $K_1 = 1.48 \cdot 10 \cdot^{-3}$. Le variazioni del potenziale normale, o potenziale del punto di flesso, col pH è perciò data dall'espressione

$$E = E_0 + \frac{0.058}{2} \log \frac{(H^+)^3 (1.48 \cdot 10^{-3} + H^+)}{(6.31 \cdot 10^{-8} + H^+)(1.10^{-10} + H^+)}$$

Con questa formula sono stati calcolati i valori elencati sotto E_{1c} e come si vede la concordanza è abbastanza buona fino a pH 7 circa.

Il valore di E_0 determinato dai polarogrammi è $+0.182$ rispetto all'elettrodo a calomelano saturo. Esso non coincide esattamente con quello determinato potenziometricamente che sarebbe $+0.132$ riferito allo stesso elettrodo.

Il fatto che l'acido dialurico presenta un'onda di ossidazione allo stesso potenziale della prima onda di riduzione dell'allossana e che per gorgogliamento di aria questa diventa onda di ossidoriduzione non fa che confermare che il sistema di ossidoriduzione è quello ammesso sopra.

Più interessante è il comportamento dell'allossantina. Se essa risultasse semplicemente dall'unione di una mole di allossana e di una di acido dia-

lurico ci si dovrebbe aspettare una curva di ossidoriduzione, cioè una curva simmetrica rispetto allo zero del galvanometro. Il fatto invece che l'onda corrisponda esclusivamente ad un fenomeno di ossidazione, significa che solo il componente ridotto, cioè l'acido dialurico è presente in una forma attiva, vale a dire ossidabile, e solamente facendo gorgogliare aria nella soluzione, parte dell'acido dialurico si ossida ad allossana e la curva assume l'aspetto di un'onda di ossidoriduzione. Questo conferma l'osservazione di Michaelis che l'allossantina, da sola, non presenta normalmente un potenziale ben definito ma variabile col tempo e non riproducibile.

Resta a parlare della seconda onda che come si è detto compare nei polarogrammi di allossana, allossantina e acido allossanico. Anzitutto dalla inclinazione della curva si ricava che si tratta di una riduzione di primo ordine. Il fatto poi che il coefficiente $\frac{\Delta E}{\Delta pH}$ sia eguale a 0.058 volt significa che alla reazione partecipa un solo ione idrogeno.

I potenziali calcolati con l'espressione

$$E = E_o - 0.058\ pH \qquad \text{con} \qquad E_o = -0.588$$

sono elencati sotto $E_{2.}$ e si vede che la concordanza è abbastanza buona fino a pH 9 circa.

Dalle nostre esperienze risulta che l'onda è dovuta all'acido allossanico. È noto infatti che l'allossana subisce col tempo una trasformazione di idrolisi in acido allossanico.

Se si eseguono i polarogrammi di una soluzione di allossana a intervalli successivi di tempo, si nota che la prima onda di riduzione diminuisce, mentre la seconda cresce parallelamente alla trasformazione dell'allossana in acido allossanico. Per quanto riguarda poi l'allossantina sembra che in essa l'allossana sia tutta o in massima parte nella forma di acido allossanico o almeno si trasformi immediatamente nella suddetta forma.

La riduzione di primo ordine che l'acido allossanico subisce può essere interpretato con la formazione di un pinacone.

Geologia. — *Autoctonia e alloctonia dei terreni dell'Appennino Centrale e Settentrionale.* Nota di R. Signorini, presentata [1] dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

Chi intraprende lo studio geologico della catena appenninica cominciando dalla parte settentrionale di essa (Liguria ed Emilia), si trova nelle condizioni più sfavorevoli per una comprensione dei caratteri fondamentali dell'Appennino: si trova infatti nella regione dove la serie stratigrafica autoctona e le vere strutture dell'Appennino sono maggiormente nascoste perchè ricoperte dalla massima estensione e dalla massima potenza e molteplicità di terreni alloctoni. Si tratta delle famose «argille scagliose» e del mosaico di terreni vari giustaposti, il cui rilevamento, complessissimo nel dettaglio, non ci mostra niente delle linee generali, delle leggi armoniche del vero Appennino che rimane coperto da questa coltre di materiale sovrascivolato, velato da questo fenomeno piuttosto superficiale che caratterizza buona parte dell'Appennino e lo ha fatto sembrare irto di difficoltà e geologicamente molto « nero ». Partendo invece dalla parte meridionale di quel grande arco appenninico che dai dintorni di Roma costituisce una grande unità geologica fino al Monferrato, vi troviamo i più antichi terreni autoctoni in esso affioranti: i lavori geologici vecchi e nuovi vi hanno determinato chiaramente la serie stratigrafica e la struttura. È questa la parte più fortemente sollevata: procedendo verso nord, con l'immergersi delle singole pieghe e dei complessi geologici, compaiono i fenomeni di ricoprimento prima limitati e semplici, poi man mano più intensi, estesi e complessi. Partendo così dalla parte profonda della serie, anche questi fenomeni della parte alta divengono man mano più facilmente comprensibili.

Parte I: Autoctonia. – Riguardo all'autoctonia, cioè alla formazione in posto delle varie facies, è fondamentale per l'Appennino la serie stratigrafica che viene a giorno, senza grandi complicazioni tettoniche, nell'Appennino Umbro-Marchigiano: tutta una serie di sedimentazione marina continua attraverso il Mesozoico e il Cenozoico. Sono tutte formazioni calcaree o marnose, senza apporto di materiale detritico terrigeno fino al Miocene. Le più basse che affiorano sono formazioni di scogliera, neritiche: dolomie e calcari massicci del Trias superiore e del Lias inferiore (stadio anteriore alla formazione della geosinclinale appenninica). Segue un lungo

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

periodo di sedimenti poco potenti di mare profondo: calcari bianchi e marne rosse con Ammoniti del Lias medio e superiore; calcari e scisti ad Aptici del Giurassico; calcari majolica del Neocomiano; scisti a fucoidi e calcari con selce, bianchi e rosati, del Cretaceo medio e superiore; scaglia rossa e cinerea del Paleogene e dell'Aquitaniano. In questo mare aperto e profondo dell'affondamento geosinclinale, di lenta sedimentazione, arrivano per la prima volta nel Miocene le torbide di abbondante materiale terrigeno (argilloso e sabbioso), effetto dell'orogenesi avanzante col sollevamento di zone più interne emerse, giovanili, sede di intensa erosione. Si passa così dalla sedimentazione calcareo-marnosa alla sedimentazione arenacea: questa comincia col Langhiano nella zona umbra, ad ovest della dorsale spartiacque appenninica, e soltanto più tardi, nel Miocene superiore, ad est di essa. Le formazioni arenacee sono, per la loro stessa origine di rapido accumulo, molto potenti e possono quindi costituire da sole grandi zone montane dell'Appennino senza lasciare affiorare le formazioni calcaree sottostanti.

L'iniziarsi della sedimentazione arenacea successivamente in zone man mano più lontane dal nucleo tirreno e in generale la successione delle varie serie stratigrafiche secondo le fasi del processo orogenico mi hanno portato a distinguere nell'Appennino una serie di zone longitudinali di egual facies (zone isopiche), che anche costituiscono complessi strutturali distinti, con caratteri propri. Esse si susseguono dalla regione interna toscana metallifera al margine pedemontano adriatico-padano nell'ordine seguente.

La *Zona I* è rappresentata tipicamente nella ruga di macigno che da Sinalunga affiora verso NO, continuando nei monti del Chianti, nel Monte Albano, nei monti della Lucchesia e poi nella dorsale appenninica dall'Alpe delle Tre Potenze fino al Monte Orsaro nel Parmense. In questa ruga emerge l'autoctono libero dalla copertura della sedimentazione pliocenica e dal ricoprimento dei terreni alloctoni. Esso è costituito dalla serie mesozoica della Toscana, prevalentemente calcarea, senza facies di apporto terrigeno conseguente ad orogenesi; sopra ai calcari cretacei viene, con alla base scisti rossi e talora brecciole nummulitiche, la potente sedimentazione arenacea del macigno che costituisce tutti quei monti. È questa la formazione arenacea « A » dei miei precedenti lavori; con essa si inizia l'accumulo di abbondantissimo materiale terrigeno nel mare aperto, si inizia cioè la sedimentazione legata all'orogenesi. Ho mostrato in precedenti lavori l'unitarietà e la continuità di questa facies arenacea la cui formazione accompagna tutto lo svolgersi dell'orogenesi appenninica e il cui potentissimo appilamento di strati costituisce la maggior parte dell'Appennino stesso, rotto sì da fenomeni tettonici di scaglie accavallate e di placche scivolate, ma non distinto in varie formazioni arenacee stratigraficamente separate da altre formazioni come si riteneva. Ne consegue che, una volta iniziato questo nuovo tipo di sedimentazione, esso continuerà, pur spostandosi col

tempo a zone successivamente più esterne (verso l'Adriatico), fino al cessare del grande apporto terrigeno, ciò che avverrà sul finire del Miocene in corrispondenza coll'affondamento dell'area toscana metallifera e, dall'altra parte, col ritiro del mare da tutto l'Appennino Settentrionale. Avrà poi una ripresa nel ciclo pliocenico. La presenza di formazioni di altri tipi nelle stesse aree è dovuta ad alloctonia. L'inizio della deposizione del macigno, che si vede nella serie stratigrafica in questa zona I, segna dunque un cambiamento generale delle condizioni della regione appenninica e il caposaldo della principale fase orogenica. Le recenti ricerche del Migliorini in Garfagnana col ritrovamento di Lepidocicline nelle brecciole a Nummuliti ed altri fossili rimaneggiati, proprio alla base del macigno, assegnano a tale avvenimento un'età non anteriore all'Oligocene (Comunicazioni Migliorini e Signorini nel « Boll. Soc. Geol. It. », 1945). La struttura predominante in questa zona è a blocchi sopraelevati, a strati inclinati a NE, tagliati a SO da una faglia dove spesso affiorano i terreni sottostanti al macigno.

Nella *Zona II* non affiora più la parte inferiore della sedimentazione arenacea, ma predominano marne alternate con strati arenacei, di tipo litologico « B » riferibile prevalentemente all'Aquitaniano. A questa formazione arenacea fa seguito l'arrivo del materiale alloctono e una sedimentazione del Miocene medio in facies costiera (per regressione). La struttura predominante è a pieghe ribaltate e a scaglie embricate, tutte vergenti a NE. A questa zona appartengono i monti ad ovest della valle del Tevere da Orvieto ai monti di Cortona e all'Alpe di Catenaia, i monti intorno al bacino Casentinese e a quello Mugellese, l'alto Appennino Bolognese e la dorsale Corno alle Scale–Cimone in quello Modenese.

La *Zona III*, che comprende l'Umbria tra il Tevere e la dorsale appenninica, l'Appennino tra la Val Tiberina e l'Urbinate, e l'Appennino Romagnolo, è caratterizzata dalla formazione marnoso–arenacea potentissima « C », di età miocenica dal Langhiano al Tortoniano inclusi; a quest'ultimo fa seguito l'arrivo di materiale alloctono e la regressione marina nel Miocene superiore. Nell'Umbria, dove affiorano i terreni sottostanti, si constata che il primo arrivo del materiale sabbioso è avvenuto più tardi che nella zona precedente, nel Langhiano. La struttura predominante è a larghi blocchi tranquilli separati da linee di intensa dislocazione (pieghe ribaltate a NE), con le modalità del tipo di struttura che ho chiamato appunto « romagnolo ».

La *Zona IV*, Sabino–Marchigiana, presenta la serie mesozoica indicata precedentemente: la sedimentazione si mantiene marnoso–calcarea più a lungo che nella zona precedente, fino a tutto il Miocene medio; il materiale terrigeno grossolano vi arriva solo nel Miocene superiore, seguito da regressione tra Miocene e Pliocene. Non vi giungono colate di materiale alloctono se non sul suo prolungamento settentrionale, nel Montefeltro.

Un'ulteriore *Zona V* comprende le facies abruzzesi, esterne rispetto all'orogenesi dell'arco appenninico centro-settentrionale.

Parte II: Alloctonia. – Esaminando quest'arco appenninico da sud verso nord, troviamo già nell'Umbria piccoli lembi di argille scagliose (materiale mesozoico analogo alla formazione ofiolitifera molto estesa nella regione interna toscana con carattere alloctono) sopra la grande massa della formazione marnoso–arenacea mesomiocenica (zona III): per la loro posizione superficiale e per l'assenza di tali formazioni nella regolare serie stratigrafica sottostante, essi si devono interpretare come residui di materiale sovrascorso dalle zone più interne, posteriormente alla sedimentazione miocenica. Associati ad essi oppure isolati, ma sempre in posizione analoga cioè sparsi sopra alla formazione marnoso–arenacea, si trovano blocchi di calcari conchigliari del Miocene medio che devono pure considerarsi sopravanzati: essi rappresentano infatti la facies costiera che doveva trovarsi più ad ovest (zona II) della facies di mare aperto e di affossamento rappresentata in posto dalla formazione marnoso–arenacea (zona III). Al margine occidentale di quest'ultima si sviluppa, dai pressi di Orvieto al bordo settentrionale del Casentino e del Mugello, la formazione arenacea oligocenico–aquitaniana della zona II, con un contatto anomalo per accavallamento mediante una caratteristica striscia di argille scistose rosse, sopra alla formazione marnoso–arenacea miocenica, come ho illustrato dettagliatamente per tutto il bordo settentrionale del Casentino e del Mugello. Alcuni lembi della stessa formazione arenacea oligocenico–aquitaniana, con scisti rossi alla base, si trovano, ancora nell'Umbria, sopra alla formazione marnoso–arenacea della zona III, mentre al di sotto di essa l'Oligocene e l'Aquitaniano hanno la facies marnosa di scaglia cinerea: ritengo si tratti di lembi staccati dalla precedente zona II, dal margine accavallato, e sdrucciolati anch'essi in avanti sulla formazione marnoso–arenacea.

Procedendo verso NO, troviamo i terreni alloctoni assumere maggiori proporzioni nell'alta Val Tiberina. Se ne vedono facilmente i rapporti col substrato autoctono: al di sopra della formazione arenacea della zona II (Alpe di Catenaia) si trovano sovrascorse argille scagliose con masse ofiolitiche, anche ingenti come quelle dei Monti Rognosi, e con grandi masse di calcari marnosi (Pieve S. Stefano). Già in queste masse si constata un fatto che poi si ritrova procedendo verso NO come caratteristica generale delle formazioni alloctone, sovrascorse: l'irregolarità e l'indipendenza delle loro direttrici tettoniche rispetto all'andamento normale delle linee tettoniche del substrato autoctono. Esse testimoniano movimenti diversi dal semplice corrugamento. Ne ho illustrato un esempio tipico nelle mie Osservazioni geologiche nei dintorni di Caprese Michelangelo, « Boll. Soc. Geol. It. », 1940.

Nel Valdarno Superiore al di sopra della formazione arenacea « A » dei Monti del Chianti (zona I) e in modo del tutto analogo nel Casentino dove la stessa formazione, sopraelevata nella dorsale del Pratomagno, torna ad abbassarsi verso est, si trovano: argille scistose con frammenti di strati

calcarei, pietraforte con fossili del Cretaceo, calcari alberesi talora nummulitici. Tutti questi vari terreni si trovano adagiati sul solito semplicissimo autoctono arenaceo nelle zone rimaste più ribassate per pieghe sinclinali o per faglie: sono quindi alloctoni e devono avere una provenienza lontana dalla parte del Tirreno. Sedimentati sopra a questo alloctono e spostati solo per breve tratto sono i lembi di facies costiera del Miocene medio della Verna, di Partina.

Lo stesso fatto si ripete più a NO nel bacino di Firenze, ma assumendo proporzioni molto maggiori. Autoctono vi troviamo, in continuazione dei Monti del Chianti, il macigno dei poggi dagli Scopeti (sulla Greve) a Signa e del Monte Albano; e troviamo sull'opposta sponda del bacino lacustre una ripetizione del Pratomagno, molto impiccolita, nella collina fiesolana dove riemerge il macigno. Al di sopra si ritrovano galestri e argille scistose della formazione ofiolitifera, con masse ofiolitiche (Impruneta, M. Ferrato); si ritrova la pietraforte; e al di sopra di tutti questi terreni si ritrovano i calcari marnosi nummulitici (alberesi) in masse grandissime con forti pieghe e spiegazzamenti (monti di Pontassieve, M. Pratone, M. Morello, la Calvana). Tutti questi terreni sono più antichi del sottostante macigno: tutti alloctoni. Verso NE essi si addossano, come in Casentino, alla formazione arenaceo-marnosa « B » della zona II (bacino Mugellese). Anche su questa poggiano lembi di argille scagliose con ofioliti e con masse di calcari marnosi (per esempio M. Calvi).

Ma anche più oltre della zona II avanzano i terreni alloctoni. Dai dintorni di Bibbiena e di Pieve S. Stefano sopra accennati prosegue verso NE una colata di grandi masse alloctone incanalate in una zona di depressione trasversale (Val Marecchia), in ricoprimento su tutta la larghezza della formazione marnoso-arenacea e sulla formazione gessifera, fino al margine della pianura: sono argille scagliose ofiolitifere con calcari nummulitici e marnosi che avevamo già trovato alloctoni nelle zone più interne, ed è anche tutta una serie di placche della facies costiera miocenica scivolate giù dalla precedente zona II e rimaste sparse su tutta la larghezza delle zone seguenti a segnare dalla Verna per il M. Fumaiolo, il Sasso di Simone, S. Leo, fino a S. Marino e Verucchio, il cammino del sopravanzamento. Esso supera i cinquanta chilometri. È questo un esempio di grande scivolamento molto evidente sia per la differenza di facies tra i terreni della colata e quelli in posto della stessa zona, sia per l'indipendenza delle direttrici di queste placche di terreni vari da quelle regolari del corrugamento appenninico che si hanno invece nel substrato, sia per la continuità dei terreni autoctoni e delle loro strutture da un fianco all'altro della colata, apparendo anche spesso in incisioni al di sotto di questa. Questo splendido esempio ci facilita la comprensione di quanto si trova molto più a NO, al di là del Sillaro.

Proseguendo a NO della striscia trasversale feltresca, nell'Appennino Romagnolo si risolleva di nuovo l'autoctono costituito ancora dalla forma-

zione marnoso-arenacea: esso presenta pieghe che si seguono con continuità per diecine e diecine di chilometri da SE a NO, secondo le direttrici del corrugamento appenninico (a differenza dai terreni alloctoni). Vi si constata la presenza di argille scagliose o in generale di terreni alloctoni soltanto alla sommità della potentissima pila marnoso-arenacea: alla base della formazione gessifera a cui essa giunge al margine NE (lembi di argille scagliose sotto ai gessi presso Sarsina, Maiano e Monte Pietra). Non soltanto in parte così esterna, ma anche nelle parti più interne della zona marnoso-arenacea, le più vicine al bordo della zona arenacea II, si trovano conservati in sinclinali lembi di materiale alloctono sopra alla parte stratigraficamente più alta, tortoniana, della formazione marnoso-arenacea (S. Piero in Bagno, Casaglia). Ciò dimostra che su tutta la zona III il sovrascorrimento è avvenuto soltanto dopo: nel Miocene superiore. È un fatto costante in tutto l'Appennino centro-settentrionale che l'arrivo del materiale alloctono è sempre posteriore alla sedimentazione arenacea delle singole zone.

Giungendo alla valle del Sillaro si constata la generale immersione a NO della formazione marnoso-arenacea sotto a una nuova colata di argille scagliose a cui si uniscono, più oltre, estesi e sempre più numerosi terreni stratificati alloctoni, dai quali essa non torna più ad emergere. Continua invece verso NO l'autoctono dell'adiacente più interna zona II (formazione arenacea oligocenico-aquitaniana) nella dorsale appenninica, mentre il versante padano è occupato ormai tutto dai terreni alloctoni che hanno preso così la parte dominante nella superficie topografica dell'Appennino: siamo infatti all'Appennino Emiliano. Lo scivolamento giunge fino al margine della pianura padana, ma non l'oltrepassa. Sono placche di terreni staccati dal più vicino autoctono e sono anche terreni di più lontana non precisata provenienza: argille scagliose di ingredienti mesozoici, ofioliti, calcari a Elmintoidi, calcari nummulitici, marne verdastre e argille rosse oligoceniche; sono ancora formazioni arenacee oligoceniche, formazioni molassiche e altre facies costiere del Miocene la cui sede di sedimentazione doveva essere in una zona più interna di quella in cui si trovano attualmente. Il massimo dell'accumulo e della molteplicità del materiale di ricoprimento si raggiunge nell'Appennino Ligure-Piacentino, all'estremità opposta e in completa antitesi dell'Appennino Sabino-Marchigiano da cui siamo partiti.

Troppo lungo diventerebbe qui parlare dei singoli terreni alloctoni, delle loro facies, strutture e distribuzione: questo potrà formare l'oggetto di un'altra Nota. Riguardo all'alloctonia in generale, cioè alla presenza in una serie stratigrafica locale di terreni formati altrove e pervenuti con una traslazione suborizzontale, senza ripetere i risultati delle osservazioni di rilevamento esposti nei miei precedenti lavori, nè i riferimenti alle idee di altri studiosi, ritengo fondamentali per l'Appennino: il concetto della costituzione delle argille scagliose come formazione di origine tettonica, come prodotto meccanico di scivolamenti di masse (in parte plastiche come le

argille, in parte frammentate come i calcari) in conseguenza dell'orogenesi; ed il concetto del sopravazamento di esse e di placche di terreni stratificati dalle zone successivamente corrugate e sollevate verso l'avanfossa (quindi in ricoprimento sopra a terreni autoctoni man mano più recenti), per quel meccanismo di scivolamenti, slittamenti o colate, per azione della gravità, indicato prima dal Bonarelli indi dall'Anelli per qualche zona dell'Appennino Settentrionale, e studiato e generalizzato, per vie diverse, dal Migliorini e da me. Lo sviluppo delle idee generali sulla *tettonica di scivolamento* è stato esposto da Gb. Dal Piaz: *L'influenza della gravità nei fenomeni orogenetici*, « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », 1942.

Parte III: Andamento generale. – L'Appennino centro–settentrionale si svolge in forma di arco convesso ad est, intorno al bordo orientale della regione interna toscana-metallifera, dai Monti Tiburtini (Roma) fino a Genova e alle colline del Monferrato: esso costituisce la metà settentrionale della catena appenninica.

In linee semplici tutto l'Appennino centro-settentrionale risulta costituito dal basso in alto: *a*) da una sedimentazione calcarea preorogenica; *b*) da una sedimentazione arenacea orogenica; *c*) da un ricoprimento di materiale alloctono proveniente in parte dalla regione interna tirrenica, in parte dalle singole zone appenniniche a quelle man mano più esterne.

La serie delle zone indicate si presenta completa, per l'autoctono affiorante, nel settore Toscana–Umbria–Marche, in corrispondenza della massima larghezza della penisola italiana. Ma procedendo verso NO le singole zone vanno abbassandosi e spariscono così (prima le più esterne, poi man mano quelle successive più interne) sotto al ricoprimento dei terreni alloctoni; indi, allontanandosi tangenzialmente dall'arco orografico, si prolungano ribassate fuori del margine pedemontano, sotto alla pianura padana. Così la *zona IV* è la prima ad abbassarsi, terminando nell'Urbinate ogni affioramento della serie mesozoica marchigiana, che si immerge, con la scaglia, sotto alle formazioni mioceniche; più oltre le pieghe di queste hanno termine man mano uscendo verso la pianura nel Riminese e nel Cesenate, fino a Bertinoro. I sondaggi profondi presso Ferrara hanno trovato continuarsi sotto la pianura la stessa zona isopica, cioè le facies marchigiane: un Miocene di spessore ridotto e prevalentemente marnoso–calcareo; un Paleogene poco potente, marnoso–calcareo, analogo alla scaglia cinerea; infine il calcare rosato con selce rossa.

La più interna *zona III*, invece, si prolunga dall'Umbria nell'Appennino Romagnolo fino a cessare bruscamente il suo affiorare alla zona trasversale Passo del Giogo-Valle del Sillaro, dove si immerge sotto ai terreni alloctoni. Siamo circa 50 Km. a NO di Bertinoro. Sul prolungamento di questa zona III non affiorano più che terreni alloctoni (subappennino Bolognese, Modenese, Reggiano). Ma oltre il margine della pianura, dove

si arresta l'avanzamento dei terreni alloctoni, si ritrova la continuazione delle facies della stessa zona III nei sondaggi profondi della pianura parmense e piacentina: il Miocene vi assume fortissimi spessori con facies di sabbie e marne argillose equivalenti della formazione marnoso-arenacea appenninica, ed è corrugato in una serie di strutture di tipo appenninico.

Procedendo verso NO, a 60 Km. dalla linea del Sillaro si trova un'altra grande linea trasversale: la linea Pievepelago–valle dello Scoltenna, dove termina l'affioramento dell'autoctono della successiva *zona II:* le arenarie aquitaniane della dorsale Corno alle Scale–Cimone si immergono definitivamente sotto alla distesa delle argille scagliose e placche stratificate varie. L'estensione di questa distesa di alloctono progredisce con un nuovo gradino che l'accosta alla cresta appenninica. Ormai l'autoctono affiorante è costituito soltanto dalla *zona I:* il macigno della dorsale spartiacque dall'Alpe delle Tre Potenze al Monte Orsaro. Procedendo ancora per 60 Km. a NO, si giunge ad un'altra grande linea trasversale di abbassamento: la linea Passo della Cisa – Valle del Baganza, dove anche la zona del macigno si immerge verso NO sotto alla coltre alloctona. Tutto quanto l'Appennino è formato ormai, in superficie, da terreni alloctoni di aspetto complicatissimo. Il sottostante autoctono, sempre semplice, costituito dalla solita sedimentazione arenacea, torna ad affiorare soltanto in qualche anticlinale (nell'alta Val di Taro tra Bedonia e S. Maria; in Val d'Aveto a nord di Torrio).

Procedendo ancora 80 Km. a NO, quest'Appennino (Parmense, Piacentino e Pavese) così ridotto alla sola grande copertura di terreni alloctoni, per i successivi abbassamenti e per la successiva perdita delle zone più esterne che uscendo dal margine pedemontano continuano solo in profondità sotto alla pianura padana, giunge a una nuova linea trasversale che fa retrocedere il margine appenninico sulla pianura vogherese per un nuovo gradino da Stradella a Tortona. Da Tortona riprende la direzione appenninica verso NO e si risolleva nelle colline del Monferrato (con argille scagliose e calcari marnosi come nell'Appennino Piacentino e Pavese, sotto sedimenti oligocenici e miocenici), finchè altri 80 Km. più a NO raggiunge l'ultima linea trasversale nelle colline di Torino dove ha termine, a pochi chilometri dalle Alpi Occidentali, entro la concavità dell'arco di queste.

Geologia. — *Sopra alcuni calcari a Nord di Roma* [1]. Nota di C. Maxia presentata [2] dal Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

Circa 30 Km. a Nord di Roma, tra le vie Flaminia e Tiberina, si eleva un sistema collinoso, allungato per circa 6 Km. nella direzione NO–SE, dal M. del Cardinale (m. 280) al M. Belvedere (m. 227).

Questa serie di piccoli rilievi è costituita di alcune varietà di calcari, le quali, sul foglio n. 144 della Carta d'Italia al 100.000, edito dal R. Ufficio geologico nel 1888, vennero distinte col colore dell'Eocene medio.

Con la presente Nota vengono dati i primi risultati delle ricerche di campagna e di laboratorio eseguite nella detta regione; la quale, che a me consti, è stata presa sommariamente in esame, per quanto riguarda tali rocce, soltanto dal Moderni [3], nel 1896, in una sua Memoria sull'origine del nuovo lago di Capena (Leprignano) e dal Meli [4], nel 1916, in occasione di un suo studio sopra un giacimento di materiali refrattari posti a SE del M. Belvedere, in località Pietralata.

Questi AA. avevano però sollevato forti dubbi sull'appartenenza all'Eocene di tutta quanta questa formazione geologica, come indicata sul foglio n. 144; e il Meli sopratutto, convinto, a quanto pare, che il calcare dolomitico di Pietralata e delle colline adiacenti che si dirigono verso NO, che egli attribuiva al Retico, fossero le sole rocce affioranti in questa regione, veniva esplicitamente ad escludere il suddetto riferimento.

* * *

Le rocce che venivano assegnate all'Eocene medio risultano però, oltre che di diversi tipi di calcari e di calcari dolomitici, che appartengono al Lias ed al Retico, anche da un complesso litologico di cui, per ora, ricordo i conglomerati calcarei fortemente cementati, rappresentati sopratutto da brecciole, passanti a calcari bianchi o giallicci, frequentemente bucherellati, talora molto fossiliferi più o meno bituminosi, spesso emananti odore

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo-paleontologico dell'Università di Roma.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) P. Moderni, *Il nuovo lago e gli avvallamenti di suolo nei dintorni di Leprignano.* «Boll. R. Com. geol. d'It.», XXVII, Roma, 1896.

(4) R. Meli, *Nota preliminare intorno una cava di materiali argillosi, refrattari, che sta attivandosi nei dintorni di Roma.* «Boll. Soc. geol. it.», XXXV, Roma, 1916.

solforoso per sfregamento e che, per la loro posizione stratigrafica, erano stati assegnati al Pliocene superiore anche dal Moderni.

Questa età è adesso confermata dalla presenza di importanti resti organici, specialmente di lamellibranchi, che vengono segnalati per la prima volta nelle dette brecce, e che per le loro dimensioni, talora gigantesche, sono paragonabili a quelli, coevi, di Corneto Tarquinia e di Formello (Montecelio).

Il materiale paleontologico, non ancora completamente determinato, proviene da diversi punti dei dintorni del M. del Cardinale e dal M. Belvedere; specialmente da una piccola cava di brecce, usata come pietra da calce, recentemente aperta sul versante sud-occidentale di quest'ultima località, in corrispondenza del tronco superiore della vallecola che confluisce col Fossopuzzo presso la Fontana Fistola (Tav. III, NO del foglio n. 144 dell'I. G. M.).

Ed ecco ora un breve elenco di fossili, il quale, benchè incompleto, è sufficiente per un sicuro riferimento al Pliocene superiore di queste ultime rocce:

1. – *Ostrea edulis* var. *lamellosa* Br.
2. – *Macrochlamys latissima* Br.
3. – *Chlamys opercularis* L.
4. – *Venus (Clausinella) fasciata* Da Costa.

Nelle sezioni sottili delle brecciole e dei calcari bucherellati, provenienti dalle medesime località, specialmente da q. 268, versante N di q. 223, ecc., sono osservabili abbondanti litotamni, amfistegine, briozoi, radioli di echinidi, sezioni di piccoli gasteropodi, anch'essi di nuova segnalazione.

*
* *

Lo studio dei terreni pliocenici della regione in esame e di quella immediatamente circostante, permette di distinguere i seguenti complessi litologici, aventi sopratutto valore di *facies* eteropiche e non di termini stratigrafici, assegnabili al Pliocene superiore, che raggiunge una potenza di circa 150 m.: 1° argille finemente sabbiose, passanti in alto a sabbie argillose, più o meno cementate, di colore gialliccio, a *Schizaster major* Desor; molto sviluppate verso Ovest (versante occidentale del M. Razzano; territorio compreso tra Capena e il Lagopuzzo) e ad Est (territori di Nazzano e di Civitella S. Paolo); 2° calcare grossolano, arenaceo, giallastro, ricchissimo di resti di molluschi litorali, specialmente grossi *Pecten* (che ricorda molto il tipico « macco » di Palo e di Anzio, già indicato dal Meli [1] per

(1) R. Meli, *La roccia « macco » a Civitella S. Paolo nel circondario di Roma.* « Atti Pont. Acc. Rom. N. Linc. », 1919.

l'abitato di Fiano Romano); del quale si osservano residue placche lungo i versanti del Fosso di Paciano; 3° grossi banchi di brecce e piccoli lembi di puddinghe calcaree, alternate ai calcarei bucherellati, i quali passano al « macco ». Sul fondo valle del Fosso di S. Martino affiorano però anche le tipiche argille grigie piacenziane di base, a quote intorno ai 100 m.

Le brecce calcaree, indistinte sulla carta geologica ufficiale, sono abbastanza sviluppate tra il M. del Cardinale e il M. Belvedere; specialmente sul versante occidentale, dove raggiungono potenze anche di 20–25 metri, venendo quindi a rappresentare una formazione geologica vera e propria.

Questa, poichè costituisce una cintura quasi ininterrotta intorno al nocciolo calcareo–dolomitico mesozoico del gruppo collinoso più volte ricordato, assume una certa importanza, oltre che per i caratteristici fossili in essa contenuti, anche perchè si tratta di una roccia finora poco o affatto conosciuta per il Pliocene del Lazio; indicante una evidentissima *facies* di piattaforma costiera; la quale può quindi fornire interessanti dati di carattere ambientale, tali da servire di guida per una rispondente ricostruzione paleogeografica di questa estrema parte orientale della Tuscia romana.

*
* *

Come è stato detto, alla formazione già attribuita all'Eocene medio sul foglio n. 144, oltre il « macco », i calcari bucherellati e le brecce, che, come si è visto, appartengono invece al Pliocene superiore, concorrono anche diverse varietà di altri calcari, a spese dei quali, i primi, risultano originati.

Di tali rocce, che per il loro aspetto e per la loro giacitura sono difficilmente separabili dai calcari del M. Soratte e del Romitorio di Fiano Romano, già assegnati al Retico ed al Lias, si possono distinguere principalmente tre tipi principali: 1° un calcare di aspetto dolomitico, grigio, talora quasi nerastro, subcristallino, attraversato da sottili e fitte reticolature calcitiche, leggermente bituminose, emanante odore di idrogeno solforato per sfregamento; 2° un calcare bianco, compatto, subcristallino; 3° un calcare debolmente marnoso, color nocciola, compatto, a grana molto fina, contenente talora intercalazioni di selce.

Limitandoci per ora all'analisi dei caratteri petrografici, non si può fare a meno di riconoscere in queste tre rocce, i rappresentanti, rispettivamente, del Retico, del Lias inferiore e del Lias medio, come questi piani solitamente si presentano nel M. Soratte e nel Preappennino romano.

Le sezioni sottili eseguite su questi sedimenti mesozoici, prelevati da diversi punti della regione in esame, non hanno mostrato nessuna traccia di fossili.

Pertanto, in base alle osservazioni compiute, io credo di poter concludere che l'Eocene non esiste affatto nelle colline tra il M. del Cardinale

e il M. Belvedere e che il riferimento fatto or sono sessant'anni fa, sia avvenuto, molto probabilmente, perchè le amfistegine furono scambiate per nummuliti; come del resto è accaduto, per la medesima ragione, per tante altre località dell'Italia centrale e meridionale.

* * *

L'indicata formazione retico–pliocenica, M. Soratte–M. Belvedere, è però degna di particolare attenzione anche dal punto di vista geomorfologico, come risulta dall'esame delle due superfici, quasi piane e poco inclinate da N verso S, riesumate dalla coltre piroclastica che raggiunge altezze di oltre 400 m. sui versanti occidentali del M. Soratte, verso le quali si abbassa a gradino la dentellata cresta di questa montagna, e che sono poste: quella più alta sui 450–350 m., in corrispondenza dell'abitato di S. Oreste e l'altra, degradante dai 280 ai 227 m., tra il M. del Cardinale e il M. Belvedere.

Per quanto riguarda quest'ultima è facilmente documentabile la sua genesi e la datazione.

Le residue placche di puddinghe e di brecciole calcaree del Pliocene superiore, discordanti sopra i calcari mesozoici erosi e spianati, e la presenza di grossi *Balanus concavus* Bronn (cirripedi notoriamente viventi nelle zone intercotidali) che incrostano queste ultime rocce, sono infatti elementi più che sufficienti per poter considerare il piano scolpito su di esse, come una piattaforma di arretramento costiero, già cosparsa di massi, ridotti in ciottoli e frammenti angolosi dal moto ondoso durante l'ingressione pliocenica.

Questa superficie di abrasione, che trova corrispondenza in quelle culminanti sulle sommità dei testimoni liasici della stessa regione, situate a quote leggermente inferiori verso O, a circa 180 m. nei dintorni di Rignano Flaminio e un poco più elevate verso E, sui 300 m. presso Montopoli in Sabina; e raccordabile inoltre con l'orizzonte a fori di litodomi osservati presso la stazione ferroviaria di Palombara–Marcellina [1], sulla falda occidentale dei M. Lucretili, rappresenta il più basso livello medio del mare nel Pliocene superiore di questo settore laziale.

Per la terrazza di S. Oreste invece, più elevata dell'altra, non si posseggono ancora dati molto sicuri per poterne spiegare la genesi ed assegnarle l'età. Ma è probabile che essa sia l'equivalente morfologico delle superfici di modellamento dei M. Lucretili e Cornicolani, già esistenti durante il Pliocene e però rappresentanti una fase di continentalità almeno del tardo Miocene.

Con l'assegnazione al Retico ed al Lias del nucleo calcareo M. del Cardinale–M. Belvedere viene considerevolmente esteso verso S l'affiora-

(1) S. Sorrentino, *Descrizione di alcune Jouannetia*, « Boll. Soc. geol. it. », L, Roma, 1931.

mento mesozoico del M. Soratte: entrambi conservanti anche il medesimo orientamento, ma non perfettamente allineati fra di loro, in quanto il primo di essi rimane situato più ad O dell'altro.

A tale spostamento dei due nuclei mesozoici corrisponde pure una diversa giacitura degli strati calcarei, i quali, pur avendo la stessa direzione assiale NO–SE, mostrano immersioni verso NE nel M. Soratte e verso SO nel M. del Cardinale–M. Belvedere; cosicchè questi due rilievi si completerebbero in una cupola anticlinalica, spezzata e dislocata lungo la linea di cresta, che si può seguire per circa 15 Km.

Anche la separazione fra i detti affioramenti retico–liasici coincide presumibilmente con una faglia orientata E.NE–O.SO, con rigetto intorno ai 50–70 m.

È da supporre che tali disturbi tettonici siano avvenuti in età anteriore all'ingressione del mare pliocenico, che ha invaso questa regione quando essa presentava gli stessi fondamentali lineamenti morfologici, riflessi e riesumati nelle ricordate superfici di abrasione marina, inclinate, nel complesso, da NE verso SO.

Quest'ultimo carattere è confermato inoltre dalla notevole elevazione dei sedimenti pliocenici verso E e NE nella regione Sabina, e dal loro abbassamento verso O e SO, dove il « macco » riaffiora a quote meno elevate presso Corneto Tarquinia sui 150 m. e ad altezze ancora minori a S del M. Soratte (25–50 m. presso Palo); d'altra parte l'inclinazione della base del Pliocene, da N–NE verso S–SO, si ripete anche più ad E nell'orizzonte a fori di litodomi lungo la linea di costa pliocenica del versante occidentale dei M. Sabini: dal M. San Pancrazio ed oltre, presso Chiusi, sui 500 m., fino alla ricordata stazione di Palombara–Marcellina, sui 300 m.

La particolare disposizione del sistema pliocenico può venire interpretata come il risultato di un suo ineguale sollevamento in blocco, più accentuato verso E–NE; accompagnato da rotture o da faglie a piccolo rigetto, orientate E.NE–O.SO, in corrispondenza di linee di frattura preplioceniche; determinanti quindi una successione di tavolati, abbassati verso S–SO e degradanti, nel complesso, sul tronco inferiore del Tevere, in continuazione della media e bassa valle dell'Aniene; a cui corrisponderebbe una dislocazione più accentuata delle precedenti, la cosidetta « faglia tiberina », ammessa dalla maggior parte dei geologi romani.

Lungo questa linea, il cui labbro nord–occidentale è costituito dagli affioramenti pliocenici della destra del Tevere, presso Roma, è verosimile si abbassi anche la zolla pliocenica della Piana Pontina, sollevata presso Anzio a poche decine di metri sul mare.

L'ipotetica conformazione strutturale anzidetta può essere giustificata dal notevole salto di quota di oltre 100 m. tra le argille piacenziane di destra e della sinistra del Tevere presso Roma e dal loro spessore veramente enorme, incontrato nell'area del Circo Massimo dalla sonda dell'A. G. I. P.

per oltre 900 m.[1], presumibilmente quindi sotto un angolo abbastanza forte.

Il complesso retico–pliocenico, M. Soratte–M. del Cardinale–M. Belvedere, costituisce pertanto un caposaldo morfologico-strutturale di notevole interesse per servire di base ad ulteriori ricerche di questo genere: in quanto, oltre ad offrire una superficie di abrasione pliocenica, lontana dall'attuale litorale, la quale può essere presa come punto di partenza per studi sull'evoluzione geomorfologica della regione circostante, rappresenta anche, poichè i suoi strati mesozoici conservano la direzione NO–SE, un testimonio di uno fra i più occidentali elementi tettonici del Preappennino.

Le ricerche sui calcari mesozoici del gruppo M. del Cardinale–M. Belvedere, i quali occupano oltre la metà dell'area già assegnata all'Eocene medio sul foglio n. 144 (mentre la restante area è rappresentata dalle brecciole, dai calcari bucherellati e dai tufi), formeranno argomento di una Nota più estesa della presente e che fra poco sarà pronta per la stampa.

Biologia. — *Azione della corrente elettrica continua su embrioni di Anfibi in esperienze di parabiosi*[2]. Nota di T. Perri presentata[3] dal Socio F. Silvestri.

Vari Autori si occuparono dell'azione della corrente elettrica continua su animali e piante, da diversi punti di vista. Per gli Anfibi, sia embrioni in diversi stadi sia larve, ricordo particolarmente le ricerche di Roux, Hermann, Ewald, Rossi.

A. Spirito, in questo stesso Istituto nel 1935[4], sottoponendo radici in sviluppo di *Vicia faba* e di *Lupinus albus* a corrente elettrica continua, osservò che se l'apice radicale è volto verso l'anodo si ha cessazione dell'attività mitotica e arresto di sviluppo, mentre se è volto verso il catodo non si ha alcuna conseguenza nociva; si propose di studiarne gli eventuali processi di ricupero. Gli stessi risultati egli ottenne nel 1936[5], e nello stesso anno furono riconfermati da A. Pirovano[6].

Mi sono proposto d'indagare se qualcosa di analogo a quanto avviene nelle radici si verifichi pure negli embrioni di Anfibi. Mi limito ad esporre

(1) R. Signorini, *Risultati geologici della perforazione eseguita dall'A. G. I. P. alla Mostra Autarchica del Minerale nel Circo Massimo di Roma.* «Boll. Soc. geol. it.», LVIII, Roma, 1939.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(3) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(4) «Rend. R. Accad. Lincei», vol. XXII, 1935.

(5) Ivi, vol. XXIII, 1936.

(6) Riv. di Biologia vol. 21, 1936.

i risultati raggiunti in embrioni di *Rana esculenta* allo stadio di vescicola ottica primaria giovanissima, ripromettendomi di trattare in seguito delle esperienze, non ancora complete, su embrioni in stadio più avanzato (quando già si contraggono), e su quelli uccisi con vari mezzi per valutare se il fattore fisico è dipendente o meno dal fattore vitale.

Ho seguìto una tecnica molto semplice. In una capsula Petri ripiena di acqua comune sono infissi due elettrodi di alluminio collegati con i due poli di un accumulatore; la differenza di potenziale è di 12 volt, e l'intensità di 3,5 milliampere.

Gli embrioni, privati delle guaine, sono posti nella vaschetta con il loro asse longitudinale o parallelo o perpendicolare alla congiungente gli elettrodi, su una linea equidistante dai poli; di modo che alcuni embrioni hanno verso il polo positivo l'estremità cefalica, altri la caudale, altri il dorso, altri il ventre. Dopo che l'azione della corrente dura da un certo tempo, meno di due ore [1], compaiono le lesioni, consistenti in sfaldamento della cute e poi spappolamento dei tessuti sottostanti; esse iniziano nella parte dell'embrione volta verso l'anodo, successivamente nell'opposta, indi si estendono; rimanendo molto più accentuate nella prima, fino ad invadere tutta la parte intermedia dell'embrione, la quale pertanto rimane illesa più a lungo.

Gli embrioni tolti dalla corrente quando le lesioni non sono ancora troppo estese, si cicatrizzano con espulsione delle parti spappolate: continuano a vivere come embrioni normali cui siano state asportate le due zone in disfacimento. Così un embrione sopravvisse 16 giorni (in aprile) senza la testa, che volta verso l'anodo erasi disfatta, e con leggere lesioni nell'estremità opposta. La questione se negli embrioni sottoposti a corrente continua sia più resistente la testa o la coda, anche rispetto al gradiente assiale, è molto complessa e spero di ritornarvi con ulteriori ricerche.

Per avere risultati ancora più chiari, sperimentai pure su embrioni uniti in parabiosi o per le teste o per le code, sì che i loro assi longitudinali fossero su una stessa retta (v. l'annessa figura). Anche qui l'estremità (testa o coda che sia) volta verso l'anodo presenta lesioni che compaiono prima e permangono molto più accentuate che nell'estremità opposta (anch'essa testa o anch'essa coda) ch'è volta verso il catodo; la parte intermedia, che comprende o le parti posteriori o le anteriori dei due parabionti, rimane indenne finchè le lesioni estendendosi invadono l'intera formazione. Tolti dalla corrente si cicatrizzano come gli embrioni isolati.

Queste ricerche che mostrano un diverso comportamento delle stesse parti embrionali a seconda che son volte verso l'uno o l'altro polo della

(1) Negli embrioni allo stadio in cui già si contraggono, la resistenza è minore; le larve, tenute ferme mediante narcosi da alcool triclorobutilico, soccombono molto prima che gli embrioni giovani.

corrente, vanno ancor più approfondite ed estese, anche variando l'intensità ed il voltaggio della corrente, perchè possono chiarire altre questioni di biologia generale. Così ad esempio le ricerche del Loeb sull'azione della corrente continua sulle ghiandole mucose di *Amblystoma*, ove vengono stimolate maggiormeute le ghiandole dell'estremità volta verso l'anodo, mostrano che la maggior stimolazione si ha dove la corrente, per così dire, è per se stessa più energica. Sono note le ricerche di vari Autori sui Protozoi, ove si ha un galvanotropismo positivo per alcuni e negativo per altri; e qui non è forse inutile ricercare se esista un optimum di intensità di corrente. È da notare che il Verworn dimostrò per i Protozoi (*Actino-*

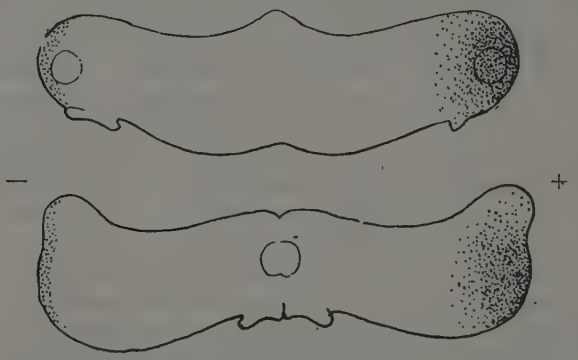


Fig. 1. – Schema delle parabiosi sottoposte da un certo tempo all'azione della corrente continua. La diversa intensità della punteggiatura indica la corrispondente estensione delle lesioni.

spherium cichorni) che le eccitazioni verso il polo positivo sono più intense e si può avere la disintegrazione del corpo cellulare [1].

Concludendo: negli embrioni sottoposti a corrente elettrica continua, con risultati di maggiore evidenza nelle esperienze di parabiosi, le lesioni compaiono prima e rimangono più estese in quella qualsiasi parte di essi che è volta verso l'anodo, e poi nella parte opposta, infine estendendosi invadono l'intero embrione. Gli embrioni tolti dalla corrente quando le lesioni non sono ancora troppo estese, presentano processi di cicatrizzazione e riparazione, come se fossero embrioni normali sottoposti all'asportazione delle due zone in disfacimento.

(1) Vedi G. Cotronei, *Biologia e zoologia generale*, III ediz., Roma, 1945.

Biologia — *Sul pigmento di alcuni lamellibranchi; ricerche sui carotenoidi dei Pecten e dei Cardium* [1]. Nota di B. M. Marcolini, presentata [2] dal Corrisp. G. Brunelli.

Dal pigmento che colora le gonadi del *Pecten maximus* e il piede del *Cardium tuberculatum* sin dal 1934–35 si sono occupati rispettivamente E. Lederer e Karrer e Solmssen.

Lederer [3] estrasse dagli organi sessuali della *Coquille S. Jacques* una sostanza, la « Pectenoxantina », che è una xantofilla e che per le sue proprietà chimiche si avvicina alla « zeaxantina » ($C_{40}H_{56}O_2$): ad essa attribuì la formula $C_{40}H_{54}O_3 \pm H_2$, non permettendogli ancora le analisi di distinguere tra quel $+O$ e $-H_2$.

La Pectenoxantina fu sperimentata inoltre, dal punto di vista della sua attività biologica, da M. Th. Moorede di Cambridge; ma non risultò che fosse una provitammina A.

Karrer e Solmssen [4] definirono il pigmento estratto dal *Cardium tuberculatum* del Golfo di Napoli paragonabile ad una xantofilla o ad una simile fitoxantina, per il suo comportamento rispetto alla solubilità e per il suo spettro di assorbimento.

L'analogia dei fenomeni presentati dai due generi di Lamellibranchi, nelle stesse condizioni di vita stagionali, in relazione ad una identica attività fisiologica, porta a pensare che la presenza nei loro organi di questi pigmenti carotenoidi, sia indice di una funzione ben netta da essi esercitata, cosa che spinge all'osservazione oltre il puro campo della determinazione chimica di essi.

Dallo studio attento delle varie particolarità presentate da questi molluschi si è potuto trarre il complesso delle osservazioni riferite in questa Nota.

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio Centrale di idrobiologia di Roma.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) E. Lederer, *Sur la Costitution de la Pectenoxantine.* « C. R. Soc. Biol. », 1934, *117*, 411, 13; *Su un nuovo carotenoide nel mollusco Saint Jacques* (*Pecten Maximus*) « C. R. Séances Soc. Biol. », 1934, *116*, 150; *Sur les carotenoids des vertebres inferieurs. Recherches sur les carotenoids des invertebres.* « Bull. Soc. Chim. Biol. », 1938, *20*, 554, 556. 1938, *20*, 567, 610, 611, 634.

(4) Karrer und Solmssen, *Zur Kenntnis der oxydationproducts des Carotine.* « Helv. Chim. Acta », 1935, *18*, pp. 25, 915, 477.

Le difficoltà dei tempi attraversati non hanno permesso di sviluppare il campo sperimentale con un nuovo indirizzo di esame comparato; ad ogni modo qualche deduzione che avvalori la tesi sostenuta del ruolo fisiologico dei carotenoidi, sembra possa trarsi da quanto fin'ora si è potuto fare.

Come è noto i *Pecten* presentano colorazione delle branchie e delle gonadi: nei *Cardium* è molto meno accentuata nelle branchie, mentre vivissima e intensa è quella della massa viscero–pedale.

È principalmente sulle variazioni di pigmentazione di questi organi che abbiamo indirizzato la nostra indagine, per cercare di giungere ad una conclusione logica sulla distribuzione delle sostanze carotenoidi in questi rappresentanti del regno animale.

Pecten. – Il prelevamento degli esemplari è stato fatto, per quanto possibile, in modo da poter seguire l'andamento dello sviluppo degli individui.

Sono stati esaminati insieme, dato che presentano lo stesso andamento, *Pecten opercularis*, *Pecten maximus*, e *Pecten Spondylus* (pochi esemplari).

Nei mesi di ottobre–novembre si catturano individui piccoli, in cui le branchie sono molto sviluppate in confronto al resto del corpo e presentano un tenue colore verdastro e le gonadi sono invece pochissimo sviluppate con colorazione simile alle branchie; fin da questo momento è possibile distinguere in esse un sottile segno nero che irregolarmente divide in senso orizzontale la massa simile ad una lingua attaccata e dipendente dal muscolo aduttore (J. Dakin) [1].

Procedendo nel tempo, di pari passo col crescere degli individui varia la colorazione presentata dai loro organi: le branchie già in febbraio–marzo passano per gradi al verde giallastro e al giallo tenue: quindi la pigmentazione cresce fino ad arrivare lentamente, nel periodo di massimo sviluppo dell'individuo (giugno–luglio), ad un giallo con tendenza all'aranciato. Il crescendo è in rapporto con quello che si verifica nelle gonadi, molto lento e di intensità infinitamente inferiore che in queste. Infatti negli individui presi nel febbraio–marzo, già molto sviluppati, si osserva che la massa formata dagli organi genitali comincia ad espandersi e prendere una consistenza sempre più solida e a presentare due colorazioni che lungo una linea traversale delimitano la porzione superiore maschile dalla inferiore ovigera, e cioè avorio la superiore e di un bel rosa carico la inferiore. Col tempo la maschile assume una colorazione crema, mentre le uova passano rapidamente al rosa vermiglio che diventa sempre più cupo e vivo nei mesi estivi.

Bisogna tener presente fin da ora che appunto dai primi dell'anno comincia la maturazione degli organi sessuali, e il maximum dell'attività riproduttiva cade proprio in luglio–agosto per poi decrescere.

(1) W. J. Dakin, *Pecten Liverpool Marine Biology Committee.* Memoir XVII, London 1909.

Cardium. – Costatato che nelle specie esaminate (*Cardium edule*, *C. aculeatum*, *C. ecinatum*) lo sviluppo branchiale è notevolmente inferiore che nei *Pecten* e osservato che in esse l'andamento della pigmentazione è simile a quello dei *Pecten*, oggetto principale di osservazione è stato il piede o più esattamente la massa viscero-pedale in cui esso è distribuito in quantità grandissima sin dai primi tempi della vita degli individui.

La colorazione presentata permanentemente dai *Cardium* delle specie menzionate, nei mesi di settembre, ottobre, febbraio, marzo e luglio, è di un rosso carico, in cui la tendenza all'aranciato è molto meno pronunziata della corrispondente dei *Pecten* nello stesso tempo e negli stessi organi.

La maturazione sessuale comincia nei *Cardium* prestissimo, e il periodo riproduttivo si prolunga per quasi tutto l'anno, culminando come per i *Pecten*, nel luglio-agosto. L'unica differenza nei due cicli riproduttivi consiste appunto nell'inizio precoce e quindi nella maggiore durata di uno di essi (*Cardium*).

Queste osservazioni di carattere generale portano a precisare alcuni punti.

I. *Il pigmento è in ambedue i generi localizzato, per la maggior parte, in corrispondenza delle gonadi* e la sua concetrazione è in stretta relazione con la stadio di maturità di esse. E il fatto che il piede del *Pecten*, a differenza di quello del *Cardium*, non presenta colorazione, non può fuorviare quando si attribuisce ogni importanza ai soli organi genitali per il ruolo fisiologico del pigmento, in quanto la differente localizzazione di questo ultimo nei due generi risulta solamente apparente se si considera la diversa configurazione dei loro organi. Nel *Cardium*, infatti, il piede rappresenta la porzione distale della massa prossimale viscero pedale, che comprende oltre il canale alimentare e la ghiandola digestiva, le gonadi. Nel *Pecten* invece il piede è molto piccolo e situato in alto anteriormente alla massa viscerale, sorgente sulla massa delle gonadi verso la bocca e non contiene alcuna propagine di visceri.

II. *Il pigmento è localizzato nella parte ovarica delle gonadi.* Anche in questo caso ci si può render conto della apparente differenza considerando la costituzione delle gonadi che nei *Pecten* sono distinte da un solco trasversale quasi regolare in una parte seminale (la superiore) in una parte ovigera (inferiore), mentre nei *Cardium* la gonade costituita da una ghiandola tubulare ramificata in tre dotti dentro la massa viscero pedale, possiede, nella stessa branca di uno qualunque dei dotti, alveoli pieni di sole uova, di soli spermi, e di ambedue i prodotti genitali insieme. Mentre quindi nei *Pecten* le due porzioni sessuali sono in contatto solamente lungo la linea di divisione, nei *Cardium*, essendo le uova sparse fra gli spermi, la diffusione del pigmento colorato è generale in tutta la massa e quindi negli

organi che essa comprende, piede propriamente detto incluso, che di questa massa costituisce l'appendice.

III. *La colorazione delle branchie nei* Pecten *e nei* Cardium *sembra dovuto allo stesso pigmento carotenoide delle gonadi* e quindi sembra probabile uno stesso ruolo fisiologico nei due organi.

Il prevalere del pigmento delle gonadi durante tutto il periodo della maturazione e riproduzione fa pensare che ad un più intenso processo corrisponde un maggior apporto di energia. D'altra parte le variazioni di colore non casuali, presentate nelle branchie portano ad ammettere una possibile migrazione del pigmento in altre parti dove vengono messi a profitto i processi di cui esso è sede. Questo è in rapporto, come si è osservato, ad un preciso fatto biologico in determinati periodi di tempo.

Nelle ricerche istochimiche sulla branchia del *Mytilus*, M. Benazzi e G. Lentati [1] hanno provato che la variazione di colorazione branchiale è dovuta, in questo caso, in massima parte, ad un pigmento o a pigmenti cromolipoidi e hanno osservato che di tempo in tempo il pigmento diminuisce sensibilmente nella branchia fin quasi a scomparire, senza tuttavia poter stabilire se ciò avvenisse in rapporto con qualche fatto biologico.

Di tutto ciò si trova esatto riscontro nei *Pecten* e nei *Cardium* e il meccanismo del processo della variazione di colorazione sarebbe quello che Ciaccio presenta come ipotesi risolutiva del problema della modificazione dei cromosoni nelle cellule. « I cromolipoidi cioè si trasformano in sostanze solubili nei liquidi organici, oppure l'O_2 in essi fissato si libera ».

E se ci si riporta al complesso di osservazioni che hanno condotto alla formulazione dell'ipotesi di Mereykowski [2] sul ruolo fisiologico della tetroneritrina nel regno animale, di Arnaud [3] su quello probabile del carotene nella foglia dell'urtica e del castagno, di Brunelli [4] nei suoi studi sulle uova pigmentate del cavalluccio marino e nella successiva memoria sulla funzione respiratoria dei pigmenti del fiore, si potrebbe estendere ai carotenoidi dei *Pecten* e dei *Cardium* l'attribuzione di « pigmenti respiratori ».

Brunelli stesso richiamava l'attenzione dei ricercatori sulla opportunità di allargare le indagini sulle funzione respiratoria dei pigmenti.

I carotenoidi dei *Pecten* e *Cardium*, per la maggiore parte di origine alimentare, sarebbero nell'organismo accettori di ossigeno; una volta in

(1) M. Benazzi e G. Lentati, *Ricerche istochimiche sulle branchie del « Mytilus edulis » con particolare riguardo al pigmento.* « Arch. Zool. Ital. », vol XXVII, p. 63.

(2) Mereykowski, *Sur la tètronèrithrine dans le règne animal et sur son role phisiologique.* « C. R. Acad. Sci. », 1881, *93*, 1029.

(3) M. Arnaud e M. Pasteur, *Recherches sur la carotine: son rôle phisiologique probable dans la feuille.* « C. R. Acad. Sci. », 1889, 109–111.

(4) G. Bbunelli, *Sullo sviluppo del cavalluccio marino.* « R. C. Talassografico Italiano », Memoria XVI, Venezia, 1922; *Funzione respiratoria e funzione vessillare del fiore.* Libreria G. Bardi Roma, 1925.

circolo, si localizzano di preferenza dove avvengono gli scambi gassosi, cominciando nelle branchie il loro processo di ossidazione: le perossidasi presenti (reazione di Mandelung positiva nelle branchie) porterebbero a trasformazioni *in situ* di parte del pigmento che verrebbe ad aquistare la facoltà di cedere O_2. All'inizio questo è a beneficio, sia pure in lieve misura coincidendo il periodo di accrescimento col maximum di O_2 disciolto in acqua (novembre–dicembre) della sola respirazione, ma in seguito in misura grandissima del nuovo fatto biologico che comincia a manifestarsi nell'organismo. In epoca determinata la maggior parte del pigmento comincerà ad essere trasportata verso l'organo in cui esplicherà al massimo la sua funzione, e i leucociti quale elementi fagocitanti abbondanti in tutta la parte branchiale metterebbero a profitto la capacità di inglobare il pigmento e di portarlo in circolo.

La maturazione sessuale richiede un maggior consumo di ossigeno da parte dell'organismo; non solo ma le sostanze di riserva, grassi in massima parte, vengono fortemente intaccate. I fattori desmolitici alla base dei processi di utilizzazione dei grassi portano alla necessità di un fattore che acceleri la loro ossidazione.

I carotenoidi presenti nelle cellule delle branchie delle gonadi, nello stesso tempo avrebbero quindi la funzione del « fermento respiratorio universale » di Warburg o quella delle « ossigenasi » di Bach e Chodat.

Una volta provata anche nelle gonadi la presenza di un qualsiasi enzima ausiliare delle ossidazioni (catalasi, perossidasi) i carotenoidi potrebbero a ragione definirsi dispensatori di ossigeno: catalizzatori quindi sia dei processi respiratori che di quelli desmolitici.

È appunto su questo campo che sarà indirizzata particolarmente la parte sperimentale, e sull'esempio degli studi di S. Hopkins Hoyt [1], che prende in esame la catalasi e i processi ossidativi nei tessuti animali come fattori nell'adattamento e i rapporti tra l'età e la respirazione dei molluschi, si può trasformare il problema nei termini delle relazioni dei processi ossidativi tra i molluschi presentanti organi pigmentati come possibili fattori di distribuzione, e nei termini dei rapporti tra il consumo di O_2 nei vari stadi di sviluppo in relazione alle perossidasi e catalasi eventualmente presenti.

Del pari andrà preso in esame il pigmento che colora in avorio la parte seminale dei *Pecten* e uno studio comparativo sul consumo di O_2 durante la meiosi e la spermatogenesi darebbe modo di affermare con certezza che il maggior consumo è richiesto dal primo processo, sempre a sostegno del ruolo assegnato ai carotenoidi nella vita di questi animali.

(1) S. Hopkins Hoyt, *Age differences and the respiration in muscle tissue of mollusks.* « J. Exper. Zoöl. », *56*, 209, 1930; *Catalase and oxidative processes in animal tissues as possible factors in adaptation.* « Biol. Bull. », *67*, 115, 1934.

Zoologia. — *Sui cromosomi e il numero dei chiasmi nella spermatogenesi di* Psychoda *sp.* (Dipt. Psychodidae) [1]. Nota di G. Montalenti, presentata [2] dal Socio F. Silvestri.

Nessuna notizia ho trovato in bibliografia (fino al 1940–41) sul corredo cromosomico degli Psicodidi. Ho esaminato i cromosomi delle cellule dei testicoli di una specie di *Psychoda*, che non ho avuto per ora modo di determinare più precisamente, le cui larve vivono in acque cariche di sostanze vegetali in decomposizione. Ho eseguito preparati, col metodo dello schiacciamento, colorando col carminio acetico e con l'orceina (la quale mi ha dato migliori risultati) di testicoli di larve dell'ultimo stadio e di ninfe. Queste ricerche fanno parte di un più vasto programma di studio, iniziato in collaborazione col dott. H. G. Callan di Londra; un lavoro su alcune specie di Culicidi è in corso di pubblicazione.

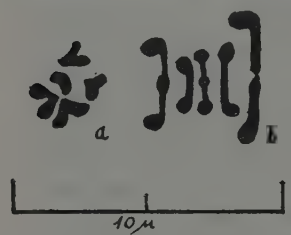


Fig. 1. – Cromosomi meiotici della spermatogenesi di *Psychoda* sp.: *a*, piastra equatoriale della seconda divisione spermatocitica, in cui si vede il corredo aploide; *b*, metafase della prima divisione, con cinque bivalenti con un chiasma ciascuno, tre in posizione terminale e due in posizione subterminale (ob. 100 imm. omog. Zeiss, oc. Periplanat. 25, Leitz).

La specie studiata possiede $n = 5$ cromosomi, molto piccoli. Non ho potuto finora osservare mitosi spermatogoniali, oogoniali, o somatiche, ma soltanto cromosomi meiotici. Le piastre metafasiche della seconda divisione meiotica mostrano appunto cinque cromosomi, di cui due più grandi, uno di dimensioni intermedie, e due più piccoli, tutti con centromero mediano; nei cromosomi più piccoli le due braccia, alla metafase, sono spesso quasi indistinte (fig. 1, *a*).

Alla metafase della prima divisione si osservano cinque bivalenti, provvisti, nella quasi totalità, di un sol chiasma in un braccio, mentre l'altro ne è privo. Il chiasma può essere terminale o subterminale; forse, in alcuni casi, è in posizione più prossimale, rispetto al centromero, ma, data la piccolezza dei bivalenti, non è possibile individuarne la localizzazione con un certo grado di precisione. La fig. 1, *b* mostra i cinque bivalenti di una metafase disposti in un piano, e rappresenta una figura tipica di quanto si

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Genetica della R. Università di Napoli, in parte con fondi forniti dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

osserva praticamente in tutte le metafasi, con qualche variante nella localizzazione dei chiasmi lungo il braccio.

Per cercare se vi fossero bivalenti con chiasmi in ambedue i bracci, i quali dovrebbero avere, in questo stadio, una forma anulare o a losanga, ho esaminato accuratamente tutte le metafasi in cui erano nettamente riconoscibili tutti e cinque i bivalenti e ho analizzato ciascuno di questi. Ho scartato invece le metafasi in cui non fossero otticamente risolubili tutti i cinque elementi. Ho tenuto conto soltanto delle metafasi avanzate, in cui i bivalenti, per l'allontanamento dei centromeri, sono già orientati e tesi a sufficienza per poterne analizzare la struttura. I risultati sono riassunti nella seguente tabella, dove sono indicate con XO le cellule che hanno tutti i bivalenti con un chiasma in uno solo dei due bracci; con XX quelle in cui un bivalente ha chiasmi in ambedue i bracci (in nessuna cellula ho trovato più di un bivalente XX); con OO quelle in cui uno dei bivalenti non ha chiasmi (univalenti).

Tabella I.

Numero dei chiasmi nelle metafasi di 5 individui di Psychoda *sp.*

Individuo N.	XO	XX	OO	Totale cell. esaminate	Totale chiasmi
2	67	2	—	69	347
3	12	—	—	12	60
4	47	2	3	52	259
5	15	—	1	16	79
6	122	3	1	126	632
Totali . . .	263	7	5	275	1377

Dall'esame della tabella risulta che, nei cinque individui esaminati, il 95,64 % delle cellule ha bivalenti con un sol chiasma, cioè in totale 5 chiasmi; il 2,54 % ha uno dei bivalenti con due chiasmi, cioè in totale 6 chiasmi; 1,82 % ha un univalente, cioè in totale 4 chiasmi. La media generale del numero dei chiasmi per cellula risulta di 5,23. Sul numero totale dei bivalenti esaminati, 1375, il 99,13 % ha un sol chiasma, il 0,51 % due, 0,36 % nessuno.

Data la piccolezza degli elementi e la difficoltà di distinguere le figure ad anello dalle sovrapposizioni che possono simularle, sono rimasto in dubbio in una diecina di casi in tutto, che ho preferito scartare. Se anche alcuni di questi sono veri anelli, le percentuali non vengono spostate di molto, e

rimane accertata la grande scarsezza di bivalenti con un chiasma per ogni braccio (XX).

Concludo perciò che, *in questa specie, si forma quasi costantemente un chiasma (non è escluso che se ne formino due, ma mi sembra molto improbabile, comunque nessuna figura osservata mi autorizza a pensarlo) in un sol braccio di ogni bivalente; i bivalenti con un chiasma (o più) per ogni braccio sono estremamente rari e gli univalenti (senza alcun chiasma) ancora di più.* La rarità degli univalenti è un fenomeno molto comune; non così quella dei bivalenti.

In questi ultimi anni lo studio della distribuzione dei chiasmi è stato eseguito su diverse specie, e ha dato risultati interessanti, di cui si trovano notizie in Darlington e Mather [1], dimostrando che vi sono organismi in cui normalmente non si formano chiasmi (e non vi è scambio genetico) come i maschi delle Drosofile e dei Muscidi, altri in cui i chiasmi sono distribuiti più o meno casualmente lungo i due bracci del cromosoma, altri in cui sono più o meno strettamente localizzati. In particolare è stato dimostrato che vi può essere interferenza anche oltre il centromero, come appunto abbiamo trovato nei Culicidi.

Questa specie di *Psychoda* si presenta come un esempio di interferenza quasi totale oltre il centromero: formatosi un chiasma in un braccio, non se ne forma quasi mai un secondo nell'altro. La media dei chiasmi per ogni cellula è quindi assai prossima a 5 (dato che mi sembra assai improbabile che vi siano casi di due chiasmi nello stesso braccio) e l'indice di interferenza quasi eguale a 1.

Non si può escludere però l'altra interpretazione considerata da Pätau [2], che cioè i due bracci di uno stesso bivalente siano diseguali fra loro, nel senso che in uno (il destro o il sinistro) si possono formare chiasmi, nell'altro no, e che perciò l'assenza di chiasmi in un braccio non sia dovuta ad interferenza del primo chiasma formato, bensì a impossibilità di appaiamento e di formazione di chiasmi da parte di uno dei due bracci. Le due possibilità: interferenza e diseguaglianza dei bracci potrebbero anche coesistere, in bivalenti diversi, e concorrere a dare il risultato che abbiamo visto. Non vi sono però elementi sufficienti per decidere l'alternativa, perchè non ho potuto mettere in evidenza differenze morfologiche fra i due bracci di alcuno dei 5 bivalenti.

Soltanto l'indagine genetica - che sarebbe opportuno condurre parallelamente a quella citologica, nelle specie che presentano questi fenomeni di localizzazione dei chiasmi - potrà fornire qualche utile criterio per decidere la questione.

(1) C. D. Darlington, *Recent Advances in Cytology*, Londra, 1937; C. Mather, « Biol. Rev. », XIII, 1938, p. 252.

(2) K. Pätau, « Chromosoma », II, 1941, p. 36.

Fisiologia. — *Osservazioni sulla emolisi fotodinamica e ricerche sulla alterazione fotodinamica della ossiemoglobina.* Nota [1] di E. Urbani, presentata [2] dal Socio F. Silvestri.

Introduzione. – È noto che una delle manifestazioni del fenomeno fotodinamico è data dalla emolisi dei globuli rossi in presenza di sostanze fluorescenti e della luce. Tali sostanze capaci di emolizzare le emazie sono numerose e diversi ricercatori si sono occupati della emolisi fotodinamica ripromettendosi di indagare quale fosse la causa intima di questo fenomeno e per quali ragioni delle sostanze, che all'oscurità riescono inerti, in presenza della luce, invece, provocano la distruzione del globulo rosso. La possibilità di emolisi anche all'oscurità è stata vista da Blum e Mc. Bride [3] usando eosina ad una certa concentrazione e ad un certo pH. Secondo questi autori, però, l'emolisi da eosina–luce e l'emolisi da eosina ad una più forte concentrazione all'oscurità dipenderebbero da una azione fondamentalmente differente nell'uno e nell'altro caso perchè l'assenza di O_2 inibisce l'emolisi alla luce ma non quella all'oscurità.

Blum [4] ha visto che in soluzioni non tamponate la concentrazione degli ioni H cresce durante l'illuminazione. È stato anche visto che l'assenza di ossigeno inibisce l'emolisi fotodinamica [5]. Questo risultato è stato da me confermato in questo lavoro ed esteso alla alterazione fotodinamica della emoglobina.

Moltissimi autori insistono sulla importanza dell'ossigeno perchè si effettui il fenomeno fotodinamico e come, oltrechè in assenza di ossigeno, con la presenza di sostanze riducenti esso sia rallentato o inibito [6].

Ho pubblicato [7] una Nota sulla azione fotodinamica dell'eosina su larve di Anfibi in condizioni di anaerobiosi sperimentale e rimando a quel lavoro per i risultati ottenuti come rinvio ad una mia seconda pubblicazione [8] per la conoscenza dei risultati ottenuti con la misurazione manometrica

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) Blum e Mc. Bride, « Biol. Bull. », 1931, *16*, 316.

(4) Blum, « Biol. Bull. », 1930, *58*, 224; 1930, *59*, 81.

(5) Sellards, « Jour. Med. Res. », 1918, *38*, 293.

(6) Viale, *Le azioni biologiche delle radiazioni.* Treves 1934; Schmidt e Norman, « Jour. Gen. Phys. », 1921, *22*, 4, 681.

(7) Urbani, « Acta », 1945, VIII, 15, 131.

(8) Urbani, *Ricerca e Ricostruzioni*, dicembre 1945

della quantità di ossigeno assunto da larve di *Rana esculenta* durante l'azione combinata della luce e dell'eosina.

Interessanti le ricerche di Guerrini [1] che ha constatato un'azione inibitrice sulla emolisi fotodinamica da parte del siero di sangue dei luetici e ciò, secondo l'autore, è dato dal diverso regime dei lipidi del siero del sangue di questi malati.

Crocetta [2] ha visto che durante l'emolisi da eosina, esculina, chinino, bleu di metilene si ha formazione di metaemoglobina. Wohlgemuth [3] ha visto che se si illuminano corpuscoli rossi in presenza di ematoporfirina si forma metaemoglobina. Questa formazione, che è accelerata dalla presenza di HCN, si ha anche senza illuminazione, non può quindi essere considerata un fenomeno fotodinamico vero e proprio. Come risulta dalla presente Nota non ho mai riscontrato, all'esame spettroscopico, la formazione di metaemoglobina a seguito della emolisi fotodinamica.

In questa prima Nota intendo esporre i risultati ottenuti saggiando l'azione di tre sostanze fluorescenti (eosina, metilvioletto, uranina) su globuli rossi umani. Scopo del lavoro è vedere se l'azione fotodinamica porti, oltre che emolisi, alterazione della emoglobina dei globuli rossi e quale sia l'importanza dell'ossigeno in questo caso. È mia intenzione con ricerche che seguiranno comparare il comportamento dei globuli rossi umani con quelli di altri organismi che vivono in diverse condizioni ambientali rispetto alla luce onde studiare la rispettiva sensibilità delle emazie all'azione fotodinamica.

Parte sperimentale. – Come ho già detto ho saggiato l'azione emolitica dell'eosina, metilvioletto, uranina su emazie umane. Le prime due sostanze sono note per la loro attività fotodinamica, la terza non mi risulta sia stata impiegata in ricerche del genere. I globuli rossi sono stati lavati sei volte in soluzione fisiologica mediante centrifugazione e portati in sospensione all'1 % nelle sostanze alla concentrazione [4] che indicherò appresso. Le sospensioni sono state esaminate ad un microspettroscopio della casa Galileo, ed è stato esaminato l'emolizzato onde vedere il comportamento dello spettro della HbO_2 prima e dopo l'emolisi. É stato usato anche uno spettroscopio Zeiss per la conferma dei risultati. È stato necessario usare soluzioni molto diluite di uranina eosina e metilvioletto onde evitare l'inconveniente che lo spettro di assorbimento della sostanza colorante venisse a coprire quella gamma nella quale compaiono le bande della HbO_2 impedendone così

(1) Guerrini, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1943. *18*, 228.

(2) Crocetta, « Bioch. e Terap. Sper. », 1933. *1*, I.

(3) Wohlgemuth, « Bioch. Zeit. », 1933, 264.

(4) Le concentrazioni volute si sono ottenute sciogliendo l'eosina, il metilvioletto e l'uranina in soluzione fisiologica (liquido di Ringer).

l'osservazione. Per lo spettro di assorbimento della ossiemoglobina vedi tavola (fig. *a*, *e*, *i*). Tale spettro è dato da una sospensione all'1 % di corpuscoli rossi contenuti in una provetta del diametro di 7 mm.

1. – *Emolisi fotodinamica con l'eosina.*

Una sospensione di globuli rossi in eosina 1/15.000 è stata esposta alla luce solare diretta insieme ad una sospensione in soluzione fisiologica; controlli eguali sono stati posti all'oscurità. Inizio della esposizione alla luce solare ore 09.00 (ora solare) del 5 aprile 1945. Alle 10.45 si ha completa emolisi della sospensione in eosina, inalterata la sospensione in soluzione fisiologica e le sospensioni di controllo alla oscurità.

Esame spettroscopico. – L'eosina in soluzione 1/15.000 presenta una banda di assorbimento piuttosto estesa che va da 490 μμ a 530 μμ circa (tavola fig. *b*).

La sospensione di corpuscoli rossi in eosina lascia evidente la prima banda della ossiemoglobina mentre la seconda banda viene a fondersi con quella dell'eosina (tavola fig. *c*). Con questa sostanza quindi non è agevole seguire il destino della seconda banda. Avvenuta l'emolisi si nota la quasi totale scomparsa della prima banda della ossiemoglobina mentre la banda unica, data dalla sovrapposizione dello spettro dell'eosina e della seconda banda della ossiemoglobina, si accorcia appena (tavola fig. *d*) ma tale accorciamento non ha la stessa estensione della seconda banda della ossiemoglobina. Ciò fa supporre che la seconda banda non scompaia completamente. È facile comprendere come sia difficile un esatto apprezzamento dei limiti di attenuazione della seconda banda. Tale esperienza è stata ripetuta più volte ed i risultati osservati sono stati concordi.

2. – *Emolisi fotodinamica con il metilvioletto.*

Poichè come risulta dalla precedente esperienza non è possibile seguire il destino della seconda banda della ossiemoglobina per il caratteristico spettro di assorbimento della eosina in soluzione 1/15.000 che viene a coprirla, ho sperimentato l'emolisi fotodinamica con il metilvioletto in soluzione fisiologica 1/200.000. La tecnica di preparazione delle sospensioni da illuminare e di quelle di controllo è stata uguale a quella già descritta. L'emolisi da metilvioletto avviene in circa 60′ (09.00–10.05 del 5 aprile). Il controllo alla oscurità non subisce emolisi anche dopo 48 ore.

Esame spettroscopico. – Il metilvioletto in soluzione 1/200.000 presenta una banda di assorbimento coincidente con la prima banda della ossiemoglobina ma leggermente più stretta di questa (tavola fig. *f*). Con

tale sostanza è stato facile seguire il destino della seconda banda della ossiemoglobina.

Avvenuta l'emolisi si constata la quasi totale scomparsa della seconda banda mentre la prima risulta attenuata per la quasi scomparsa, è logico pensare, della prima banda della ossiemoglobina e rimane evidente la banda di assorbimento del metilvioletto che ad una superficiale osservazione può essere confusa con la prima banda della ossiemoglobina ma che in realtà ha una estensione minore (tavola fig. *g*, *h*).

Usando il metilvioletto si è visto chiaramente che dopo l'emolisi fotodinamica la seconda banda della ossiemoglobina risulta estremamente attenuata, quasi scomparsa: cosa che non si era potuta vedere con l'eosina per le ragioni già esposte.

3. – *Emolisi fotodinamica con l'uranina.*

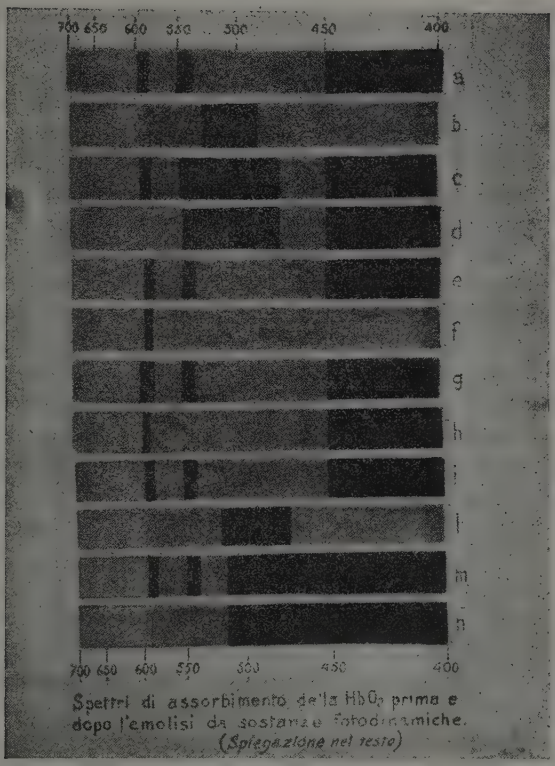
Visto che tanto l'eosina che il metilvioletto non permettono di seguire contemporaneamente la sorte delle bande α e β della ossiemoglobina, ho voluto vedere se l'uranina, sostanza spiccatamente fluorescente e il cui spettro di assorbimento non scherma nessuna delle due bande della ossiemoglobina, avesse azione fotodinamica.

La tecnica seguita è la stessa che per l'eosina ed il metilvioletto. L'uranina nella concentrazione 1/15.000 emolizza i corpuscoli rossi in circa due ore (09.00–11.00 del 5 aprile) alla luce solare diretta. Controlli alla oscurità non presentano emolisi anche dopo due giorni.

Esame spettroscopico. – L'uranina in soluzione fisiologica 1/15.000 presenta una banda di assorbimento che va da 470μμ a 520μμ circa (tavola fig. *l*) e che quindi lascia completamente scoperte le due bande della ossiemoglobina come risulta dalla osservazione spettroscopica della sospensione di corpuscoli rossi in uranina (tavola fig. *m*).

Avvenuta l'emolisi è facile vedere come le bande di assorbimento della ossiemoglobina siano quasi totalmente scomparse mentre rimane una unica banda scura che partendo dall'estremo violetto arriva fino a 515μμ circa e che non si è formata a seguito della emolisi essendo già rilevabile nella sospensione dei corpuscoli rossi in uranina (tavola fig. 3 *m n*).

Il fatto che l'uranina presenti uno spettro e la sospensione di corpuscoli rossi in uranina uno spettro diverso (a prescindere naturalmente dalle bande della ossiemoglobina) penso sia dovuto al mutato colore dell'uranina e alla opacità che presenta una volta che vi sia stato aggiunto il sangue. Questa esperienza dimostra chiaramente che a seguito della emolisi fotodinamica con uranina le bande della ossiemoglobina vengono attenuate fino quasi a scomparire.



Spettri di assorbimento della HbO_2 prima e dopo l'emolisi da sostanze fotodinamiche.
(Spiegazione nel testo)

4. – *Relazioni tra emolisi fotodinamica e alterazioni della ossiemoglobina.*

Le sostanze fotodinamiche in questione agiscono anche sull'emolizzato da acqua distillata nel senso che provocano alla luce una alterazione della ossiemoglobina che si rivela all'esame spettroscopico con la quasi totale scomparsa delle due caratteristiche bande α e β. Anche nel caso dell'emolizzato da acqua distillata le sostanze fotodinamiche riescono completamente inerti alla oscurità.

Per vedere se effettivanente i due fenomeni: emolisi ed alterazione della ossiemoglobina siano o no concatenati l'uno all'altro ho condotto la seguente esperienza.

Corpuscoli rossi sono stati posti in sospensione in eosina 1/500 uranina 1/500 metilvioletto 1/20.000 (in soluzione fisiologica). La sospensione dei corpuscoli rossi è stata calcolata all'1%.

Dopo ventiquattro ore di soggiorno all'oscurità non si ha emolisi. I corpuscoli rossi che si sono caricati di sostanza colorante vengono lavati per due volte in soluzione fisiologica in modo da asportare quasi totalmente le sostanze fotodinamiche in eccesso lasciando solo quelle tracce delle quali si è imbevuto il protoplasma del corpuscolo rosso. Le sospensioni sono state poi riportate all'1% in soluzione fisiologica. Osservate allo spettroscopio mostrano netto lo spettro della ossiemoglobina. Esposte le sospensioni alla luce solare diretta dopo una ora e mezzo per l'eosina, due ore per il metilvioletto, cinque ore per l'uranina si ha la completa emolisi. L'osservazione spettroscopica mostra che le bande della ossiemoglobina sono rimaste inalterate. Evidentemente le tracce di sostanze fotodinamiche con le quali si sono impregnati i globuli rossi nel loro soggiorno all'oscurità sono sufficienti per provocare, sia pure lentamente, l'emolisi ma insufficienti per attaccare la struttura dell'ossiemoglobina. Ciò mostra che emolisi ed alterazione dell'ossiemoglobina pur essendo ambedue conseguenze del fenomeno fotodinamico possono avvenire indipendentemente l'uno dall'altro.

5. – *Importanza dell'ossigeno nella emolisi fotodinamica e nella alterazione fotodinamica della ossiemoglobina.*

Come ho già detto parecchi autori hanno visto che in assenza di ossigeno l'emolisi fotodinamica non avviene.

Mi sono proposto di vedere se in assenza di ossigeno oltre che inibizione della emolisi si abbia inibizione della alterazione fotodinamica della ossiemoglobina.

In tubi di vetro sono state introdotte sospensioni all'1% di globuli rossi in eosina, metilvioletto, uranina nelle concentrazioni già usate.

È stata preparata anche una serie nella quale sono stati posti a contatto con la sostanza colorante emolizzati da acqua distillata. Nei tubi è stato praticato il vuoto a mezzo di una pompa e poi sono stati saldati alla fiamma.

L'osservazione spettroscopica mostra che in ambedue le serie l'ossiemoglobina si è trasformata per la sottrazione di ossigeno in emoglobina.

Dopo una prolungata esposizione alla luce solare diretta non si osserva emolisi che invece avviene in serie di controllo nelle quali non si è praticata la sottrazione di ossigeno.

L'osservazione spettroscopica mostra inalterato lo spettro della emoglobina che si trasforma in quello della ossiemoglobina appena i tubi vengono aperti.

Tale esperienza ha mostrato che in tubi nei quali è stato prodotto il vuoto non avviene nè emolisi fotodinamica nè alterazione fotodinamica della emoglobina.

È necessario quindi che sia presente ossigeno perchè ambedue i fenomeni si verifichino.

6. – Discussione dei risultati e conclusioni.

Sono state condotte delle ricerche sull'azione emolitica dell'eosina, metilvioletto, uranina su globuli rossi umani. Sono indicati i tempi di emolisi per le condizioni di luminosità e concentrazione delle sostanze usate. Si è visto che, a seguito dell'azione fotodinamica, l'HbO_2 viene ad alterarsi e ciò è rivelato dalla quasi totale scomparsa delle bande α e β dello spettro della ossiemoglobina. Secondo Crocetta, invece, a seguito dell'azione fotodinamica, si avrebbe la formazione di metaemoglobina rivelata allo spettro con una netta stria sul rosso. Come appare dalla mia esposizione non ho mai ottenuto questo reperto benchè le osservazioni siano state compiute con due diversi spettroscopi. L'alterazione con i caratteri da me riscontrati avviene solamente alla luce, è quindi un fenomeno spiccatamente fotodinamico ed avviene anche sull'emolizzato da acqua distillata posto a contatto delle sostanze fluorescenti ed esposto alla luce solare. A conferma dei risultati ottenuti da altri autori ho visto che il vuoto inibisce l'emolisi fotodinamica, ho visto inoltre che impedisce l'alterazione fotodinamica della emoglobina sia essa contenuta nel globulo rosso, sia essa libera nella soluzione fluorescente.

Con accorgimenti sperimentali descritti è possibile far avvenire l'emolisi fotodinamica senza che vi sia alterazione della ossiemoglobina. Ciò dimostra che i due fatti non sono correlati fra loro, ma si può avere una quantità di sostanza fluorescente capace di provocare emolisi senza causare alterazioni rilevabili nella struttura della ossiemoglobina.

Si osserva, perciò, che basta la piccola quantità di sostanza fotodinamica contenuta nel protoplasma della cellula per provocare l'emolisi e non è quindi necessario che il globulo rosso sia immerso e circondato da sostanza fluorescente; tale quantità minima di sostanza non è sufficiente, però, come già rilevato, ad alterare in modo apprezzabile la struttura dell'ossiemoglobina.

NOTE PRESENTATE NELLA SEDUTA DEL 12 GENNAIO 1946 E CHE SARANNO PUBBLICATE NEL PROSSIMO FASCICOLO

Note di Soci.

Amerio A., « Composizioni di magnetizzazioni e composizioni di velocità ».

Checchia Rispoli G., « Nuove osservazioni geologiche sulla serie attraversata dal fiume Celone (Capitanata) ».

Crocco A., « Sulla applicazione dell'energia atomica alla navigazione interplanetaria ».

Russo A., « Mutazioni e varietà fenotipiche di alcuni Echinodermi ».

Sacco F., « Le fratture e le rughe della Crosta terrestre ». Nota I.

Sacco F., « Le fratture e le rughe della Crosta terrestre ». Nota II.

Sergi S., « Relazioni tra cranio cerebrale e cranio facciale nei paleantropi ».

Signorini A., « Estensione della nozione di ellisse centrale d'inerzia ai fini della Dinamica dei solidi ».

Note presentate da Soci.

Agostinelli C., « Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità, per i quali esiste la funzione lagrangiana ». Nota I, presentata dal Socio U. Amaldi.

Amerio L., « Sull'integrazione delle equazioni lineari di tipo ellittico », pres. dal Corrisp. M. Picone.

Amerio L., « Sull'equazione del calore », pres. dal Corrisp. M. Picone.

Barducci I., « Effetto di una cavità chiusa sulla autofrequenza di una piastra incastrata », pres. dal Socio U. Bordoni.

Birindelli C., « Su una generalizzazione della convergenza in media », pres. dal Corrisp. M. Picone.

Boaga G., « Sulla compensazione rigorosa per direzioni delle catene geodetiche », pres. dal Socio G. Cassinis.

CHIRICO M., « Azione combinata di stimolo meccanico (farina fossile) e chimico (3,4 – benzopirene) sul connettivo », pres. dal Socio P. RONDONI.

CONTI S., « Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A.O.) ». Nota I, pres. dal Corrisp. G. ROVERETO.

CONTI S., « Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A.O.) ». Nota II, presentata dal Corrisp. G. ROVERETO.

DEOTTO R., « L'Azione del freddo sulla respirazione batterica ». Nota II, pres. dal Socio P. RONDONI.

FRANCHETTA A., « Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche ». Nota II, pres. dal Socio F. ENRIQUES.

GHIZZETTI A., « Sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia incastrata lungo i due lati », pres. dal Corrisp. M. PICONE.

GIALANELLA L., « Sulla distribuzione dei poli delle orbite dei piccoli pianeti », pres. dal Socio G. ARMELLINI.

MAXIA A., « Geometria affine di alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali studiati da L. Bianchi », pres. dal Corrisp. E. BOMPIANI.

RUFFO A. e CENNAMO C., « Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicosio e del glicogeno », pres. dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

SANTONI A., « Ricerche nella costituzione chimica della cornea in condizioni normali e patologiche », pres. dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

SCORZA DRAGONI G., « Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Bruower sulle traiettorie di un automeomorfismo del piano », pres. dal Socio G. CASTELNUOVO.

TIZZANO A., « Sui rapporti fra potere battericida e concentrazione dei disinfettanti », pres. dal Socio D. DE BLASI.

TOLOTTI C., « Proprietà di media dello stress nelle lastre curve in equilibrio ». Nota I, pres. dal Corrisp. A. SIGNORINI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 gennaio 1946.

ARMELLINI Giuseppe. — *Lezioni di meccanica razionale per gli ingegneri tenute al Politecnico di Torino.* Milano, Hoepli, 1945. Pp. XI, 355, in 8°, con 105 figg.

BONARELLI Guido. — « Ultima miscellanea ». Editoriale d'argomenti scientifici. Vol. I, annata 1944.

CASSINIS Gino. — *I metodi di H. Boetz per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari e il loro impiego nella compensazione delle triangolazioni.* Estr. dalla « Rivista del Catasto e dei servizi tecnici erariali », n. 1, 1944.

MACCHI Francesco M. — *La sistemazione idraulica negli aeroporti.* Estr. da « Il Monitore tecnico », a. II, 1945, n. 9–10.

PANETTI Modesto. — *Diagramma coppie, velocità a rendimenti di un'elica a passo variabile.* Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LXXX, 1944–45.

— *Il problema dell'aderenza nei cingoli con incuneamento.* Estr. dagli « Atti della Accademia delle Scienze di Torino », vol. LXXX, 1944–45.

— *I fattori della rigidezza delle funi metalliche.* Estr. dagli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », volume LXXIX, 1943–44.

Per l'insediamento dei prorettori della R. Università, della Università Bocconi e del pro-direttore del R. Politecnico di Milano. 14 luglio 1945. Milano, Tip. Cordani, 1945.

POLITECNICO DI MILANO. — *Inaugurazione dell'Anno accademico 1945–46.* 1° dicembre 1945. Milano, Tip. Cordani, 1946.

SCARPA Oscar. — *Pubblicazioni.* Estr. dall'« Annuario » 1937–38 e 1938–39 del R. Politecnico di Milano.

— *Ancora sulle misure della resistenza interna delle pile* (Nota conclusiva). Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », vol. XXI, 1944, n. 3–4.

— *Contributo allo studio delle pile con biossido di manganese.* Estr. da « La Ricerca scientifica », a. XII, 1941, n. 1.

— *L'effetto Volta nelle leghe metalliche solide.* Estr. dal « Nuovo Cimento », a. XVI, n. 1, 1939.

— *Effetto Volta e potenziali elettrochimici. Deduzione dei valori più probabili degli effetti Volta esterni e dei potenziali elettrochimici reali.* Estr. dal « Nuovo Cimento », a. XVII, 1940, n. 2.

— *Effetto Volta e sistema periodico degli elementi.* Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, s. 6ª, vol. XXIX, 1939, fasc. 7.

— *Equazioni per il calcolo termodinamico delle forze elettromotrici delle pile a gas.* Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, s. 6ª, vol. XXVII, 1938, fasc. 1.

— *I limiti di applicabilità della equazione di Helmholtz-Gibbs e deduzione di una equazione generale valida per il caso delle pile con funzionamento qualsiasi (reversibile o irreversibile) e con volume costante o variante durante il funzionamento.* Estr. dalla « Gazzetta Chimica Italiana », vol. LXVIII, fasc. 2.

SCARPA Oscar. — *I limiti inferiori della tensione utile delle pile per lampadine portatili.* Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », vol. XXI, 1944, n. 7–8.

— *Il pioniere della elettrosiderurgia fu un italiano: il maggiore Ernesto Stassano.* Estr. dagli « Atti » della XXVII Riunione della Società Italiana per il progresso delle Scienze (Bologna, 4–11 settembre 1938).

— *La protection des tubes en acier contre les courants électriques, essais et applications pratiques.* Estr. da « Journées de la lutte contre la Corrosion », 1er groupe, I.

— *Le pile con carbone attivo.* Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », volume XXII, 1945, nn. 5–6–7.

— *Pile con forze elettromotrici apparentemente maggiori delle teoriche.* Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », volume XXI, 1944, n. 9–10.

— *Pile con forza elettromotrice apparentemente minore della teorica.* Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », vol. XXI, 1944, n. 11–12.

— *Potenziali elettrochimici e effetto Volta.* Estr. da « Nuovo Cimento », a. XVI, 1939, n. 6.

— *Potenziali elettrochimici e effetto Volta.* I. Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, s. 6ª, vol. XXIX, 1939, fasc. 9.

— *Potenziali elettrochimici ed effetto volta.* — II. *Sul calcolo numerico dei potenziali elettrochimici normali dei metalli.* Estr. dai « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », s. VII, vol. I, 1939, fasc. 6.

— *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta.* — III. *Deduzione dei valori più probabili degli effetti Volta esterni e dei potenziali elettrochimici reali.* Estr. dai « Rendiconti della classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », s. VII, vol. I, 1940, fasc. 7.

— *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta.* — IV. *I potenziali assoluti degli elettrodi.* Estr. dai « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », s. VII, vol. I, 1940, fasc. 9.

SCARPA Oscar. — *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta.* — V. *Le tensioni di soluzioni dei metalli.* Estr. dai « Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », s. VII, vol. I, 1940, fasc. 10.

— *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta.* — VI. *I potenziali elettrochimici dei metalli e la loro costituzione elettronica.* Estr. dai « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », s. VI, vol. II, 1941, fasc. 12.

— *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta.* — VII. *I calori di idratazione degli ioni.* Estr. dai « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », s. VII, vol. III, 1941, fasc. 6.

— *Su alcune recenti misure dell'effetto Volta e sull'effetto Volta nelle leghe.* Estr. da « La Ricerca scientifica », s. II, a. IX, vol. I, n. 1–2.

— *Sui coefficienti di temperatura delle pile e in particolare delle pile industriali.* Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », vol. XXII, 1945, n. 1–2.

— *Sul coefficiente di temperatura delle pile con biossido di manganese e delle pile con anodo di carbone attivo e sulla forza elettromotrice delle pile spolarizzate dall'ossigeno atmosferico.* Estr. da « La Ricerca scientifica », a. XII, 1941, nn. 7–9.

— *Sul funzionamento delle pile al biossido di manganese e sui metodi di collaudo.* Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », vol. XX, 1943, fasc. 2.

— *Sulla necessità di ammettere affinità chimica fra solvente e soluto.* Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, s. 6ª, vol. XXIX, 1939, fasc. 6.

— *Sulla radioattività delle acque termali e dei gas delle fumarole dell'isola d'Ischia.*

Estr. da « La Ricerca scientifica », a. X, 1939, n. 11.

SCARPA Oscar. — *Sulle equazioni di Helmholtz e di Gibbs*. Estr. dai « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », s. VII, vol. II, 1941, fasc. 12.

— *Sulle misure della resistenza interna e della polarizzazione delle pile. I metodi di misura della resistenza interna delle pile impiegando correnti alternate*. Estr. dalla Rivista « L'energia elettrica », vol. XX, 1943, nn. 6–12.

— *Sullo studio delle corrosioni dei metalli impiegati nella tecnica*. Estr. dalla Rivista « Alluminio », 1939, n. 1.

SILVESTRI Filippo. — *Anomalia di un adulto di Belonuchus formosus Grav. (Stafilinide – Coleottero)*. Estr. dal « Bollettino del R. Laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. V, 1945.

— *Compendio di entomologia applicata (agraria – forestale – medica – veterinaria)*. Parte speciale, vol. II (fogli 1–32). Portici, Tip. Della Torre, 1943, in 8°, con figg.

— *Contribution à la biologie de la petite cécidomyie des olives (Prolasioptera berlesiana Paoli) en Italie*. Extr. dal « Moniteur international de la protection des plantes » de l'Institut international d'Agriculture, a. XIX, 1945, nn. 9–10.

SILVESTRI Filippo. — *Contributo alla conoscenza dei Machilidae (Insecta, Thysanura) del Giappone*. Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria di Portici », volume XXXII, 1943.

— *Descrizione e biologia del coleottero stafilinide Belonuchus formosus Grav. introdotto in Italia per la lotta contro Ditteri Tripaneidi*. Estr. dal « Bollettino del R. Laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. V, 1945.

— *Descrizione di intercaste di Syntermes grandis (Rambur) causate da un protozoo microsporidio*. Estr. dagli « Acta » della Pontificia Academia Scientiarum, vol. IX, n. 8.

— *Morfologia dell'ovo, maturazione e primi stadi di sviluppo dell'Halictophagus (Insetti Strepsipteri)*. Estr. dalle « Commentationes » della Pontificia Academia Scientiarum, vol. VII, n. 17.

— *Nuovo genere di Lepidottero Tineide termitofilo del Brasile*. Estr. dal « Bollettino del R. Laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. V, 1944.

— *Studi sugli «Strepsiptera» (Insecta)*. III. *Descrizione e biologia di sei specie italiane di Mengenilla*. Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della Facoltà agraria in Portici », vol. XXXII, 1943.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 gennaio 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Estensione della nozione di ellisse centrale d'inerzia ai fini della Dinamica dei solidi.* Nota [1] del Corrisp. A. Signorini.

Siano: S un generico sistema materiale a tre dimensioni, m la sua massa, G il suo baricentro; α un qualunque piano per G; s_α l'ellisse intersezione di α con l'ellissoide centrale d'inerzia; σ_α l'area di s_α; e_α l'ellisse corrispondente a s_α nell'omotetia di centro G e rapporto $\pi/\sigma_\alpha\sqrt{m}$.

Nella presente Nota, dopo la indicazione [2] di qualche complemento alla teoria dei momenti d'inerzia, do notizia del fatto che un conveniente uso della antipolarità rispetto alla e_α permette di coordinare efficacemente la trattazione di svariati problemi di Cinematica delle masse e Stereodinamica.

Tale fatto può anche giustificare la proposta di una speciale qualifica per la e_α, quella di « ellisse centrale del piano baricentrale α ».

1. Preliminari. - In aggiunta alle notazioni già specificate, convengo di indicare: con a un asse non baricentrale [3] del piano α; con ρ il raggio

(1) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Questa Nota sintetizza quanto ho esposto nelle prime lezioni del « secondo corso di Meccanica razionale » da me iniziato nel decembre 1945 presso l'Istituto nazionale per le applicazioni del calcolo. Su lo stesso argomento, pubblicherò una Nota assai più ampia nel prossimo volume degli « Annali di Matematica ».

(3) Si tratta evidentemente di un *qualunque* asse non baricentrale. Per solo motivo di brevità eviterò sempre di parlare di ciò che si verificherebbe se questo asse a si riducesse ad un asse baricentrale.

d'inerzia di S relativo ad a; con A l'antipolo di a rispetto alle e_α, che brevemente chiamerò *antipolo* di a; con h e k le distanze di G ed A da a.

Di regola gli assi di e_α non sono assi centrali, ma ciò non toglie che per quanto riguarda i momenti d'inerzia rispetto ad assi di α la e_α viene sempre a godere di proprietà del tutto analoghe a quelle che avrebbe l'ellisse di Culmann ove S degenerasse in una superficie materiale del piano α. In particolare, persiste l'eguaglianza

$$(1) \qquad hk = \rho^2,$$

in modo che per un pendolo composto la distanza dell'asse di sospensione dal suo antipolo non differisce dalla lunghezza ridotta.

Se S ammette un piano di simmetria α_s, l'antipolo della generica normale ad α_s è già in uso, con altro nome, in questioni attinenti all'equilibramento delle forze d'inerzia.

2. Complementi alla teoria dei momenti d'inerzia. - Siano: P un punto qualunque di a; $\mathcal{E}_P$ l'ellissoide d'inerzia relativo a P; C la proiezione ortogonale di A su a, che converrà chiamare *centro d'inerzia* di a. Inoltre, pensando attribuito ad a un verso a piacere, chiamo: a_P la semiretta di a costituita dai punti non precedenti P; ξ_P la distanza di P da C, presa col segno + o — secondo che P segue o precede C; P' l'intersezione di a_P con $\mathcal{E}_P$; n_P la semiretta uscente da P con la direzione e il verso della normale esterna in P' a $\mathcal{E}_P$; δ_P l'angolo $\widehat{n_P a_P}$; n'_P la proiezione ortogonale di n_P su α. Infine, attribuisco a ogni normale ν al piano α il verso che occorre per costituire con a e la CA una terna levogira e chiamo δ'_P l'anomalia di n'_P rispetto alla a, contata positivamente in senso levogiro rispetto a ν, e δ''_P l'angolo formato da n_P col piano α, preso col segno + o — secondo che è acuto o ottuso l'angolo $\widehat{\nu n_P}$ (1).

Con queste convenzioni, si possono esattamente stabilire le due uguaglianze

$$(2) \qquad k \operatorname{tg} \delta'_P = \xi_P \quad ; \quad \operatorname{tg} \delta''_P = \cos \delta'_P \operatorname{tg} \delta''_C .$$

La prima può leggersi dicendo che n'_P *è sempre normale a* PA *e forma con la* CA *un angolo acuto o ottuso secondo che* P *segue o precede* C: solo per $P \equiv C$ la n_P appartiene al piano per a normale ad α. Dalle (2) pure risulta che C potrebbe anche definirsi come *punto di minimo* per δ_P.

3. Assi permanenti, assi destri, assi sinistri. - L'asse a si dice asse *permanente* ogniqualvolta è asse principale d'inerzia rispetto a un suo punto.

(1) Il segno di δ''_P risulta indipendente dal verso attribuito ad a.

La denominazione è di AMPÈRE [1], per la sua giustifica v. n. 6. Come è ben noto, di regola per il generico punto O dello spazio passano ∞^1 assi permanenti, che coprono un cono quadrico equilatero: il *cono di* [2] AMPÈRE. Per un generico giroscopio [3] sono assi permanenti tutti e soli gli assi complanari o ortogonali all'asse giroscopico, onde il cono di AMPÈRE sistematicamente degenera in due piani ortogonali.

L'asse a può essere asse principale d'inerzia solo rispetto al suo centro d'inerzia C [perchè altrimenti non si annulla δ'] e lo è effettivamente soltanto se si annulla anche δ''_C, nel quale caso [cfr. $(2)_2$] lungo a la n_P appartiene sempre ad α.

Se invece è $\delta''_C \neq 0$ [4] la terna di semirette a_P, CA, n_P risulta sempre destra per $\delta''_C > 0$, sempre sinistra nel caso opposto. È già questo un motivo di distinguere gli assi non baricentrali non permanenti in *destri* e *sinistri* secondo che δ''_C è positivo o negativo [v. anche i nn. sgg.].

4. QUANTITÀ DI MOTO PER UN ATTO DI MOTO ROTATORIO. – Penso ora che S sia sede di un atto di moto rotatorio di asse a, accennando con v_G la velocità del baricentro, con $\mathfrak{I}^{(q)}$ l'insieme delle quantità di moto delle singole particelle di S.

Sia b la retta normale ad α nell'antipolo A di a e $\mathfrak{B}$ la corrispondenza nello spazio rigato caratterizzata dall'associare a ciascuna retta non baricentrale a la retta b, pure non baricentrale, ora specificata. Alle rette passanti per il generico punto O nello spazio la $\mathfrak{B}$ fa corrispondere rette tutte quante normali alla OG. Ad esempio, la superficie rigata corrispondente al cono di AMPÈRE relativo a O non può essere altro che un paraboloide iperbolico, con un piano direttore normale ad OG, perchè è facile riconoscere che è anche essa di secondo grado.

Ebbene si può dimostrare che *b è l'asse centrale di* $\mathfrak{I}^{(q)}$: precisamente, $\mathfrak{I}^{(q)}$ *equivale al suo risultante* $m v_G$ *applicato a* b, *più una coppia di momento* $k \operatorname{tg} \delta''_C \cdot m v_G$, coppia che viene a mancare solo quando si annulla δ''_C, cioè solo quando l'asse di moto è permanente. Nel caso opposto la diname non degenere equivalente a $\mathfrak{I}^{(q)}$ riesce destra o sinistra secondo che è destro o sinistro l'asse a.

5. APPLICAZIONE ALLA TEORIA DEGLI URTI. – Lasciando ormai sottinteso che S sia un sistema rigido, suppongo che a un certo istante venga ad agire su S un impulso I applicato ad una certa retta i e accenno con

(1) A. M. AMPÈRE, *Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanents de rotation etc.* [« Mém. de l'Ac. des Sc. », tome 5 (1821–22) pp. 86–152].

(2) V. loc. cit., Chap. I.

(3) Come è ormai abituale, dicendo che S è un giroscopio, di asse ζ, voglio solo dire che S è un sistema rigido il cui ellissoide centrale ammette come asse di rotazione ζ.

(4) Cfr. la nota (1)

$\Delta\mathfrak{A}$ la simultanea discontinuità dell'atto di moto. Da quanto è stato riferito nel numero precedente, immediatamente segue che se S non è soggetto a vincoli $\Delta\mathfrak{A}$ corrisponde a un atto di moto puramente rotatorio solo quando la i può ricavarsi mediante la $\mathfrak{B}$ da un asse non baricentrale permanente, il quale viene a essere l'asse dell'atto di moto rotatorio. Quindi, se S è vincolato a rotare senza attrito attorno a un generico punto O, **I** non cimenta il vincolo solo quando la i appartiene al paraboloide iperbolico corrispondente in $\mathfrak{B}$ al cono di AMPÈRE relativo a O.

Se, più restrittivamente, S è vincolato a rotare senza attrito attorno a un asse non baricentrale a, **I** non cimenta i vincoli solo quando a è asse permanente e la i è proprio la retta corrispondente in $\mathfrak{B}$ ad a. In termini equivalenti si può dire: se l'asse a è *permanente*, il suo antipolo A coincide col *centro di percossa*.

6. FORZE D'INERZIA IN UN MOTO ROTATORIO, CORRISPONDENTI REAZIONI VINCOLARI. – Supponendo che S sia vincolato a rotare senza attrito attorno a un asse fisso non baricentrale a, accenno con $\boldsymbol{a}_G$ l'accelerazione di G, con $\mathfrak{I}^{(m)}$ l'insieme delle forze d'inerzia e con $\mathfrak{I}^{(v_m)}$ l'insieme delle reazioni vincolari provocate da $\mathfrak{I}^{(m)}$.

Da quanto è stato riferito nel n. 4, molto semplicemente si può ricavare che a ogni istante $\mathfrak{I}^{(m)}$ *equivale al suo risultante* $-m\boldsymbol{a}_G$ *applicato in* A, *più una coppia di momento* $-k\,\mathrm{tg}\,\delta''_C \cdot m\boldsymbol{a}_G$, ciò che implica *la coincidenza degli assi centrali di* $\mathfrak{I}^{(m)}$ *e* $\mathfrak{I}^{(v_m)}$ *con le parallele ad* $\boldsymbol{a}_G$ *per* A *e* C. Se la rotazione è uniforme essi vengono a sovrapporsi nella CA, solidale a S. Se in più a è asse permanente, $\mathfrak{I}^{(m)}$ equivale all'unica forza $-m\boldsymbol{a}_G$ applicata in C e $\mathfrak{I}^{(v_m)}$ a una forza direttamente opposta.

Tutte le volte che a non è permanente, le dinami non degeneri equivalenti a $\mathfrak{I}^{(m)}$ e $\mathfrak{I}^{(v_m)}$ riescono ambedue destre o sinistre secondo che è destro o sinistro a.

7. PROBLEMA DI STAUDE. – Sia ora $\mathfrak{S}$ un sistema rigido pesante, di struttura qualsiasi, fissato senza attrito per un solo punto O $\neq$ G. Mi propongo di determinare per $\mathfrak{S}$ ogni possibile rotazione uniforme $\mathfrak{A}$ con asse non baricentrale a.

Chiamo g l'accelerazione di gravità, ω la costante velocità angolare di $\mathfrak{A}$, a' la parallela per O a CA, a'' la normale in O ad a e a'. Attualmente $\mathfrak{I}^{(m)}$ equivale [cfr. n. prec.] alla forza $m\omega^2$. DG applicata alla retta CA, più una coppia di momento $\mu = k\,\mathrm{tg}\,\delta''_C \cdot m\omega^2$ DG. Basta questa osservazione perchè la seconda equazione cardinale della Dinamica [uguaglianza a zero del momento risultante delle forze d'inerzia e delle forze esterne] riferita agli assi a, a' e a'' subito si riduca a imporre che: a) la verticale per G sia sempre complanare ad a, cioè a sia verticale; a') μ si annulli, cioè a

sia anche asse permanente; a'') C sia situato al disotto di O, con $|OC| = g/\omega^2$.

Resta quindi senz'altro stabilito che *una rotazione uniforme di* $\mathcal{S}$, *attorno a un asse non baricentrale* a, *può realizzarsi fissando senza attrito un unico punto* O *di* a, *solo quando questo asse è permanente e verticale e pur di scegliere* O *al disopra del centro d'inerzia* C *di* a, *alla distanza*

$$|OC| = \frac{g}{\omega^2} > 0,$$

se ω *deve essere la grandezza della velocità angolare*: il verso di ω non conta.

Qualora venga a mancare la condizione [e solo la condizione] che a sia asse permanente, subito dopo l'istante iniziale la semiretta OC si stacca dal piano verticale fisso individuato dalle posizioni iniziali di a e G; si può anche dimostrare che, *qualunque sia* $|OC|$, *il distacco avviene verso la destra o la sinistra di chi da* G *osservi* a, *secondo che quest'asse è destro o sinistro.*

8. Precessioni tipiche di un giroscopio pesante. – Se $\mathcal{S}$ è un giroscopio ed O appartiene all'asse giroscopico ζ, l'intervento dell'antipolo dell'asse di moto permette di ritrovare in modo assai efficace anche tutte le possibili precessioni tipiche *effettive* di $\mathcal{S}$ [precessioni regolari *non degeneri* aventi per asse di figura ζ].

Chiamo p e ω_1 l'asse e la velocità di precessione; A l'antipolo dell'asse di moto a; A_p e G_p le invariabili proiezioni di A e G su p; p' la parallela per O ad $A_p A$; p'' la normale in O a p e p'. Da quanto è stato detto nei nn. 6 e 4 si può rapidamente ricavare che anche ora l'insieme delle forze d'inerzia equivale all'unica forza $m\,\omega_1^2\,G_p\,G$ applicata alla retta $A_p A$. Dopo questo, riferendo la seconda equazione cardinale della Dinamica agli assi p, p', p'' si trova solo che p deve essere verticale e A_p situato al disotto di O, con

$$|OA_p| = \frac{g}{\omega_1^2} > 0.$$

Siano: x la retta antipolare di O rispetto all'ellisse centrale del piano $p\zeta$; Y l'intersezione di x con p'; $\bar{x}$ la semiretta costituita dai punti di x non situati al disopra di p'. In definitiva, rimane stabilito che *assegnata la posizione iniziale del giroscopio* [*con* ζ *non verticale*] *e assegnato anche il verso del vettore verticale* ω_1, *risultano possibili* ∞^1 *precessioni tipiche del giroscopio, in corrispondenza biunivoca con la posizione di* A *dentro la* $\bar{x}$.

Se A tende a Y, l'asse di moto tende a una retta ben distinta da ζ, ω_1 cresce indefinitamente e lo stesso si verifica per la grandezza ω della velocità angolare totale del giroscopio. Se invece A si abbassa indefinitamente,

a tende a ζ, ω_1 tende a zero, ma ω cresce ancora indefinitamente, anzi è facile riconoscere che $\omega\omega_1$ tende a $|OG|\cdot g/\rho_\zeta^2$, se ρ_ζ è il raggio d'inerzia rispetto a ζ. Insomma, se A va all'infinito, la ω cresce oltre ogni limite, la ω_1 tende a zero e nel frattempo si può ritenere [1]

$$\omega_1 = \frac{|OG|\cdot g}{\omega\rho_\zeta^2},$$

in pieno accordo con quanto fornirebbe l'uso dal principio dell'effetto giroscopico.

Meccanica (Meccanica applicata). — *Sulla applicazione dell'energia atomica alla navigazione interplanetaria.* Nota [2] del Socio G. A. Crocco.

Nella seduta dell'Accademia dei Lincei del 15 aprile 1923 è stata da me presentata una Nota *Sulla possibilità della navigazione extraatmosferica mediante l'uso dell'energia atomica.* Ora, dopo la scoperta della scissione del nucleo uranico, credo opportuno aggiornare le conclusioni di quella comunicazione, che ricorderò nei suoi punti essenziali.

L'energia atomica si suppone utilizzata in un propulsore *a reazione*; o, come oggi si dice dopo le varie attuazioni belliche di questo tipo di propulsore, in un *reattore.*

A questo scopo i frammenti di nuclei espulsi dagli atomi si suppongono convogliati, totalmente o parzialmente, nella direzione utile alla propulsione mediante un dispositivo elettrico od elettromagnetico che ottenga concettualmente il convogliamento senza riduzione di energia cinetica e quindi senza produzione di calore. Un simile dispositivo sarà qui detto *reattore elettro-atomico* in confronto dell'ordinario *reattore termochimico* sin qui adoperato; ed anche in confronto di un eventuale *reattore termoatomico* dove si utilizzi la manifestazione calorifica.

Se pertanto si indica con m la massa di materia fornita nell'unità di tempo al reattore e con αm quella espulsa dai nuclei attivi con velocità v; e se βu indica la media velocità ottenuta nel convogliamento in senso opposto alla forza di reazione F, si avrà

$$F = \alpha\beta mu;$$

(1) È pure facile constatare che nel passaggio al limite la rotazione propria risulta levogira o destrogira in riguardo al raggio OG, secondo che è levogira o destrogira la rotazione attorno alla verticale ascendente.

(2) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

dove il coefficiente α si potrà chiamare *frazione di massa* ed il coefficiente β *frazione di velocità*.

Si suppone poi di impiegare questa forza propulsiva per comunicare ad un veicolo interplanetario di massa M, durante il tempo T, una velocità V, generalmente diretta in senso verticale rispetto alla Terra; e che chiameremo *velocità impressa* per distinguerla, occorrendo, dalla velocità *di trascinamento* comunicata in partenza al veicolo dal moto orbitale e rotazionale della Terra. Si suppone inoltre, dopo aver così sottratto il veicolo all'attrazione terrestre per farlo proseguire di moto uniforme verso la mèta prestabilita, di arrestarne all'arrivo la velocità di marcia utilizzando il reattore come freno; e, raggiunto lo scopo del viaggio, di compiere il ritorno alla Terra in analoghe condizioni. Si ritiene infine che, nel calcolo del lavoro necessario a raggiungere la velocità V, la resistenza dell'aria all'uscita dalla Terra si compensi col frenamento offerto dall'aria nella rientrata; e, tenuto conto dell'ordine di grandezza delle quantità in gioco, si introduce la semplificazione che il percorso di accelerazione, nel tempo T, sia compiuto ad una velocità media pari alla metà della velocità impressa V.

Se ne ricava così la relazione approssimata

$$V^2 - \alpha\beta\mu u V + 2 g R = 0;$$

nella quale R è il raggio della Terra; g la gravità alla superficie; e $\mu = \frac{m T}{M}$ rappresenta la massa consumata nel tempo T dell'accelerazione, rapportata alla massa complessiva del mobile. Questa frazione nel reattore elettroatomico risulta abbastanza piccola perchè nell'integrazione possa venir trascurato l'alleggerimento del mobile durante ogni singola manovra.

La Nota originaria confronta per tal modo il rendimento del reattore termochimico con quello del reattore elettroatomico; e ne trae conclusioni favorevoli alle possibilità della locomozione extraatmosferica a velocità di marcia dell'ordine di grandezza della velocità orbitale della Terra.

Uno studio, apparso successivamente alla Nota [1], è venuto ad avvalorare queste conclusioni precisando che i consumi di materia necessari ad un reattore di tipo termochimico in navigazione interplanetaria, alla minima velocità impressa possibile, ammontano a *centinaia* di volte il peso finale del veicolo e conducono alla concezione di *treni spaziali*, tecnicamente inattuabili. Occorre inoltre, con un propulsore termochimico, più di un anno e mezzo per compiere un viaggio di andata e ritorno ad uno dei nostri pianeti più vicini.

(1) Walter Hohmann, *Die erreichbarkeit der himmelskörper*. R. Oldenbourg, Berlino, 1925.

* * *

Nei ventidue anni trascorsi da queste previsioni, il problema della disintegrazione del nucleo atomico è rimasto per lungo tempo limitato ai fenomeni della radioattività naturale, inaccessibili all'intervento umano; o alle manifestazioni di scarso rendimento complessivo della radioattività artificiale. Molti fisici erano quindi scettici sulla effettiva disponibilità dell'energia atomica. Poi, ad un tratto, colla scoperta della scissione a catena del nucleo uranico, il problema della disponibilità ebbe una soluzione inattesa, imponente, provocabile a volontà e suscettibile d'intervento. Si è ottenuta così la condizione prima necessaria alla propulsione spaziale.

Ma v'è di più. Mentre il fenomeno della radioattività, che conduce il nucleo dell'uranio al nucleo del piombo, poteva offrire nella migliore ipotesi l'energia corrispondente alla disintegrazione di poco più di un decimo della materia presente, ora nel fenomeno della scissione tutto il nucleo uranico attivo, si scinde in due frammenti e partecipa alla produzione di energia. E se la disciplina della disintegrazione a catena esige oggi tecnicamente l'aggiunta di materia inerte a quella attiva per dosare l'innescamento di una esplosione, ciò non appare una necessità fisica quando si voglia un fenomeno graduale. Cosicchè, mirando alle possibilità dell'avvenire nello immancabile progresso scientifico, si può ritenere che la *frazione di massa* partecipante alla disintegrazione, simboleggiata dal coefficiente α nella espressione della forza propulsiva, tenderà concettualmente all'*unità*.

Rimane poi immutata la seconda condizione necessaria alla propulsione spaziale e cioè il convogliamento unidirezionale dei frammenti; che, rimanendo ionizzati quasi in proporzione della loro massa, sono suscettibili nel vuoto di venir deviati per mezzo di forze elettriche od elettromagnetiche senza perdita di velocità e quindi concettualmente senza produzione di calore; a meno dell'uno per cento, cioè dei neutroni esuberanti.

La cospicua manifestazione calorifica che accompagna l'esplosione della bomba atomica è infatti dovuta sopratutto all'incontro dei frammenti nucleari con le pareti del recipiente e con l'aria ambiente. Elevatissime temperature sono provocate da quest'incontro. Ma il fenomeno cambia di aspetto nel vuoto, dove i frammenti irradiano per traiettorie rettilinee divergenti, conservando ciascuno tutta la velocità originaria senza incontrare necessariamente materia frenante; e dove l'alimentazione progressiva consente di ridurre le interazioni dei nuclei uranici fra di loro.

Certo, intervenendo per deviarli verso una sola direzione, si provocheranno degradazioni calorifiche; e sarà comunque tecnicamente impossibile ottenere un impulso in quella direzione pari alla somma dei singoli impulsi radiali. Ma il calore verrà asportato dalla materia sfuggente e il rendimento

del dispositivo crescerà col suo affinamento. Cosicchè anche la frazione di velocità, simboleggiata dal coefficiente β nella espressione della forza propulsiva, si potrà ritenere tendente all'*unità*.

In definitiva, allo stato attuale delle previsioni, per rimanere in un campo avveniristico prudenziale e potenziale nello stesso tempo, si potrà assegnare nell'aggiornamento il valore 1/2 al prodotto, $\alpha\beta$, delle frazioni di massa e di velocità; il che equivale a supporre che tutta la massa in gioco sfugga ad una velocità utile *metà* di quella radiale.

Con questa assunzione, le previsioni sulle possibilità della navigazione interplanetaria con un reattore elettroatomico risultano più ottimistiche di quelle prospettate nel primo esame; come appare dal quadro seguente ove è riportato l'ordine di grandezza delle velocità di marcia raggiungibili da un veicolo interplanetario in relazione ai consumi totali necessari ad un viaggio di andata e ritorno su percorso qualsiasi; ottenute dalla equazione approssimata dei lavori nella quale si è fatto $u = 14000$ e quindi $\alpha\beta u = 7000$ chilometri al secondo.

Velocità impressa in Km/sec	Consumo totale in percento del peso del veicolo a pieno carico
30	2.5 %
160	10 »
400	20 »
650	30 »
900	40 »
1200	50 »

In questo quadro, la cifra di 30 Km/sec era già stata segnalata ventidue anni or sono. Le cifre successive rappresentano l'aggiornamento. Quella di 160 Km/sec si ritiene adatta ai primi esperimenti sui pianeti più vicini. Tenendo conto della velocità media che ne risulta, il pianeta Marte, nei periodi di opposizione, verrebbe raggiunto in meno di cinque giorni. La velocità di 400 Km/sec si può preventivare per una ricognizione su Giove, in secondo esperimento: mentre quella di 1200 Km/sec, che si indica come massima solo in relazione al consumo totale del 50 per cento, preso tecnicamente come massimo, rimane riservata ad ulteriori possibilità di esplorazione dei pianeti più lontani.

Queste velocità di marcia sono talmente fuori di proporzione con quelle praticate sulla Terra che ad attenuare il senso di incredulità eventuale nell'animo del lettore, aggiungerò di avere esaminato con circospezione le modalità della condotta del veicolo lungo il viaggio o in termini correnti

del *pilotaggio spaziale*; e di averne dedotto, come mi riservo di comunicare a suo luogo, che non si presentano difficoltà notevoli, purchè sia osservate la premessa termica e la disponibilità del reattore durante il viaggio.

In conclusione l'aggiornamento conduce a ritenere che la vaga possibilità ideale segnalata nel primo esame si è oggi concettualmente trasferita in un campo più concreto. In questo campo risultano raggiungibili velocità di marcia interplanetarie superiori a tutte quelle sinora conosciute per gli astri e dominabili dalla volontà dell'uomo, che gli conferiscono il potere di percorrere tutto il sistema solare in tempi compatibili colle sue necessità fisiologiche.

Queste conclusioni assicurano la tecnica che la fatica necessaria alla attuazione sarà ben rimunerata, poichè la posta vale il gioco e la soluzione condurrà alla più spirituale conquista nella storia del pensiero umano.

Geologia. — *Le fratture e le rughe della Crosta terrestre.* Nota I [1] del Socio F. Sacco.

Se si osserva complessivamente la superficie della Terra con semplice occhio geografico, vi si possono distinguere tre elementi principali, cioè: le Masse continentali, i Bacini oceanici e le Catene montuose scendenti talora a mare a formarvi Arcipelaghi.

Ma se la si esamina con occhio geologico essa ci appare più complicata e tale da illuminarci sulla sua storia passata, presente e futura. Diamone un breve cenno.

Le Masse continentali sono geologicamente costituite da uno o più Massicci antichi, più o meno eccentrici rispetto al relativo Continente; sono formati da terreni eminentemente cristallini, arcaici o paleozoici (salvo invasioni trasgressive di terreni più giovani). Tali Massicci, detti Scudi (*Boucliers*), Moli, *Horst* o Pilastri, *Scholl*, ecc., sono fasciati, da uno o più lati, da catene montuose (corrispondenti alle così dette Zone orogeniche) costituite da terreni paleozoici–mesozoici e talora anche cenozoici.

Orograficamente tali Massicci si mostrano spesso irregolarmente poligonali o triangolari, coll'angolo più acuto volto a sud, come il tipico Massiccio indiano, con blocchi staccati, isolati, quali Ceylon, Tasmania, ecc. Poligonalità originata da paraclasi marginali, ma spesso però mascherata dall'aggiunta di terreni più giovani.

Il loro paesaggio è pianeggiante (*peneplane*), a piattaforma alta o bassa, salvo incisioni più o meno profonde prodotte da erosioni fluviali o da fratture

(1) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

con scoscendimento; sono le cosidette Vallate di sprofondamento, le *Rift Valley*, i *Graben* o *Fosse*, spesso rettilinee coi fianchi a gradinata, ed il fondo occupato da lunghi laghi o percorso da fiumi; così i laghi di Nyassa e di Tanganiyca nell'Africa orientale, la fossa del Reno nell'Europa, ecc.; talora il loro fondo è più basso del livello marino, come è il caso del famoso Mar Morto.

Oltre ai grandi Massicci antichi continentali, sonvene numerosi piccoli, sparsi, staccati, isolati, seminascosti per esser stati semisepolti da depositi più giovani, così, nell'Europa centrale, in Ungheria, a NO e NE del Massiccio indiano, nella parte meridionale del Sud America, ecc.

Oltre alle fratture che intaccano più o meno numerose e profonde i Massicci antichi nella loro regione interna, sono frequenti e caratteristiche quelle marginali, periferiche, che li staccano nettamente dalle depressioni oceaniche; sono tipiche quelle che si sviluppano per migliaia di chilometri (malgrado numerose interruzioni più o meno angolari) sui due lati dell'Atlantico [1]; ma esse si sviluppano spesso anche altrove, come ho già segnato un po' stilizzate in altro lavoro [2].

Si tratta generalmente di vere zone diaclasiche, rappresentate da serie di fratture subparallele, disposte a gradinata verso mare, come zolle successive di grandiosi franamenti [3]. L'importanza delle fratture fu già riconosciuta sin da Stenone in *De solido* ... (1669, Firenze); le loro modalità furono poi studiate specialmente dal Daubrée coi suoi *Études synth. de Géologie expérim* ... (1879).

L'andamento delle fratture terrestri è prevalentemevte meridiano o submeridiano, malgrado moltissime eccezioni provocate da cause speciali diverse.

I Massicci antichi sono costituiti specialmente di scisti gneissici più o meno micacei, inglobanti svariate rocce endogene, per lo più fortemente sollevati ed arricciati; essi nella loro parte superiore sono generalmente quasi piallati, spesso coperti da depositi trasgressivi, indicandoci derivare da formazioni cristalline state fortemente pigiate da forze tangenziali, sollevate per orogenesi, poi per molti milioni d'anni, intensamente alterate ed abrase dagli agenti esogeni che ne esportarono ingenti parti superiori. Però talora gli strati poterono conservarsi ancora pianeggianti, subendo solo movimenti verticali (epirogenici) costituendo speciali paesi tabulari, come per esempio il tavolato russo.

Questi Massicci, prevalentemente cristallini, rigidi, sono per lo più asismici, salvo che nelle regioni di fratture ancora in atto e tali da raggiungere zone magmatiche profonde e provocare sismicità e vulcanismo svariati, come per esempio nell'Africa orientale, coi relativi enormi espandimenti basaltici [4].

(1) F. Sacco, *La Dorsale medio atlantica*. « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 75, 1940.
(2) Id., *Les Lois fondamentales de l'Orogénie de la Terre*. (Turin, 1906).
(3) Id., *La courbe hypsographique del'Ecorce terrestre*. (Torino) 1912.
(4) Id., *Le zone paracl. d'Africa or.* « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 75 (1940).

I Massicci antichi sono:

L'*Africano* (colla connessa *Arabia*), forse il più antico, profondamente alterato, a margini arrotondati, tipicamente fratturato nella parte orientale. Vi si può collegare il triangolare *Massiccio indiano*.

Il *Nord America* o *Laurentiano* coll'annessa *Groenlandia*, avente analogia coll'Arabia rispetto all'Africa.

Il *Sud America* (Massiccio *brasiliano-guayaniano*) subtriangolare, frantumato in diverse zolle, sia a nord sia all'estremità della sua parte sud.

L'*Antartide* o *Massiccio australe*, ancora poco conosciuto a causa del manto glaciato, ma che pare anch'esso fratturato.

L'*Australiano* od *Oceaniano*, tozzamente subquadrangolare, che sembra presentare vaste aree di depressione pervase trasgressivamente da amplissimi depositi, cretacei e terziari.

Appaiono poi sparsi Massicci minori, come quello di *Borneo*, del *Siam* e quello assai più esteso *Sinico* o *Cinese* nell'Asia orientale, fra le formazioni paleozoiche (a cui passano) e quelle meso-cenozoiche.

Il *Massiccio siberiano* in buona parte mascherato da depositi quaternari e passante marginalmente a zone o fascie erciniane paleo-mesozoiche.

Il *Massiccio caledoniano* o *balteo* o *finno-scandinavo* o *nord europeo*, che è naturalmente il meglio studiato e quindi conosciuto, ma che è molto complesso sia per natura litologica (con svariate protrusioni magmatiche), sia per fratturazioni in diverso senso, spostamenti, ecc.

I Bacini oceanici erano originariamente molto più vasti che non siano ora, essendo stati ristretti (attraverso centinaia di milioni di anni) da depositi sedimentari, da zone orogeniche che andavano allargando le aree continentali e da avvicinamento delle masse continentali; tanto più per avere il loro substrato prevalentemente basico, simico, pastoso-fluido e quindi atto a restringersi e corrugarsi, mentre i Massicci, piuttosto costituiti di roccie acide, sialiche, si erano già complessivamente irrigiditi.

Essi rappresentano vaste regioni di depressione per sprofondamento, di cui abbiamo spesso i segni o residui periferici, nei salti orotettonici o diaclasi marginali sovraccennati, dell'altezza di 100-200 sin oltre 1000 metri.

Tali Bacini rappresentano quindi gigantesche zolle od aree di abbassamento in modo da costituire irregolari piattaforme o bassipiani sottomarini.

Detti fenomeni sono ora in gran parte mascherati, sia dalle acque marine, sia da depositi sedimentari varii, sia da azioni orogeniche diverse; ma gli analoghi si possono ancora osservare ben conservati sulla superficie lunare, là mancandovi acqua, sedimenti ed alcune azioni esogene.

Basta osservare l'esagonale *Mare crisium*, il poligonale *M. serenitatis*, alcuni fianchi del *M. imbrium*, del *M. humorum*, del *M. nectaris*, ecc. dove le fratture periferiche, spesso a gradinata, separano sovente le aree biancastre

sialiche trachitoidi, delle *Terrae*, dalle basse aree brunastre simiche, basaltoidi, dei *Maria* [1].

I Bacini marini della Terra sono molto più vasti che non le aree continentali, se confrontiamo i *Maria* lunari rispettivamente colle relative *Terrae*; ciò probabilmente perchè, come indica la differenza di densità fra la Terra (5,6) e la Luna (3,4), il materiale simico, più pesante di quello sialico, deve essere relativamente più abbondante nel globo terrestre che non in quello lunare, e quindi le derivanti aree depresse, simiche, debbono essere relativamente più estese, come infatti si verifica [2].

La buona conservazione del paesaggio originario, senza mascheramento acqueo-sedimentario o di alterazione, ci lascia vedere sulla superficie lunare il passaggio dalle fratture delle aree interne sialiche a quelle a gradinate delle zone diaclasiche marginali, come per esempio ad est e ad ovest del *Mare humorum*, nella parte orientale del *Mare imbrium* dagli Appennini, attraverso la *Palus putredinis*, sino al bassopiano, ecc.

Anche sulla Luna le fratture hanno un andamento prevalentemente meridiano o submeridiano, come sulla Terra, ma vi sono più frequenti quelle dirette est-ovest o analogamente subparallele come sui lati del *Mare imbrium*.

Sotto ai Bacini oceanici la zona simica, plastica, deve trovarsi a minor profondità che sotto i rigidi Continenti sialici, in generale, come indicano i dati gravimetrici; ciò che spiega la relativamente facile corrugabilità delle aree suboceaniche; così per esempio la mirabile ondosità orogenica del fondo del Pacifico.

Le *Catene montuose* o Zone orogeniche della Terra, corrispondono a fasci di pieghe o rughe litoidi, formatesi nelle aree più deboli, simiche o sedimentarie, e quindi più pieghevoli, del globo terrestre.

Esse si presentano infatti al geologo come il risultato di un più o meno intenso corrugamento, anche con varie decine di rughe o pieghe subparallele; esse costituiscono un vero paesaggio a pieghe, contrastante col paesaggio più o meno tabulare dei Massicci antichi.

Queste zone orogeniche presentano diversi casi, cioè:

Spesso si addensano, quasi si accavallano come onde sublittorali, contro Massicci, come per esempio le grandiose e complesse Cordigliere delle Montagne rocciose e delle Ande, gli Appalachiani, le Alpi australiane, le zone circuenti a SE il Massiccio siberiano, ecc.

Oppure esse si formarono perchè comprese e compresse tra due o più Massicci antichi, come la tipica, gigantesca e complessa catena alpino-himalaica finchè essa si sfascia quasi libera a ventaglio nell'Asia orientale, scendendo poi nel Pacifico a formare le Oceanidi; come pure la magnifica

(1) F. Sacco, *Essai schématique de Sélénologie* (Turin, 1907).

(2) F. Sacco, *L'anomalia della gravità sulla Terra*. « Atti Acc. Lincei », 1923.

Dorsale medioatlantica [1] che sviluppasi ondulata fra i Massicci americani e quelli euro–africani; meno tipiche sono le Dorsali di Casberg nell'oceano indiano di NO [2]; come anche le ampie ma ancora depresse dorsali sottomarine esistenti tra il Massiccio dell'Antartide a sud e quelli dell'Africa e dell' Australia a nord. Pure di tale tipo è l'antica catena uraliana.

Riguardo all'età od epoca di formazione delle zone orogeniche, si può dire che esse si costituirono in tutte le epoche geologiche; da quelle arcaico–paleozoiche (specialmente pel diastrofismo caledoniano) ormai già irrigidite in Massicci antichi, e quelle verificatesi pel diastrofismo varisco–armoricano o erciniano (l. s.), come per esempio la catena appalachiana contro il Massiccio del Nord–America, le Alpi australiane, la vecchia catena uraliana sorta per compressione tra il Massiccio nord–europeo e quello siberiano; come pure le tanto frantumate ed irregolarmente sparse zone erciniane dell'Europa centrale (la Meseta spagnuola, le Ardenne, i Vosgi, la Foresta nera, l'Harz, la Boemia, i Sudeti, sino alla lontana Kamennaja); dopo di che si formarono zone orogeniche relativamente recenti durante il diastrofismo alpino (continuantesi dal Cretaceo sino ad oggi), come appunto la catena alpino-himalaica, compresa in gigantesca morsa tra i Massicci caledonico–siberiano a nord e quello africo–indiano a sud; come pure l'Appennino (l. s.) e le innumerevoli Oceanidi espandentisi liberamente a onde, a collana, ecc. negli Oceani. Notisi inoltre che molte zone orogeniche si iniziarono per un diastrofismo antico e continuarono poi ad accentuarsi, nei successivi diastrofismi, come esse continueranno ad accentuarsi ed espandersi nel futuro.

Tali zone orogeniche, specialmente quella enorme, tipica, medio–atlantica, indicando un ravvicinamento di Continenti, parlano naturalmente contro la teoria di Wegener basata sulla ipotesi dell'allontanamento dei Continenti in deriva.

Una fisionomia speciale delle giovani zone orogeniche oceaniche è rappresentata da quelle foggiate a ghirlanda o collana, come quelle tipiche delle Antille, delle Orcadi meridionali, delle Aleutine e delle tante altre sviluppantesi, anche ad onde, nel Pacifico occidentale, quasi collegate col margine orientale dell'Asia.

Queste ghirlande o arcuature orogeniche sono, pur con eccezioni, generalmente rivolte colla convessità verso l'est, fatto interessante su cui ritorneremo piu avanti.

Le zone orogeniche, come le fratture, hanno un andamento prevalentemente submeridiano, ma però moltissime seguono pure l'allineamento dei paralleli quando originate da pressioni tangenziali dirette nord–sud, come per esempio la grande catena alpina–himalaica e la gigantesca Dorsale sottomarina

(1) F. Sacco, *La Dorsale medio–atlantica.* « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 75, 1940.

(2) F. Sacco, *Nuovi dati sulla Orogenesi dell'Oceano indiano.* « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 76, 1941.

antartica sovraccennata. Qualcosa d'analogo mostrano le rughe ondulate dei bassopiani simici (*Maria*) della Luna.

Sulla superficie terrestre le zone orogeniche giovani, rappresentando appunto rughe accentuantesi nelle aree deboli in attività di corrugamento orogenetico (quindi di sollevamento, di fratturazioni, ecc.), sono caratterizzate da frequente seismo e vulcanismo, formando così, per esempio, il famoso cerchio di fuoco nonchè di terremoto attorno al Pacifico, e la linea sismico–vulcanica del Mediterraneo e del Medio Atlantico, ecc.

Geologia. — *Nuove osservazioni geologiche sulla serie attraversata dal fiume Celone (Capitanata)* [1]. Nota [2] del Corrisp. G. Checchia–Rispoli.

In una Nota preliminare di alcuni anni or sono ho succintamente descritta la successione dei vari membri attraversati dal Celone, nell'alta Capitanata, sin dove questo sfocia nella pianura pugliese [3].

Prima di scavare il suo ampio letto nelle marne argillose del Piacenziano, il Celone incide in strettissima gola una rupe di strati calcarei, più sviluppati a valle che a monte del Ponte di Celle, sul quale passa la rotabile Castelluccio Valmaggiore-Celle San Vito. Gli strati formanti la rupe sono fortemente raddrizzati ed inclinati a monte (circa 70° presso il Ponte); essi emergono dalla sottostante pianura in seguito alla faglia diretta NNE–SSO, prolungamento di quella da me riconosciuta in altri punti dell'Appennino, lungo l'orlo occidentale del Tavoliere. Sicchè gli strati più antichi della serie affiorano presso detto Ponte; di qui, risalendo la valle, la successione è regolare.

Immediatamente a monte del ponte gli strati calcarei si assottigliano ed alternano con sottili intercalazioni argillose, che finiscono col predominare esclusivamente per qualche centinaio di metri a monte. Indi seguono dei potenti banchi di calcari a *Lepidocyclina* e *Miogypsina* e più a monte la formazione dei calcari marnosi. Ho scritto inoltre che la roccia costituente la rupe del Ponte di Celle non è di natura organogena e che si tratta invece di una minuta, talora minutissima, brecciolina di colore bianco, fortemente cementata, i di cui elementi sono in massima parte resti di organismi: alghe, foraminiferi, briozoi, echinidi, bivalvi, ecc.; concorrono

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) Checchia–Rispoli G., *Osservazioni geologiche preliminari lungo la valle del Celone (Capitanata)*, in «Rend. R. Accad. Naz. Lincei», Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat.; vol. XXIX, ser. 6ª, 1935.

alla formazione della brecciolina minuti frammenti a spigoli ottusi di un calcare marnoso, bianco, fossifero, nonchè scarsi elementi silicei. Il cemento è calcitico. Colore, compattezza e costituzione della roccia sono gli stessi in tutti gli strati costituenti la rupe.

Tra i resti organici i foraminiferi occupano il posto più importante: predominano le nummuliti e poi vengono, in ordine decrescente; ortofragmine, alveoline, assiline, flosculine, gipsine, chapmanine, operculine, eterostegine, rotalie, ecc., a cui si associano orbitoidi di tipo cretaceo e nella parte più elevata rare lepidocicline. I fossili sono per lo più liberi nel cemento; talora si presentano più o meno aderenti a frammenti di roccia di natura ben diversa di quella che costituisce il cemento.

Per il pessimo stato di conservazione di tutti i fossili indistintamente, per l'associazione di specie tipiche del Luteziano con altre più giovani, io concludevo per il rimaneggiamento di tutte quelle forme, ed ho riferito quel fascio di strati, che sta alla base della serie, alla parte inferiore di quel Miocene. Nella presente Nota sono costretto a ritornare sul medesimo soggetto per alcune precisazioni, essendo sorte delle divergenze sia sul riferimento cronologico del fascio di strati in questione, che sulla successione dei vari componenti di quella serie.

* * *

Dopo la pubblicazione della mia Nota, è stato pubblicato un lavoro nel quale, a proposito della medesima serie, è scritto testualmente così [1]: a pag. 172 «... Questi calcari marnosi, riferibili all'Eocene superiore, si diffondono considerevolmente nella valle del Celone, costituendo una parte dei Monti della Daunia (M. Pagliarone, M. Stillo, M. Cornacchia, M. del Vento, ecc.)», ed a pag. 173, «... mentre al Miocene inferiore sono da riferire i calcari che a monte del Ponte di Cellere includono abbondanti Miogypsine, con rare Lepidocicline associate a qualche individuo di *Amphistegyna* e di *Gypsina*.

Checchia-Rispoli in un'altra pila di calcari affiorante lungo la valle del Celone presso il ponte di recente costruzione ha determinato:

Nummulites Beaumonti d'Arch.
Nummulites discorbinus d'Arch.
Nummulites biarritzensis d'Arch. et Haime
Nummulites Partschi de la H.
Orthophragmina Pratti Mich.
Orthophragmina sella Schl.
Orthophragmina dispansa Sow.

(1) Principi P., *Sull'esistenza dell'Oligocene nell'Appennino meridionale*, in «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. LIX, 1940, Roma.

Alveolina Schwageri Checchia
Alveolina oblonga d'Orb.
Assilina spira de Roissy

alle quali negli strati più alti della serie si aggiunge qualche individuo di *Lepidocyclina*. L'Autore, ora citato, dopo di aver fatto rilevare che questi calcari anzichè essere organogeni, sono invece di origine clastica, cioè corrispondenti a minute breccioline calcaree, conclude che i fossili determinati sono rimaneggiati e riferisce al Miocene inferiore gli strati in questione. Non si può certo escludere che la presenza di alcune forme sia dovuto a fenomeno di rimaneggiamento, confermato anche dalla presenza di rari esemplari di Orbitoidi di tipo cretaceo. Ma altra specie, come *Nummulites biarritzensis*, *Nummulites discorbinus*, *Nummulites Partschi*, le Ortofragmine e le Lepidocicline, anche se in cattivo stato di conservazione, potrebbero essere in posto, costituendo una fauna, che caratterizza un livello di passaggio tra l'Eocene e l'Oligocene ».

Risulta così un forte contrasto nella interpretazione della successione dei vari membri di quella serie, che è normale per lo scrivente, mentre per il Principi gli strati che affiorano presso il Ponte, che per lui costituiscono « un livello di passaggio tra l'Eocene e l'Oligocene », ed i soprastanti calcari a *Lepidocyclina e Miogypsina* del Miocene sarebbero ricoperti dai calcari marnosi chiari ritenuti dal Principi dell'Eocene superiore. I calcari marnosi, invece, dall'alta valle del Celone non sono che una parte dell'estesissima formazione langhiana, attribuita all'Eocene medio nei vecchi rilevamenti geologici, ma che dal 1935 sono stati riferiti al Miocene medio. Al riguardo esiste una discreta letteratura e per non ripetere le medesime cose, rimando il lettore ad una mia recente pubblicazione, nella quale sono riassunti i dati stratigrafici e paleontologici riguardo alla formazione in questione [1].

Un altro contrasto non meno importante esiste poi circa il riferimento cronologico del fascio basale di strati con il quale si inizia quella serie cenozoica, da me riferita alla parte inferiore di quel Miocene ed in seguito dal Principi ad un livello eo-oligocenico. Questo Autore, anzichè ammettere il rimaneggiamento di tutte quelle forme, pensa che *Nummulites discorbinus*, *N. biarritzensis*, *N. Partschi*, ecc. si siano spinte sino a trovarsi in un livello di passaggio tra l'Eocene e l'Oligocene. Questa constatazione costituirebbe una scoperta di grandissima importanza, perchè finora, per quanto è a mia conoscenza, nessuno ha segnalato questo fatto, che se vero, avrebbe, come è ovvio immaginare, estese conseguenze nella stratigrafia di tutti i terreni eocenici, mentre il valore caratteristico dei nominati fossili verrebbe a perdere completamente il significato stratigrafico avuto fino ad oggi.

(1) Checchia-Rispoli G., *Nuovi dati su di una formazione miocenica dell'Italia meridionale*, in « Boll. Ufficio Geologico d'Italia », vol. LXVIII, 1944.

* * *

Per le difficilissime condizioni della guerra non mi è stato possibile, secondo il mio desiderio, di ritornare sui luoghi per raccogliere nuovi elementi su tutta quella serie. In attesa, ho potuto utilizzare il materiale da tempo raccolto insieme con l'ing. Carlo Migliorini dell'Agip, per fortuna molto copioso. Il che mi ha dato la possibilità di spingere ulteriormente l'analisi di quella brecciola, i di cui risultati qui riporto. Circa lo stato di conservazione dei fossili non posso che ripetere quanto ho prima scritto: cioè che nessuno di essi è integralmente conservato, comprese le Nummuliti, che sono le più abbondanti. Accanto infatti ad esemplari più o meno levigati per effetto dell'usura, se ne trovano altri nettamente spezzati, altri ridotti in frammenti arrotondati, altri vuoti internamente, come se cariati, ed altri infine compenetrati da corpi estranei, specialmente da granelli di silice. Lo stesso si deve dire delle Assiline e delle Heterostegine; le Alveoline sono talora ridotte a ciottolini con due o tre giri di spira. In peggiori condizioni si trovano le Ortofragmine, le poche Lepidocicline, le Operculine, ecc. Gli unici fossili, che nelle sezioni sottili almeno, si presentano integri, appartengono ad una grossa *Rotalia*, che sembra molto vicina a *R. tuberculata*.

Mi rincresce che per il momento a conferma di quanto dico non possa accompagnare questo scritto con le relative illustrazioni fotografiche di parte almeno delle numerosissime sezioni, circa duecento, nuovamente eseguite: il che m'auguro di fare in tempo più propizio.

Come ho potuto ora constatare grande importanza nella composizione della roccia detritica del Ponte di Celle assume la presenza, in misura maggiore di quanto pareva in un primo momento, di numerosi frammentini a spigoli sempre più o meno ottusi di un calcare marnoso compatto fossilifero, nel quale, oltre a piccole globigerine, sono contenute Nummuliti, Alveoline, Ortofragmine. ecc. Detti frammenti nelle sezioni sottili appaiono del tutto identici a quelle contenute nelle sezioni sottili della brecciuola di Serra Crovellaro presso Biccari. Quest'ultima però è stratigraficamente più elevata nella serie cenozoica di quella del Ponte di Celle. Come ho scritto, in questi frammenti di Serra Crovellaro sono state rinvenute anche delle Lepidocicline [1].

Ecco l'elenco delle specie determinate:

Alveolina Baldaccii (rara), *Alv. milium* (comune), *Alv. Schwageri* (comune), *Alv. oblonga* (comune); *Flosculina Pillai* (rarissima); *Chapmanina gassinensis* (rara); *Rotalia* sp. aff. *R. tuberculata* (comunissima); *Nummulites atacicus* (co-

(1) Checchia-Rispoli G., *Osservazioni geologiche nei dintorni di Biccari* in «Memorie della R. Acc. d'Italia», Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., vol. XIII, n. 9, Roma, 1942.

mune), *N. discorbinus* (comunissima), *N. incrassatus* (comune), *N. vascus* (rara), *N. biconicus* (rara), *N. Tchihatcheffi* (rara), *N. baghariensis* (comune), *N. Partschi* (comunissima), *N. Fichteli* (due esemplari); *Operculina complanata* (rara); *Heterostegina* cfr. *depressa* (comune); *Gypsina globulus* (comune); *Orthophragmina Pratti* (comune), *O. Archiaci* (comune), *O. scalaris* (comune), *O. dispansa* (comune); *Orbitoides media* (comune); *Omphalocyclus macropora* (rara); *Lepidocyclina* sp. ind. (piuttosto rare); *Miogypsina irregularis* (un solo esemplare), ecc.

I due esemplari di *Nummulites Fichteli*, le rare *Lepidocycline* e l'unico esemplare di *Miogypsina* sono stati ritrovati negli strati più elevati del fascio, insieme però a tutta la fauna su elencata.

* * *

Nell'apprezzamento dell'età del fascio di strati del Ponte di Celle, bisogna tener presenti, oltre la natura clastica della roccia, lo stato di conservazione dei fossili, l'associazione di specie tipiche del Luteziano con altre oligoceniche ed infine la presenza di elementi clastici fossiliferi. Per tutti questi fatti è legittimata la possibilità di un rimaneggiamento.

Ora potrebbe, tra le altre ipotesi, essere prospettata quella di un rimaneggiamento in posto dei fossili, ridotti nelle attuali condizioni dal movimento del mare lungo il litorale; ma a parte la circostanza impressionante che nessuno di essi si sia salvato allo sfacelo generale, come spiegare la coesistenza nella medesima roccia di forme tipicamente luteziane con altre più giovani? e la presenza inoltre di frammenti di roccia, ben diversa litologicamente dalla roccia cementante, contenenti le stesse forme che si trovano libere nel cemento calcitico?

Potrebbe anche essere avanzata l'ipotesi che tutti i fossili eocenici siano stati rimaneggiati e che solo le poche oligoceniche siano in posto. A questo proposito è bene tener presente che anche lo stato di conservazione di quest'ultime non è migliore di quello delle prime. Nell'accettazione di questa ipotesi, la divergenza non sarebbe eccessiva, in quanto che si tratterebbe di riferire quel fascio di strati ad un oligocene piuttosto elevato, anzichè alla parte inferiore di quel Miocene. Ma per poter venire ad una conclusione in questo senso occorrono ancora molte altre osservazioni rese difficili per causa dello stato di conservazione dei fossili. Ciò che per il momento pare si possa affermare è che per tutti i fatti constatati si debba escludere l'appartenenza di quel fascio di strati ad un livello di passaggio tra l'Eocene e l'Oligocene e che detto fascio si trovi sottostante ad un preteso Eocene superiore.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un automeomorfismo del piano.* — Nota di G. Scorza Dragoni, presentata [1] dal Socio G. Castelnuovo.

In questa breve Nota, mi propongo di estendere alle quasi-traiettorie [2] di un automeomorfismo t del piano (reale, euclideo), che conservi il senso delle rotazioni e non lasci alcun punto invariato, un teorema fondamentale di Brouwer, secondo il quale:

Data una trasformazione topologica t del piano (reale, euclideo), in se tesso [3], *la quale conservi il senso delle rotazioni e sia priva di punti uniti, una curva β e la propria immagine $t(\beta)$ nella t si tagliano, se gli estremi di β sono estremi di un arco α di traiettoria, il quale contenga nel proprio interno un arco di traslazione e formi con β una curva semplice e chiusa* [4].

Il teorema che mi propongo di dimostrare è il seguente:

Nelle ipotesi poste per t, μ sia un quasi-arco di traslazione (di t), β una curva semplice e aperta di estremi A *e* B; *allora, se* A *appartiene all'insieme* $t^{-1}(\mu) + t^{-2}(\mu) + \cdots$ *e* B *all'insieme* $t(\mu) + t^{2}(\mu) + \cdots$ *e se β e μ non hanno punti comuni, le curve β e $t(\beta)$ si tagliano.*

Se μ è un arco di traslazione, questo teorema equivale a quello ricordato di Brouwer – si confronti col successivo n. 9 –; esso fornisce, credo, i mezzi per ultimare una ricerca iniziata nella Memoria citata in [2] – se ne vegga la prefazione [5].

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) G. Scorza Dragoni, *Sugli archi di traslazione di un automeomorfismo piano e sulle loro curve d'accumulazione* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), pp. 1–75], n. 3. La lettura del passo citato è sufficiente per far conoscere la terminologia usata in questa Nota; ciò sia detto una volta per tutte.

(3) In tutto se stesso, non in una sua parte.

(4) L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes* [« Mathematische Annalen », vol. 72 (1912), pp. 37–54], p. 44, teor. 6. Si vegga anche: B. v. Kerékjártó, *The plane translation theorem of* Brouwer *and the last geometric theorem of* Poincaré [« Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae », tomo IV (1928), pp. 86–102], p. 92, teor. II'); G. Scorza Dragoni, *Criteri per l'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [in corso di stampa negli « Annali di Matematica pura ed applicata »], § 6.

(5) Si veda anche: G. Scorza Dragoni, *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [« Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hansischen Universität », vol. 14 (1941), pp. 1–21], p. 21.

1. Ferme le ipotesi del teorema da stabilire, l'arco di traslazione λ sia una ε-approssimazione di μ; vale a dire: fra λ e μ si possa porre una corrispondenza topologica tale, che punti corrispondenti distino fra di loro meno del numero positivo ε. L'esistenza di λ, per ogni ε prefissato, segue appunto dalla definizione stessa di quasi-arco di traslazione. Ci riserbiamo di indicare nel seguito le limitazioni da imporre ad ε, in conseguenza delle quali ε sarà soltanto convenientemente piccolo.

Indichiamo poi con $\sigma(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, t^n(\lambda)$ la traiettoria generata da λ.

L'idea direttiva della dimostrazione consiste nel far vedere che, se ε è abbastanza piccolo, la traiettoria $\sigma(\lambda)$ si può deformare in modo da farla passare per A e B, in guisa da ricondurre il teorema attuale a quello di Brouwer.

2. Uno conveniente dei due estremi di μ ha come immagine nella t l'altro, cfr. loc. cit. nota (2), n. 3; diciamo Q il primo, di guisa che $t(Q)$ sarà il secondo. Analogamente, se P è uno conveniente dei due estremi di λ, questi sono dati da P stesso e $t(P)$, Inoltre, se ε è abbastanza piccolo, la distanza di P e Q è minore di ε, al pari di quella di $t(P)$ e $t(Q)$.

Inoltre, p sia il più grande intero negativo tale che $t^p(\mu)$ contenga A; q il più piccolo intero positivo tale che $t^q(\mu)$ contenga B. E si ponga:

$$\varphi = \sum_{p-1}^{q-1}{}_n\, t^n(\lambda), \quad \psi = \sum_{p+1}^{q+1}{}_n\, t^n(\lambda),$$

di guisa che φ e ψ son curve semplici ed aperte (6).

Poichè $p < 0$ e $q > 0$, l'arco λ appartiene a tutt'e due le curve precedenti.

3. Nel n. 12 della Memoria citata in (2), ho dimostrato che un punto di $t^{-1}(\mu), o\, t^{-2}(\mu), o\, t^{-3}(\mu), \cdots$ il quale non appartenga a μ, non appartiene nemmeno a $t(\mu), t^2(\mu), t^3(\mu), \cdots$, e viceversa.

In particolare A è esterno non soltanto a $t^{p+1}(\mu), \cdots, \mu$ ma anche a $t(\mu), t^2(\mu), \cdots$; analogamente B è non soltanto esterno a $t^{q-1}(\mu), \cdots, \mu$, ma anche a $t^{-1}(\mu), t^{-2}(\mu), \cdots$.

Di qui segue intanto che A e B sono distinti, cioè che β non è degenere. Inoltre, è allora evidente che, previa l'eventuale sostituzione di β con un suo sotto-arco (non degenere), è lecito supporre, volendo, che β non abbia punti comuni non soltanto con μ, ma nemmeno con $t^{p+1}(\mu) + \cdots + t^{q-1}(\mu)$.

(6) Brouwer, loc. cit. (4), pp. 38-39, teor. 1; von Kerékjártó, loc. cit. (4), pp. 90-91, teor. I; Scorza Dragoni, loc. cit. (4), § 5; si vegga anche: E. Sperner, *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [«Abhandlungen aus dem matematischen Seminar der Hamburgischen Universität», vol. 10 (1934), pp. 1–47], § 2, teor. 4.

Denoti 2η un numero positivo minore delle distanze di β da μ; di A da $t^{p+1}(\mu) \dotplus \cdots \dotplus \mu \dotplus \cdots \dotplus t^{q+1}(\mu)$; di B da $t^{p-1}(\mu) \dotplus \cdots \dotplus \mu \dotplus \cdots \dotplus t^{q-1}(\mu)$. E supponiamo che:

I) il numero ε sia minore di η; di guisa che $\beta \cdot \lambda = 0$, in particolare; e che:

II) il numero ε sia tanto piccolo, che le distanze di A da ψ e di B da φ superino η.

4. Come è noto, le immagini di A e di B nelle successive potenze $t, t^{-1}, t^2, t^{-2}, \cdots$ di t non hanno punti d'accumulazione al finito (7). Sicchè, o:

a) *esiste un intero relativo m tale che sia* $B = t^m(A)$, *e quindi* $A = t^{-m}(B)$; oppure:

b) *il punto* A *ha una distanza positiva dall'insieme* $\cdots + t^{-1}(B) + B + t(B) + \cdots$ *e* B *la ha positiva dall'insieme* $\cdots + t^{-1}(A) + A + t(A) + \cdots$; inoltre, sia nel caso *a*) che nel caso *b*), μ contiene un numero finito di punti del tipo $t(A), t^{-1}(A), t^2(A), t^{-2}(A), \cdots$ o del tipo $t(B), t^{-1}(B), t^2(B), t^{-2}(B), \cdots$; ne segue che:

sia nel caso a) *che nel caso b*), *esistono due interi relativi h e k, tali da aversi*:

$$h \leqq p \quad ; \quad A \cdot t^h(\mu) = A \quad ; \quad A \cdot t^\nu(\mu) = 0, \quad se \quad \nu < h;$$

$$k \geqq q \quad ; \quad B \cdot t^k(\mu) = B \quad ; \quad B \cdot t^\nu(\mu) = 0, \quad se \quad \nu > k.$$

Scelto il numero positivo 2η, di cui nel n. prec., minore anche delle distanze di A da $t^{h-1}(\mu)$ e di B da $t^{k+1}(\mu)$, noi supporremo:

III) il numero ε tanto piccolo, che A e B abbiano una distanza maggiore di η da $t^{h-1}(\lambda)$ e $t^{k+1}(\lambda)$, rispettivamente.

5. Ci sarà utile l'aver dimostrato che:

nel caso a) *riesce* $m \geqq q - h$.

Infatti, poichè A appartiene a $t^h(\mu)$, $t^\nu(A)$ appartiene a $t^{h+\nu}(\mu)$, per ogni intero relativo ν. Ora, se $h + \nu \leqq 0$, $t^{h+\nu}(\mu)$ non contiene B, per quanto è detto all'inizio del n. 3; e la conclusione è valida anche se $h + \nu < q$, per il modo con cui si è scelto il numero q. Indi se $B = t^m(A)$, deve essere appunto $h + m \geqq q$; e non si può dire che debba riuscire proprio $m = q - h$, perchè B potrebbe essere interno, per esempio, a $t^{q+1}(\mu)$ e $t^q(\mu)$ e coincidere con un $t^\nu(A)$ in quanto punto di $t^{q+1}(\mu)$ e non in quanto punto di $t^q(\mu)$.

6. Nel caso *a*), possiamo determinare un cerchio U col centro in A ed un cerchio V col centro in B, in modo che:

1) *le curve* $t^{h-1}(\lambda)$ *e* ψ *siano esterne ad* U; *le curve* $t^{k+1}(\lambda)$ *e* φ *siano esterne a* V

(7) BROUWER, loc. cit. (4), p. 45, teor. 8; SPERNER, loc. cit. (6), § 2, teor. 9.

– e ciò è lecito in virtù della II) e della III) –; e che:

2) β *non abbia punti comuni con* $t^{\nu}(U)$, *se* $h \leq -\nu \leq p$ *e se* $t^{-\nu}(\lambda)\cdot U \neq 0$; β *non abbia punti comuni con* $t^{\nu}(V)$, *se* $q \leq -\nu \leq k$ *e se* $t^{-\nu}(\lambda)\cdot V \neq 0$

– e ciò possiamo farlo, perchè allora è rispettivamente $\lambda\cdot t^{\nu}(U) \neq 0$, $\lambda\cdot t^{\nu}(V) \neq 0$, mentre β e λ hanno per la I) una distanza maggiore di η.

Nel caso *b*) possiamo aggiungere alle condizioni 1) e 2) anche la:

3) *il cerchio* V *non abbia punti comuni con* $U, t(U), \cdots, t^{k-h+1}(U)$; *di guisa che il cerchio* U *non avrà punti comuni con* $V, t^{-1}(V), \cdots, t^{h-k-1}(V)$.

In ogni caso i cerchi U e V si intendono pensati come contenenti le rispettive frontiere u e v. Inoltre, poichè $A \neq t(A)$ e $B \neq t(B)$, in ogni caso è lecito supporre che:

4) *sia* $U\cdot t(U) = 0$, $V\cdot t(V) = 0$.

Se poi si tien presente che i centri di U e V appartengono rispettivamente a $t^{p}(\mu)$ e $t^{q}(\mu)$, si riconosce pure lecito supporre:

IV) il numero ε tanto piccolo, che $t^{p}(\lambda)$ e $t^{q}(\lambda)$ abbiamo rispettivamente dei punti interni a U e V.

7. Ci proponiamo di definire in modo opportuno un arco $a[b]$, che, se non degenera nel punto A [B], è una curva semplice ed aperta, contenuta in U [V], passante per A [B], avente gli estremi su $\sigma(\lambda)$.

Se $\sigma(\lambda)$ passa per A [B], poniamo semplicemente $a = A\ [b = B]$.

Nel caso contrario, dalla 1) e dalla IV) segue che la curva semplice ed aperta $\pi = t^{h}(\lambda) + \cdots + t^{p}(\lambda)$ [$\rho = t^{q}(\lambda) + \cdots + t^{k}(\lambda)$] e la frontiera u di U [v di V] hanno almeno due punti (distinti) comuni. Di qui e da teoremi noti[8], è facile dedurre che l'insieme I [J] dei punti del piano che si possono congiungere con A [B] senza incontrare $\pi + u$ [$\rho + v$] ha per frontiera una curva i [j] di JORDAN. Inoltre, è evidente che esistono punti di i [j] interni ad U [a V].

Sia C [D] uno di questi punti; in quanto punto di $\sigma(\lambda)$, esso appartiene all'immagine di λ in una conveniente potenza di t. Anzi, previo un eventuale piccolo spostamento, è lecito supporre che C [D] sia *interno* all'immagine di λ in una conveniente potenza di t. In tal caso, quest'ultima è perfettamente individuata.

Suppongasi C [D] interno a $t^{\iota}(\lambda)$ [$t^{\varkappa}(\lambda)$]; riesce allora $h \leq \iota \leq p$ [$q \leq \varkappa \leq k$].

Il massimo arco i_0 di i [j_0 di j], contenente C [D] ed il cui interno sia interno ad U [a V], contiene C [D] nell'interno.

Premesso questo, si indichi con $a[b]$ un arco che passi per A [B], i cui estremi F e G [H e K] appartengano a i_0 [j_0], che a meno degli estremi appartenga a I [J][9] e tale che:

(8) B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*. [Springen, Berlino (1923)], vol. I°, p. 69, teor. IX; p. 87, teor. I.

i punti F e G [H e K] siano interni a $t^{\iota}(\lambda)$ $[t^{\varkappa}(\lambda)]$;

il punto F [H] risulti compreso, su $t^{\iota}(\lambda)$ $[t^{\varkappa}(\lambda)]$, fra $t^{\iota}(P)$ e G $[t^{\varkappa}(P)$ e K];

il punto C [D] sia interno all'arco c $[d]$ di $t^{\iota}(\lambda)$ $[t^{\varkappa}(\lambda)]$ individuato su $\sigma(\lambda)$ dai punti F e G [H e K].

Se $\sigma(\lambda)$ passa per A [B], si ponga $F = G = A$, $c = a = A$ $[H = K = B$, $d = b = B]$.

8. Si indichi con r $[s]$ l'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi $t^{\iota}(P)$ ed F $[t^{\varkappa}(P)$ ed H], con w $[z]$ l'arco di $\sigma(\lambda)$ di estremi G e $t^{\iota+1}(P)$ [K e $t^{\varkappa+1}(P)$]. E si ponga

$$\gamma = r \dotplus a \dotplus w = \{ t^{\iota}(\lambda) - c \} + a$$
$$[\delta = s \dotplus b \dotplus z = \{ t^{\varkappa}(\lambda) - d \} + b];$$

di guisa che γ $[\delta]$ si ottiene da $t^{\iota}(\lambda)$ $[t^{\varkappa}(\lambda)]$, rimpiazzando l'arco c $[d]$ con l'arco a $[b]$.

Dico che γ $[\delta]$ è un arco di traslazione.

Infatti (limitandoci a considerare esplicitamente soltanto il caso di γ), la cosa è evidente, se $\sigma(\lambda)$ passa per A. Nel caso contrario si riconosce subito che γ ha come estremi il punto $t^{\iota}(P)$ e l'immagine, $t^{\iota+1}(P)$, di questo nella t. Epperò, basta dimostrare che γ e $t(\gamma)$ non hanno altri punti comuni all'infuori di $t^{\iota+1}(P)$.

A questo scopo, si noti che le $r \cdot t(r) = w \cdot t(w) = r \cdot t(w) = 0$, $w \cdot t(r) = t^{\iota+1}(P)$ sono evidenti, perchè r e w sono contenuti nell'arco di traslazione $t^{\iota}(\lambda)$. Sicchè bisogna dimostrare soltanto le $a \cdot t(r) = a \cdot t(w) = r \cdot t(a) = w \cdot t(a) = 0$ e la $a \cdot t(a) = 0$. Quanto a quest'ultima, basta osservare che a appartiene ad U e ricordare la 4) del n. 6. Quanto alle prime uguaglianze, si rammenti che a è contenuto in I, a meno degli estremi, e che $t^{b-1}(\lambda)$ e $t^{p+1}(\lambda)$ sono esterni ad U per la 1) del n. 6; sicchè a ha soltanto gli estremi F e G sulla curva semplice e aperta $t^{b-1}(\lambda) \dotplus \pi \dotplus \dotplus t^{p+1}(\lambda) = t^{b-1}(\lambda) \dotplus t^{b}(\lambda) \dotplus \cdots \dotplus t^{p}(\lambda) \dotplus t^{p+1}(\lambda)$ ed anzi questi estremi sono interni a $t^{\iota}(\lambda)$, con $b \leq \iota \leq p$. Di qui si trae facilmente che $a \cdot t(r)$ ed $a \cdot t(w)$ sono contenuti nell'insieme vuoto $a \cdot t^{\iota+1}(\lambda)$; che $a \cdot t^{-1}(r)$ ed $a \cdot t^{-1}(w)$ appartengono all'insieme vuoto $a \cdot t^{\iota-1}(\lambda)$; dunque, ecc.

Indichiamo con $\sigma(\gamma)$ $[\sigma(\delta)]$ la traiettoria generata da γ $[\delta]$; essa passa per il punto A [B], sia se a $[b]$ è degenere, sia se non lo è.

9. Supponiamo ora che si verifichi il caso a) del n. 4, cioè che sia $B = t^{m}(A)$, con $m \geqq q - h$ (v. n. 5). Allora $\sigma(\gamma)$, passando per A, passa anche per B.

(9) Ciò può farsi evidentemente se i è una circonferenza; ed a questo caso ci si può sempre ricondurre; cfr. loc. cit. nota (8), pp. 69-72.

Consideriamo l'arco χ di $\sigma(\gamma)$ di estremi A e B. Poichè $m \geqq q - h > > -h, h \leqq \iota < 0$, l'*arco*

$$\lambda_0 = t^{-\iota}(\gamma) = [\lambda - t^{-\iota}(c)] + t^{-\iota}(a)$$

è interno a χ.

Dimostriamo ora che *l'intersezione* $\beta \cdot \lambda_0$ *è vuota*. A ciò, in virtù della $\beta \cdot \lambda = 0$, vera per costruzione [cfr. la I) del n. 3], basta far vedere che è $\beta \cdot t^{-\iota}(a) = 0$. Ora quest'ultima relazione è evidente. Infatti $t^{\iota}(\lambda)$ contiene il punto C di U; inoltre è $h \leqq \iota \leqq p$; quindi, per la 2) del n. 6, è $\beta \cdot t^{-\iota}(U) = 0$ ed *a fortiori* $\beta \cdot t^{-\iota}(a) = 0$, dato che *a* appartiene ad U.

Dopo di ciò spostiamoci su β a partire da A fino al primo punto B_1 di incontro con la curva $t(\lambda_0) + \cdots + t^k(\lambda_0)$. Dopo di che retrocediamo su β, a partire da B_1 fino al primo punto A_1 di incontro con $t^{-1}(\lambda_0) + \cdots + t^h(\lambda_0)$.

I sottoarchi β_1 di β ed α_1 di $\sigma(\gamma)$ di estremi A_1 e B_1 hanno comuni soltanto questi estremi. Ma α_1 contiene λ_0 nell'interno; quindi β_1 e $t(\beta_1)$ si tagliano, pel teorema di Brouwer ricordato nella prefazione. Lo stesso vale a *fortiori* per β e $t(\beta)$.

Il teorema è dimostrato nell'alternativa *a*).

10. Nel caso *b*) si procede nel modo seguente. Per passare da $\sigma(\lambda)$ a $\sigma(\gamma)$ si rimpiazzano $c, t(c), t^{-1}(c), \cdots$ rispettivamente con $a, t(a), t^{-1}(a), \ldots$

Dalla 3) del n. 6 e dalle $h \leqq \iota \leqq p, q \leqq \varkappa \leqq k$ (anzi dalle $h \leqq \iota < \varkappa \leqq k$) segue che $t^{\varkappa-\iota}(c)$ è un sottoarco di $t^{\varkappa}(\lambda)$ che non ha punti comuni con d; epperò $\sigma(\gamma)$ contiene d e quindi $t^{-1}(d), t(d), \ldots$

Ora, è facile dimostrare che se in $t^{\varkappa-\iota}(\gamma)$ si sostituisce d con b, si ottiene ancora un arco di traslazione ω. Infatti, un punto comune ad ω^{-1} e ω, distinto da $t^k(P)$, può provenire soltanto da un punto comune a b e $t^{\varkappa-\iota-1}(a)$, oppure a $t^{-1}(b)$ e $t^{\varkappa-\iota}(a)$; e ciò perchè $\sigma(\gamma)$ e $\sigma(\delta)$ sono traiettorie. Ma punti siffatti non ne esistono, per la 3) del n. 6 e perchè b appartiene a V e $t^{\varkappa-\iota-1}(a)$ a $t^{\varkappa-\iota-1}(U)$, con $0 < \varkappa - \iota - 1 < k - h$, mentre $t^{-1}(b)$ appartiene a $t^{-1}(V)$ e $t^{\varkappa-\iota}(a)$ a $t^{\varkappa-\iota}(U)$, con $0 < \varkappa - \iota \leqq k - h$; quindi, ecc.

La traiettoria $\sigma(\omega)$ generata da ω contiene A e B. Sia adesso χ^* l'arco di $\sigma(\omega)$ di estremi A e B; χ^* *contiene senz'altro*

$$\lambda^* = t^{-\varkappa}(\omega) = [\lambda - \{t^{-\iota}(c) + t^{-\varkappa}(d)\}] + t^{-\iota}(a) + t^{-\varkappa}(b)$$

nell'interno.

Ma *è anche vuota l'intersezione* $\beta \cdot \lambda^*$. Infatti, le $\beta \cdot \lambda = 0$ e $\beta \cdot t^{-\iota}(a) = 0$ sono state riconosciute esatte nel n. 9; ed il ragionamento tenuto per dimostrare quest'ultima vale anche per la $\beta \cdot t^{-\varkappa}(b) = 0$ [ed invero, V contiene il punto D di $t^{\varkappa}(\lambda)$; ma $q \leqq \varkappa \leqq k$, indi, per la 2) del n. 6, riesce $\beta \cdot t^{-\varkappa}(V) = 0$; d'altra parte b appartiene a V; quindi, ecc.].

Dopo di che basta riprendere le considerazioni svolte alla fine del n. 9, per riconoscere che il nostro teorema è esatto anche nella seconda alternativa.

Matematica (Geometria). — *Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche*. Nota II di A. FRANCHETTA, presentata [1] dal Socio F. ENRIQUES.

In questa Nota, riprendo l'analisi dei punti doppi iniziata in una Nota precedente dello stesso titolo, a cui mi richiamo per l'impostazione del problema e per i simboli adoperati.

1. Incominciamo col dimostrare la regola enunciata al n. 3 della Nota precedente, la quale permette di determinare la molteplicità $R_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ secondo cui la curva $o_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ trasformata del punto $O_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ compare nella curva $D = 0$ della superficie trasformata.

Essa afferma che

considerando il ramo di ordine minimo passante per i punti $O, O_{i_1}, O_{i_1 i_2}, \dots, O_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ *e dette* $s, s_{i_1}, \dots, s_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ *le molteplicità che esso presenta in questi punti si ha*

$$R_{i_1 \dots i_\varepsilon} = s(r-2) + s_{i_1}(r_{i_1} - 2) + \dots + s_{i_1 \dots i_\varepsilon}(r_{i_1 \dots i_\varepsilon} - 2).$$

Essa si dimostra facilmente per induzione. Supponiamo che la regola sia verificata per le curve $o_{i_1}, \dots, o_{i_2 \dots i_{\varepsilon-1}}$ e che siano già eseguite le trasformazioni dei punti $O_{i_1}, \dots, O_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}}$ nelle curve suddette, e si eseguisca la trasformazione del punto $O_{i_1 \dots i_\varepsilon}$. Bisogna distinguere il caso in cui $O_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ sia libero da quello in cui sia satellite del punto $O_{i_1 \dots i_{\varepsilon-2}}$. Nel primo caso il punto trasformato di $O_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ con le trasformazioni già eseguite, e che continueremo a chiamare allo stesso modo, apparterrà solo alla curva $o_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}}$; quindi la molteplicità di $o_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ sarà

$$R_{i_1 \dots i_\varepsilon} = R_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}} + r_{i_1 \dots i_\varepsilon} - 2.$$

Ora, detti γ' il ramo di ordine minimo passante per $O, O_{i_1}, \dots, O_{i_1 \dots i_\varepsilon}$ ed $s', s'_{i_1}, \dots, s'_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}}$ le molteplicità che esso presenta nei punti $O, O_{i_1}, \dots, O_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}}$ si è ammesso che

$$R_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}} = s'(r-2) + s'_{i_1}(r_{i_1} - 2) + \dots + s'_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}}(r_{i_1 \dots i_{\varepsilon-1}} - 2)$$

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

quindi

$$R_{i_1 \dots i_{e-1}} = s'(r-2) +$$

$$+ s'_{i_1}(r_{i_1}-2) + \cdots + s_{i_1 \dots i_{e-1}}(r_{i_1 \dots i_{e-1}}-2) + (r_{i_1 \dots i_e} - 2).$$

Ma, se si considera il ramo γ di ordine minimo passante per $O, O_{i_1}, \cdots, O_{i_1 \dots i_e}$, le molteplicità che esso presenta in questi punti sono precisamente $s', s'_{i_1}, \cdots, s'_{i_{e-1}}, 1$, quindi resta dimostrata la regola. Se invece $O_{i_1 \dots i_e}$ è satellite di $O_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}$, il suo trasformato viene ad appartenere ad $o_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}$ e ad $o_{i_1 \dots i_{e-1}}$. Quindi trasformando anche $O_{i_1 \dots i_e}$, la curva corrispondente viene ad avere la molteplicità

$$R_{i_1 \dots i_e} = R_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}} + R_{i_1 \dots i_{e-1}} - 2.$$

Detto γ' il ramo di ordine minimo per $O, O_{i_1}, \cdots, O_{i_1 \dots i_{e-1}}$ e γ'' quello per $O, O_{i_1}, \cdots, O_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}$, si ha, con notazioni analoghe alle precedenti,

$$R_{i_1 \dots i_{e-1}} = s'(r-2) + s'_{i_1}(r_{i_1}-2) + \cdots + s'_{i_1 \dots i_{e-1}}(r_{i_1 \dots i_{e-1}}-2)$$

ed

$$R_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}} = s''(r-2) + s''_{i_1}(r_{i_1} \quad 2) + \cdots + s''_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}(r_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}-2)$$

quindi

$$R_{i_1 \dots i_e} = (s' + s'')(r-2) +$$

$$+ (s'_{i_1} + s'_{i_2})(r_{i_1}-2) + \cdots + (s'_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}} + s''_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}})(r_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}-2) +$$

$$+ s'_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon+1}}(r_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon+1}}-2) + \cdots + s'_{i_1 \dots i_{e-1}}(r_{i_1 \dots i_{e-1}}-2) + (r_{i_1 \dots i_e}-2).$$

Ma, considerato il ramo γ di ordine minimo per $O, O_1, \cdots, O_{i_1 \dots i_e}$, le molteplicità da esso presentate in questi punti sono precisamente

$$s' + s'', s'_{i_1} + s''_{i_1}, \cdots, s'_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}} + s''_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}, s'_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon+1}}, 1.$$

Quindi resta dimostrata anche in questo caso la regola.

Da essa risulta, come si è detto nella Nota I, l'opportunità di modificare lo schema della singolarità presentata nel punto O dalla curva $D = 0$, in modo da rispecchiare meglio le singolarità della superficie.

Si è detto appunto che, nello schema della singolarità di $D = 0$

se il punto $O_{i_1 \dots i_e}$ *è prossimo ad* $O_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}$, *la sua molteplicità va aumentata di uno se uno dei due numeri* $R_{i_1 \dots i_{e-\varepsilon}}, R_{i_1 \dots i_{e-1}}$, *è dispari, e di due se sono entrambi dispari. Se* $O_{i_1 \dots i_e}$ *è punto libero, la molteplicità va aumentata di uno se* $R_{i_1 \dots i_{e-1}}$ *è dispari.*

Vogliamo chiarire con qualche esempio

a) La curva $D_n = 0$ possieda una successione di punti tripli su un ramo lineare. Indichiamo questi punti con $O, O_1, \cdots, O_\varepsilon$. I coefficienti, che sopra abbiamo indicato con $s, s_1, \cdots, s_\varepsilon$, sono tutti uguali ad uno e le R hanno i valori $R = 3, R_1 = 6, R_2 = 9 \cdots$. Le singolarità valide ai fini dello studio del punto doppio della superficie sono $O^3, O_1^4, O_2^3, O_3^4, \cdots$. Quindi la singolarità, come è ben noto, è costituita da un punto doppio uniplanare seguito da un tac-nodo, a cui è successivo un'altro punto doppio uniplanare seguito da un tac-nodo, e così via. Una composizione analoga si avrà evidentemente ogni qualvolta si abbia una successione di punti di molteplicità dispari su un ramo lineare.

b) Si consideri la successione $O^3 O_1^2$. Allora si avrà $R = 3, R_1 = 5$. Bisogna introdurre anche il punto O_1, prossimo ad O e consecutivo ad O_1 ed i punti O_{12} ed O_{13} sui rami lineari che si dipartono da O_1. Le relative molteplicità saranno $O^3, O_1^3, O_{11}^2, O_{12}^2, O_{13}^2$. La singolarità è quindi costituita da un punto uniplanare, cui segue un altro punto uniplanare, con tre punti doppi infinitamente vicini, due sui rami della $D_n = 0$ che si dipartono da O, ed uno prossimo ad O. Una singolarità analoga si avrà ogni volta che si succedono, su un ramo lineare, un punto di molteplicità dispari ed un punto di molteplicità pari. Si osservi ancora che la serie dei punti $O^3, O_1^2, O_2^2, \cdots, O_\varepsilon^2$ da luogo ad l punti uniplanari di cui l'ultimo ha tre punti doppi consecutivi, ed i precedenti ciascuno un punto doppio prossimo.

c) Si consideri la serie $(O^3 O_1^2 [O_2^1 (O_3^1)])$. Si avrà $R = 3, R_1 = 5, R_2 = 9, R_3 = 13$. Quindi lo schema va completato col punto consecutivo ad O_3 e prossimo ad O_2, che chiameremo O_3, e col punto consecutivo ad O_3 sul ramo della $D_n = 0$ che chiameremo O_{32}. Le singolarità modificate saranno $O^3, O_1^3, O_2^3, O_3^3, O_{31}^2, O_{32}^2$; i punti O, O_1, O_2, O_3 sono uniplanari e all'ultimo di essi seguono due punti doppi, uno sul ramo libero della $D_n = 0$, l'altro prossimo ad O_2.

2. Si è visto come la molteplicità con cui le curve $\omega_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$ compaiono nella curva Ω sono uguali a quelle con cui le curve corrispondenti $o_{i_1 \ldots i_\varepsilon}$ compaiono nella curva eccezionale riducibile corrispondente, nel piano $z = 0$, attraverso le trasformazioni eseguite, al gruppo dei punti O.

Andiamo ora a determinare gli altri caratteri delle curve ω. Supponiamo di avere sciolto, secondo la via indicata, la singolarità della superficie. Fra la superficie trasformata ed il piano $z = 0$ intercorrerà una corrispondenza $(1, 2)$; i punti eccezionali introdotti nella trasformazione cremoniana subordinata sul piano $z = 0$ dalla trasformazione cremoniana dello spazio, sono anche eccezionali nella corrispondenza fra il piano e la superficie. Per modo che, volendo calcolare, valendosi di questa corrispondenza, il grado delle curve (in particolare delle ω) sulla superficie, a partire dal grado delle curve

del piano, questo grado va valutato rispetto al gruppo dei punti eccezionali della corrispondenza, e quindi rispetto al gruppo dei punti eccezionali nella trasformazione del piano. Ora il grado delle $o_{i_1 \dots i_e}$ rispetto al gruppo dei punti suddetti è dato dal seguente teorema:

dato il punto $O_{i_1 \dots i_e}$, supponiamo che da esso si dipartano varie successioni di punti e siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{e_1}$ i numeri dei punti prossimi, in ciascuna successione, al punto dato. Il grado di $o_{i_1 \dots i_e}$ vale $-(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{e_1})$ [1].

Quindi, per calcolare il grado delle curve, basta tener conto della corrispondenza (1, 2) fra il piano e la superficie. Precisamente se ω è curva semplice, detto $n_{i_1 \dots i_e}$ il grado della $o_{i_1 \dots i_e}$, il grado $\nu_{i_1 \dots i_e}$ della $\omega_{i_1 \dots i_e}$ sarà semplicemente

$$\nu_{i_1 \dots i_e} = 2\, n_{i_1 \dots i_e}.$$

e la stessa formula dà il grado complessivo delle due curve $\omega'_{i_1 \dots i_e}$, $\omega''_{i_1 \dots i_e}$ nel caso che la $\omega_{i_1 \dots i_e}$ sia riducibile. Dopo di che, tenuto conto del numero dei punti comuni alle due componenti, ed osservando che i gradi delle due curve sono uguali, si ha il grado di ciascuna. Se invece $\omega_{i_1 \dots i_e}$ è costituita da una curva contata due volte, ossia è curva di coincidenza per la corrispondenza (1, 2) fra il piano e la superficie, si ha, indicando con $\nu_{i_1 \dots i_e}$ il grado della curva semplice,

$$\nu_{i_1 \dots i_e} = \frac{n_{i_1 \dots i_e}}{2}.$$

Quanto al genere delle $\omega_{i_1 \dots i_e}$, si è già detto che si calcola contando le diramazioni effettive su ciascuna delle $o_{i_1 \dots i_e}$, mettendole in rapporto col gruppo delle tangenti nel corrispondente $O_{i_1 \dots i_e}$. Si può osservare che, per la $\omega_{i_1 \dots i_e}$ si può definire un genere effettivo, che è quello che si calcola nel modo detto, ed un genere virtuale, caratteristico per ogni tipo di singolarità, che è quello che si ottiene considerando le tangenti in $O_{i_1 \dots i_e}$ tutte distinte e quindi tutte di diramazione. La differenza fra il genere virtuale e quello effettivo può essere provocata dalla presenza di altri punti doppi della superficie successivi al punto considerato, o anche dalla presenza di uno o più punti doppi della curva $\omega_{i_1 \dots i_e}$, che sono semplici per la superficie. In questo caso si può dire che il punto $O_{i_1 \dots i_e}$ possiede, infinitamente vicino, una retta infinitesima prossima al punto stesso.

Ci si può chiedere se qualcuna delle $\omega_{i_1 \dots i_e}$ può essere una curva eccezionale, e quindi si possa ridurre ad un punto semplice della superficie, semplificando così il sistema delle curve ω. Perchè questo accada, la curva ω dev'essere di genere zero e di grado -1, e quindi si esclude che ciò possa

(1) Barber e Zariski, «American Journal of Math.», 1935.

avvenire in corrispondenza ad una curva o di molteplicità pari. Se la o è dispari, la ω è effettivamente razionale, e, perchè il grado sia -1, occorre che quello di o sia -2; ciò vuol dire che nello schema delle singolarità di $D_n = 0$ il punto corrispondente ad ω dev'essere seguito da un punto di uguale molteplicità, ed il punto precedente deve dar luogo ad una curva o di molteplicità pari.

Quanto alla connessione delle curve ω ottenute, essa si ottiene ricordando le osservazioni del n. 2 della Nota I e la regola che dà le connessioni delle o [1]:

la curva $o_{i_1 \ldots i_e}$ corrispondente al punto $O_{i_1 \ldots i_e}$ è connessa semplicemente alle curve corrispondenti agli ultimi punti prossimi in ciascuna delle serie dei punti che si dipartono da $O_{i_1 \ldots i_e}$.

Possiamo anche determinare quale sia la serie caratteristica virtuale su ciascuna delle ω; essa, naturalmente, ha interesse per le curve di genere maggiore di zero. A tal uopo, consideriamo un sistema $|C|$ che abbia la curva Ω come fondamentale. Staccando la Ω da $|C|$, le curve di $|C - \Omega|$ segano la prima curva ω in coppie di punti, variabili in una g_2^1 se la ω ha genere maggiore di zero. Questa, aumentata dei punti d'intersezione con le altre componenti di Ω, e cambiata di segno, è la serie caratteristica virtuale della ω. Per le altre curve ω, differenti dalla prima, la serie caratteristica virtuale cambiata di segno si determina osservando che, detta ω la curva che consideriamo, Ω l'intera curva, ed Ω^* la curva Ω privata affatto della componente ω, avendosi

$$(C - \Omega)\,\omega = 0 \quad , \quad C\omega = 0$$

si ha $\Omega\omega = 0$ ossia $-(\Omega^* + h\omega)\,\omega = 0$, indicando con h la molteplicità di ω in Ω. Quindi si vede che la serie caratteristica virtuale, cambiata di segno e moltiplicata per h, è individuata dal gruppo delle intersezioni della ω con le altre componenti di Ω.

3. Vogliamo ora portare alcuni esempi per illustrare le cose dette e prospettare qualche altra questione che non è stata trattata nel presente lavoro.

a) la curva $D_n = 0$ abbia solo un punto quadruplo in O con tangenti distinte. Il punto è un tacnodo per la superficie, e ad essa corrisponde una curva ω di grado -2 e genere 1. Viceversa, si può affermare che una curva ω fondamentale per un sistema $|C$, di grado -2 e genere 1 dia luogo, costruendo l'immagine proiettiva del sistema, ad un tacnodo? Stacchiamo la ω dal sistema $|C|$; le curve residue incontreranno la ω in due punti. Se questi punti sono variabili, il punto singolare corrispondente

(1) Cfr. Barber e Zariski, loc. cit.

è un tacnodo; se invece questi punti fossero fissi, il grado effettivo del sistema sarebbe di 4 inferiore a quello del sistema dato, e quindi il punto sarebbe quadruplo. Non si può quindi rispondere completamente alla domanda posta.

b) consideriamo il caso in cui la $D_n = 0$ abbia nel punto O una singolarità del tipo $O^3 O_1^3$; si ha allora, come è ben noto, la singolarità punto doppio–tacnodo [1] di Noether. Modifichiamo la singolarità nel modo detto ed otteniamo infatti $O^3 O_1^4$; la curva o ha il grado -2 e quindi la curva ω, che, contata due volte, corrisponde all'intorno del primo punto, ha il grado -1; la o_1 ha il grado -2 e quindi ω_1 il grado -2. Ma la prima curva è eccezionale, e quindi riducendola all'intorno di un punto, si ottiene, come schema semplificato della singolarità, una curva ellittica di grado -1 [2].

E ciò spiega in modo evidente perchè il sistema canonico presenti in corrispondenza ad una singolarità di Noether un punto base. Infatti, il sistema canonico deve incontrare la curva in $2\pi - 2 - \nu = 1$ punto, che dev'essere necessariamente fisso perchè la curva è ellittica. Se la superficie non presenta curve eccezionali per il punto, quel punto è base per il sistema canonico.

Considerazioni analoghe valgono quando la $D_n = 0$ presenti un punto $O^5 O_1^5$; la curva corrispondente è in questo caso una curva di genere 2 e di grado -1; ecc.

In questi casi si può invertire il risultato nel senso che, ad esempio, una curva ellittica di grado -1 che sia fondamentale per un sistema $|C|$ dà luogo ad una singolarità di Noether, quando si faccia l'immagine proiettiva del sistema $|C|$. Infatti, staccando la ω, le curve di $|C - \omega|$ hanno con ω un punto in comune, il quale dev'essere necessariamente fisso. Il grado effettivo diminuisce quindi di 2 e il genere di 1: la curva dà luogo ad un punto doppio. Per esaminare i punti vicini, riflettiamo che lo staccamento di ω corrisponde ad una proiezione fatta dal punto sopra uno spazio di dimensione minore; sulla superficie proiezione i punti vicini ad O sono diventati punti propri. E la singolarità non muta se si trasforma la superficie col sistema di tutte le quadriche, ciò che corrisponde a considerare il sistema doppio di $|C - \omega|$ [3]. Staccando da questo sistema di nuovo la ω, che, per la presenza del punto base è divenuta di grado -2, il grado del sistema si abbassa di 2 e il genere di 2, e quindi si ha un tacnodo.

(1) Cfr. F. Enriques e L. Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche.*

(2) Cfr. D. Pedoe, *On the canonical System of certain algebraic surfaces.* «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 33.

(3) Ciò è fatto per evitare una complicazione proiettiva messa in luce da S. Faedo, *Sulle superficie razionali a sezioni iperpiane canoniche....* «Rend. Acc. dei Lincei», 1938.

Qui non si può presentare il dubbio affacciato nel caso precedente, poichè il punto che è successivo al primo punto doppio, non può essere quadruplo.

Considerazioni analoghe si possono fare per le singolarità $O^5\,O_1^5$, $O^7\,O_1^7$ ecc.

c) consideriamo la singolarità $O^3\,O_1^3\,O_2^3\,O_3^3$; essa va modificata al modo seguente: $O^3\,O_1^4\,O_2^3\,O_3^4$; e dà luogo alla successione punto doppio–tacnodo – punto doppio–tacnodo. Le curve o, o_1, o_2, o_3 hanno rispettivamente i gradi -2, -2, -2, -1; quindi ω ed ω_2 sono eccezionali; ω_1 è razionale di grado -4; ω_3 è ellittica di grado -2. Riducendo le due curve eccezionali a punti, si ottengono due sole curve che indicheremo con ω_1 ed ω_2, connesse semplicemente in un punto, la prima razionale di grado -2; la seconda ellittica di grado -1.

Anche qui il risultato si può invertire. Sia $|C|$ un sistema avente come fondamentali due curve ω_1 ed ω_2 connesse semplicemente in un punto A, aventi le caratteristiche anzidette. Dobbiamo supporre di più che la serie caratteristica, cambiata di segno, della ω_2 sia costituita dal punto A. Staccando la curva, ω_2 resta fondamentale e la ω_1 viene segata in un punto dalle curve residue. Questo punto dev'essere fisso. Infatti se fosse variabile, il genere delle curve del sistema si abbasserebbe di 1 e il grado anche di 1, ciò che è impossibile. Detto B questo punto, il punto O corrispondente alla curva fondamentale è doppio uniplanare, e i punti del suo intorno del primo ordine corrispondono ai punti dell'intorno di B. Staccando di nuovo la ω_1 si stacca anche la ω_2 che rimane fondamentale, mentre la ω_1 è incontrata dalle curve del sistema residuo in due punti. Essi variano in una g_2^1. Infatti se variassero in una g_2^2 ogni punto della curva dovrebbe appartenere ad ∞^1 gruppi della serie stessa. Ora, imponendo alle curve di passare per A, si stacca di nuovo la ω_2 e, siccome la serie caratteristica della curva è costituita da A, la curva residua deve passare ancora per A. Quindi il punto A appartiene all'unico gruppo costituito da A contato due volte. La curva ω_1, benchè razionale, rappresenta un tacnodo; poi l'analisi procede come nel caso precedente.

Considerazioni analoghe valgono nel caso di sei punti tripli su un ramo lineare, ecc.; e, più in generale, per una successione di punti di molteplicità dispari.

Matematica (Geometria). — *Geometria affine di alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali studiati da L. Bianchi.* Nota di A. Maxia, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

1. In una ricerca sui sistemi di equazioni ai differenziali totali, L. Bianchi [2] si è occupato del sistema di equazioni a derivate parziali

$$(I)\qquad \begin{cases} \partial_{rs}\,z = \Gamma^t_{rs}\,\partial_t\,z + b_{rs}\,z\,. \\ (\Gamma^t_{rs} = \Gamma^t_{sr}\,,\ b_{rs} = b_{sr}) \end{cases} \qquad (r\,,s = 1\,,\cdots,n)\ [3]$$

nella funzione incognita z e nelle variabili indipendenti x^r e del sistema ad esso coniugato

$$(II)\qquad \partial_{rs}\,\mu = \gamma^t_{rs}\,\partial_t\,\mu + b_{rs}\,\mu$$

essendo

$$\gamma^t_{rs} = b^{pt}\,(\partial_r\,b_{ps} - b_{qs}\,\Gamma^q_{rp})\ [4].$$

Per tali sistemi egli dimostra i fatti seguenti:

a) Se (I) è illimitatamente integrabile, se è cioè

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \partial_{[r}\,\Gamma^h_{s]t} + \Gamma^h_{k[r}\,\Gamma^k_{s]t} = b_{t[r}\,\delta^h_{s]} \\ \partial_{[r}\,b_{s]t} = \Gamma^h_{t[r}\,b_{s]h}\ [5] \end{cases}$$

tale è anche il sistema (II) e inversamente;

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) L. Bianchi, *Sui sistemi di equazioni lineari ai differenziali totali.* « Rend. Acc. Lincei », ser. I, vol. V, 1889, pp. 312-323.

(3) Questo sistema (I) e il successivo (II) sono indicati dal Bianchi con (III) e (IV). Qui si sono riscritti in forma più moderna, adottando le notazioni $\partial_r z = \dfrac{\partial z}{\partial x^r}$, $\partial_{rs} z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^r \partial x^s}$ e si è adottata la convenzione abituale di sottintendere le somme rispetto ad indici ripetuti in alto e in basso.

Le b_{rs} sono le componenti di un tensore covariante doppio simmetrico: le Γ^t_{rs} si dicono oggi « componenti di una connessione » (cioè si trasformano, per trasformazioni di variabili indipendenti, secondo la legge tipica di queste). È veramente notevole che il Bianchi si fosse imbattuto, in un problema di analisi di cui non trascura il lato geometrico, nelle « connessioni » alcuni decenni prima ch'esse si presentassero in geometria come necessarie estensioni della legge di trasporto parallelo secondo Levi-Civita.

(4) Le b^{rs} sono gli elementi reciproci delle b_{rs}.

(5) Le [ ] indicano l'alternazione; per esempio $a_{[r}\,b_{s]} = \frac{1}{2}(a_r\,b_s - a_s\,b_r)$. Le δ^i_k sono i simboli di Kronecker (= 0 per $i \neq k$, = 1 per $i = k$).

b) l'integrazione di (I) fa conoscere quella di (II) e inversamente
c) un integrale di (I) e un integrale di (II) sono legati dalle relazioni

$$\zeta\mu + b^{ik}\,\partial_i\,\zeta\partial_k\,\mu = \text{cost.}$$

ossia

$$\Delta_b(\zeta, \mu) = \zeta\mu + \text{cost.} \tag{1.2}$$

ove Δ_b è il parametro differenziale misto di Beltrami;

d) è

$$\Gamma^t_{rs} + \gamma^t_{rs} = 2\left\{\begin{matrix} t \\ rs \end{matrix}\right\}_b \tag{1.3}$$

ove $\left\{\begin{matrix} t \\ rs \end{matrix}\right\}_b$ sono i simboli di Christoffel di 2ª specie relativi alla forma quadratica $b_{rs}\,dx^r\,dx^s$;

e) i sistemi (I) e (II) coincidono allora e solo quando la curvatura della forma precedente vale -1 e si prenda $\Gamma^t_{rs} = \gamma^t_{rs} = \left\{\begin{matrix} t \\ rs \end{matrix}\right\}_b$.

2. I risultati del Bianchi acquistano un notevole significato geometrico quando si sostituisca il sistema (I) con l'altro equivalente

$$\text{(I')} \qquad \begin{cases} \partial_r\,\zeta_s = \Gamma^t_{rs}\,\zeta_t + b_{rs}\,\zeta \\ \partial_s\,\zeta = \zeta_s \end{cases}$$

nelle funzioni incognite $\zeta, \zeta_1, \cdots, \zeta_n$, e si consideri questo come caso particolare *del sistema fondamentale*

$$\text{(I'')} \qquad \begin{cases} \partial_r\,\zeta_s = \Gamma^t_{rs}\,\zeta_t + b_{rs}\,\mathrm{X} \\ \partial_r\,\mathrm{X} = \phi''_r\,\zeta_s + \lambda_r\,\mathrm{X} \\ \partial_s\,\zeta = \zeta_s \end{cases}$$

associato ad una ipersuperficie A_n di equazioni parametriche

$$\zeta^\alpha = \zeta^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n), \qquad \alpha = \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n+1} \tag{2.1}$$

e alla sua varietà di *vettori pseudonormali* $\mathrm{X}^\alpha(x^1, \cdots; x^n)$ *entro lo spazio affine* E_{n+1} (in cui le ζ^α sono coordinate affini).

Si passa dal sistema (I'') a quello (I') mediante la sostituzione dei vettori X^α con gli altri

$$\mathrm{X}'^\alpha = \tau(\lambda^r\,\zeta^\alpha_r + \mathrm{X}^\alpha) \tag{2.2}$$

per

$$\tau = t_\alpha z^\alpha \quad , \quad \tau\lambda^r = \overset{r}{z}_\alpha z^\alpha \tag{2.3}$$

le $t_\alpha , \overset{r}{z}_\alpha$ essendo gli elementi reciproci di X^α , z_r^α nel determinante

$$\Delta = | X^\alpha , z_1^\alpha , z_2^\alpha , \cdots , z_n^\alpha | . \tag{2.4}$$

In base alla trasformazione (2.2) con la scelta (2.3) dei parametri risulta infatti

$$X' = z \quad , \quad \varphi_r'^{,s} = \delta_r^s \quad , \quad \lambda_r' = 0 . \tag{2.5}$$

3. Tenuto presente che b_{rs} rappresenta il tensore fondamentale della A_n, Γ_{rs}' la connessione indotta su A_n dalle rette individuate dai vettori X (pseudonormali), $\varphi_r^{,s}$ il secondo tensore di curvatura euleriana di A_n, si può dire:

Se $z^\alpha (\alpha = \overline{1} , \overline{2} , \cdots , \overline{n+1})$ rappresenta un sistema fondamentale di (I), e perciò z^α , z_r^α un sistema fondamentale di (I'), l'ipersuperficie integrale

$$z^\alpha = z^\alpha (x^1 , x^2 , \cdots , x^n)$$

è quella per la quale (una volta stabilite le condizioni iniziali) Γ_{rs}' è la connessione indotta dalle pseudonormali che uniscono i punti P di A_n con l'origine O del riferimento dell'ambiente (che è poi un punto qualunque di E_{n+1}) e b_{rs} , δ_r^s sono i due tensori di curvatura euleriana corrispondenti alla normalizzazione $X^\alpha = z^\alpha$ dei vettori pseudonormali X^α.

In altra forma:

Fissati in E_{n+1} *un punto* P_0 *ed* $n+1$ *vettori indipendenti* $\underset{0}{z}_1 , \underset{0}{z}_2 , \cdots , \underset{0}{z}_n$ *e* $\underset{0}{X} = P_0 - O$, *viene in corrispondenza determinata una ipersuperficie integrale di* (I), *tangente in* P_0 *all'iperpiano di* $\underset{0}{z}_1 , \cdots , \underset{0}{z}_n$ *e avente* $\Gamma_{rs}' , b_{rs} , \delta_r^s$ *come connessione e come tensori di curvatura subordinati dalla varietà pseudonormale che ha la* A_n *stessa come indicatrice.*

4. Il sistema a cui soddisfano gli elementi reciproci $t_\alpha , \overset{r}{z}_\alpha$ di X^α , z_r^α (n. 2) è

$$\partial_r \overset{t}{z}_\alpha = - \Gamma_{rs}^t \overset{s}{z}_\alpha - \delta_r^t t_\alpha$$

$$\partial_r t_\alpha = b_{rs} \overset{s}{z}_\alpha$$

e da esso si ricava il sistema (II) per eliminazione di $\overset{s}{z}_\alpha$.

Il sistema (II) *rappresenta quindi la* A_n *considerata come inviluppo di iperpiani. In ciò sta il fatto geometrico che si traduce analiticamente nelle proposizioni a) b) c) del Bianchi.*

Le condizioni di integrabilità del sistema (I) possono porsi nella forma tensoriale

$$R^{\cdots h}_{rst\cdot} = 2\, b_{t[r}\, \delta^h_{s]} \quad , \quad D_{[r}\, b_{s]t} = 0$$

o anche

$$R^{\cdots k}_{rst\cdot}\, b_{hk} = b_{rt}\, b_{sh} - b_{st}\, b_{rh} \quad , \quad D_{[r}\, b_{s]t} = 0 \tag{4.1}$$

dove $R^{\cdots h}_{rst\cdot}$ è il tensore di curvatura della connessione Γ^t_{rs} e D è il simbolo di derivazione covariante fatta con i parametri della connessione stessa.

I sistemi (I) e (II) coincidono allora e solo quando $\gamma^t_{rs} = \Gamma^t_{rs}$; ciò porta per la (1.3) che è $\Gamma^t_{rs} = \gamma^t_{rs} = \left\{ \begin{matrix} t \\ rs \end{matrix} \right\}$ e perciò $D_r\, b_{st} = 0$.

In questo caso, la seconda delle condizioni d'integrabilità è già verificata *e la prima equivale alla proposizione e*).

Le geodetiche della connessione sono, com'è geometricamente evidente, le sezioni di A_n con i piani passanti per O.

È così posto in chiaro il significato geometrico di tutte le proposizioni del Bianchi.

5. Il sistema (I) determina sopra una A_n integrale le tre connessioni

$$\Gamma^t_{rs} \quad , \quad \gamma^t_{rs} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} t \\ rs \end{matrix} \right\} \tag{5.1}$$

e quindi tre sistemi di rette pseudonormali uscenti dai suoi punti P descritte dai punti

$$Q = P + m \underset{a}{X}, \qquad (a = 1, 2, 3).$$

Se si pone

$$\underset{a}{X} = \tau (X + \lambda^r \underset{a}{B}) \tag{5.2}$$

con $\underset{1}{X} = X = \tau (\lambda^r = 0)$, le tre connessioni si hanno in corrispondenza ai tre valori

$$\lambda^r = 0 \quad , \quad \underset{2}{\lambda^r} = \frac{1}{n} \left(\left\{ \begin{matrix} r \\ pq \end{matrix} \right\} - \Gamma^r_{pq} \right) b^{pq} \quad , \quad \underset{3}{\lambda^r} = \frac{1}{n} (\gamma^r_{pq} - \Gamma^r_{pq})\, b^{pq}.$$

Infatti, per la più generale trasformazione (2.2) risulta

$$'\Gamma^t_{rs} = \Gamma^t_{rs} + \lambda^t\, b_{rs}.$$

In forza delle (1.3) che seguono dalle condizioni d'integrabilità (4.1) si ha

$$\underset{3}{\lambda^r} = 2 \underset{2}{\lambda^r}$$

e questa esprime (insieme a $\lambda^r = 0$*) che le tre pseudonormali, relative alle tre connessioni* (5.1)*, uscenti da un punto* P *di* A_n *sono complanari.*

Ma si ha di più:

In ogni punto P *di* A_n *la retta relativa al sistema di pseudonormali che subordina la connessione* γ^t_{rs} *è la coniugata armonica di quella relativa a* Γ^t_{rs} *rispetto alla retta relativa a* $\left\{ \begin{matrix} t \\ rs \end{matrix} \right\}$ *e all'intersezione del piano di queste tre rette con l'iperpiano tangente in* P *ad* A_n.

6. La complanarità delle rette corrispondenti alle tre connessioni considerate (5.1) rientra nel fatto più generale seguente:

Se $\underset{(a)}{\Gamma^t_{rs}}$ *è la connessione che corrisponde al campo di vettori* (5.2)*, con* $a < n + 1$ *e con i vettori* $\underset{a}{X}$ *indipendenti, al campo di vettori*

$$\bar{X} = \sum_a^a \sigma \underset{a}{X} = \tau \left(X + \sum_a^a \sigma \lambda^r \underset{a}{B}_r \right), \qquad \sum_a^a \sigma = 1$$

corrisponde la connessione

$$\tilde{\Gamma}^t_{rs} = \sum_{(a)}^a \sigma \Gamma^t_{rs}.$$

Risulta infatti

$$\underset{(a)}{\Gamma^t_{rs}} = \Gamma^t_{rs} + \sum_a \lambda^t b_{rs} \quad , \quad \tilde{\Gamma}^t_{rs} = \Gamma^t_{rs} + \sum_a^a \sigma \lambda^t b_{rs} = \sum_{(a)}^a \sigma \Gamma^t_{rs}.$$

7. Se dallo studio del sistema (1) dal punto di vista affine passiamo a quello proiettivo [1], conviene pensare $n + 1$ integrali indipendenti di (1), siano z^α con $\alpha = \overline{1}, \cdots, \overline{n+1}$, come coordinate proiettive omogenee di punto in uno S_n proiettivo.

Questo punto al variare delle x^r, $r = 1, \cdots, n$ descrive S_n.

Ai cambiamenti dei parametri x^r bisogna ora aggiungere quello del fattore di proporzionalità delle z^α; cioè bisogna vedere come si muta il sistema (1) per effetto della trasformazione

$$z = \rho \bar{z} \tag{7.1}$$

essendo ρ una funzione arbitraria (non nulla) delle x^r.

(1) Angelo Maxia è mancato improvvisamente all'alba del 29 novembre 1945. Era nato a Villamassargia (Cagliari) il 12 febbraio 1910, ed era stato allievo (a Cagliari e a Firenze) di Enea Bortolotti. Dopo la morte di questi era passato, come assistente e professore incaricato, all'Università di Roma. In vista della prossima riapertura dell'Accademia dei Lincei aveva preparata la Nota precedente sulla geometria affine dei sistemi (I). Allo studio proiettivo, rimasto incompleto, di essi aveva dedicato le ultime ore di lavoro nella notte precedente la sua morte.

Per effetto della (7,1) il sistema (I) si muta nell'altro

$$\partial_{rs}\bar{z} = \bar{\Gamma}^t_{rs}\,\partial_t \bar{z} + \bar{b}_{rs}\,\bar{z}$$

con

$$(7.2)\qquad \begin{cases} \bar{\Gamma}^t_{rs} = \Gamma^t_{rs} - \delta^t_r\,\partial_s \log\rho - \delta^t_s\,\partial_r \log\rho \\ \bar{b}_{rs} = b_{rs} + \Gamma^t_{rs}\,\partial_t \log\rho - \dfrac{1}{\rho}\,\partial_{rs}\rho. \end{cases}$$

Fatto nella prima $t = s$, cioè *contraendo* rispetto ad s, si ha

$$\bar{\Gamma}^s_{rs} = \Gamma^s_{rs} - (n+1)\,\partial_r \log\rho \quad , \quad \partial_r \log\rho = \frac{1}{n+1}(\Gamma^s_{rs} - \bar{\Gamma}^s_{rs}).$$

Ne segue, eliminando ρ dalle (7.2) per mezzo dell'ultima relazione e della sua derivata, che

$$(7.3)\qquad \begin{cases} \overset{*}{\Gamma}{}^t_{rs} = \Gamma^t_{rs} - \dfrac{1}{n+1}(\delta^t_r\,\Gamma^q_{sq} + \delta^t_s\,\Gamma^q_{rs}) \\ \overset{*}{b}_{rs} = b_{rs} + \dfrac{1}{n+1}\left(\Gamma^t_{rs}\,\Gamma^q_{tq} - \partial_r\,\Gamma^t_{st} - \dfrac{1}{n+1}\,\Gamma^p_{rp}\,\Gamma^q_{sq}\right) \end{cases}$$

sono invarianti per le trasformazioni (7.1).

Le espressioni (7.3) ora ricavate rientrano nelle (7.2) (e così risulta dimostrato il loro carattere di componenti di una connessione e di un tensore) quando si scelga ρ in modo da soddisfare alle condizioni

$$(7.4)\qquad \partial_r \log\rho = \frac{1}{n+1}\,\Gamma^t_{rt}.$$

Questa scelta è possibile, perchè le condizioni d'integrabilità della (7.4) sono

$$\partial_{[r}\Gamma^t_{s]\,t} = 0$$

e queste risultano soddisfatte in conseguenza delle condizioni d'integrabilità (1.1), come si vede facendovi $h = t$ e contraendo. Quindi:

Il sistema (I) *considerato dal punto di vista proiettivo, cioè rispetto alle trasformazioni delle variabili indipendenti e alla trasformazione* (7.1) *della funzione incognita, determina una connessione e un tensore invarianti* (7.3). *Per la connessione* $\overset{*}{\Gamma}{}^t_{rs}$ *si ha poi* $\overset{*}{\Gamma}{}^s_{rs} = 0$.

Matematica. — *Sull'integrazione delle equazioni lineari di tipo ellittico* [1]. Nota di L. AMERIO, presentata [2] dal Corrisp. M. PICONE.

1. Sia

$$(1) \qquad \mathrm{E}(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

un'equazione lineare del secondo ordine, di tipo ellittico, in m variabili $(x_1, \cdots, x_m)$, e supponiamo le funzioni a_{ik}, b_i, c, f definite in un dominio limitato τ dello spazio S_m, il determinante $\|a_{ik}\|$ unitario.

Indicata con

$$\mathrm{E}^*(w) = \sum \frac{\partial^2 (a_{ik} w)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum \frac{\partial (b_i w)}{\partial x_i} + cw$$

l'espressione differenziale aggiunta di $\mathrm{E}(w)$, si ha, per la formula di Green, se u è un integrale della (1),

$$(2) \qquad -\int_\tau u \mathrm{E}^*(w)\, d\tau = \int_\sigma \left\{ u \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - \mathrm{L}w \right) - \frac{\partial u}{\partial \nu} w \right\} d\sigma - \int_\tau fw\, d\tau,$$

dove ν è la direzione conormale a σ, orientata verso l'interno di τ, e s è posto

$$\mathrm{L} = \sum \cos(nx_i) \left\{ b_i - \sum \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \right\},$$

n essendo la normale a σ, orientata anch'essa verso l'interno di τ [3].

Nei suoi *Appunti di Analisi Superiore*, il Picone [4], con una nuova e suggestiva interpretazione della (2), enuncia le proposizioni seguenti, che riferiremo, per semplicità, al problema di Dirichlet.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) Con $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ si indica la quantità $\sum \frac{\partial u}{\partial x_i} a_{ik} \cos(n x_k)$, *proporzionale* alla derivata della funzione u rispetto alla direzione ν.

(4) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*. Rondinella, Napoli, 1940, pp. 752–765.

a) *Se si conosce una successione* $\{v_r\}$ *di integrali dell'equazione*

$$\mathrm{E}^*(v) = 0 \tag{3}$$

la quale sia chiusa [1] *su* σ, *dalla* (2) *si deduce il sistema di Fischer-Riesz*

$$\int_\sigma \left\{ u\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - \mathrm{L}v_r\right) - \frac{\partial u}{\partial \nu} v_r \right\} d\sigma - \int_\tau f v_r \, d\tau = 0, \tag{4}$$

cioè, si conoscono i coefficienti di Fourier dell'incognita $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ *rispetto alla successione* $\{v_r\}$. *Per la chiusura, su* σ, *di tale successione, resta perciò individuata la* $\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

b) *Se si conosce una successione* $\{w_r\}$ *di funzioni tali che la successione* $\{\mathrm{E}^*(w_r)\}$ *sia chiusa in* τ, *si ricava dalla* (2) *il sistema di Fischer-Riesz*

$$-\int_\tau u \, \mathrm{E}^*(w_r) \, d\tau = \int_\sigma \left\{ u\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - \mathrm{L}w_r\right) - \frac{\partial u}{\partial \nu} w_r \right\} d\sigma - \int_\tau f w_r \, d\tau \tag{5}$$

e quindi, note su σ *le* u, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, *anche la* u *resta individuata in* τ.

Mediante le successioni $\{v_r\}$, $\{w_r\}$ la soluzione del problema si ottiene in due tempi successivi. Si può però evitare tale inconveniente, giungendo alla contemporanea determinazione delle u in τ, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in σ. Basta, a tale scopo, valersi dell'estensione data dal Picone [2] alla ordinaria teoria degli sviluppi in serie di Fourier e considerare, nella (5), le incognite u in τ, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in σ come componenti di un vettore $\mathbf{G}$, di S_2, le funzioni $-\mathrm{E}^*(w_r)$ in τ, w_r in σ come componenti di un vettore $\boldsymbol{\omega}_r$.

Risulta allora, per la (5),

$$(\mathbf{G}, \boldsymbol{\omega}_r) = -\int_\tau u \, \mathrm{E}^*(w_r) \, d\tau + \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} w_r \, d\sigma = \tag{6}$$

$$= \int_\sigma u\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - \mathrm{L}w_r\right) d\sigma - \int_\tau f w_r \, d\tau,$$

e quindi si ricava la proposizione seguente.

(1) Ometteremo, in questo enunciato e nei seguenti, l'indicazione, facilmente desumibile, della totalità di funzioni rispetto alla quale una data successione si suppone chiusa.

(2) M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*. Rondinella, Napoli, 1940, pp. 632-634.

c) *Se si conosce una successione di funzioni* $\{w_r\}$ *tale che la corrispondente successione di vettori* $\{\omega_r\}$ *risulti chiusa, nel proprio insieme di definizione, restano determinati, per le* (6), *i coefficienti di Fourier dell'incognito vettore* **G** *rispetto alla successione* $\{\omega_r\}$. *Per la chiusura di tale successione,* **G** *resta individuato.*

Proposizioni del tutto analoghe si possono enunciare per gli altri classici problemi al contorno relativi alla (1), come il problema di Neumann, quello misto e anche il problema di Cauchy.

2. Si presenta ora la questione di costruire le successioni $\{v_r\}, \{w_r\}, \{\omega_r\}$, dotate delle proprietà richieste in a), b), c). Tale questione è stata da me risolta in una Memoria di prossima pubblicazione [1] con un procedimento di carattere assai generale, mediante il quale è possibile risolvere i problemi al contorno per la (1) anche quando manchi il teorema di unicità (nel qual caso le successioni $\{v_r\}, \{\omega_r\}$ soddisfacenti alle condizioni poste in a), c) non esistono).

Il procedimento di cui mi sono valso è il seguente. Supponiamo i coefficienti a_{ik}, b_i, τ prolungati in un dominio limitato τ' contenente τ nel suo interno. Indicata con $F(M, N)$ la soluzione fondamentale della (3) (che si può ammettere soddisfi alla $E(u) = 0$ come funzione di N), singolare in N, si hanno, per un integrale u della (1), le formule fondamentali di Green

$$(7)\quad ku(P) = \int_\sigma \left\{ u(M)\left(\frac{\partial F(M,P)}{\partial \nu} - L(M)F(M,P)\right) - \frac{\partial u(M)}{\partial \nu} F(M,P) \right\} d\sigma - \int_\tau f(M) F(M,P)\, d\tau,$$

$$(8)\quad 0 \equiv \int_\sigma \left\{ u(M)\left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - L(M)F(M,Q)\right) - \frac{\partial u(M)}{\partial \nu} F(M,Q) \right\} d\sigma - \int_\tau f(M) F(M,Q)\, d\tau,$$

dove k è una costante positiva dipendente solo da m, P indica un punto interno a τ, Q un punto esterno, M il punto, di σ o di τ, rispetto alle cui coordinate si effettuano le integrazioni.

Interpretiamo la (8) come un'equazione tra le funzioni $u(M), \frac{\partial u(M)}{\partial \nu}$, su σ. Si dimostra, sotto condizioni largamente soddisfatte nei casi pratici,

(1) L. Amerio, *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico,* in corso di stampa negli « Annals of Mathematics ».

che essa è l'*equazione di compatibilità* tra i valori $u(M)$, $\frac{\partial u(M)}{\partial \nu}$. Si ha infatti che *se* A, B *è una coppia di funzioni soddisfacente all'equazione*

$$(9)\quad 0 \equiv \int_\sigma \left\{ A(M)\left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - L(M)F(M,Q)\right) - B(M)F(M,Q)\right\} d\sigma - \int_\tau f(M)F(M,Q)\,d\tau,$$

la funzione $u(P)$ *definita entro* τ *dall'eguaglianza*

$$(10)\quad ku(P) = \int_\sigma \left\{ A(M)\left(\frac{\partial F(M,P)}{\partial \nu} - L(M)F(M,P)\right) - B(M)F(M,P)\right\} d\sigma - \int_\tau f(M)F(M,P)\,d\tau$$

è un integrale della (1) *tale che risulti, su* σ, $u(M) = A(M)$, $\frac{\partial u(M)}{\partial \nu} = B(M)$.

Se, ad esempio, si vuole risolvere il problema di Dirichlet, conoscendosi la $A(M)$, basterà determinare tutte le $B(M)$ che soddisfino alla (9) (una o più se esiste la soluzione e a seconda che valga o meno il teorema di unicità, nessuna se la soluzione non esiste) per ottenere, mediante la (10), tutte le soluzioni del problema. Per risolvere la (9) si procederà poi nel modo seguente. Sia $\{g_r(Q)\}$ una successione di funzioni la quale sia chiusa nel dominio $\bar{\tau} = \tau' - \tau + \sigma$: ad esempio la successione $g_r(Q) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, con $\alpha_k = 0, 1, \cdots$. La (9) *equivale* allora al sistema

$$\int_{\bar{\tau}} g_r(Q)\left[\int_\sigma \left\{ A(M)\left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - L(M)F(M,Q)\right) - B(M)F(M,Q)\right\} d\sigma - \int_\tau f(M)F(M,Q)\,d\tau\right] d\bar{\tau} = 0$$

cioè anche, posto

$$(11)\qquad v_r(M) = \int_{\bar{\tau}} g_r(Q)F(M,Q)\,d\,,$$

al sistema di Fischer–Riesz

$$(12)\qquad \int_\sigma \left\{ A\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - Lv_r\right) - Bv_r\right\} d\sigma - \int_\tau f v_r\,d\tau = 0.$$

La successione $\{v_r\}$ così ottenuta soddisfa, se vale il teorema di unicità, alle condizioni richieste in a). Se tale teorema non vale, le autosoluzioni del problema di Dirichlet sono *caratterizzate* dall'essere le corrispondenti B ortogonali su σ alla successione $\{v_r\}$. Osserviamo, anche, ciò che completa l'enunciato della proposizione a), che, se il problema non ammette soluzione, nemmeno il sistema (12) ammette soluzione. Perciò, dedotta dalla successione $\{v_r\}$, nel modo ben noto, una equivalente successione $\{v'_r\}$ ortogonale e normale su σ e posto

$$b_r = \int_\sigma A\left(\frac{\partial v'_r}{\partial \nu} - Lv'_r\right) d\sigma - \int_\tau f v'_r \, d\tau ,$$

si ha che *condizione necessaria e sufficiente perchè il problema di Dirichlet ammetta soluzione, con* $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ *a quadrato sommabile su* σ, *è che converga la serie* $\sum b_r^2$. *Risulta allora, su* σ, $B \sim \sum b_r v'_r + \varphi$, *dove la serie* $\sum b_r v'_r$ *converge in media e* φ *è la più generale funzione, a quadrato sommabile, ortogonale a tutte le* v'_r. *Se vale il teorema di unicità, si ha poi* $\varphi \equiv 0$.

In modo del tutto analogo, utilizzando sempre le v_r date dalle (11) e il sistema (12), si risolvono gli altri problemi al contorno per la (1).

3. Per il calcolo delle funzioni $v_r(M)$, attraverso le (11), si richiede la conoscenza esplicita della soluzione fondamentale, assai ardua a ottenersi, almeno nel caso generale. La successione di vettori $\{\omega_r\}$ che ora indicheremo, permette invece di evitarne l'uso e conduce in modo diretto alla risoluzione dei problemi al contorno.

Poniamo nella (5)

$$(13) \qquad w_r = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_k = 0, 1, \cdots)$$

e inoltre, su σ, $A = u$, $B = \frac{\partial u}{\partial \nu}$. Otteniamo il sistema

$$(14) \qquad -\int_\tau u E^*(w_r) \, d\tau = \int_\sigma \left\{ A\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - Lw_r\right) - Bw_r \right\} d\sigma - \int_\tau f w_r \, d\tau$$

cui soddisfano le tre funzioni u, A, B. Ora si dimostra che il sistema (14) è *equivalente* al sistema (9), (10); si dimostra cioè che *se* u, A, B *soddisfano alle* (9), (10), *soddisfano al sistema* (14) *e, viceversa, se* u, A, B *soddisfano al sistema* (14), *allora* A, B *soddisfano alla* (9) *e la funzione* u, *ove se ne alteri al più il valore in un insieme di misura nulla, è data dalla* (10).

La successione $\{w_r\}$, data dalle (13), consente perciò di dedurre, nel modo indicato al n. 1, una successione di vettori $\{\omega_r\}$ la quale, se vale il teorema di unicità, soddisfa alle condizioni richieste in c). Inoltre, se tale teorema non vale, le autosoluzioni del problema di Dirichlet sono *caratterizzate* dall'essere i corrispondenti vettori $\mathbf{G}$ ortogonali alla successione $\{\omega_r\}$. Infine, se il problema non ammette soluzione, nemmeno il sistema (14) ammette soluzione.

Considerazioni del tutto analoghe, riferite sempre alle w_r date dalle (13) e al sistema (14), valgono per gli altri problemi al contorno.

Osserviamo infine che *la successione* $\{E^*(w_r)\}$ *soddisfa alle condizioni di chiusura richieste in* b). Infatti, se nelle (14) si pone $A \equiv B \equiv f \equiv 0$, segue dalle (10), (14) che la funzione u soddisfacente al sistema

$$\int_\tau u E^*(w_r)\, d\tau = 0$$

è quasi ovunque nulla.

4. Il procedimento di integrazione indicato è manifestamente basato su teoremi di carattere assai generale. Ne ho indicate infatti le estensioni (prendendo dapprima in esame alcune *tipiche* equazioni a coefficienti costanti della fisica-matematica) all'integrazione dell'equazione del calore [1], di tipo parabolico, e dell'equazione [2], di tipo ellittico e di ordine $2k$,

$$\Delta_{2k} u = f \tag{15}$$

per le quali ho generalizzato anche i risultati precedentemente ottenuti [3] per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ relativamente al metodo della trasformata di Laplace a dominio di integrazione limitato, ideato dal Picone [4].

Riassumo qui brevemente i principali risultati ottenuti per la (15), rinviando a un'altra Nota per quelli relativi all'equazione del calore.

Poniamo, su σ, $\Delta_{2h} u = A_h$, $\dfrac{\partial \Delta_{2h} u}{\partial n} = B_h$, con $h = 0, \cdots, k-1$, e consideriamo le formule fondamentali di Green:

(1) L. Amerio, *Sull'equazione di propagazione del calore*, in corso di stampa nei « Rend. di Mat. dell'Università di Roma e dell'Ist. di Alta Mat. », 1946.

(2) L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$, in corso di stampa negli « Annali di Matematica », 1946.

(3) L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi.* « Rend. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXVIII, 1945.

(4) M. Picone, *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti.* « R. Acc. delle Scienze di Torino », 1940, pp. 413-426.

$$(16)\quad cu(P)=\sum_{0}^{k-1}{}_{h}\int_{\sigma}\left\{A_h(M)\frac{\partial\Delta_{2(k-1-h)}F(M,P)}{\partial n}-B_h(M)\,\Delta_{2(k-1-h)}F(M,P)\right\}d\sigma-$$

$$-\int_{\tau}f(M)\,F(M,P)\,d\tau,$$

$$(17)\quad 0\equiv\sum_{0}^{k-1}{}_{h}\int_{\sigma}\left\{A_h(M)\frac{\partial\Delta_{2(k-1-h)}F(M,Q)}{\partial n}-B_h(M)\,\Delta_{2(k-1-h)}F(M,Q)\right\}d\sigma-$$

$$-\int_{\tau}f(M)\,F(M,Q)\,d\tau,$$

dove c è una costante positiva dipendente solo da m e k, $F(M,N)$ la soluzione fondamentale, singolare nel punto N, dell'equazione $\Delta_{2k}u=0$.

Anche per la (17) *si dimostra che, se vi soddisfano le funzioni* $A_0,\cdots,A_{k-1}$, $B_0,\cdots,B_{k-1}$, *la funzione* $u(P)$ *definita dalla* (16) *è un integrale della* (1) *tale che risulti, su* σ, $\Delta_{2k}u=A_h$, $\frac{\partial\Delta_{2h}u}{\partial n}=B_h$.

La (17) si può risolvere in modo analogo a quanto si è fatto per la (9), o anche valendoci del fatto che gli integrali a secondo membro sono funzioni analitiche delle coordinate del punto Q, con lo stesso procedimento adoperato per l'equazione $\Delta_2 u-\lambda^2 u=f$. In ogni caso, la (17) risulta *equivalente* a un sistema di equazioni di Fischer–Riesz del tipo

$$(18)\quad \sum_{0}^{k-1}{}_{h}\int_{\sigma}\left\{A_h\frac{\partial\Delta_{2(k-1-h)}v_r}{\partial n}-B_h\,\Delta_{2(k-1-h)}v_r\right\}d\sigma-\int_{\tau}fv_r\,d\tau=0$$

dove le funzioni $\{v_r\}$ sono integrali dell'equazione $\Delta_{2k}u=0$.

Consideriamo, ad esempio, l'equazione $\Delta_4 u=f$ e supponiamo assegnate, su σ, le funzioni $u=A_0$, $\frac{\partial u}{\partial n}=B_0$. Si ricava dalla (18)

$$(19)\quad \int_{\sigma}\left\{A_0\frac{\partial\Delta_2 v_r}{\partial n}+A_1\frac{\partial v_r}{\partial n}-B_0\,\Delta_2 v_r-B_1 v_r\right\}d\sigma-\int_{\tau}fv_r\,d\tau=0,$$

dove sono incognite le funzioni A_1, B_1. Se assumiamo tali funzioni come componenti di un vettore $\mathbf{G}$, di S_2, e le $\frac{\partial v_r}{\partial n}$, $-v_r$ come componenti di un vettore $\{\omega_r\}$, ricaviamo dalle (19) che sono noti i coefficienti di Fourier $(\mathbf{G},\omega_r)$ dell'incognito vettore $\mathbf{G}$ rispetto alla successione $\{\omega_r\}$. Tale vettore risulta perciò individuato. Allo stesso modo si ragiona per i vari problemi al contorno relativi alla (15).

Osserviamo inoltre che, analogamente a quanto avviene per la (1), anche per la (15) il sistema (16), (17) risulta equivalente al sistema dedotto dalla formula di Green

$$(20)\quad -\int_{\tau} u\,\Delta_{2k} w_r\, d\tau = \sum_{0}^{k-1}{}_h \int_{\sigma} \left\{ A_h \frac{\partial \Delta_{2(k-1-h)} w_r}{\partial n} - B_h \Delta_{2(k-1-h)} w_r \right\} d\sigma - \int_{\tau} f w_r\, d\tau$$

dove la w_r è data dalla (13). *Il sistema* (20) *consente perciò di risolvere i problemi al contorno senza far uso della soluzione fondamentale e la successione* $\{\Delta_{2k} w_r\}$ *risulta chiusa in* τ.

Ricordiamo, infine, che anche per la (15), con lo stesso procedimento usato per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$, si dimostra che è possibile, mediante il metodo della trasformata di Laplace a dominio di integrazione limitato, risolvere i problemi al contorno, ma *solo* nell'ipotesi che τ abbia connessione ipersuperficiale semplice. Lo stesso dicasi se come successione $\{v_r\}$ si assume la successione dei polinomi k-iperarmonici.

Meccanica. — *Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità, per i quali esiste la funzione lagrangiana.* Nota I di C. Agostinelli, presentata [1] dal Socio U. Amaldi.

1. Si sa che un sistema olonomo con un numero generico k di gradi di libertà, il cui movimento è retto dalle equazioni lagrangiane

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r, \qquad (r = 1, 2, \cdots, k),$$

nel caso in cui le forze derivano da un potenziale U, e quindi $Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r}$, posto $L = T + U$, le (1) assumono la forma più sintetica

$$(2)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \qquad (r = 1, 2, \cdots, k).$$

È nota anche l'importanza della funzione lagrangiana $L = T + U$, la cui forma spesso rivela immediatamente l'esistenza di integrali del problema, come per esempio nel caso di ignorazione di coordinate, nel quale esistono

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

gli *integrali dei momenti*, e nel caso in cui la L non contenga esplicitamente il tempo, nel quale esiste l'*integrale generalizzato dell'energia* (1)

$$(3) \qquad H \equiv \sum_1^k{}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - L = h \text{ (costante)}.$$

Ma la funzione lagrangiana L, quella funzione cioè delle q_r e $\dot{q}_r$, ed eventualmente di t, per mezzo della quale le equazioni del moto (1) di un sistema olonomo possono ridursi alla forma (2), non esiste soltanto nel caso di forze conservative, ma anche in casi più generali.

Qui ci proponiamo di caratterizzare quei problemi dinamici, le cui *componenti lagrangiane* Q_r *delle forze* siano funzioni lineari delle velocità, e che ammettano la funzione lagrangiana L.

2. Sia allora

$$(4) \qquad Q_r = \sum_1^k{}_s Q_{rs} \dot{q}_s + Q_{r0}, \qquad (r = 1, 2, \cdots, k),$$

ove le Q_{rs}, Q_{r0} siano funzioni soltanto delle q, ed eventualmente del tempo, e vediamo se e quando esiste una funzione L della forma

$$(5) \qquad L = T + \sum_1^k{}_s U_s \dot{q}_s + U,$$

ove le U_s ed U sono funzioni soltanto delle q e di t, tali che le equazioni (2) risultino identiche alle (1).

Poichè dalle (5) si ricava

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + U_r \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial T}{\partial q_r} + \sum_1^k{}_s \frac{\partial U_s}{\partial q_r} \dot{q}_s + \frac{\partial U}{\partial q_r},$$

per l'identità richiesta dovrà risultare

$$Q_r \equiv \sum_1^k{}_s Q_{rs} \dot{q}_s + Q_{r0} = \sum_1^k{}_s \frac{\partial U_s}{\partial q_r} \dot{q}_s - \frac{dU_r}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_r},$$

ovvero

$$\sum_1^k{}_s Q_{rs} \dot{q}_s + Q_{r0} = \sum_1^k{}_s \left(\frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s} \right) \dot{q}_s + \frac{\partial U}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial t},$$

(1) Cfr. T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, P. I, p. 370 (Zanichelli, Bologna, 1926).

e pertanto, affinchè esista la funzione lagrangiana (5), è necessario che sia

$$(6)\quad Q_{rs} = \frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s}, \quad (r, s = 1, 2, \cdots, k) \quad ; \quad Q_{ro} = \frac{\partial U}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial t}, \quad (r = 1, 2, \cdots, k).$$

La (6) mostra subito che

$$Q_{rr} = 0 \quad ; \quad Q_{sr} = -Q_{rs},$$

e quindi *la matrice quadrata di ordine k delle Q_{rs} è emisimmetrica.*

3. Per dare forma geometrica ai risultati rappresentiamo il sistema considerato con un punto P di massa unitaria di uno spazio S_k con k dimensioni. Risulterà P funzione dei parametri $q_1, q_2, \cdots, q_k$ e del tempo, cioè $P = P(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)$; la sua velocità in S_k sarà data da

$$\frac{dP}{dt} = \sum_1^k{}_r \frac{\partial P}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial P}{\partial t},$$

ove ciascuno dei vettori $\frac{\partial P}{\partial q_r}$ è tangente alla linea l_r di S_k lungo la quale varia il solo parametro q_r, mentre i rimanenti parametri e il tempo rimangono costanti.

La forza viva di P sarà quindi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{1\,rs}^k \frac{\partial P}{\partial q_r} \times \frac{\partial P}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_1^k{}_r \frac{\partial P}{\partial q_r} \times \frac{\partial P}{\partial t} \dot{q}_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2,$$

e dovrà essere uguale alla forza viva T del sistema, che, nel caso in cui i vincoli siano variabili col tempo, sarà della forma

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1\,rs}^k a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + \sum_1^k{}_r a_r \dot{q}_r + T_o$$

essendo T_o la parte di T indipendente dalle $\dot{q}$. Il punto P di S_k sarà dunque definito dalle relazioni

$$\frac{\partial P}{\partial q_r} \times \frac{\partial P}{\partial q_s} = a_{rs} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial q_r} \times \frac{\partial P}{\partial t} = a_r \quad ; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 = 2T_o,$$

ove le a_{rs}, a_r, T_o sono da considerarsi funzioni note delle q e di t. Così pure le forze che agiscono sul sistema, e che hanno come componenti

lagrangiane le Q_r, possiamo rappresentarle con un vettore $\boldsymbol{F}$ di S_k di componenti covarianti

$$Q_r = \boldsymbol{F} \times \frac{\partial P}{\partial q_r}.$$

Poichè abbiamo supposto le forze funzioni lineari delle velocità, il vettore $\boldsymbol{F}$ sarà della forma

$$\boldsymbol{F} = \varphi \frac{dP}{dt} + \boldsymbol{f} = \sum_1^k{}_s \varphi \frac{\partial P}{\partial q_s} \dot{q}_s + \varphi \frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{f}, \tag{7}$$

ove φ è una *omografia vettoriale* (funzione delle q e di t), che trasforma vettori di S_k in vettori dello stesso spazio, ed $\boldsymbol{f}$ è vettore di S_k funzione delle q e di t. Avremo quindi

$$Q_r = \sum_1^k{}_s \varphi \frac{\partial P}{\partial q_s} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} \dot{q}_s + \varphi \frac{\partial P}{\partial t} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} + \boldsymbol{f} \times \frac{\partial P}{\partial q_r}.$$

Allora, per le (6), l'esistenza della funzione lagrangiana implica che sia:

$$Q_{rs} = \varphi \frac{\partial P}{\partial q_s} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} = \frac{\partial U_s}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial q_s}, \tag{8}$$

$$\varphi \frac{\partial P}{\partial t} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} + \boldsymbol{f} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} = \frac{\partial U}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial t}. \tag{9}$$

Cioè, se $\boldsymbol{u}$ è vettore di S_k di componenti covarianti $\boldsymbol{u} \times \frac{\partial P}{\partial q_s} = U_s$, si avrà

$$\varphi \frac{\partial P}{\partial q_s} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial q_r} \times \frac{\partial P}{\partial q_s} - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial q_s} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} = \left(K \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} - \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right) \frac{\partial P}{\partial q_s} \times \frac{\partial P}{\partial q_r},$$

ove $K \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}$ è la *coniugata* dell'omografia $\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}$ [1], e quindi

$$\varphi = K \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} - \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}, \tag{10}$$

e questa mostra che l'omografia φ è un'*assiale* ($K\varphi = -\varphi$).

La (9) porge poi

$$\boldsymbol{f} = \sum_1^k{}_r \left(\frac{\partial U}{\partial q_r} - \frac{\partial U_r}{\partial t} - \varphi \frac{\partial P}{\partial t} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} \right) \operatorname{grad} q_r$$

(1) Cfr. P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti, *Geometria differenziale*, p. 145 (Zanichelli, Bologna, 1930).

cioè

$$(7') \qquad \boldsymbol{f} = \operatorname{grad} U - \varphi \frac{\partial P}{\partial t} - \sum_{1}^{k}{}_{r} \frac{\partial U_r}{\partial t} \operatorname{grad} q_r .$$

Nel caso del moto di un punto libero nello spazio ordinario, la condizione (10) si può scrivere [1]

$$\varphi = -2V \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \wedge = -\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \wedge ,$$

e per la (7) e la (7') la forza applicata al punto mobile diventa:

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{dP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} U - \sum_{1}^{3}{}_{r} \frac{\partial U_r}{\partial t} \operatorname{grad} q_r$$

e pertanto *la forma più generale dell'equazione del moto di un punto di massa m, soggetto a forza funzione lineare della velocità, e che ammetta la funzione lagrangiana è la seguente*:

$$(11) \qquad m \frac{d^2 P}{dt^2} = \left(\frac{dP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} U - \sum_{1}^{3}{}_{r} \frac{\partial U_r}{\partial t} \operatorname{grad} q_r .$$

In essa rientra, com'è noto, l'equazione del moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo magnetico di intensità $H = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, sovrapposto ad un campo elettrico di potenziale U [2].

(1) Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Trasformazioni lineari*, p. 70 e p. 171 (Zanichelli, Bologna, a. 1929).

(2) Cfr. T. Levi-Civita e U. Amaldi, loc. cit., p. 205. Vedi anche P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, vol. I, p. 389 (Gauthier Villars, Paris, 1941). La funzione di Lagrange per questo problema fu ottenuta da Levi-Civita, ricorrendo al principio di Hamilton, nel suo lavoro *Sur les équations générales du mouvement d'un corpuscole dans un champ magnétique et un champ électrique superposés*. (« Archiv vor Mathematik og Naturvidenskab », B. XXXI, a. 1911). Vedi anche al riguardo una Nota di Boggio, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo elettrico e in un campo magnetico sovrapposti*. « Boll. U. M. I. », Anno XVII, n. 4, novembre 1938).

Meccanica. — *Proprietà di media dello stress nelle lastre curve comunque spesse in equilibrio.* Nota di C. Tolotti, presentata [1] dal Corrisp. A. Signorini.

1. Considerata una lastra curva, comunque spessa, in equilibrio, la si pensi suddivisa in un modo qualunque in fibre (non necessariamente rettilinee) di grossezza infinitesima ed aventi le sezioni terminali sulle due facce della lastra.

Le proprietà di media dello stress a cui si perviene applicando a ciascuna di tali fibre le equazioni cardinali della Statica si trovano già scritte sia nel caso che le fibre considerate siano staccate sulla lastra in equilibrio da rigate di una congruenza normale ad una certa superficie media di essa [2] e sia nel caso che la suddivisione della lastra in fibre eventualmente non verifichi tale condizione [3].

È questo, ad esempio, il caso in cui la suddivisione in fibre venga fatta in una configurazione di riferimento della lastra anzichè nella configurazione attuale, cioè, come si suol dire, ove ci si ponga da un punto di vista lagrangiano.

Nella presente Nota io mi pongo precisamente da questo più generale punto di vista. Scopo di essa è la segnalazione di una elegante forma variazionale che può esser data alle proprietà di media dello stress dianzi accennate. Ho ritenuto utile però ritrovare in precedenza queste proprietà servendomi – come faccio nel resto della Nota – dell'Analisi vettoriale generale [4] e, più specificatamente, delle denominazioni e notazioni di Burali-Forti e Marcolongo [5].

La proprietà variazionale in questione – che non richiede nessuna ipotesi sulla struttura e natura fisica della lastra considerata – può intendersi

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Cfr. ad esempio A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge Univ. Press, 1927, pp. 535–36.

(3) Citerò in proposito B. Finzi, *Tensori, fili e membrane, verghe e lastre.* « Mem. R. Istituto Lombardo », vol. XXIII, 1936, p. 63, formole (13).

(4) Anche B. Caldonazzo, nella Nota *Sulla meccanica delle superficie*, « Monitore Tecnico », 1920, fa uso dell'Analisi vettoriale generale nell'applicare le equazioni cardinali della meccanica alla generica porzione di superficie materiale. Attinenza con il § 4 di tale Nota hanno gli sviluppi del n. 3 della mia, che però, riferendosi a lastre curve comunque spesse, fa naturalmente intervenire la capacità di resistere a flessione delle lastre stesse, che il Caldonazzo ivi invece trascura.

(5) Cfr. in particolare C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Trasformazioni lineari*. Bologna, Zanichelli, 1929.

come l'analoga nella teoria delle lastre della nota equazione di Lagrange per i sistemi continui tridimensionali.

Non si ritenga però che la detta proprietà variazionale possa dedursi dall'equazione di Lagrange specializzando l'arbitrario spostamento infinitesimo regolare che questa considera pel sistema continuo. Invero, tale proprietà fa intervenire uno spostamento globale della lastra che non è regolare e per la cui rappresentazione conviene ricorrere – come vedremo – agli insiemi continui, a due parametri, di triedri [6].

2. Comincerò coll'introdurre alcune notazioni.

Dirò $\mathcal{S}$ il sistema continuo tridimensionale schematizzante la lastra. Supporrò che tra le sue possibili configurazioni ne esista una C_* (che verrà assunta come configurazione di riferimento) il cui generico punto P_* sia definito da $P_* = Q_* - q_3 \boldsymbol{u}(Q_*)$ con Q_* punto variabile su una superficie regolare S_*, $\boldsymbol{u}(Q_*)$ versore dipendente regolarmente da Q_* e q_3 parametro variabile entro i limiti $h_1(Q_*) < 0$ e $h_2(Q_*) > 0$ pure funzioni regolari di Q_*.

Denoterò con q_1, q_2 le coordinate di Q_* rispetto ad un arbitrario sistema di coordinate curvilinee stabilito su S_*. Inoltre, fissata in uno spazio euclideo rappresentativo un'arbitraria terna cartesiana trirettangola $O\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$, indicherò con $P' = O + \sum_r^3 q_r \boldsymbol{c}_r$ il punto di tale spazio che corrisponde al generico punto P_* di C_*, con Q' il corrispondente di Q_* cioè la proiezione ortogonale di P' sul piano coordinato $q_3 = 0$, con S' la regione di tale piano che corrisponde a S_*, con c' il suo contorno, con $\boldsymbol{n}'$ il versore della relativa normale interna, con C' il cilindroide corrispondente a C_*, con Σ'_c la superficie cilindrica laterale di C', con Σ'_1, Σ'_2 le due superficie che delimitano inferiormente e superiormente C', con P'_c il generico punto di Σ'_c, con Q'_c la sua proiezione ortogonale sul piano $q_3 = 0$, con P'_1, P'_2 i punti di Σ'_1, Σ'_2 la cui proiezione ortogonale su detto piano è proprio Q'.

Dirò poi: C la configurazione attuale di $\mathcal{S}$; $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_c$ le parti di contorno di C che corrispondono a $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_c$; N il versore della normale interna a Σ_c; S la superficie che corrisponde in C ad S'; c il suo contorno; P, Q, P_c, Q_c, P_1, P_2 i punti che corrispondono in C rispettivamente a

(6) Una proprietà variazionale formalmente analoga a quella da me considerata trovasi nel volumetto *Théorie des corps déformables* (Paris, Hermann, 1909), che E. ed F. Cosserat hanno dedicato alla teoria degli insiemi continui di triedri ad uno, due o tre parametri. Detti Autori introducono questa proprietà in base al principio della minima azione, postulando la rappresentabilità della cosidetta azione euclidea di deformazione mediante una funzione di due posizioni infinitamente vicine del generico triedro dell'insieme. L'applicabilità delle considerazioni dei Cosserat ad una lastra naturale è quindi subordinata ad ipotesi restrittive sulla struttura e natura fisica della lastra stessa, il che invece viene evitato in questa mia Nota.

$P', Q', P_c', Q_c', P_1', P_2'$; k la densità di $\mathcal{S}$ in C; $\mathbf{F}k\,d\mathrm{C} = \mathbf{F}k'\,d\mathrm{C}'$ la forza di massa agente attualmente sulla particella generica di $\mathcal{S}$; $\boldsymbol{f}_1\,d\Sigma_1 = \boldsymbol{f}_1'\,d\Sigma_1'$, $\boldsymbol{f}_2\,d\Sigma_2 = \boldsymbol{f}_2'\,d\Sigma_2'$, $\boldsymbol{f}_c\,d\Sigma_c = \boldsymbol{f}_c'\,d\Sigma_c'$ le forze superficiali esterne agenti attualmente sul generico elemento di $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_c$.

3. Considerata ora una qualunque rigata della congruenza, di base S_*, il cui generico raggio ha la direzione di $\boldsymbol{u}(Q_*)$, indicherò con $\bar{C}_*$ la porzione di C_* che viene staccata da detta rigata. Converrò inoltre che, per ogni simbolo introdotto al n. 2, il soprassegno denoti il simbolo corrispondente relativo alla porzione di lastra individuata da $\bar{C}_*$.

Supposta la lastra in equilibrio, le equazioni cardinali della Statica applicate a $\bar{C}$ dànno

$$(1)\qquad \int_{\bar{C}} \mathbf{F}k\,d\mathrm{C} + \int_{\bar{\Sigma}_1} \boldsymbol{f}_1\,d\Sigma_1 + \int_{\bar{\Sigma}_2} \boldsymbol{f}_2\,d\Sigma_2 + \int_{\bar{\Sigma}_c} \beta\bar{\mathbf{N}}\,d\bar{\Sigma}_c = 0,$$

$$(2)\qquad \int_{\bar{C}} \Omega\mathrm{P} \wedge \mathbf{F}k\,d\mathrm{C} + \int_{\bar{\Sigma}_1} \Omega\mathrm{P}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1\,d\Sigma_1 + \int_{\bar{\Sigma}_2} \Omega\mathrm{P}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2\,d\Sigma_2 - \int_{\bar{\Sigma}_c} \Omega\bar{\mathrm{P}}_c \wedge \beta\bar{\mathbf{N}}\,d\bar{\Sigma}_c = 0,$$

con Ω punto prefissato a piacere e β ordinaria omografia di tensione.

Ora, per la nota legge di corrispondenza degli elementi di superficie orientati [7], indicata con α' l'omografia $\dfrac{dP}{dP'}$, si ha

$$(3)\qquad \bar{\mathbf{N}}\,d\bar{\Sigma}_c = \mathrm{R}\alpha'\,\bar{\boldsymbol{n}}'\,d\bar{\Sigma}_c'.$$

Introdotte le omografie $\xi \equiv \dfrac{dQ}{dQ'}$ e

$$(4)\qquad \lambda = \int_{h_1}^{h_2} \beta\mathrm{R}\alpha'\,dq_3 \quad , \quad \mu = \int_{h_1}^{h_2} \mathrm{QP} \wedge \beta\mathrm{R}\alpha'\,dq_3,$$

da (3) segue [8]

$$\int_{\bar{\Sigma}_c} \beta\bar{\mathbf{N}}\,d\bar{\Sigma}_c = \int_{\bar{c}'} \lambda\bar{\boldsymbol{n}}'\,d\bar{c}' = -\int_{\bar{S}'} \mathrm{grad}_{Q'}\,\lambda\,d\bar{S},$$

(7) Cfr. ad esempio A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*. Memoria 1ª, « Annali di Matematica », to. XXII, 1943, p. 42.

(8) Si tenga presente che, per una generica omografia γ che dipenda regolarmente da Q', è (cfr., per l'analoga formola nello spazio, loc. cit. (5), pp. 231–32)

$$\int_{c'} \gamma\boldsymbol{n}'\,dc' = -\int_{S'} \mathrm{grad}_{Q'}\,\gamma\,dS'$$

e che, detto inoltre $\boldsymbol{v}$ un vettore pure funzione regolare di Q', è (cfr. loc. cit. (5), pp. 185 e 226)

$$\mathrm{grad}_{Q'}(\boldsymbol{v} \wedge \gamma) = \boldsymbol{v} \wedge \mathrm{grad}_{Q'}\,\gamma + 2\mathbf{V}\left(\gamma\mathrm{K}\frac{d\boldsymbol{v}}{dQ'}\right).$$

$$\int_{\bar{\Sigma}_c} \Omega \bar{P}_c \wedge \beta \bar{N}\, d\Sigma_c = \int_{\bar{c}'} (\Omega \bar{Q}_c \wedge \lambda + \mu)\, \bar{n}'\, d\bar{c}' = -\int_{\bar{S}'} \operatorname{grad}_{Q'} (\Omega Q \wedge \lambda + \mu)\, dS' =$$

$$= -\int_{\bar{S}'} [\Omega Q \wedge \operatorname{grad}_{Q'} \lambda + \operatorname{grad}_{Q'} \mu + 2\, \mathbf{V}(\lambda K \xi)]\, dS'.$$

Pertanto, posto

$$\mathbf{R}\, dS' = dS' \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{F}\, k'\, dq_3' + f_1''\, d\Sigma_1' + f_2''\, d\Sigma_2' \tag{5}$$

e

$$\mathbf{M}\, dS' = dS' \int_{h_1}^{h_2} \overrightarrow{QP} \wedge \mathbf{F}\, k'\, dq_3' + \overrightarrow{QP_1} \wedge f_1''\, d\Sigma_1' + \overrightarrow{QP_2} \wedge f_2''\, d\Sigma_2', \tag{6}$$

le (1), (2) si possono scrivere

$$\int_{\bar{S}'} (\mathbf{R} - \operatorname{grad}_{Q'} \lambda)\, dS' = 0 \tag{1'}$$

$$\int_{\bar{S}'} [\Omega Q \wedge (\mathbf{R} - \operatorname{grad}_{Q'} \lambda) + \mathbf{M} - \operatorname{grad}_{Q'} \mu - 2\, \mathbf{V}(\lambda K \xi)]\, dS' = 0. \tag{2'}$$

A loro volta, le (1'), (2'), dovendo valere per ogni porzione $\bar{S}'$ di S', perfettamente equivalgono al verificarsi identico in S' delle equazioni

$$\operatorname{grad}_{Q'} \lambda = \mathbf{R}, \tag{I}$$

$$\operatorname{grad}_{Q'} \mu + 2\, \mathbf{V}(\lambda K \xi) = \mathbf{M}, \tag{II}$$

che sono appunto le proprietà di media dello stress a cui alludevo al n. 1.

Ad esse vanno associate le proprietà di media che derivano dalla condizione al contorno $\beta \mathbf{N} = f_c$, valevole su Σ_c, a cui fa riscontro, su Σ_c', la condizione $\beta R \alpha' \boldsymbol{n}' = f_c'$.

Precisamente da tale condizione al contorno segue, stante (4), in ogni punto di c',

$$\lambda \boldsymbol{n}' = \mathbf{R}_c \quad , \quad \mu \boldsymbol{n}' = \mathbf{M}_c, \tag{III}$$

con

$$\mathbf{R}_c = \int_{h_1}^{h_2} f_c'\, dq_3' \quad , \quad \mathbf{M}_c = \int_{h_1}^{h_2} \overrightarrow{Q_c P_c} \wedge f_c'\, dq_3'. \tag{7}$$

4. Si pensi ora associato ad ogni punto Q di S un triedro triretangolo $\mathcal{T} \equiv Q \boldsymbol{i}_1 \boldsymbol{i}_2 \boldsymbol{i}_3$ il cui orientamento vari regolarmente con Q.

Dirò $\mathfrak{I}$ l'insieme continuo a due parametri dei triedri $\mathfrak{T}$. Indicherò inoltre con ξ, ω (rispettivamente *omografia delle traslazioni* ed *omografia delle rotazioni*) le omografie definite dall'essere $\xi \boldsymbol{c}_3 = \omega \boldsymbol{c}_3 = 0$ mentre $\xi \boldsymbol{c}_r$ e $\omega \boldsymbol{c}_r$ $(r = 1, 2)$ dànno i vettori caratteristici, rispetto al polo Q, del moto a cui resta soggetto il triedro $\mathfrak{T}$ quando si interpreti q_r come variabile temporale.

L'omografia ξ non è altro che quella già introdotta al n. 3. Per quanto riguarda ω, osserverò che, dalle note formole di Poisson della cinematica dei sistemi rigidi, segue

$$\frac{d\boldsymbol{i}_r}{dQ'} = -\boldsymbol{i}_r \wedge \omega \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Si prenda ora in esame un qualunque spostamento infinitesimo regolare $\delta\mathfrak{I}$ dell'insieme $\mathfrak{I}$ di triedri, da intendersi definito assegnando lo spostamento infinitesimo δQ di Q e la rotazione infinitesima ψ di $\mathfrak{T}$ come funzioni regolari di Q (o Q′). È notoriamente

$$\delta\boldsymbol{i}_r = \psi \wedge \boldsymbol{i}_r \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Le proprietà di media (I), (II), (III) si possono ovviamente riassumere nell'unica equazione

$$\int_{S'} \{\delta Q \times (\mathbf{R} - \operatorname{grad}_{Q'} \lambda) + \psi \times [\mathbf{M} - \operatorname{grad}_{Q'} \mu - 2\mathbf{V}(\lambda K \xi)]\}\, dS' + \tag{IV}$$

$$+ \int_{c'} [\delta Q_c \times (\mathbf{R}_c - \lambda \boldsymbol{n}') + \psi \times (\mathbf{M}_c - \mu \boldsymbol{n}')]\, dc' = 0$$

intesa valida per ogni $\delta\mathfrak{I}$.

Tenendo presente la nota espressione del lavoro di un sistema di forze per un qualunque spostamento rigido infinitesimo dei punti di applicazione, è immediato convincersi che la (IV) altro non esprime che l'annullamento del lavoro totale delle forze agenti sulla lastra $\mathcal{S}$ (sia esterne che intime) in corrispondenza a quegli spostamenti (in genere non regolari) di $\mathcal{S}$ che derivano dagli spostamenti $\delta\mathfrak{I}$ quando si supponga solidale al generico triedro $\mathfrak{T}$ la fibra che passa per il suo vertice e la cui imagine su C′ è normale al piano $q_3 = 0$.

Si osservi ora che è (9):

(9) Basta che il vettore $\boldsymbol{v}$ e l'omografia γ dipendano regolarmente da Q′ perchè sia (cfr. per l'analoga formola nello spazio, loc. cit. (5), p. 234)

$$\int_{S'} \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad}_{Q'} \gamma\, dS' + \int_{c'} \boldsymbol{v} \times \gamma \boldsymbol{n}'\, dc' = -\int_{S'} I_1 \left(K \frac{d\boldsymbol{v}}{dQ'} \cdot \gamma\right) dS'.$$

$$(10)\qquad \int_{S'} \delta Q \times \operatorname{grad}_{Q'} \lambda \, dS' + \int_{c'} \delta Q_c \times \lambda \boldsymbol{n}' \, dc' = -\int_{S'} I_1 (K \delta\xi \cdot \lambda) \, dS',$$

$$(11)\qquad \int_{S'} \psi \times \operatorname{grad}_{Q'} \mu \, dS' + \int_{c'} \psi \times \mu \boldsymbol{n}' \, dc' = -\int_{S'} I_1 \left(K \frac{d\psi}{dQ'} \cdot \mu \right) dS'.$$

D'altra parte da (8), (9) segue, per $r = 1, 2, 3$,

$$\delta \frac{d\boldsymbol{i}_r}{dQ'} = -\boldsymbol{i}_r \wedge \delta\omega - (\psi \wedge \boldsymbol{i}_r) \wedge \omega,$$

$$\frac{d\delta \boldsymbol{i}_r}{dQ'} = -\boldsymbol{i}_r \wedge \frac{d\psi}{dQ'} - \psi \wedge \cdot \boldsymbol{i}_r \wedge \omega,$$

donde, sottraendo membro a membro e tenendo conto che

$$(12)\qquad \psi \wedge \cdot \boldsymbol{i}_r \wedge = \boldsymbol{i}_r \wedge \cdot \psi \wedge + (\psi \wedge \boldsymbol{i}_r) \wedge,$$

traesi poi

$$(13)\qquad \frac{d\psi}{dQ'} = \delta\omega - \psi \wedge \omega.$$

Posto

$$(14)\qquad \delta' \xi = \delta\xi - \psi \wedge \xi \quad , \quad \delta'\omega = \delta\omega - \psi \wedge \omega,$$

cioè, per la (9), indicate con $\delta'\xi$, $\delta'\omega$ le omografie verificanti le condizioni

$$(15)\qquad \boldsymbol{i}_r \times \delta' \xi \boldsymbol{c}_s = \delta (\boldsymbol{i}_r \times \xi \boldsymbol{c}_s) \quad , \quad \boldsymbol{i}_r \times \delta'\omega \boldsymbol{c}_s = \delta (\boldsymbol{i}_r \times \omega \boldsymbol{c}_s)$$
$$(r, s = 1, 2, 3),$$

la (IV) si può pertanto scrivere [10]

$$(V)\qquad \int_{S'} I_1 (K \delta' \xi \cdot \lambda + K \delta' \omega \cdot \mu) \, dS' + \int_{S'} (\delta Q \times \mathbf{R} + \psi \times \mathbf{M}) \, dS' +$$
$$+ \int_{c'} (\delta Q_c \times \mathbf{R}_c + \psi \times \mathbf{M}_c) \, dc' = 0.$$

La (V) è la proprietà di media di tipo variazionale che volevo stabilire. Essa, purchè la si intenda valida per ogni $\delta\mathfrak{I}$, esattamente riassume, come la (IV), le proprietà di media (I), (II), (III).

(10) Oltre (10), (11), (13) va tenuto presente che, qualunque siano il vettore $\boldsymbol{v}$ e l'omografia γ, è (cfr. loc. cit. (5), p. 109)

$$I_1 (\boldsymbol{v} \wedge \gamma) = -2 \boldsymbol{v} \times \mathbf{V}\gamma.$$

Astronomia. — *Sulla distribuzione dei poli delle orbite dei piccoli pianeti* [1]. Nota di L. GIALANELLA, presentata [2] dal Socio G. ARMELLINI.

1. INTRODUZIONE E GENERALITÀ. – In varie epoche gli astronomi hanno manifestato l'idea che alla distribuzione dei piccoli pianeti intorno al Sole (pur prescindendo da ogni ipotesi circa l'origine dell'anello asteroidico) non debba essere rimasta estranea l'influenza di Giove, il massimo fra i grandi pianeti del nostro sistema. Già Newcomb, nel 1862, aveva cercato di provare teoricamente tale influenza, tentando di dimostrare che l'attrazione di Giove sui pianetini aveva determinato una orientazione generale delle loro orbite, per cui i loro piani si sarebbero avvicinati a quello dell'orbita gioviale, mentre gli assi maggiori avrebbero assunto una direzione prossima a quella dell'asse maggiore di Giove. Si sarebbe dovuta avere quindi una specie di condensazione dei nodi e dei perielî dei pianetini verso il nodo e il perielio di Giove. Le statistiche successive sembrano convalidare – sebbene prendendo per base un numero relativamente piccolo di pianetini – questo assunto, mostrando la tendenza degli afelî e dei perielî ad approssimarsi ad un diametro poco discosto da quello corrispondente all'asse maggiore dell'orbita gioviale [3].

Nel presente lavoro, riprendendo l'antica idea di Newcomb, abbiamo voluto esaminare per altra via l'influenza di Giove sulla distribuzione delle orbite dei piccoli pianeti, servendoci dei metodi usati dal calcolo delle probabilità nel problema del tiro a bersaglio, e cioè considerando i punti rappresentativi dei poli delle orbite dei pianetini come una « rosa di tiro » con centro il punto rappresentativo del polo dell'orbita di Giove ed estendendo le ricerche a tutti i pianetini oggi conosciuti. Trattando, allora, la distribuzione di questi punti rispetto al polo dell'orbita gioviale con i metodi probabilistici (errori di situazione di un punto), esamineremo se tale distribuzione possa riguardarsi come dovuta alla legge del caso, oppure no.

Evidentemente, l'eventuale addensamento dei poli delle orbite dei piccoli pianeti intorno al polo dell'orbita gioviale (come appunto risulterà dalla presente indagine) corrisponderebbe a una tendenza alla sovrapposizione dei piani di quelle orbite con quello dell'orbita di Giove.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (Monte Mario).

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) G. FAYET, *Les petites planètes*. « Annuaire Bureau des longitudes », 1932; J. F. COX–L. DUFOUR, *Repartition dans l'espace des grandes axes des orbites des petites planètes*. « Bull. Acad. des Sciences de Belgique », 1930.

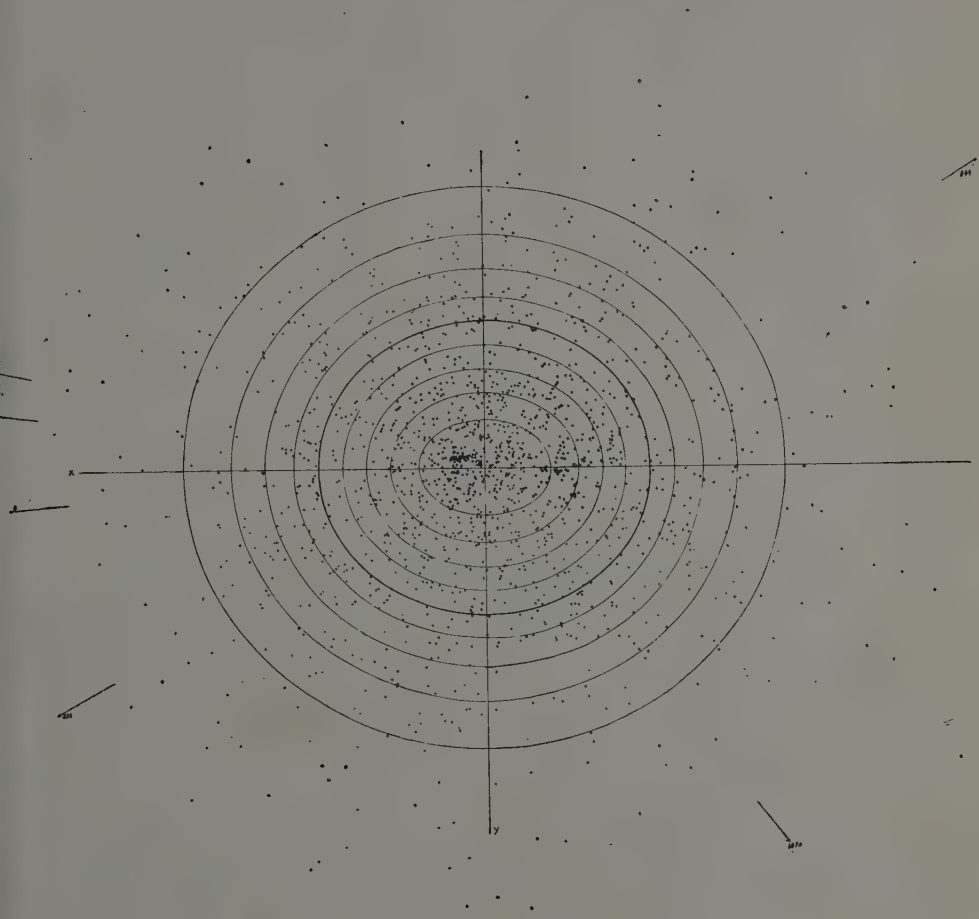
2. Rappresentazione piana dei poli delle orbite. – Dall'annuario « Kleine Planeten » dell'anno 1943 ho ricavato (per l'equinozio 1950,0) gli elementi dell'orbita di 1549 pianetini (i 1546 numerati e i 3 senza numero *Apollo*, *Adonis*, *Hermes*), ottenendo le coordinate eclitticali L_K ed l_K dei poli P_K delle orbite, con le formule: $L_K = 270° + \Omega_K$, $l_K = 90° - i_K$, dove Ω_K ed i_K sono le longitudini dei nodi e le inclinazioni delle orbite. La rappresentazione piana è stata poi fatta prendendo un sistema di coordinate polari avente per origine il polo dell'eclittica P_E, per anomalia L_K e per raggio vettore [1] una quantità proporzionale all'arco $P_E P_K$ e cioè a $90° - l_K$ od all'inclinazione i_K.

Alla stessa maniera abbiamo rappresentato il polo dell'orbita di Giove, che ha coordinate (al 1950,0 come per i pianetini): $L_G = 9°,9$; $l_G = 88°,7$.

Mentre per la costruzione grafica sono state utili le coordinate polari, per la risoluzione del problema con i metodi analitici sono più convenienti le coordinate cartesiane. Abbiamo quindi determinato le coordinate dei poli delle orbite con riferimento ad un sistema avente per origine il polo dell'eclittica P_E e l'asse x diretto verso il punto vernale (origine delle longitudini) con le formule: $x = i \cos L = i \operatorname{sen} \Omega$, $y = i \operatorname{sen} L = -i \cos \Omega$. Per Giove si è ottenuto: $x_G = 1{,}28$; $y_G = 0{,}22$, essendo $L_G = 9°,9$ ed $i_G = 90° - l_G = 1{,}3$.

3. Centro della « rosa di tiro ». – Abbiamo poscia calcolato le coordinate x_B e y_B del baricentro B della « rosa di tiro », costituita dai

(1) Volendo considerare – come a prima vista sembrerebbe più naturale – la rappresentazione di questi punti sul piano tangente alla sfera celeste, si potrebbe prendere come raggio vettore una quantità proporzionale a $\operatorname{tg} i_K$; in tal modo i punti rappresentativi sarebbero esattamente le proiezioni centrali dei poli delle orbite su tale piano. Ma, in primo luogo, potrebbe sorgere il dubbio se restano validi, per una tale sostituzione del bersaglio piano allo sferico, i postulati del calcolo delle probabilità. In secondo luogo, essendo assai piccoli per la grande maggioranza dei pianetini le inclinazioni i_K, si può pensare che – agli scopi puramente statistici della presente ricerca – sia sempre lecito supporre una proporzionalità tra gli archi $P_E P_K$ e i loro seni e le loro tangenti. Una terza ragione che ci ha fatto preferire la nostra rappresentazione alla proiezione, è scaturita da considerazioni teoriche, dalle quali risulta che essa si approssima maggiormente al bersaglio sferico che non l'usuale proiezione. Ad ogni modo, noi abbiamo eseguito, per i pianetini aventi grandi inclinazioni, anche la rappresentazione per proiezione centrale, trovando che la distribuzione relativa dei loro punti rappresentativi è rimasta sensibilmente la stessa sia con l'uno che con l'altro metodo. Infine, facciamo notare che la proiezione centrale aumenta l'addensamento dei punti rappresentativi verso il centro, venendo quindi a rafforzare le conclusioni del presente lavoro, in cui appare – già col metodo adoperato di rappresentazione – una decisa condensazione dei poli dell'orbita dei piccoli pianeti intorno al baricentro della « rosa di tiro » che è assai poco discosto dal punto rappresentativo del polo dell'orbita di Giove. Data anzi la grande vicinanza di questo punto al polo dell'eclittica, abbiamo senz'altro assunto P_E come centro delle coordinate. Questa semplificazione, mentre non produce alcun effetto sensibile nella rappresentazione piana dei poli delle orbite, permette invece un notevolissimo risparmio di calcoli.



Distribuzione dei poli delle orbite dei piccoli pianeti.
(L'origine delle coordinate rappresenta il baricentro; il piccolo quadrato vicino indica il polo dell'orbita di Giove).

punti rappresentativi dei poli delle orbite asteroidiche con le formule: $x_B = \frac{\Sigma x_K}{n}$, $y_B = \frac{\Sigma y_K}{n}$ ($n = 1549$), ottenendo: $x_B = +0{,}44$, $y_B = -0{,}27$. La distanza di B dal polo gioviale G è $d = 0{,}97$. Il baricentro B – secondo il postulato di Côtes – costituisce il punto di massima probabilità (centro delle probabilità), od il centro della rosa di tiro.

Momenti. – Dagli assi eclitticali siamo passati agli assi baricentrali (B, ξ, η), cartesiani ortogonali aventi per origine il baricentro B e direzioni parallele ai precedenti, ponendo: $\xi = x - 0{,}44$, $\eta = y + 0{,}27$. Con l'impiego di queste coordinate abbiamo calcolato i valori (*momenti statistici*):

$$(1) \qquad \begin{cases} M(\xi^2) = \dfrac{\Sigma(\xi^2)}{n} = +55{,}918 \\ M(\eta^2) = \dfrac{\Sigma(\eta^2)}{n} = +69{,}676 \\ M(\xi\eta) = \dfrac{\Sigma(\xi\eta)}{n} = +2{,}819\,. \end{cases}$$

4. Ellissi di probabilità. – Com'è noto [1], nel problema del bersaglio la probabilità affinchè un colpo abbia coordinate comprese tra ξ, η e $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ è data da $P(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta$, essendo:

$$(2) \qquad P(\xi\eta) = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\pi} \cdot e^{-(a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2)}.$$

Se poniamo:

$$(3) \qquad a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = l$$

(ove l è una costante positiva), si vede subito che le curve di eguale probabilità sono ellissi aventi per equazione la (3), la quale con una rotazione conveniente degli assi coordinati si può ridurre alla forma canonica:

$$(4) \qquad h^2 X^2 + k^2 Y^2 = l\,.$$

Come si sa dalla geometria analitica, i nuovi assi XY (*assi principali di probabilità*) formano con i precedenti un angolo φ dato da:

$$(5) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2M(\xi\eta)}{M(\xi^2) - M(\eta^2)}$$

(1) Cfr. per esempio: G. Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità*. Vol. II, Bologna, Zanichelli, 1926; J. Bertrand, *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars, 1888; C. Cranz, *Lehrbuch der Ballistik*. Erster Band: *Aussere Ballistik*, Springer, Berlin.

mentre h^2 e k^2 sono dati da:

$$(6) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2k^2} = M(\xi^2) + M(\eta^2) \\ \frac{1}{4h^2k^2} = M(\xi^2) \cdot M(\eta^2) - [M(\xi\eta)]^2. \end{cases}$$

Nel nostro caso, con i valori trovati per i momenti (6), si ottiene: $\frac{1}{h^2} = 140{,}432$, $\frac{1}{k^2} = 110{,}756$, $\operatorname{tg} 2\varphi = -0{,}40979$, $\varphi = 78° 52'$, e quindi le equazioni delle ellissi di uguale probabilità:

$$(7) \qquad \frac{X^2}{140{,}432} + \frac{Y^2}{110{,}756} = l$$

che risultano pertanto assai prossime a cerchi. Fra queste ellissi va considerata in modo particolare la *ellisse probabile*, che corrisponde al valore $\frac{1}{2}$ della probabilità $e^{-l} = \frac{1}{2}$, e cioè $l = 0{,}69315$. Essa divide il piano in due regioni di uguale probabilità, in ognuna delle quali dovrà trovarsi all'incirca la metà dei colpi del bersaglio.

Più generalmente, nelle applicazioni balistiche, si suole dividere il piano in 10 regioni di uguale probabilità $\left(\frac{1}{10}\right)$, e quindi tracciare le 9 ellissi di probabilità costante corrispondenti ai valori: $e^{-l} = 0{,}9\,;\, 0{,}8\,;\, \cdots\,;\, 0{,}2\,;\, 0{,}1\,;$ e cioè: $l_1 = 0{,}10537$, $l_2 = 0{,}22315$, $l_3 = 0{,}35668$, $l_4 = 0{,}51083$, $l_5 = 0{,}69315$, $l_6 = 0{,}91329$, $l_7 = 1{,}20398$, $l_8 = 1{,}60944$, $l_9 = 2{,}30259$. Delle 10 regioni la prima è interna alla prima ellisse, l'ultima è l'area esterna alla nona ellisse; le rimanenti sono le corone comprese tra due ellissi consecutive. In ognuna di queste regioni si trovano, se la rosa di tiro è « normale », all'incirca $\frac{1}{10}$ dei colpi sparati. Nel nostro caso *l'ellisse del 50 %* (per $l = 0{,}69315$) ha per equazione:

$$\frac{X^2}{97{,}340} + \frac{Y^2}{76{,}771} = 1$$

ed ha per semiassi: 9,86 e 8,77. Alla stessa maniera si ricavano le equazioni delle altre 8 ellissi di probabilità considerate e i rispettivi semiassi. Queste ellissi sono state tutte tracciate nel grafico riprodotto. E su di esso sarebbe facile procedere a dei confronti tra i valori forniti dal calcolo delle probabilità e quelli effettivamente ottenuti [1].

(1) Notiamo che, per ragioni tipografiche, il disegno originale da noi eseguito è stato riprodotto riducendolo alla quarta parte.

5. Controlli e conclusioni. - Questi confronti però riescono più sicuri - anche se di gran lunga maggiormente laboriosi - se si procede per via analitica, calcolando i singoli valori di l in corrispondenza di tutti i punti della rosa di tiro. Per questo però è conveniente – anzichè procedere ad una nuova conversione di coordinate per riferire i punti agli assi principali XY – ritornare agli antichi valori ξ, η partendo dalla corrispondente equazione dell'ellisse di probabilità (3), i cui coefficienti si ricavano dagli ottenuti valori dei momenti (1), mediante le formule seguenti [1]:

$$\frac{c}{ac - b^2} = 2\,M(\xi^2) \quad ; \quad \frac{a}{ac - b^2} = 2\,M(\eta^2) \quad , \quad -\frac{b}{ac - b^2} = 2\,M(\xi\eta)$$

dalle quali si ricava:

$$a = 0{,}00896 \quad ; \quad 2b = 0{,}000725 \quad ; \quad c = 0{,}00719$$

e quindi l'equazione dell'ellisse di probabilità diviene:

$$0{,}00896\,\xi^2 - 0{,}000725\,\xi\eta + 0{,}00719\,\eta^2 = l.$$

Sostituendo in questa le coordinate $\xi\eta$ di ogni punto, abbiamo ottenuto i valori corrispondenti di l per tutti i 1549 pianetini, formandone una lunga tabella, che siamo dolenti di non poter pubblicare per esteso. Tuttavia diamo nello specchio seguente il riassunto dei risultati ottenuti per la distribuzione dei punti nelle 10 regioni del piano individuate dalle 9 ellissi di probabilità considerate; l'ultima colonna contiene gli scarti tra il valore teorico 155 $\left(= \frac{1549}{10}\right)$ dei punti che sarebbero dovuti cadere in ognuna regione e quelli effettivamente ricavati nell'eseguito conteggio.

Regione del piano	Numero dei punti	Scarti	
$l \leq 0{,}105$	253	+ 98	dentro l'ellisse del 50 %
$0{,}106 \leq l \leq 0{,}223$	212	+ 57	
$0{,}224 \leq l \leq 0{,}357$	148	— 7	
$0{,}358 \leq l \leq 0{,}511$	121	— 34	
$0{,}512 \leq l \leq 0{,}693$	122	— 33	
$0{,}694 \leq l \leq 0{,}913$	148	— 7	fuori dell'ellisse del 50 %
$0{,}914 \leq l \leq 1{,}204$	138	— 17	
$1{,}205 \leq l \leq 1{,}609$	125	— 30	
$1{,}610 \leq l \leq 2{,}303$	127	— 28	
$2{,}304 \leq l$	155	0	

(1) Bertrand, loc. cit., p. 239.

Ora, in ognuna delle due regioni del piano separate dall'ellisse del 50 °/₀ sarebbero dovuti cadere 775 punti circa, mentre invece:

dentro l'ellisse del 50 °/₀ cadono 856 punti : scarto + 81

fuori dell'ellisse del 50 °/₀ cadono 693 punti : scarto — 82.

Ora, questi scarti sono troppo grandi per ritenersi *normali* per una dispersione gaussiana, giacchè si sa [1] che un evento di probabilità $\frac{1}{2}$ in ogni prova, dà su 1549 prove uno scarto quadratico medio di $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1549} = 19{,}7$. Onde si ha, rispetto alla previsione teorica, uno scarto quattro volte maggiore dei punti che sarebbero dovuti cadere dentro l'ellisse del 50 °/₀. Così pure teoricamente lo scarto quadratico medio per i punti contenuti in ognuna delle 10 regioni considerate, vale $\sqrt{\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot 1549} = 11{,}8$, mentre invece gli scarti osservati sono di gran lunga superiori; non solo ma la loro distribuzione relativa non presenta nemmeno il carattere accidentale, essendo gli scarti fortemente positivi per le due regioni più interne (e quindi più prossime al polo dell'orbita di Giove) e invece negativi nelle rimanenti.

Bisogna concludere, pertanto, che la dispersione dei punti rappresentativi dei poli delle orbite dei piccoli pianeti rispetto al polo dell'orbita gioviale non può ritenersi normale o gaussiana (determinata cioè dalla legge del caso), ma mostra invece un *forte addensamento* dei punti al centro della rosa di tiro e quindi intorno al polo dell'orbita di Giove, che da questo è assai poco distante. Onde ci sembra che resti dimostrata l'influenza pertubatrice del grande pianeta rispetto alla attuale distribuzione dei piani delle orbite dei pianetini.

Questa nostra indagine, condotta con materiale di gran lunga più abbondante ed omogeneo, viene quindi a confermare le precedenti ricerche, a partire da quella di Newcomb, mettendo in chiara evidenza l'influenza di Giove sulla ripartizione delle inclinazioni delle orbite dei pianetini, e quindi più generalmente sulla loro distribuzione intorno al Sole.

(1) Cfr. Castelnuovo, op. cit., p. 55.

Geodesia. — *Sulla compensazione rigorosa per direzioni delle catene geodetiche.* Nota di G. Boaga, presentata [1] dal Socio G. Cassinis.

Consideriamo una catena di triangoli I, II, III, ecc. ed indichiamo con (1), (2), (3), (4), ecc., secondo la disposizione destrogira indicata nella figura 1, le correzioni che si devono apportare alle direzioni osservate, che individuano i singoli angoli dei triangoli, onde ottenere le condizioni geometriche alle quali deve soddisfare la catena.

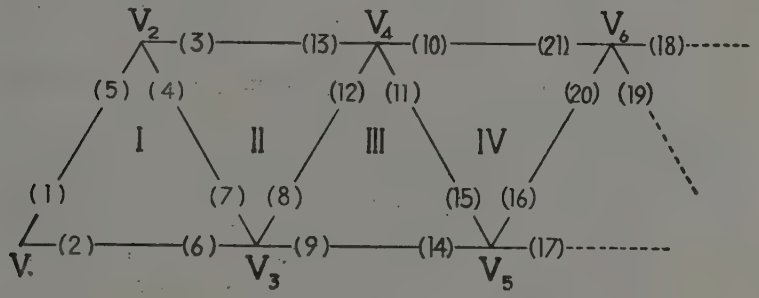


Fig. 1.

Se sono osservate tutte le direzioni in doppio, per ogni triangolo risultano misurati tutti gli angoli e le equazioni di condizione poligonali sono tante quanto è il numero dei triangoli che formano la catena. Il numero delle equazioni alle basi è invece dato dal numero delle basi misurate diminuite di uno. Se viene misurata una sola base, le equazioni di condizione si riducono soltanto a quelle poligonali.

Queste equazioni risultano lineari nelle correzioni direzionali ed ognuna caratterizzata dalla somma algebrica di sei di tali correzioni, a due a due consecutive, considerate con segno alternato. Nel caso della figura 1 dette equazioni risultano le seguenti:

$$[1]\quad \begin{cases} \text{Triangolo I} & -(1)+(2)-(4)+(5)-(6)+(7)=V_1 \\ \text{» II} & -(3)+(4)-(7)+(8)-(12)+(13)=V_2 \\ \text{» III} & -(8)+(9)-(11)+(12)-(14)+(15)=V_3 \\ \text{» IV} & -(10)+(11)-(15)+(16)-(20)+(21)=V_4 \\ \cdots\cdots & \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

dove con $V_1\ V_2\ V_3 \cdots$ si sono indicati i residui di osservazione (errori di chiusura dei triangoli, definiti dalla differenza fra la somma degli angoli interni e due angoli retti, maggiorati dal valore dell'eccesso sferico).

Il sistema [1] è detto *sistema generato.*

Indicando con $K_1, K_2, K_3,$ ecc. i *correlativi*, si ottengono le seguenti *equazioni correlate*, dalle quali è possibile dedurre i valori delle correzioni delle direzioni per mezzo dei valori dei correlativi:

$$[2]\quad \begin{cases} (1) = -K_1 & (6) = -K_1 & (11) = -K_3 + K_4 \\ (2) = +K_1 & (7) = +K_1 - K_2 & (12) = -K_2 + K_3 \\ (3) = -K_2 & (8) = +K_2 - K_3 & (13) = +K_2 \\ (4) = -K_1 + K_2 & (9) = +K_3 & (14) = -K_3 \\ (5) = +K_1 & (10) = -K_4 & (15) = +K_3 - K_4 \text{ ecc.} \end{cases}$$

Eliminando dai sistemi [1] e [2] le correzioni (1), (2), ecc. si ottiene il seguente *sistema normale*:

$$[3]\quad \begin{cases} +6K_1 - 2K_2 = V_1 \\ -2K_1 + 6K_2 - 2K_3 = V_2 \\ -2K_2 + 6K_3 - 2K_4 = V_3 \\ -2K_3 + 6K_4 - 2K_5 = V_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

In base ai criteri moderni sulle compensazioni delle reti trigonometriche, è possibile ricavare direttamente il sistema normale [3] senza essere obbligati a ricavare il sistema generato [1], quello delle correlate [2] e senza essere obbligati ad effettuare la eliminazione accennata. Ciò si ottiene per mezzo di un procedimento speciale denominato della *rappresentazione puntuale* (Friedrich). Ad ogni triangolo si fa corrispondere un punto del piano la cui denominazione è quella del triangolo considerato. Nel caso della figura 1 la rappresentazione è data dalla figura 2.

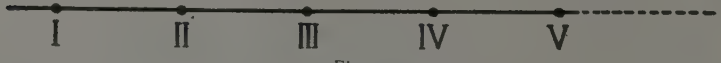


Fig. 2.

Ad ogni punto I, II,... si fa corrispondere il coefficiente quadratico + 6, il quale accompagna i correlativi $K_1, K_2, \cdots$ corrispondenti ai triangoli I, II,...; ad ogni punto laterale (destro e sinistro, o solo destro, o solo sinistro, se il punto che si considera è un estremo della rappresentazione puntuale)

si fa corrispondere il coefficiente — 2, il quale accompagna il correlativo omonimo al punto considerato. Ad ogni punto che si considera corrisponde una equazione. Si comincia dal primo punto e si procede da punto a punto fino all'ultimo (1).

Desiderando, si possono dividere tutte le equazioni per 2. Nel caso particolare di quattro soli triangoli, la matrice del sistema normale che così si ottiene, cioè la matrice costituita dai coefficienti delle incognite (ossia dai coefficienti dei correlativi) di tutte e quattro le equazioni è la seguente:

[4]

Equazioni	Incognite K_1	K_2	K_3	K_4
I	+ 3	— 1	·	·
II	— 1	+ 3	— 1	·
III	·	— 1	+ 3	1
IV	·	·	— 1	+ 3

Tale matrice, denominata *matrice normale angolare*, si può facilmente generalizzare ed estendere al caso di quante si vogliano triangoli. Indicando con N_{n+1} il valore del determinante di ordine n corrispondente alla matrice di n^2 termini, si hanno le relazioni:

$$N_2 = 3 \qquad N_3 = 8 \qquad N_4 = 21 \quad \text{ecc.}$$

Sviluppando il determinante continuante di ordine $n - 1$, corrispondente alla [4] generalizzata, secondo gli elementi della prima riga, si trova la seguente relazione ricorrente:

[5] $$N_n = 3\,N_{n-1} - N_{n-2}$$

che permette la determinazione di N_n per mezzo dei due precedenti N_{n-1}, N_{n-2}. Volendo ritenere valida la [5] anche nel caso di $n = 2$, è necessario fare le posizioni:

[6] $$N_0 = 0 \qquad N_1 = 1$$

La serie divergente

[7] $$N_0, N_1, N_2, N_3 \cdots N_n \cdots$$

(1) Cfr. A. Marcantoni, *Fondamenti di moderni metodi di calcolo per la compensazione rigorosa delle reti geodetiche.* « Bollettino Geodetico dell'Istituto Geografico Militare », Firenze, 1944.

è detta *serie di Schimper*; i suoi termini, tenendo conto delle posizioni [6], sono tutti determinati dalla [5].

In essa, però, ogni termine si può determinare dalla somma di tutti i precedenti, mediante la:

$$[8] \qquad N_n = 1 + N_{n-1} + \sum_{1}^{n-1} N_r \,.$$

Come dimostreremo, la serie [7] di Schimper, ha un ruolo di grande importanza nella risoluzione del sistema normale [3].

Col procedimento di Gauss delle successive sostituzioni applicato al sistema normale [3], si perviene al seguente *sistema risolvente*:

$$[9] \qquad \begin{cases} \text{equazione } \xi \; + 6\,K_1 - 2\,K_2 = \cdots \\ \text{» } \xi_1 \; + \frac{16}{3} K_2 - 2\,K_3 = \cdots \\ \text{» } \xi_2 \; + \frac{42}{8} K_3 - 2\,K_4 = \cdots \\ \text{» } \xi_3 \; + \frac{110}{21} K_4 - 2\,K_5 = \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\

$$[aa] = 6 = \frac{2\,N_2}{N_1}$$

$$[bb\ 1] = 6 - \frac{4}{[aa]} = \frac{16}{3} = \frac{2\,N_3}{N_2}$$

$$[cc\ 2] = 6 - \frac{4}{[bb\ 1]} = 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{[aa]}} = \frac{42}{8} = \frac{2\,N_4}{N_3}$$

$$[dd\ 3] = 6 - \frac{4}{[cc\ 2]} = 6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{6 - \frac{4}{[aa]}}} = \frac{110}{21} = \frac{2\,N_5}{N_4}$$

.....

Osservando la forma del sistema [9] ed i risultati ora messi in evidenza, si trae la seguente regola pratica per scrivere i primi membri delle equazioni del sistema risolvente, senza per questo essere obbligati a tutti i passaggi precedenti, di cui abbiamo fatto cenno: *ogni equazione risolvente ha il primo membro formato da due termini che contengono due correlativi successivi e di cui l'indice del primo correlativo corrisponde al numero della equazione che si considera. Tali coefficienti sono definiti dalla relazione affatto generale:*

[10] $$\text{correlativo } K_m \quad \frac{2\,N_{m+1}}{N_m} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots n)$$

dove gli N *sono i termini della serie* (7). *I correlativi successivi* K_{m+1} *che seguono* K_m *nella equazione m–esima sono accompagnati dal coefficiente* — 2. *I secondi membri (termini noti) sono invece definiti dalle:*

equazione ξ $\quad \frac{1}{N_1}(N_1 V_1)$

» ξ_1 $\quad \frac{1}{N_2}(N_1 V_1 + N_2 V_2)$

» ξ_2 $\quad \frac{1}{N_3}(N_1 V_1 + N_2 V_2 + N_3 V_3)$

» ξ_3 $\quad \frac{1}{N_4}(N_1 V_1 + N_2 V_2 + N_3 V_3 + N_4 V_4)$

....

onde la seguente regola generale per il termine noto della m–esima equazione, compendiata nella espressione:

[10′] $$\frac{1}{N_m}\sum_1^m{}_r\, N_r V_r .$$

E poichè l'ultima equazione (n–esima) del sistema [9] contiene una sola incognita (il correlativo K_n), il cui coefficiente è per quanto detto $\frac{2 N_{n+1}}{N_n}$, così si deduce per il valore dell'ultimo correlativo l'espressione:

$$[11] \qquad K_n = \frac{1}{2 N_{n+1}} \sum_1^n{}_r N_r V_r$$

e per quello precedente:

$$[12] \qquad K_{n-1} = \frac{N_{n-1}}{2} \left\{ \frac{1}{N_{n+1} N_n} \sum_1^n{}_r N_r V_r + \frac{1}{N_n N_{n-1}} \sum_1^{n-1}{}_r N_r V_r \right\}.$$

Per il correlativo generale K_{n-m} si trova facilmente:

$$[13] \qquad K_{n-m} = \frac{N_{n-m}}{2} \left\{ \frac{1}{N_{n+1} N_n} \sum_1^n{}_r N_r V_r + \frac{1}{N_n N_{n-1}} \sum_1^{n-1}{}_r N_r V_r + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{N_{n-1} N_{n-2}} \sum_1^{n-2}{}_r N_r V_r + \cdots + \frac{1}{N_{n-m+1} N_{n-m}} \sum_1^{n-m}{}_r N_r V_r \right\}.$$

dalla quale, ponendo $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, $\cdots$ $m = n - 1$, si trovano successivamente tutti i correlativi $K_{n-1}, K_{n-2} \cdots K_3, K_2, K_1$.

Date le facili espressioni trovate con le [11], [12], [13] si può concludere che: *il problema generale della compensazione delle catene trigonometriche formate da un numero qualsivoglia di triangoli si può risolvere direttamente per mezzo delle formule stabilite senza essere obbligati per ogni caso particolare a determinare le equazioni generate, quelle delle correlate, ricavare per sostituzione il sistema normale ed infine quello risolvente.* Le operazioni aritmetiche che è necessario effettuare applicando le [11], [12], [13] sono semplici operazioni che si possono eseguire con l'ausilio di una macchina calcolatrice, una volta che siano stabiliti i valori dei residui $V_1, V_2, V_3 \cdots$, in quanto i termini della serie di Schimper in esse introdotti valgono:

$N_0 = 0$	$N_5 = 55$	$N_{10} = 6765$
$N_1 = 1$	$N_6 = 144$	$N_{11} = 17711$
$N_2 = 3$	$N_7 = 377$	$N_{12} = 46368$
$N_3 = 8$	$N_8 = 987$	$N_{13} = 121393$
$N_4 = 21$	$N_9 = 2584$	$N_{14} = 317811$ (1)
		ecc.

(1) Il Marcantoni, nella Memoria citata, ha calcolato la serie (7) fino al venticinquesimo termine, trovando per N_{24} un numero di dieci cifre (4807526976). L'N_{100} invece è costituito da un numero di 42 cifre.

ed i prodotti di due termini successivi si possono ricavare con la seguente formula ricorrente, di facile dimostrazione:

$$[14] \qquad N_{n+1} N_n = N_n N_{n-1} + N_{2n}$$

senza essere obbligati ad effettuare via via i singoli prodotti.

La [14] rappresenta un'altra caratteristica delle matrici normali angolari.

Con l'applicazione della [14], si deducono i valori:

$$N_2 N_1 = 3 \qquad N_6 N_5 = 7920$$
$$N_3 N_2 = 24 \qquad N_7 N_6 = 54288$$
$$N_4 N_3 = 168 \qquad N_8 N_7 = 372099$$
$$N_5 N_4 = 1155 \qquad \text{ecc.}$$

Ottenuti i valori delle correlate, quelle delle correzioni direzionali sono definite dalla [2] adottando le notazioni della figura 1.

Con l'osservazione fatta è resa dunque automatica la risoluzione del sistema normale proveniente dalle sole equazioni poligonali. Se si introducono anche le equazioni delle basi, conviene in un primo tempo risolvere le equazioni poligonali con il procedimento indicato, indi considerare il sistema generato formato da tutte le equazioni (poligonali e delle basi) imponendo lo zero come residuo di osservazione in tutte le equazioni poligonali e attribuendo ai valori delle correzioni delle direzioni nelle equazioni delle basi i valori dianzi ricavati, aumentati da opportuni contributi (incogniti).

Poichè i termini noti delle equazioni poligonali sono ora tutti nulli, risulta facile la determinazione di questi ulteriori contributi incogniti, secondo procedimenti noti forniti dalla « teoria della compensazione delle reti geodetiche » [1].

(1) Cfr. G. Boaga, *Elementi della teoria delle probabilità e teoria degli errori con applicazioni topografiche e geodetiche.* Firenze 1943, con i tipi dell'I. G. M.

Fisica (Fisica matematica). — *Effetto di una cavità chiusa sulle autofrequenze di una piastra incastrata.* Nota di I. Barducci, presentata [1] dal Socio U. Bordoni.

1. – Premessa.

Il diaframma di un ricevitore telefonico può essere schematizzato in una piastra incastrata al bordo, che si muova sotto l'azione di una forza applicata al centro. La teoria permette di calcolare le autofrequenze della piastra in funzione delle sue dimensioni geometriche e delle costanti fisiche del materiale, ma i valori così ottenuti si riferiscono al caso ideale di una piastra vibrante nel vuoto. Il diaframma telefonico, invece, è accoppiato acusticamente da una parte con la cavità chiusa limitata dalla scatola del ricevitore e dall'altra con la cavità auricolare. Nelle applicazioni interessa dunque conoscere le autofrequenze della piastra quando essa è accoppiata con sistemi acustici.

È da tempo noto [2] che l'accoppiamento con una cavità innalza sensibilmente l'autofrequenza fondamentale e in modo notevolmente minore le autofrequenze superiori. Ci si propone di determinare quantitativamente questo effetto, calcolando come variano le autofrequenze e i loro rapporti quando la piastra sia accoppiata con una cavità piccola rispetto alla lunghezza d'onda del suono.

2. – Metodo di calcolo e ipotesi semplificative.

Lo studio analitico del moto di una piastra incastrata accoppiata con una cavità offre difficoltà notevoli, ma sotto alcune ipotesi semplificative se ne può fare una trattazione approssimata, i cui risultati concordano con quelli sperimentali [3].

La presenza di un sistema acustico modifica la forma assunta dalla piastra durante il moto. Tuttavia, nel caso in esame, la cavità è piccola

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) W. West, D. Mcmillan, *Characteristic of telephone Reicevers.* « Inst. Electr. Eng. J. », *75*, 1934, p. 250.

(3) Si potrebbe seguire il metodo impiegato da: M. Lax, *The effect of radiation on the vibrations of a circular diaphragm.* (« J. A. S. A. », *16*, 1944, p. 5), per lo studio dell'effetto dell'aria sulle autofrequenze di una piastra incastrata posta in uno schermo piano infinito e irradiante da una faccia. Non sembra, però, che la maggiore complicazione sia giustificata nel caso presente.

rispetto alla lunghezza d'onda in quasi tutto il campo delle frequenze telefoniche, e quindi la pressione acustica è sensibilmente uniforme nel suo interno. L'accoppiamento con la cavità equivale, allora, all'applicazione di una pressione uniforme sulla superficie della piastra vibrante. In queste condizioni si può ritenere che la deformata incognita della piastra, vibrante nell'aria, sia poco diversa da quella che si avrebbe nel vuoto; in via approssimata si può quindi supporre che le due deformate siano eguali. Ciò equivale ad imporre un debole vincolo cinematico alla piastra vibrante nell'aria e l'effetto di questo vincolo è trascurabile poichè, per il teorema di Rayleigh (1), le autofrequenze sono stazionarie rispetto ad esso.

Per le ipotesi fatte l'effetto della cavità equivale semplicemente ad un irrigidimento della piastra, come se il modulo di elasticità del materiale venisse aumentato, in modo diverso per le varie autofrequenze.

Il carattere stazionario delle autofrequenze nei riguardi della deformata, permette di studiare separatamente l'effetto della cavità su ciascuna di esse. In corrispondenza di ognuna delle risonanze si può sostituire alla piastra un sistema ad un grado di libertà, dotato di massa $\mathfrak{M}$ [g.] e rigidezza meccanica $\mathfrak{D}$ [dine. cm^{-1}], tale che la sua frequenza di risonanza e l'energia cinetica coincidano con quelle relative alla piastra per l'autofrequenza considerata. Poichè si può trascurare la variazione di forma della piastra per effetto del carico acustico, è logico assegnare al sistema equivalente uno spostamento uguale a quello *medio* sulla superficie della piastra, e riferire ad esso le costanti $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{D}$. L'azione della cavità è allora assimilabile a quella di una rigidezza $\mathfrak{D}'$ aggiunta in serie ad $\mathfrak{M}$ e a $\mathfrak{D}$, espressa da:

$$(1) \qquad \mathfrak{D}' = \frac{\rho_0 c^2 S^2}{V}$$

dove: ρ_0 = densità dell'aria [g. cm^{-3};] c = velocità del suono nell'aria [cm. sec^{-1}]; V = volume della cavità [cm^3] S = area totale della piastra, interna alla circonferenza del vincolo [cm^2].

3. – Calcolo dello spostamento medio e delle costanti equivalenti per i vari modi di vibrazione.

Il calcolo dello spostamento medio Ξ_m e della massa equivalente $\mathfrak{M}$, per ognuna delle autofrequenze si semplifica osservando che, per effetto dell'accoppiamento con la cavità, variano solamente le autofrequenze dei *modi simmetrici* della piastra (con soli cerchi nodali), alle quali compete uno spostamento medio diverso da zero. Invece le autofrequenze dei *modi asimmetrici* (con soli diametri nodali) e *misti* non cambiano, perchè ad essi

(1) Rayleigh, *Theory of Sound*, vol. I, p. 109.

corrisponde uno spostamento medio nullo. A causa della simmetria rispetto al centro, lo spostamento Ξ_m e l'energia cinetica W_T sono allora espressi da:

$$(2) \qquad \Xi_m = \frac{1}{S}\int \Xi\, dS = \frac{2}{a^2}\int_0^a \Xi\, r dr$$

$$(3) \qquad W_T = \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\, U_m^2 = \frac{1}{2}\int U^2\, dm = \pi\rho h \int_0^a U^2\, r dr$$

dove: a = raggio della piastra interno alla circonferenza del vincolo;
r = distanza dal centro;
ρ = densità del materiale;
h = spessore;
Ξ = spostamento di un punto generico;
$U = j\omega\Xi$ = velocità;
$U_m = j\omega\Xi_m$ = velocità media.

Dalla (3) la massa equivalente è:

$$(4) \qquad \mathfrak{M} = \frac{2\pi\rho h\int_0^a U^2\, r dr}{U_m^2} = \frac{2\pi\rho h\int_0^a \Xi^2\, r dr}{\Xi_m^2}.$$

Come è noto [1] l'espressione locale dello spostamento per i modi simmetrici di una piastra circolare, occorrente per il calcolo di Ξ_m e di $\mathfrak{M}$, è:

$$(5) \qquad \Xi = A\,[J_0(kr) + \lambda_n J_0(jkr)]$$

dove: J_0 = funzione di Bessel di ordine zero; $k = \sqrt{\omega}/c$. Il parametro $c = \sqrt[4]{Eh^2/12\rho(1-\sigma^2)}$ dipende dalle costanti fisiche del materiale; E = modulo di Young [dine. cm^{-2}]; σ = coeff. di Poisson, ρ = densità [g. cm^{-3}] A e λ_n sono due costanti (n = numero dei cerchi nodali, oltre quello di incastro). Tenendo conto anche delle condizioni di incastro, si trova facilmente: $\lambda_n = J_0(ka)/J_0(jka)$ e per gli autovalori (ka) corrispondenti ai primi modi simmetrici: $\lambda_0 = +0.0557$; $\lambda_1 = -0.00253$; $\lambda_2 = +0.000111$; cioè λ_n decresce assai rapidamente al crescere del numero dei cerchi nodali.

Note le λ_n si calcola lo spostamento medio, o meglio ancora, il valore α_n del rapporto fra lo spostamento medio Ξ_m e lo spostamento del centro

(1) Vedi per es. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, vol. 2, p. 374 e segg., oppure *Handbuch der Physik*, vol. 8, Akustik, p. 236 e segg.

Ξ_0 [1]; rapporto che può essere chiamato *coefficiente di spostamento medio*. Per la (2) servendosi della (5), si ha con semplici trasformazioni:

$$\alpha_n = \frac{\Xi_m}{\Xi_0} = \frac{4}{1+\lambda_n} \cdot \frac{J_1(ka)}{(ka)} \tag{6}$$

dove: J_1 = funzione di Bessel del primo ordine.

Anche per la massa, conviene calcolare i valori del rapporto $\frac{\mathfrak{M}}{m}$ fra la massa equivalente $\mathfrak{M}$ (per ognuno dei modi simmetrici) e la massa m della piastra (ossia della sua parte interna alla circonferenza del vincolo: $m = \pi a^2 h \rho$) considerata vibrante come un pistone rigido. Si ha dalla (4): $\frac{\mathfrak{M}}{m} = \frac{\beta}{\alpha^2}$, con

$$\beta = \frac{\frac{2}{a^2}\int_0^a \Xi^2 \, r dr}{\Xi_0^2} \cdot \tag{7}$$

Questa formula, mediante la (5) dà per β l'espressione:

$$\beta_n = \frac{2}{(1+\lambda_n)^2} \cdot J_0^2(ka). \tag{8}$$

La pulsazione propria del primo modo della piastra nel vuoto è data, come è noto, da:

$$\omega_{d_0} = 2\pi f_{d_0} = 2{,}949 \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma)^2}} \, \frac{h}{a^2} \cdot \tag{9}$$

I rapporti η_0 delle autofrequenze superiori a quella del primo modo sono raccolti nella Tabella I. Si calcolano quindi immediatamente le rigidezze equivalenti della piastra per i vari modi di vibrazione, mediante la relazione:

$$\omega_{d_n}^2 = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}} \cdot$$

4. – Effetto di una cavità chiusa sulle autofrequenze.

L'effetto di una cavità chiusa si calcola oramai immediatamente. Per quanto si è detto alla fine del § 2 vale una relazione del tipo:

$$2\pi f_n = \sqrt{\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'}{\mathfrak{M}}} = \sqrt{(2\pi f_{d_n})^2 + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{M}}} = 2\pi f_{d_n} \sqrt{1+\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{D}}} \tag{10}$$

(1) Invero nelle presenti considerazioni è sufficiente un valore relativo degli spostamenti locale e medio; quindi tutti gli spostamenti possono essere divisi per una costante quale, per esempio, l'ampiezza di spostamento del centro. Dalla (5) ponendo $r = 0$ si trova per lo spostamento del centro l'espressione: $\Xi_0 = A(1+\lambda_n)$.

dove: fd_n = autofrequenza con n cerchi nodali *nel vuoto*; f_n = la stessa autofrequenza della piastra sulla cavità; $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{D}$ = costanti equivalenti della piastra per l'autofrequenza considerata; $\mathfrak{D}'$ = rigidezza meccanica equivalente della cavità, data dalla (1).

Nei calcoli, piuttosto che far comparire le rigidezze $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}'$, conviene introdurre il parametro:

$$f_V = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{D}'}{m}} \tag{11}$$

il quale rappresenta la frequenza propria di un sistema ideale costituito da un pistone rigido di area S e di massa m eguali, rispettivamente, all'area e alla massa *totali* della piastra, che oscilli per effetto della sola rigidezza acustica della cavità. Introducendo anche la frequenza f_{d_0} del modo fondamentale della piastra nel vuoto, e i rapporti della generica autofrequenza con n cerchi nodali a quella del modo fondamentale (riportati nella tab. I) e ponendo $\gamma_n = \frac{1}{\eta_{n_0}} \cdot \frac{\alpha_n^2}{\beta_n}$ si ricava la seguente espressione per l'autofrequenza f_n del generico modo nell'aria.

$$\boxed{f_n = \eta_{n_0} f_{d_0} \sqrt{1 + \gamma_n \left(\frac{f_V}{f_{d_0}}\right)^2}.} \tag{12}$$

Come si vede il valore del coefficiente di correzione per cui deve essere moltiplicata l'autofrequenza nel vuoto per avere quella nell'aria è espresso in funzione del solo rapporto f_V/f_{d_0} fra frequenza f_V del sistema ideale prima definito e frequenza f_{d_0} del primo modo della piastra nel vuoto. Questo rapporto può essere preso come parametro caratteristico del sistema piastra–cavità; in esso f_{d_0} è l'elemento caratteristico della piastra f_V quello della cavità (in relazione con la data piastra).

Nella tabella I sono riportati i valori di γ_n per i primi modi simmetrici, oltre a quelli di α_n e β_n. Si vede che i valori di γ_n diminuiscono abbastanza rapidamente col numero n dei cerchi nodali.

5. – Rapporti delle autofrequenze.

Nelle applicazioni conviene prendere in considerazione, piuttosto che le autofrequenze, i loro rapporti alla frequenza fondamentale o a quella di uno dei modi superiori. Infatti le frequenze proprie di un sintema continuo (filo, sbarra, membrana, piastra ecc.) dipendono in modo sostanziale dalle dimensioni e dalle costanti fisiche del materiale; i loro rapporti invece

dipendono solamente dalla forma del sistema vibrante e dal tipo di vincolo [1] che si traduce nelle condizioni al contorno, e possono essere considerati caratteristici del tipo di sistema continuo.

TABELLA I.

Piastra circolare incastrata. Parametri caratteristici dei modi di vibrazione.

Modo di vibrazione	η_0	η_1	α	β	γ
	1	—	+ 0.312	0.183	0.532
	2.082	1	—	—	—
	3.414	1.643	—	—	—
	3.894	1.875	— 0.131	0.102	0.0111
	4.995	2.400	—	—	—
	5.955	2.861	—	—	—
	6.9	3.3	—	—	—
	8.280	3.978	—	—	—
	8.723	4.191	+ 0.0736	0.0676	0.00105

$\eta_0 = \frac{f}{f_{d_0}}$ = rapporti delle autofrequenze superiori f alla fondamentale f_{d_0};

$\eta_1 = \frac{f}{f_{d_1}}$ = rapporti delle autofrequenze superiori f a quella del 1° modo asimmetrico f_{d_1};

$\alpha = \frac{\Xi_m}{\Xi_0}$ coefficiente di spostamento medio; (6);

$\beta = \frac{\mathfrak{M}}{m} \alpha^2$ = coefficiente di massa equivalente (8);

$\gamma = \frac{1}{\eta_0^2} \frac{\alpha^2}{\beta}$ = coefficiente per il calcolo delle autofrequenze mediante la (12).

(1) In generale si ha, veramente, una piccola dipendenza dalle caratteristiche del materiale, in particolare dal coeff. di Poisson σ (v. per la piastra circolare libera: *Handbuch der Physik*, v. 8. Akustik, p. 233). Nella piastra incastrata, però, per il tipo di condizioni al contorno i rapporti delle autofrequenze non dipendono nemmeno da σ, pur dipendendone le singole autofrequenze.

L'introduzione di un vincolo in un sistema continuo qualsiasi produce una variazione significativa nei rapporti delle autofrequenze. Nel caso di una piastra accoppiata con una cavità chiusa si vede facilmente, da quanto precede, che i rapporti delle autofrequenze dei modi simmetrici fra loro risultano tanto più diminuiti quanto più piccola è la cavità; i rapporti delle autofrequenze dei modi simmetrici a quelle dei modi asimmetrici e misti che li precedono, risultano leggermente aumentati.

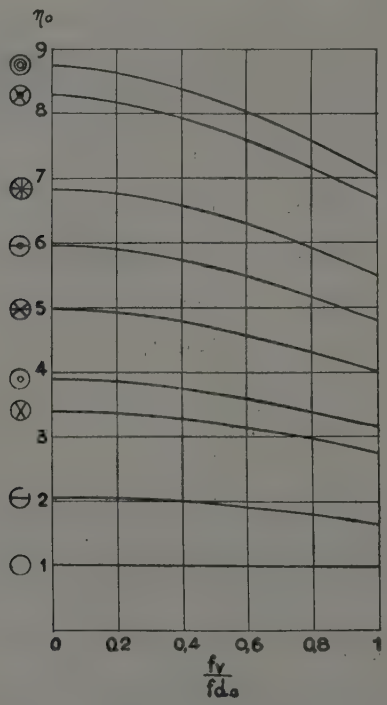


Fig. 1. – Rapporti η_0 delle autofrequenze superiori alla fondamentale, in funzione di f_V / f_{d_0}.

Quindi i rapporti riferiti alla fondamentale si riducono tutti, principalmente per l'innalzamento della fondamentale, che è l'effetto prevalente; lo stesso però non è sempre vero per i rapporti riferiti ad uno dei modi superiori. Per esempio fra quelli relativi al primo modo asimmetrico – con un diametro nodale – restano inalterati i rapporti caratteristici dei modi asimmetrici e misti, mentre aumentano, seppure di poco, quelli dei modi simmetrici superiori, per effetto dell'aumento delle rispettive autofrequenze.

I risultati precedenti sono applicabili, con buona approssimazione, soltanto ai modi di vibrazione più bassi. Siccome i rapporti riferiti alle autofrequenze superiori dipendono assai poco dall'accoppiamento con l'aria essi sono atti ad individuare la natura del sistema oscillante indipendentemente dall'ambiente. Quelli relativi alla fondamentale caratterizzano invece meglio il sistema complesso piastra–aria.

Le curve della fig. 1, insieme con l'espressione (9) della f_{a_0}, permettono di calcolare agevolmente le autofrequenze di una piastra accoppiata con una cavità qualsiasi.

Quando sia presente una cavità su ciascuna delle due facce della piastra vibrante, si può usare ancora lo stesso diagramma, purchè si tenga presente che, nel calcolo della f_V le rigidezze $\mathfrak{D}'$ delle due cavità debbono essere considerate in serie e quindi sommate.

6. – Conclusione.

L'effetto di una cavità chiusa, piccola rispetto alla lunghezza d'onda del suono, sul moto di una piastra circolare incastrata è stato studiato con un metodo approssimato, i cui risultati però sono assai bene in accordo con l'esperienza.

L'accoppiamento con una cavità ha come effetto principale l'innalzamento dell'autofrequenza fondamentale. Esso lascia invece inalterate le frequenze dei modi asimmetrici e misti, mentre innalza, seppure di poco, le frequenze dei modi simmetrici superiori. L'autofrequenza fondamentale ed i rapporti delle autofrequenze superiori ad essa riferiti, variano quindi notevolmente con il volume della cavità; invece le autofrequenze superiori ed i rapporti riferiti ad una di esse sono assai più caratteristici della piastra incastrata.

Si osserva infine che, con il metodo di calcolo usato è anche possibile esaminare l'effetto di un sistema acustico più complesso, costituito per esempio da un risuonatore e calcolare la caratteristica di frequenza della pressione acustica nell'interno della cavità.

L'Autore è grato al prof. A. Giacomini, direttore dell'Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino » per i suggerimenti ricevuti nella stesura della presente Nota.

Fisica (Fisica matematica). — *Sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati* [1]. Nota di A. GHIZZETTI, presentata [2] dal Corrisp. M. PICONE.

In questo lavoro viene considerato il problema della determinazione della configurazione di equilibrio di una piastra a forma di striscia illimitata, supposta incastrata lungo i lati e soggetta a un carico continuo, comunque distribuito. Con riferimento alla striscia $S\,(0 \leq x \leq 1)$, tale problema si traduce analiticamente nella ricerca di una funzione $u(x,y)$ verificante le condizioni:

$$(1)\qquad \Delta\Delta u = F(x,y)\ (\text{per } 0 < x < 1)\quad ,\quad u(0,y) = u(1,y) = 0\,,$$
$$u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0\,,$$

con $F(x,y)$ funzione assegnata [3].

Una risoluzione formale delle (1) si può ottenere considerando la trasformata di Fourier

$$(2)\qquad u^*(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda y} u(x,y)\,dy\,,$$

per la quale devono sussistere le

$$(3)\qquad \frac{\partial^4 u^*}{\partial x^4} - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \lambda^4 u^* = F^*(x,\lambda)\quad ,\quad u^*(0,\lambda) = u^*(1,\lambda) = 0\,,$$
$$u_x^*(0,\lambda) = u_x^*(1,\lambda) = 0\,,$$

ove si è posto

$$F^*(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda y} F(x,y)\,dy\,.$$

Dalle (3) segue

$$(4)\qquad u^*(x,\lambda) = \frac{1}{4}\int_0^1 H(x,s,\lambda)\,F^*(s,\lambda)\,ds\,,$$

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) I particolari della ricerca saranno esposti in una Memoria di prossima pubblicazione.

ove $H(x, s, \lambda)$ denota una certa funzione (simmetrica in x, s e pari in λ) alla quale, mediante la posizione

$$g(x, \lambda) = \frac{\operatorname{senh} \lambda x - \lambda x \cosh \lambda x}{2\lambda^3},$$

si può dare, per $s \leqq x$, l'espressione analitica seguente

$$(5)\quad H(x, s, \lambda) = \frac{8}{\operatorname{senh}^2 \lambda - \lambda^2} \Big\{ \lambda^3 (\lambda \cosh \lambda + \operatorname{senh} \lambda) g(1 - x, \lambda)\, g(s, \lambda) +$$
$$+ \lambda (\lambda \cosh \lambda - \operatorname{senh} \lambda) g_x(1 - x, \lambda) g_x(s, \lambda) -$$
$$- \lambda^3 \operatorname{senh} \lambda [g(1 - x, \lambda) g_x(s, \lambda) + g_x(1 - x, \lambda) g(s, \lambda)] \Big\}.$$

Dalla (4), applicando la nota formula di inversione della (2) e successivamente scambiando l'ordine delle integrazioni, si deduce

$$(6)\quad u(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_S G(x, y, s, t)\, F(s, t)\, ds\, dt,$$

ove la funzione $G(x, y, s, t)$ è espressa dalla

$$(7)\quad G(x, y, s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, s, \lambda)\, e^{i\lambda(y-t)}\, d\lambda = 2 \int_0^{\infty} H(x, s, \lambda) \cos \lambda (y - t)\, d\lambda.$$

Si tratta ora di vedere se la (6) fornisca effettivamente una soluzione del problema (1). Per far ciò occorre eseguire uno studio approfondito della funzione (7) e delle sue derivate parziali, studio che si presenta alquanto laborioso a causa della complicata espressione di $H(x, s, \lambda)$.

Detti P, Q i punti $(x, y), (s, t)$ e T il dominio descritto dal punto (x, y, s, t) al variare di P, Q comunque in S, si dimostra che le funzioni G, G_x, G_y sono continue in T, risultando G, G_x identicamente nulle per $x = 0, x = 1$. Invece, le derivate successive $G_{xx}, G_{xy}, G_{yy}, \cdots$ sono singolari per $P \equiv Q$ (se il punto P è interno a S) e le loro singolarità risultano definite dalle [1]

$$(8)\quad G_{xx} = 2 \log r + 2 \frac{(x - s)^2}{r^2} + \cdots, \quad G_{xy} = 2 \frac{(x - s)(y - t)}{r^2} + \cdots,$$
$$G_{yy} = 2 \log r - 2 \frac{(x - s)^2}{r^2} + \cdots$$

e dalle uguaglianze che si ottengono derivando queste ultime. Infine la G, pensata come funzione di P, verifica l'equazione $\Delta\Delta G = 0$ per P interno a S e distinto da Q.

(1) Ove i puntini stanno in luogo di termini non singolari e si è posto $r = \overline{PQ}$.

La dimostrazione di queste proprietà (che sono poi quelle caratteristiche della funzione di Green) deriva essenzialmente dall'osservare che la (5) si può trasformare come segue [1]:

$$(9)\quad H(x,s,\lambda)=\frac{(1+\lambda|x-s|)e^{-\lambda|x-s|}-[1+\lambda(x+s)+2\lambda^2 xs]e^{-\lambda(x+s)}}{\lambda^3}+\cdots,$$

e dall'applicare successivamente la formula integrale (valida per $a\geqq 0$, $b\geqq 0$):

$$\int_0^\infty\left[\left(1+a\lambda+\frac{a^2-c^2}{2}\lambda^2\right)e^{-a\lambda}-\left(1+b\lambda+\frac{b^2-c^2}{2}\lambda^2\right)e^{-b\lambda}\right]\frac{\cos\alpha\lambda}{\lambda^3}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2}(c^2+\alpha^2)\log\frac{\sqrt{a^2+\alpha^2}}{\sqrt{b^2+\alpha^2}}-\frac{a^2-b^2}{4};$$

infatti, ponendo in quest'ultima $a=|x-s|$, $b=x+s$, $c=x-s$, $\alpha=y-t$ e tenendo conto delle (7), (9), risulta

$$G(x,y,s,t)=[(x-s)^2+(y-t)^2]\log\frac{\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2}}{\sqrt{(x+s)^2+(y-t)^2}}+2xs+\cdots,$$

donde subito si traggono le (8).

Occorre inoltre studiare il comportamento all'infinito della G e delle sue derivate. Tale studio si compie osservando che dalla (5) segue che $H(x,s,\lambda)$ è funzione meromorfa della variabile complessa $\lambda=\alpha+i\beta$, avente come poli di 1° ordine le radici non nulle dell'equazione trascendente $\operatorname{senh}^2\lambda-\lambda^2=0$. Tali radici sono tutte complesse e coincidono con gli autovalori del problema ai limiti:

$$(10)\quad \frac{d^4v}{dx^4}-2\lambda^2\frac{d^2v}{dx^2}+\lambda^4 v=0\,,\quad v(0)=v(1)=0\,,$$

$$v'(0)=v'(1)=0\,;$$

ci limiteremo a considerare quelle situate nel 1° quadrante del piano (α,β) e le indicheremo con $\lambda_n=\alpha_n+i\beta_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, supponendo $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots$, $0<\beta_1<\beta_2<\cdots$ [2]. Si vede facilmente che $\operatorname{senh}\lambda_n=(-1)^n\lambda_n$ e che l'autosoluzione di (10) corrispondente all'autovalore λ_n è

$$v_n(x)=x\operatorname{senh}\lambda_n(1-x)-(-1)^n(1-x)\operatorname{senh}\lambda_n x\,.$$

(1) La formula vale tanto per $s\leq x$ quanto per $s\geq x$. Ci limitiamo a scrivere il solo termine che conduce a quelli riportati nelle (8).

(2) È $\alpha_1=2.251\cdots$, $\beta_1=4.212\cdots$, $\alpha_2=2.769\cdots$, $\beta_2=7.448\cdots$ ecc. In generale si ha $n\pi<\beta_n<\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ ed inoltre $\alpha_n\sim\operatorname{settcosh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $\beta_n\sim\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ (per $n\to\infty$).

Ciò posto, si consideri nel piano (α, β) una successione di rettangoli $R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$, con R_n definito dalla $|\alpha| \leq \alpha_{n+1}$, $0 \leq \beta \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, e quindi contenente all'interno i $2n$ poli $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, -\bar{\lambda}_1, -\bar{\lambda}_2, \cdots, -\bar{\lambda}_n$ di $H(x, s, \lambda)$. Valutando l'integrale

$$\int_{FR_n} H(x, s, \lambda)\, e^{i\lambda|y-t|}\, d\lambda,$$

esteso alla frontiera di R_n, col teorema dei residui, e successivamente passando al limite per $n \to \infty$, si perviene, tenendo conto della (7), al seguente notevole sviluppo in serie

$$(11)\quad G(x, y, s, t) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} I\left[\frac{1}{\lambda_n^3} \frac{\cosh \lambda_n + (-1)^n}{\cosh \lambda_n - (-1)^n} e^{i\lambda_n|y-t|} v_n(x) v_n(s)\right]^{(1)},$$

uniformemente convergente nel predetto dominio T.

Dalla (11) segue fra l'altro il cercato comportamento all'infinito della G che è descritto dal seguente enunciato: *la funzione* $e^{\beta_1|y-t|} G(x, y, s, t)$ *si mantiene limitata in* T (ricordiamo che $\beta_1 = I[\lambda_1] = 4{,}212\cdots$). Lo stesso accade per le G_x, G_y, mentre per le derivate successive la cosa è ancora vera purchè si mantenga $\overline{PQ} \geq \delta > 0$.

Dopo ciò, si può facilmente dimostrare il seguente teorema di esistenza: *la formula* (6) *dà effettivamente una soluzione del problema* (1), *nell'ipotesi che la funzione* $F(x, y)$ *verifichi le seguenti condizioni*: a) *sia hölderiana*, b) *la funzione* $e^{-\beta_1|y|} F(x, y)$ *sia sommabile in* S.

Si dimostra inoltre: *in queste ipotesi sulla* $F(x, y)$, *la* $u(x, y)$ *definita da* (6) *gode della proprietà espressa dalla*

$$(12)\quad \lim_{|y| \to \infty} e^{-\beta_1|y|} u(x, y) = 0$$

che sussiste uniformemente per $0 \leq x \leq 1$.

Si pone ora la questione se la (6) dia l'unica possibile soluzione. La risposta è negativa perchè ad esempio le funzioni

$$(13)\quad e^{\pm i\lambda_n y} v_n(x)$$

verificano le (1) con $F(x, y) \equiv 0$; del resto è chiaro che il problema (1) è indeterminato perchè non è prescritto il comportamento della $u(x, y)$ all'infinito. Però le (13) non verificano la condizione (12) ed è presumibile che, imponendo precisamente la (12) come ulteriore condizione, si possa stabilire il teorema di unicità; però la dimostrazione si presenta alquanto difficile.

(1) Se $z = x + iy$, poniamo $I[z] = y$.

Giova però notare che, colla deduzione stessa della (6), noi abbiamo ottenuto un teorema di unicità, sotto quelle ipotesi, che si possono precisare, che rendono legittimo il procedimento formale che si è usato. Tali ipotesi sono alquanto restrittive sia nei riguardi del comportamento all'infinito della soluzione cercata $u(x, y)$ (si richiede, fra l'altro, che la u si annulli per $|y| \to \infty$, assieme a certe sue derivate), sia per quanto concerne il carico $F(x, y)$ (che, come funzione di y, deve ammettere la trasformata di Fourier); però esse non sono prive di interesse dal punto di vista delle applicazioni. Data, per esempio, una piastra rettangolare molto allungata, incastrata lungo i lati, volendone studiare la deformazione in prossimità del centro, si potrà sostituire ad essa una piastra a forma di striscia e pensarla soggetta a un carico F nullo nei punti lontani dal centro. Ci si può allora porre nelle ipotesi restrittive dianzi enunciate, e di conseguenza la (6) dà l'unica possibile soluzione, dalla quale si può dedurre, con grande approssimazione, il calcolo richiesto.

Accenniamo infine che, approfondendo lo studio della espressione (9) di $H(x, s, \lambda)$, si arriva a dare, per la costruzione della G, un metodo che si può riguardare come un'estensione del noto *metodo delle immagini* che si usa per costruire la funzione di Green dell'ordinario problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta u = F(x, y)$; ma su ciò rimandiamo alla Memoria citata.

Paleontologia (Botanica). — *Le corallinacee fossili delle isole Dahlac* (*A. O.*). Nota I di S. Conti, presentata [1] dal Corrisp. G. Rovereto.

La piccola collezione di Corallinacee qui studiata, proviene dalla panchina ricoprente il calcare madreporico dell' Isola Grande Dahlac (Africa Orientale), ed è stata raccolta dall'ing. Migliorini della missione dell' A. G. I. P. ivi inviata, alcuni anni or sono, per ricerche petrolifere.

Lo studio dei campioni che erano stati inviati in esame al prof. Airoldi, non ha potuto a suo tempo essere ultimato per il sopravvenuto decesso di questo valente studioso, il quale lasciava così incompiuto l'iniziato lavoro. Gli appunti inediti raccolti dal prof. Rovereto mi furono in seguito trasmessi con il materiale originale, per la revisione ed il completamento del lavoro a cui solo parecchi anni dopo ho potuto dar corso.

Una scorsa al materiale ed agli appunti in mio possesso mi hanno convinto sull'opportunità di un completo riesame, sì che altri preparati, oltre a quelli già disponibili, facevo trarre dai campioni originali.

L'interesse che presenta qualcuna delle specie qui descritte è assai notevole e certo ha largamente compensato del totale rifacimento del lavoro.

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

L'intera collezione consta di sei noduletti di vario diametro (cm. 1,5 a 2,5) che presentano superfici ricoperte da intumescenze con apice per lo più tondeggiante, spesso anastomosate e ramificate senza tuttavia assumere sviluppo notevole; in nessun caso si possono considerare veri e propri rami.

Di frequente i noduli sono cavi nell'interno, e ciò per la quasi totale distruzione di un corpo estraneo su cui si erano sviluppati i talli.

Il fatto che tali noduletti, come abbiamo potuto constatare con l'esame delle loro sezioni, siano costituiti da parecchi talli associati, non consente in genere un riconoscimento macroscopico della forma esterna delle singole specie. Pertanto nelle forme nodulari si può riconoscere solamente la forma complessiva dell'associazione di vari individui tra cui prevalgono forme tipicamente crostose o crostoso tubercolate; di qui la tendenza ad una uniformazione delle superfici esterne delle masserelle nodulari.

Le determinazioni specifiche hanno permesso di distinguere per gli esemplari delle Dahlac 5 diverse specie; ciascuna di esse è presente in più preparati; due sono presenti in tutti.

Delle suddette specie tre sono nuove. L'elevato numero di specie nuove, taluna delle quali presenta affinità con specie viventi, è giustificata dal fatto che le Corallinacee fossili delle zone contermini al Mar Rosso e all'Oceano Indiano sono poco note, come pure ed anche più, è scarsa la bibliografia riguardante le forme viventi in questi mari.

Le specie nuove rinvenute sono:

Archaeolithothamnium aliacense che nonostante qualche affinità strutturale con forme fossili e viventi non può ricollegarsi ad alcuna di esse per i caratteri degli organi della fruttificazione del tipo sessuato.

Lithophyllum Migliorinii che presenta alcune affinità con specie pleistoceniche somale ed attuali del Mar Rosso.

Lithophyllum aroterense pure imparentato ad altre specie del pleistocene somalo.

Delle specie note abbiamo riconosciuto:

Lithophyllum racemus (Lmk) Fosl., per la prima volta qui segnalato per il Mar Rosso. ma noto fossile e vivente in molte località del Mediterraneo, e vivente pure nel Golfo del Siam.

Lithophyllum (*Dermat.*) *papillosum* (Zan.) Fsl. noto pure esso fossile e vivente in molte località mediterranee, oltre che vivente nell'arcipelago Malese e, fossile quale specie molto affine se non identica, (Lithoph. (Derm.) Dublanqui Lem.), alla Martica.

Nell'associazione fossile a Melobesie della Grande Dahlac, *Arch. aliacense* appare la specie di gran lunga dominante, sia come numero di talli presenti, sia come superficie occupata nei vari preparati. Segue *Liteoph.* (*D.*) *papillosum* il quale figura pure presente in tutti i preparati ma a causa dell'esilità dei suoi talli occupa complessivamente una limitatissima superficie.

Poco rappresentato ed occasionale *Lithoph. Migliorinii* sia per numero che per superficie dei talli; accessorie frequenti in egual misura le altre specie.

Il numero non elevato di esemplari non consente di addivenire a conclusioni generali di carattere stratigrafico, sopratutto per le scarse conoscenze sulle Corallinacee nelle regioni del Mar Rosso e dell'Oceano Indiano; aggiungasi che una delle specie, rinvenute tra quelle già note, *Lithoph. Derm. papillosum*, non presenta che uno scarsissimo interesse stratigrafico a causa della sua grande persistenza. Peraltro le affinità strutturali delle specie nuove descritte con alcune forme pleistoceniche somale ed altre viventi nei mari tropicali, lasciano ragionevolmente ritenere piuttosto recente l'età degli esemplari studiati che probabilmente debbono risalire al pleistocene e comunque non anteriori al pliocene.

Archaeolithothamnium aliacense n. sp. (figg. 1–7).

Ascrivo a questa nuova specie numerosissimi talli che figurano presenti più o meno abbondantemente in tutti i preparati della collezione.

Trattasi di specie crostoso-tubercolata che forma noduletti rotondeggianti (0,5–2 mm.) bitorzoluti, con espansioni di 0,5–0,6 mm. di diametro.

Alcuni talli dovevano avvolgere dei corpi estranei, probabilmente corallari, che negli esemplari in esame sono quasi interamente distrutti, cosicchè qualche nodulo appare interamente cavo.

L'ipotallo basilare, non molto sviluppato in rapporto alla massa del tallo, presenta uno spessore assai ridotto, essendo costituito di sole 3–5 file brevemente orizzontali e rapidamente rampanti, presentanti spesso una minuta tortuosità, scarsa continuità per frequenti sdoppiamenti e qualche estinzione, archi e raggi di curvatura generalmente piccoli. Misura complessivamente in genere meno di 100 μ, raramente raggiunge i 150 μ, eccezionalmente, ed in un solo caso, i 200 μ, in cui eccezionalmente le file rampanti sono incurvate sia verso l'alto che verso il basso (fig. 1).

Le cellule sono rettangolari e presentano le seguenti misure: 20–28 × × 9–10 μ lungo il breve tratto orizzontale ed all'inizio dell'arcuatura; 14 × 10–12 μ nella parte superiore dell'ipotallo e nel tessuto di transizione dove prevalentemente le file appaiono distorte ed ondulate.

Il peritallo è costituito da un tessuto ordinato sia in file che in serie, ma le prime, sebben più perfette, presentano minor risalto.

Le serie sono caratterizzate da una notevole variabilità di altezza e, assai spesso, si può agevolmente riconoscere alternanza tra serie alte e serie basse (fig. 2).

La continuità delle serie non è perfetta a causa di frequenti estinzioni e sdoppiamenti.

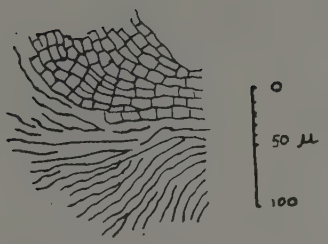


Fig. 1.

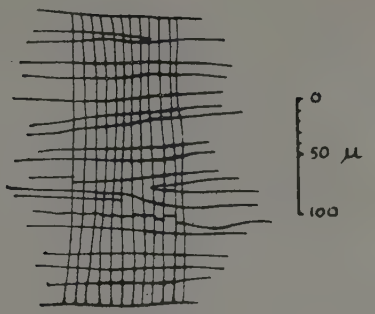


Fig. 2.

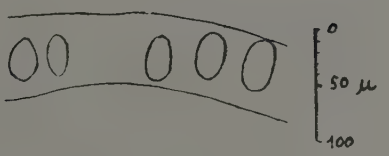


Fig. 3.

I valori dei diametri cellulari oscillano tra 9–30 × 9–10 μ, avendosi 18–25 × 8–10 μ per le cellule delle serie alte, e 9–14 × 9–10 μ per quelle delle basse; si osservano però tutte le misure intermedie ove non si verifichi una netta alternanza tra serie alte e basse. Il tessuto midollare dei tubercoli è costituito invece da file ondulate assai sottili (6–9 μ) mancando generalmente un ordinamento in serie, che al contrario ricompare e predomina nel peritallo o tessuto periferico dei tubercoli stessi.

Organi riproduttori. – In due soli talli sono stati osservati ricettacoli a sporangi; essi presentano forma ellittica, piccola taglia (56–70 × 28 μ) e sono disposti non molto regolarmente in brevi serie (fig. 3).

Nella grande maggioranza dei talli sono invece solamente presenti gli organi della riproduzione sessuata, il che se è raro nelle Melobesie in genere, appare assolutamente nuovo nel genere Archaeolithothamnium.

I concettacoli a cistocarpi sono numerosissimi e irregolarmente disposti, hanno forma sferica (rotonda in sezione) generalmente molto regolare, o se muniti di ostiolo all'apice di un tozzo collo, hanno forma di pera o di ampolla; taluno di questi presenta il fondo convesso risultandone figure cuoriformi con l'apice rivolto verso l'alto (figg. 4 e 5).

I diametri di questi concettacoli sono compresi tra 109 e 163 μ. Nell'interno di uno di essi sono chiaramente riconoscibili due corpiccioli subellittici (cistocarpi?) misuranti 80–90 × 50–60 μ.

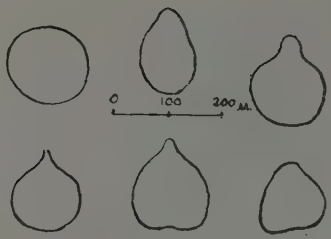


Fig. 4.

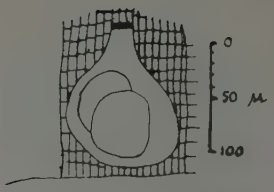


Fig. 5.

I concettacoli ad anteridi, altrettanto numerosi e presenti solo nei talli ove figurano anche i concettacoli a cistocarpi, sono costituiti da cavità coniche di piccola taglia (figg. 6 e 7); essi misurano 95–105 × 32–40 μ (le sezioni triangolari presentano valori oscillanti tra 47 e 105 μ × 26–40 μ, ma evidentemente i valori più bassi rappresentano sezioni non mediane).

La distribuzione di questi organi nel tallo è pure disordinata, ma tuttavia appaiono prevalentemente raggruppati nelle zone ove mancano o sono poco abbondanti i concettacoli a cistocarpi.

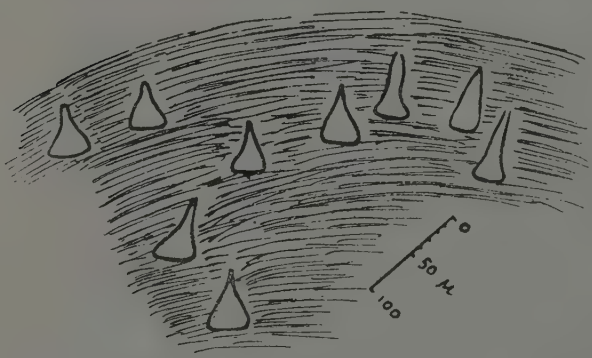


Fig. 6.

Fig. 7.

Osservazioni e confronti. – Sono note alcune specie di *Arch.* che presentano una più o meno evidente e regolare alternanza delle serie cellulari del peritallo, e tra esse il vivente *A. erytraeum* Roth. [1] presenta le maggiori analogie con la specie qui descritta. Altri caratteri che ravvicinano le due specie sono: la riduzione dell'ipotallo; le dimensioni delle cellule,

(1) Lemoine M.me P., *Structure anatomique des Mélobésiés. Application à la classification.* « Ann. Inst. Ocean. de Monaco », t. II, pag. 67, 1911.

che secondo Lem. e Fosl. in *A. erytraeum* misurano 18–20 μ le cellule alte e 8–10 μ le basse; le dimensioni degli sporangi (50–75 × 25–30 μ secondo Lem., e un poco maggiori 75–90 × 35–55 μ secondo Fosl.).

Sono tuttavia caratteri distintivi per la specie da noi descritta: la disposizione non in serie delle cellule del tessuto midollare; le serie di sporangi poco numerose e poco regolari; sopratutto lo sviluppo di gran lunga prevalente della riproduzione sessuata, nonchè la forma e le dimensioni dei concettacoli cistocarpiferi e anteridiferi che in nessun caso presentano forma e dimensioni corrispondenti a quelli osservati in *A. erytraeum* (300–600 μ).

Arch. intermedium Raineri [1] del miocene cirenaico presenta pure qualche analogia strutturale dei tessuti, specie del peritallo, in cui pure si riconosce una alternanza di cellule alte e basse, ma le dimensioni cellulari sono assai più ridotte e gli sporangi di taglia maggiore (100 × 60 μ).

Per i caratteri degli organi della riproduzione la nostra specie inoltre si distingue nettamente da ogni altra, sia fossile che vivente.

Conservo alla specie descritta il nome di *Arch. aliacense* dato dall'Airoldi, nei suoi appunti manoscritti, ai soli due talli presentanti la fruttificazione degli sporangi, poichè egli aveva dubitativamente riferito al *gen. Lithophyllum* i talli presentanti la fruttificazione dei concettacoli a cistocarpi e ad anteridi.

Lithophyllum Migliorinii n. sp. (fig. 8).

Designo col nome del raccoglitore della collezione un tallo fruttifero crostoso che presenta complessivamente soli 300 μ di spessore. Alcuni altri pochi frammenti della stessa specie ho riscontrato in qualche altro preparato.

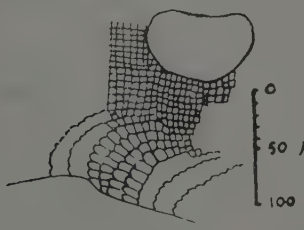


Fig. 8.

Vi si distingue ben differenziato un ipotallo (fig. 8) di uniforme spessore (60 μ), costituito da cellule rettangolari ovoidali regolarmente disposte a ventaglio in serie concentriche. Le dimensioni delle cellule sono 14–18 × 9 μ.

Il peritallo (200–250 μ) è formato da piccole cellule disposte in file stipate e allineate in serie orizzontali; misure comuni sono 7,5–10×7–7,5 μ. Il tallo non appare zonato.

I concettacoli sono di piccole dimensioni, hanno forma subellittica e misurano da 94 × 51 a 131 × 73 μ.

(1) Raineri R., *Alghe fossili mioceniche di Cirenaica raccolte dall'Ing. Crema.* «La Nuova Notarizia», serie XXXV, gennaio-giugno 1924.

Osservazioni e confronti. – Tra le forme affini sono da considerarsi: *Lithph. Roverețoi* Air. [1] della panchina pleistocenica di Obbia (Somalia media), che presenta misure corrispondenti delle cellule e dei concettacoli, ma ha per caratteri distintivi le ramosità della superficie esterna, un maggior sviluppo dell'ipotallo, la disposizione irregolare delle cellule alla base del peritallo e la zonatura del tessuto.

Lithoph. pankaiense Air. [2] della stessa località del precedente; esso si avvicina alla nostra specie per la grandezza dei concettacoli, la struttura e lo sviluppo dell'ipotallo, ma differisce per le misure cellulari e la presenza di zonatura.

Lithoph. Fosliei Heydr. vivente tuttora nel Mar Rosso e nell'Oceano Indiano è assai vicino per la misura delle cellule (ipotallo 25 × 10 μ; peritallo 6–8–11 × 6–8–11 μ), però il maggior sviluppo dell'ipotallo e sopratutto le dimensioni dei concettacoli (800–1500 μ) ne fanno una specie ben distinta.

Anche *Lithoph. mycrocarpon* Fosl. attualmente vivente a Massaua, si distingue nettamente per la presenza di striature concentriche e di eterocisti, come pure per la disposizione e grandezza dei concettacoli.

Dimensioni cellulari vicine presenta ancora *Lithoph. simulans* Fosl. sp. (non gen.) vivente nel golfo del Siam, che ha anche analoga struttura del peritallo, ma lo sviluppo dell'ipotallo e le dimensioni dei concettacoli (400–700 μ) sono assai maggiori.

(1) M. Airoldi, *Le corallinacee del pleistocene della Somalia.* « Palaeontographia Ital. », vol. XXXII, suppl. I, pag. 92, tav. VIII, fig. 4, 1933.

(2) M. Airoldi, 1933, op. cit., pag. 92, tav. VIII, fig. 3.

Biologia. — *Sui rapporti tra potere battericida e concentrazione dei disinfettanti.* Nota di A. Tizzano, presentata [1] dal Socio D. De Blasi.

La maggior parte degli studi sui disinfettanti compiuti negli ultimi anni dal punto di vista scientifico hanno considerato sopratutto i rapporti tra costituzione chimica e potere battericida. Le questioni, invece, riguardanti la dinamica dei disinfettanti ed il loro intimo meccanismo di azione non sono state oggetto di ulteriori studi. Ciò vale particolarmente per i rapporti tra concentrazione della sostanza disinfettante e tempo necessario per l'uccisione dei germi, le cui ricerche rimontano a diversi anni or sono. Ho ritenuto, pertanto, interessante riprendere in esame questo lato del problema, con particolare riguardo alla possibilità di utilizzazione pratica delle formole matematiche.

Come è noto, tali formole sono del tipo:

$$(1) \qquad t C^n = \text{cost.}$$

in cui t indica il tempo necessario di azione del disinfettante, perchè si abbia la morte di tutti i germi; C la concentrazione del disinfettante; n un esponente il cui valore caratterizza le varie sostanze disinfettanti ed oscilla, secondo la natura di esse e la natura del germe, tra 0,5 e 2. Quando $n = 1$, cioè quando la concentrazione è in rapporto semplice inverso con il tempo di azione, la (1) sta ad indicare che quanto più forte è la concentrazione, tanto maggiore sarà l'effetto e quindi più rapidamente avviene la morte dei germi. Se, però, $n > 1$, ciò significa, essenzialmente che, ad esempio, raddoppiando la concentrazione, il tempo di azione non si riduce soltanto alla metà, ma ad un terzo, ad un quarto, ad un decimo in ogni caso ad una frazione determinata dal valore di n, che, pertanto, viene chiamato *coefficiente di diluizione.*

Il caso opposto $n < 1$ indica, corrispondentemente, un rallentamento relativo della reazione.

Occorre rilevare che questa equazione non solo può essere applicata per i disinfettanti, ma è stata trovata valida anche in altri e svariati processi biologici. Così, Lehmann [2] e successivamente Lazarew [3] l'hanno

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.
(2) Lehmann, « Arch. f. Hyg. », 1911, *74*, 1; 1912, *75*, 1.
(3) Lazarew, « Arch. f. Hyg. », 1923, *102*, 230.

applicata per rappresentare l'azione tossica. Prigge [1] più recentemente ha espresso con essa anche l'azione delle antitossine. Reichel [2] nello studiare il potere battericida del fenolo ha aggiunto alla (1) un termine di correzione, che tiene conto della concentrazione C_o sempre inattiva, per cui scrive:

$$(C - C_o)^n t = \text{cost.} \qquad (2)$$

Successivamente Luszczack [3] ha aggiunto ancora un termine t_o, che comprende il tempo di latenza o di incubazione sempre necessario, anche con la massima azione tossica, per cui la (1) diviene:

$$(C - C_o)^n (t - t_o) = \text{cost.} \qquad (3)$$

ed in tal modo rappresenta la formulazione più generale dell'azione tossica.

Anche Kolle ed Hetsch [4] per l'azione dei veleni dei serpenti hanno ottenuto una curva che si può rappresentare con la formola di Luszczack. Gros e Stadler e Kleemann [5] rappresentano l'azione emolitica con la (1) e De Blasi [6] fin dal 1911, studiando l'azione emolitica di miscele di saccarosio e di cloruro sodico, trovava, per il grado di emolisi che si osserva nelle varie miscele una relazione di secondo ordine, analoga cioè alla (1).

Per i disinfettanti, che qui più particolarmente ci interessano, la (1) è stata applicata da numerosi sperimentatori, tra i quali ricorderò Ikeda [7] che per primo riuscì a formulare una relazione tra concentrazione e potere battericida, trovando per n il valore 0,76; Gregersen [8] il quale per le soluzioni acquose di acido cloridrico, sublimato, ioduro di potassio e formalina ha trovato per n il valore di 1, mentre per il fenolo ed il timolo ha trovato un valore di $n = 4$. Richet e Le Ber [9] per l'acqua ossigenata hanno trovato un'equazione analoga. Anche da Paul, Birstein e Reuss [10], come da Gegenbauer [11] e Reichel [12] l'azione dell'acido cloridrico è stata trovata del tipo di una funzione esponenziale.

(1) Prigge, « Dtsch. med. Wchschr. », 1937 I e II, 894, 1478, 1906.
(2) Reichel, « Biochem. Ztschr. », 1909, *22*. 149.
(3) Luszczack, « Abh. gesamtgeb. Hyg. », 1936, 99.
(4) Kolle ed Hetsch, *Die experimentelle Bakteriologie und die Infektionskrankheiten*, 7ª ed., vol. I, p. 102, Berlino e Vienna, 1929.
(5) Cit. da Reichel, *Methodik der Desinfektion* in Abderhalden, « Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden », Hygiene.
(6) De Blasi, « Boll. R. Acc. Medica di Roma », 1911, *37*, fasc. I–III.
(7) Ikeda, « Ztschr. f. Hyg. », 1897, *25*, 5.
(8) Gregersen, « Zbl. f. Bakter., Orig. », I, 1915, *77*, 188.
(9) Richet e Le Ber, « C. r. Acad. Sci., Paris », 1924, *178*, 2024.
(10) Paul, Birstein e Reuss, « Biochem. Ztschr. », 1910, *25*, 367; *29*, 201.
(11) Gegenbauer, « Arch. f. Hyg. », 1921, *90*, 23.
(12) Reichel, « Biochem. Ztschr. », 1909, *22*, 149.

Come si vede dai brevi cenni che precedono, la (1) si è mostrata valida per molti processi biologici.

Ma si deve anche rilevare che, nel campo dei disinfettanti, mancano ricerche sistematiche per la determinazione del valore di n, ed anzi per uno stesso disinfettante (quale ad esempio l'acqua ossigenata) si trovano riportati valori di n a volte maggiori dell'unità, a volte minori, in quanto variavano le condizioni sperimentali.

Ho, pertanto, determinato, con ricerche sistematiche, condotte tutte con la stessa tecnica, il potere battericida di diverse sostanze; acqua ossigenata e permanganato di potassio, quali ossidanti; formalina, sostanza largamente adoperata nella pratica della disinfezione; alcool metilico, alcool etilico ed alcool propilico; alcuni acidi organici e, precisamente: l'acido lattico, l'acido picrico, l'acido propionico, l'acido acetico e l'acido butirrico.

Dai dati sperimentali ottenuti ho calcolato i valori dell'esponente della concentrazione (coefficiente di diluizione, n) per i detti disinfettanti. Il calcolo è facilitato ponendo l'equazione

$$C^n t = P$$

in forma logaritmica:

$$n \log C + \log t = \log P.$$

Quando i tempi di disinfezione sono determinati per una serie di concentrazioni del disinfettante in esame ed i resultati sono espressi nelle equazioni:

$$n \log C_1 = \log P - \log t_1$$

$$n \log C_2 = \log P - \log t_2$$

. . . . . .

le successive coppie di equazioni possono essere combinate per sottrazione per ottenere le equazioni derivate:

$$n_1 = \frac{\log t_2 - \log t_1}{\log C_1 - \log C_2}$$

$$n_2 = \frac{\log t_3 - \log t_2}{\log C_2 - \log C_3}$$

. . . . . .

da cui si può determinare un valore numerico di n.

Il valore medio di n si può anche determinare graficamente. Quando si rappresentano graficamente in un sistema di coordinate cartesiane i valori

di log C e di log t, riportando sulle ascisse i valori di log C e sulle ordinate i valori di log t, i resultati staranno approssimativamente su una linea retta. Il valore di n può essere quindi calcolato dall'equazione:

$$n = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

scegliendo sulla retta due punti successivi (x_1, y_1) e (x_2, y_2) rappresentanti due singole prove.

Nei miei esperimenti, come germi ho adoperato due stipiti di *b. coli commune*, esistenti da tempo nel laboratorio (Coli Sabatucci e Coli Polacco) che trapiantavo il giorno precedente quello dell'esperimento su agar inclinato, in modo da avere sempre colture di 24 h di sviluppo. Raccoglievo la patina con acqua distillata sterile (10 cc.), più adatta della soluzione fisiologica, che, come è noto, può avere influenza sul decorso qualitativo dell'esperimento, ed indi filtravo per carta la sospensione ottenuta, in modo da allontanare eventuali frustoli di agar e grumi di germi. Prendevo, poi, con pipetta sterile, 1,5 cc. della sospensione, che portavo a 10 cc. con aggiunta di acqua distillata sterile. Determinavo, quindi, il numero dei germi per cc. con l'opacimetro di Wellcome.

Per saggiare il potere battericida, in bicchierini conici ponevo 20 cc. della soluzione del disinfettante in esame, a varie diluizioni, ed in ciascuno di essi aggiungevo 0,35 cc. della sospensione batterica diluita.

Successivamente, ad intervalli di cinque minuti o meno, prelevavo da ogni bicchierino un'ansata normale di materiale e la seminavo in provette di brodo che venivano poste in termostato a 37° C. Le letture erano fatte dopo 24 h e proseguite fino a 7 giorni.

Per brevità non riporto i particolari dei resultati sperimentali da me ottenuti, che saranno riportati nel lavoro *in extenso*, insieme con i diagrammi relativi, ma mi limito a riportare, nella Tabella 1, i valori di n per i singoli disinfettanti considerati, riportando solo per due delle sostanze adoperate (v. Tabella 2) i valori particolari che servono per il calcolo del valore medio di n.

Se si rappresentano graficamente i resultati, come è scritto precedentemente, si trova che, per i tre alcool le rette rappresentatrici sono all'incirca parallele, il che sta ad indicare che le variazioni del tempo in funzione della concentrazione sono dello stesso ordine di grandezza, mentre le rette rappresentatrici i resultati ottenuti per l'acido butirrico e la formalina, ad esempio, si incrociano, in quanto le variazioni del tempo in funzione della concentrazione sono di un diverso ordine di grandezza.

Come si vede dall'esame della Tabella 1, i massimi valori di n si hanno per gli alcool, cui seguono il permanganato di potassio e l'acido propionico, e, quindi, le altre sostanze esaminate. Degno di rilievo è il fatto che

l'acqua ossigenata (perossido di idrogeno) ed il permanganato di potassio, due sostanze entrambe ossidanti, hanno valori di n notevolmente diversi; per la prima, il valore di n è di poco superiore all'unità, per la seconda è circa il quadruplo.

TABELLA I.

Valore del coefficiente di diluizione n per i diversi disinfettanti.

Sostanza disinfettante	Valore di n
Acido propionico	3,02
» butirrico	2,05
» lattico	1,58
» picrico	1,76
» acetico	1,09
Formalina	1,16
Acqua ossigenata	1,18
Permanganato di potassio	4,47
Alcool metilico	7,15
» etilico	10,39
» propilico	8,58

In ogni modo, per tutte le sostanze da me studiate, il valore di n è maggiore dell'unità, il che – come si è scritto prima – significa che, raddoppiando la concentrazione, il tempo di azione non si riduce soltanto alla metà, ma subisce una riduzione maggiore. Precisamente, la riduzione sarà più forte per gli alcool, meno forte per la formalina, l'acqua ossigenata ed alcuni degli acidi organici.

D'altra parte, con una diminuzione della concentrazione, appunto per l'alto valore di n, si ha anche una forte diminuzione del potere battericida.

Inoltre, appare confermato, in base ai singoli resultati ottenuti, che tra concentrazione del disinfettante e tempo necessario per la uccisione dei germi tutti, esiste una relazione esponenziale per un vasto campo di oscillazione dei valori della concentrazione e, pertanto, basta determinare il tempo di azione per due concentrazioni, per poter calcolare, in base alla (1), matematicamente quale sarà il tempo necessario per un'altra concentrazione.

TABELLA 2.

Disinfettante	Diluizione	C		t in minuti		log C	log t	log C_1—log C_2 ecc.	log t_2—log t_1 ecc.	n	log P
		Simboli	Valori	Simboli	Valori						
Formalina	1 : 14,3	C_1	7 (1)	t_1	12	,84510	1,07918	,04576	,06695	1,46	2,06
	1 : 15,9	C_2	6,30	t_2	14	,79934	1,14613	,05115	0	0	2,07
	1 : 17,9	C_3	5,60	t_3	14	,74819	1,14613	,02803	,05799	2,07	2,01
	1 : 19,1	C_4	5,25	t_4	16	,72016	1,20412	,02996	,03393	1,13	2,04
	1 : 20,4	C_5	4,90	t_5	17,3	,69020	1,23805	,03219	,01722	0,54	2,04
	1 : 22,0	C_6	4,55	t_6	18	,65801	1,25527	,03476	,04576	1,32	2,02
	1 : 23,8	C_7	4,20	t_7	20	,62325	1,30103	,03779	,07374	1,95	2,02
	1 : 26,9	C_8	3,85	t_8	23,7	,58546	1,37475	,04139	,03518	0,85	2,05
	1 : 28,6	C_9	3,50	t_9	25,7	,54407	1,40993				2,04
Valore medio										1,16	2,04
Alcool etilico	1 : 4,00	C_1	25 (1)	t_1	9	1,39794	,95424	,02687	,34679	12,9	15,51
	1 : 4,26	C_2	23,5	t_2	30	1,37107	1,30103	,02865	,29994	10,4	15,55
	1 : 4,55	C_3	22	t_3	39,9	1,34242	1,60097	,03067	,33855	11,0	15,54
	1 : 4,88	C_4	20,5	t_4	87	1,31175	1,93952	,03300	,31090	9,42	15,56
	1 : 5,26	C_5	19	t_5	178	1,27875	2,25042	,03571	,29365	8,33	15,44
	1 : 5,71	C_6	17,5	t_6	350	1,24304	2,54407				
Valore medio										10,39	15,53

(1) %

Riservandomi di tornare sulla questione in un lavoro più ampio, e di illustrare anche l'importanza ed il valore delle variazioni di n per i singoli disinfettanti, ai fini del confronto tra più sostanze per stabilire il loro valore battericida, e, particolarmente per il *coefficiente fenolico*, di uso quasi generale negli esami pratici dei disinfettanti, dirò, in questa sede, che si è tentato in vario modo di chiarire il significato della (1). Così, Paul, Birstein e Reuss hanno cercato di spiegarla in base alle leggi sull'assorbimento: essi partono dall'equazione della reazione mono molecolare – applicata come è noto al fenomeno della disinfezione – scritta nella forma:

$$x = a\, e^{-kt}$$

in cui a indica la quantità iniziale (numero dei germi iniziale), x la parte ancora invariata (numero dei germi sopravviventi) al tempo t, e la base dei logaritmi naturali e k un valore numerico caratteristico per la rapidità del processo, la *costante di velocità*, ed hanno posto la costante k:

$$k = C^n$$

ed indicano l'esponente come esponente di assorbimento. Questa ipotesi può essere confutata, avendo Bechhold mostrato la limitata importanza dei processi di assorbimento nel meccanismo di uccisione dei germi. Meno importante è l'altra obiezione, che la tesi dell'assorbimento spiegherebbe solo la fissazione della sostanza chimica al germe, ma non la reazione chimica della morte, poichè la formola non si modificherebbe, se la reazione chimica fosse proporzionale alla quantità della sostanza fissata per assorbimento.

Un'altra spiegazione starebbe nell'ipotesi di corrispondenti variazioni della pressione osmotica, e, corrispondentemente, della pressione di rigonfiamento.

Un'altra tesi infine potrebbe essere data dall'ipotesi che il legame dato dalla (1) rappresenti una pura casualità e riunisca in realtà in sè i processi più eterogenei. Effettivamente è appena possibile riportare ad un denominatore generale il chimismo così complesso dei diversi disinfettanti. E le tesi prima ricordate implicano necessità logiche e biologiche, che debbono essere controllate e che limitano notevolmente il loro campo di validità. A questa ultima tesi si può solo obiettare che la probabilità matematica della formola è troppo grande, perchè essa possa essere considerata puramente casuale.

Biologia. — *Ricerche nella costituzione chimica della cornea in condizioni normali e patologiche* [1]. Nota di A. SANTONI, presentata [2] dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

Lo studio della costituzione chimica dei tessuti in rapporto alla loro evoluzione fisiologica o a determinati stati morbosi assume particolare interesse in quanto è noto come modificazioni in ordine chimico o funzionale possono il più delle volte precedere le alterazioni morfologiche che solo più tardi ci si appalesano, spesso in diretta dipendenza di quelle. Se i dati di cui noi oggi disponiamo non sono troppo numerosi ciò è da ascrivere al fatto che ben raramente noi abbiamo la possibilità di esaminare un tessuto che sia privo dei liquidi o degli umori circolanti; questi possono per variazioni inerenti alla loro massa e alla loro costituzione, interferire sulla composizione globale del tessuto e dell'organo; differenze possono inoltre risultare dalla particolare attività metabolica in cui il tessuto vien sorpreso al momento dell'esame, un complesso di cellule viventi, dovendo essere concepito come sede continua di incessanti reazioni chimiche che si svolgono con processi di scissione e di sintesi. Ciò senza contare che negli organisni, tessuti altamente differenziati raramente entrano da soli a costituire gli organi, risultando la struttura di questi dall'insieme di vari tessuti in connessione intima ed indiscindibile tra di loro, le cui proporzioni possono variare considerevolmente da caso a caso.

È fuori dubbio a tale riguardo che alcuni tessuti oculari come la cornea e il cristallino, rappresentano un prezioso materiale di studio potendo nel corso della loro analisi escludersi quasi completamente l'interferenza dei liquidi in essi circolanti, essendo questi due organi sprovvisti di circolazione sanguigna; a ciò va aggiunto anche il fatto che il ricambio della cornea e del cristallino, avvenendo esclusivamente per fenomeni di diffusione, è molto lento. I due organi hanno inoltre una composizione omogenea che può riferirsi ad un unico tessuto costituente.

L'esame della letteratura, benchè questa non sia molto ricca a tale proposito, almeno per quanto riguarda la cornea, rivela infatti che i risultati ottenuti sono degni del massimo interesse.

(1) Lavoro eseguito nella Clinica oculistica della R. Universitá di Napoli.
(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

Burger e Schlomka [1] hanno preso in esame la cornea di bovini di differente età giungendo a delle interessanti constatazioni: il tessuto corneale mostra con l'aumentare dell'età un progressivo impoverimento del contenuto in acqua ed un corrispondente aumento del residuo secco. Il residuo secco mostra, con l'aumentare dell'età, un impoverimento del contenuto percentuale di azoto che viene dagli A.A. interpretato o ammettendo che le sostanze, ricche di azoto, che entrano nella costituzione del residuo secco diminuiscono mentre aumentano quelle povere di azoto o con il fatto che con l'aumentare dell'età vengono a depositarsi sulla cornea in misura maggiore sostanze che si possono definire come scorie. Per una di queste sostanze che gli A.A. considerano come il modello di composto scoria, la colesterina, essi sono riusciti a dimostrare nella cornea dei bovini un aumento con l'aumentare dell'età. È interessante, a tale riguardo, considerare che per la cornea umana le ricerche chimiche, difficilmente eseguibili d'altra parte, non hanno fino ad ora dimostrato un aumento del contenuto in colesterina: nell'uomo si giunge però, con l'età avanzata, ad una manifestazione visibile, anche macroscopicamente – l'arco senile – che è l'espressione di una deposizione locale di sostanze lipoidee. Benchè nei bovini non si giunga mai, probabilmente a causa dell'età non molto avanzata che tali animali raggiungono, ad una deposizione di sostanze lipoidee tale da rendersi macroscopicamente visibile, gli A.A. ritengono che i due fenomeni siano legati alla stessa causa, cioè a modificazioni di struttura della sostanza fondamentale della cornea in rapporto con l'età e non con una eventuale modificazione del ricambio colesterinico.

Tale concezione si contrappone a quella di altri A.A. (Versè e Coll) [2] che vedono nell'arco senile della cornea l'espressione di un disturbo primitivo del ricambio colesterinico.

Alcuni dati sulla costituzione chimica della cornea umana, in condizioni normali e patologiche, possono desumersi da un lavoro di Hertel [3]. L'A. ha preso in esame il contenuto percentuale in acqua della cornea e della sclera in occhi umani affetti da ipertonia, ipotonia e con tensione normale. Per quello che riguardava la sclera in occhi con ipertonia vi era un contenuto in acqua più basso che l'A. definisce di ordine non molto elevato, ma tuttavia abbastanza evidente rispetto agli occhi con ipotonia o con tensione normale. Per quanto riguarda la cornea le differenze riscontrate non erano sensibili nè dirette nello stesso senso. Riporto i dati del contenuto percentuale di acqua ottenuti dall'A. per la cornea umana insieme con le indicazioni che chiariscono la provenienza del tessuto e l'età dei pazienti.

(1) M. Burger e S. Schlomka, *Beiträge zur physiologischen Chemie des Alters der Gewebe. III. Mitt. Untersuchungen an der Rinderhaut*, «Zeitschr. ges. exp. Med.», *61*, 465, 6929»

(2) Versè e Coll, citato in «Zeitschr. ges. exp. Med.» *61* 1928.

(3) E. Hertel, *Intraokularen Druk und die äusseren Bulbushüllen*. «Ber. Deutsch. Ophth. Gesellsch.», Heidelberg, 1927.

Contenuto percentuale in acqua della cornea umana (sec. Hertel)

Tensione endoculare normale	Contenuto in acqua %	Ipotonia	Contenuto in acqua %	Ipertonia	Contenuto in acqua %
Ferita perforante corneale 12 anni	75	Tisi del globo 20 anni	73	Glaucoma assoluto 60 anni	75
Iridociclite 76 anni	76	Tisi 60 anni	79	Glaucoma quasi assoluto 71 anni	74
		Tisi 70 anni	78	Tumore endoculare 56 anni	75
		Tumore endoculare	73	Scheggia endoculare 51 anni	75

Altri dati concernenti la costituzione chimica della cornea possono desumersi da un lavoro più antico di Michel e Wagner [1]. Gli AA. esaminarono la costituzione chimica della cornea di bue separatamente per l'epitelio corneale, la sostanza propria, la membrana di Descemet. I dati riportati dagli AA. per quanto riguarda il contenuto in acqua delle tre differenti sezioni sono i seguenti:

	Contenuto in acqua %	Ceneri %
Epitelio corneale	72.11	0.77 – 0.71
Sostanza propria	72.75	0.66
Membrana di Descemet . . .	78.16	

Nel lavoro degli stessi AA. si trovano riportati i dati di un lavoro più antico di His il quale riporta per 1000 parti di epitelio corneale fresco 755,2 parti di acqua.

Se si confrontano questi dati più antichi di Michel e Wagner ed His con i più recenti di Burger e Schlomka che hanno lavorato tutti con la

(1) MICHEL e H. WAGNER, *Physiologische chemische Untersuchungen des Auges.* « Arch. f. Ophth. », 1886, *32* (2) 155.

cornea di bue, si scorge un notevole divario; il contenuto medio percentuale di acqua per la cornea di bue che si può ricavare dai dati di Michel e Wagner è del 74, 34 %; quello ottenuto da His del 75, 50 %; Burger e Schlomka trovarono invece un contenuto percentuale di acqua oscillante tra un massimo dell'85,4 % negli animali giovani e l'81,1 % negli animali vecchi. Nessnn paragone è possibile stabilire con i dati ottenuti da Hertel, perchè questi si riferiscono alla cornea umana in condizioni non interamente normali; va dunque notato che anche i dati ottenuti da Hertel per la cornea umana danno un contenuto percentuale di acqua notevolmente più basso di quelli ottenuti per la cornea di bue da Burger e Schlomka e che sono stati precedentemente riportati.

Tenendo conto della scarsezza e della discordanza dei dati esistenti nella letteratura, nell'intento di portare un contributo allo studio di questa interessante questione, abbiamo preso in esame la composizione chimica della cornea in varie epoche dello sviluppo, studiandone il contenuto percentuale in acqua e quindi il residuo secco; su questo si è determinato il contenuto in azoto totale. Sono state utilizzate le cornee di neonati o di prematuri non sopravvissuti, scegliendo i casi in cui il prelievo del materiale, per la gentilezza del personale delle Clinica Ostetrica, che ci è gradito ringraziare, potè compiersi a breve distanza dall'avvenuta constatazione di morte. In nessun caso sono state utilizzate cornee di soggetti il cui decesso risaliva a molte ore prima. Quando sono state utilizzate cornee provenienti da globi enucleati il prelievo del tessuto è avvvenuto immediatamente dopo l'enucleazione. Sono stati scelti dei globi in cui le cornee avessero, in gran parte, conservata la loro normale struttûra e non presentassero delle alterazioni grossolanamente evidenti, nè la presenza di depositi ciclitici sulla superficie posteriore della membrana di Descemet. Se si trattava di cornee che presentassero piccole cicatrici, esiti di ferite perforanti, è stata utilizzata solo la parte trasparente del tessuto. Circa la tecnica seguita ricorderò brevemente che la cornea, o le cornee, venivano rapidamente asportate dal globo oculare con un taglio circolare condotto con le forbici a breve distanza dal limbus; quando, come nel caso delle cornee provenienti da neonati o feti, si potevano utilizzare ambedue gli occhi, ciascuna cornea sospesa ad una pinza veniva immersa in acqua bidistillata, poi asciugata rapidamente su carta da filtro e quindi posta su di una apposita capsulina (il cui peso era stato in precedenza determinato e che era situata in essicatore) e pesata rapidamente alla microbilancia fino all'approssimazione di gr. 0.0001. Lo stesso si faceva con la cornea del secondo occhio in modo da avere per uno stesso soggetto le determinazioni eseguite in doppia prova. Quando la cornea proveniva da un occhio enucleato, allo scopo di eseguire la determinazione sempre in doppia prova ho suddiviso il tessuto in due parti approssimativamente eguali; queste venivano poi trattate con le stesse

modalità precedentemente riportate. Le capsuline venivano quindi poste in stufa a 100 C° ed essiccate fino a peso costante. Le pesate erano anche questa volta eseguite fino all'approssimazione di gr. 0.0001.

Nella stessa tabella sono riportati i risultati delle determinazioni di N totale. Le determinazioni sono per lo più la media di due determinazioni eseguite su due frammenti della stessa cornea o di cornee appartenenti allo stesso individuo. Anche quì i risultati sono esposti secondo lo schema precedentemente riportato.

Qualche considerazione sui dati riferiti: dalle determinazioni eseguite sulle cornee appartenenti a feti, prematuri non sopravvissuti o a bambini neonati a termine, risulta in modo evidente che nel periodo della vita fetale la cornea è indubbiamente più ricca in acqua di quanto non lo sia al momento della nascita. Infatti da un contenuto in acqua massimo intorno all'85 °/o registrato in due feti gemellari del peso di Kg. 1 circa al 7° mese dello sviluppo si passa ad un contenuto in acqua dell'82,6 °/o registrato in un neonato a termine. Non ho avuto occasione di esaminare la cornea di soggetti normali in cui l'occhio fosse assolutamente indenne da lesioni, tuttavia riferendomi al caso 7 appartenente ad un soggetto in cui l'occhio fu enucleato per un tumore endoculare, ma in cui i valori della tensione endoculare erano nei limiti normali e la cornea non rivelava alcuna alterazione, posso affermare che la composizione chimica della cornea subisce, per effetto dell'età adulta un notevole impoverimento del contenuto in acqua. Questo può desumersi dall'altra parte anche dai valori che si possono ricavare dal risultato degli esami condotti su cornee appartenenti ad occhi enucleati per ipotonia o per ipertonia in cui i valori, sebbene sempre inferiori a quelli registrati nel caso 7, si mantengono costantemente superiori a quelli osservati nel periodo fetale o in neonati. Vi è una sola eccezione rappresentata dal caso 8, in cui la cornea si rivelò contenere l'83,46 °/o di acqua.

Intesessanti a considerare sono anche i dati del contenuto percentuale in azoto specialmente nei riguardi del residuo seccó. Se si considerano le medie risultanti dalle cifre ottenute per le cornee nel periodo fetale si ottiene che il contenuto in N totale per 100 parti di sostanza secca è uguale a gr. 16,899, mentre la stessa cifra è di gr. 14,20 nella cornea di un soggetto adulto con tensione normale, di gr. 15,319 nelle cornee di soggetti affetti da ipotonia oculare, di gr. 15,271 nelle cornee di soggetti con ipertonia. Non può affermarsi sulla base di risultati da me ottenuti se ciò sia in rapporto ad una differente costituzione chimica delle proteine corneali o se le variazioni messe in luce siano da riferire piuttosto ad una differente composizione della cornea nelle varie epoche dello sviluppo per modificazioni che intervengono, sopratutto nel contenuto salino, che, facendo aumentare il residuo secco del tessuto, determinerebbero una diminuzione del contenuto percentuale di azoto.

TABELLA N. 2

Numero progressivo	Età	Contenuto in acqua %	Residuo secco %	Contenuto in N		OSSERVAZIONI
				Sostanza fresca %	Sostanza secca %	
1	7 m.	85.84 ± 0.02	14.16	2.348	17.524	Cornea prelevata tre ore dopo la morte.
2	8 m.	85.34 ± 0.24	14.66	2.62	15.838	Cornea prelevata un'ora dopo la morte.
3	9 m.	83.45 ± 0.41	16.55	—	—	Cornea prelevata un'ora dopo la morte.
4	8 m.	85.55 ± 0.29	14.45	2.495	17.753	Cornea prelevata 40 minuti dopo la morte.
5	9 m.	83.60 ± 0.40	16.40	2.66	16.399	Cornea prelevata un'ora dopo la morte.
6	9 m.	82.72 ± 0.20	17.28	3.885	16.082	Cornea prelevata 40 minuti dopo la morte.
7	50 a.	76 1	23.90	2.271	14.20	Tumore endoculare T = normale.
8	15 a.	83.48 ± 0.01	16.52	2.53	15.351	Iridociclite posttraumatica. Ipotonia.
9	50 a.	81.16 ± 0.07	18.84	2.74	15.48	» » »
10	18 a.	79.62 ± 0.3	20.38	3.40	15.093	» » »
11	23 a.	81.97	18.03	2.57	15.85	» » »
12	60 a.	77.71 ± 0.35	22.29	2.89	14.703	Iridociclite posttraumatica - Corpo estraneo endoculare.
13	48 a.	80.38 ± 0.36	19.62	2.93	14.966	Glaucoma emorragico.
14	71 a.	82.26 ± 0.07	17.74	2.673	15.480	Glaucoma assoluto.

Il numero dei casi fino ad ora presi in esame è troppo scarso perchè si possano trarre deduzioni sicure o si possa dare una spiegazione dei fatti osservati: voglio tuttavia fin d'ora richiamare l'attenzione su due fatti. Il primo è che i dati da me ottenuti si discostano notevolmente da quelli ottenuti da Hertel in casi quasi analoghi, in linea generale, per un maggiore contenuto in acqua riscontrato nel tessuto corneale. Tale fenomeno può essere imputato ad un imperfetto prosciugamento del tessuto durante la sua permanenza in stufa, nel caso degli esperimenti di Hertel. Infatti è più probabile che errore vi sia per effetto di una incompleta evaporazione di acqua anzichè per una distruzione di tesssuto avvenuta durante l'essicamento in stufa, essendo la temperatura di questa eguale, o di poco superiore ai 100 C°. L'altro fatto sul quale desidero richiamare l'attenzione è che le differenze messe in luce nella costituzione della cornea nei primi anni di vita e durante lo sviluppo successivo per quanto riguarda l'impoverimento del contenuto in acqua in rapporto all'età, pur rientrando in un fenomeno generale,possono essere forse invocate per spiegare la differente suscettibilità che la cornea presenta ad ammalare in rapporto con la differente età degli organismi. È pur vero che non si può prescindere dallo stato immunitario generale degli individui, tuttavia é fuori di dubbio che, se il diverso contenuto in acqua corrisponde ad un diverso stato di imbizione delle sostanze colloidali costituenti il tessuto corneale e se, sopratutto, differente è la costituzione chimica delle proteine che costituiscono il tessuto stesso, come sembrerebbe in base alle risultanze del contenuto in azoto totale, notevolmente diversa può essere la capacità degli elementi cellulari a reagire anche ad uno stesso agente morbigeno. Conclusioni più probative potranno forse aversi quando maggiori saranno i dati che riuscirò a raccogliere e quando essi saranno integrati con determinazioni parallele del contenuto in sostanze minerali.

Patologia. — *Azione combinata di stimolo meccanico (farina fossile) e chimico (3, 4-benzopirene) sul connettivo* [1]. Nota di M. Chirico, presentata [2] dal Socio P. Rondoni.

Sono noti vecchi esperimenti con immissione di farina fossile (Kieselgur) nel sottocutaneo di animali e conseguente produzione di veri granulomi da corpo estraneo con abbondante costituzione di cellule giganti e successiva sclerosi. Alcuni ricercatori hanno cercato di dimostrare un carattere autonomo in talune di queste neoformazioni con trapianto omologo [3]; il che non fu poi confermato da Carminati [4]. Questi cercò di combinare lo stimolo essenzialmente ma non esclusivamente meccanico della farina fossile (che contiene tracce di sostanza organica) con numerosi altri stimoli chimici e fisici senza ottenere la affermazione di un carattere neoplastico della neoformazione. Ora si è cercato di analizzare il comportamento della neoformazione ottenibile col benzopirene e sfociante notoriamente nella costituzione di un blastoma (sarcoma per la inoculazione sottocutanea) quando allo stimolo sicuramente cancerogeno si sovrapponga anche lo stimolo dovuto alla farina fossile; di vedere insomma come si comporta il ben noto quadro della iperplasia connettivale da Kieselgur quando coesista nel focolaio l'idrocarburo cancerogeno sciolto come di consueto in grasso e provocante in primo tempo una reazione aspecifica demarcante e riassorbente con tardivo impianto della cancerogenesi secondo ormai numerose osservazioni. A tale scopo furono utilizzati 24 ratti tutti maschi, del peso iniziale di 75-80 gr.; ogni animale ricevette bilateralmente nella regione inguinale (penetrazione dell'ago dalla regione toracica) 10 mgr. per parte di benzopirene Roche sciolto in 1 cc. di lardo; e 4 giorni dopo, *dalla sola parte sinistra*, una iniezione di 1 cc. di sospensione 1.5 % di farina fossile in soluzione fisiol. I ratti furono sacrificati 6 per volta dopo 1 mese, 2 mesi, 3 mesi e 4 mesi da tale duplice trattamento; i noduli reattivi (quello di destra da solo idrocarburo, quello di sinistra da idroc. + Kieselgur) furono fissati in liquido di Oath e studiati colle ordinarie tecniche istologiche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto del cancro di Milano.
(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.
(3) Stieve, «Ziegler's Beitr.», *54*, 1912.
(4) Carminati, «Tumori», *17*, 101, 1931.

Si è trovato che il quadro del granuloma da farina fossile è profondamente modificato dalla contemporanea presenza dello stimolo chimico (coll'idrocarburo può avere qualche importanza il grasso usato come eccipiente): così colpisce la grande scarsezza di cellule giganti (c. g. da corpi estranei) di cui sogliono abbondare i granulomi in parola. Anche la reazione macrofagica, con addossamento di elementi istiocitari attorno ai frustoli della farina fossile (gusci silicici-esoscheletri di diatomee, infusori, ecc.), addossamento che è la fase preliminare di molte cellule giganti da confluenza considerabili come veri sincizi, qui è molto poco appariscente. Si può dire che la presenza dell'idrocarburo disturba la reazione a carattere tipicamente finalistico, di incapsulamento o riempimento e organizzazione, quale occorre comunemente per azione di corpi estranei di forme complicate ed altamente irritanti quale la farina fossile; che la reazione al cancerogeno in certa guisa si impone, sebbene anch'essa un po' modificata in confronto a quanto si svolge dal lato non trattato col Kieselgur. Quello che potremmo chiamare il granuloma misto, da gusci silicici + benzopirene, non ha alcuna tendenza sclerotica; e dopo 4 mesi è sede, come il focolaio reattivo da puro idrocarburo, di una trasformazione neoplastica pluricentrica, annunciata da polimorfismo e polidimensionalità cellulare di nidi di elementi cellulari compatti, talora con comparsa di cellule plurinucleate e giganti di tipo più nettamente sarcomatoso; inoltre marcata anche da focolai di necrosi. La sarcomatogenesi *non* è però accelerata dalla presenza dell'agente meccanico (confronto fra i noduli dei due lati). Rimarchevole il fatto che nel focolaio misto si ha dopo 3–4 mesi larga scomparsa di gusci silicici, residuanti come fini granulazioni refrangenti visibili colla forte diaframmatura del microscopio; mentre notoriamente tali materiali vengono bensì avvolti dalla reazione connettivale, ma permangono quasi indefinitamente nel tessuto, non essendo facilmente smaltibili. Si direbbe che la comparsa del tessuto maligno (3°–4° mese) implichi attività smaltitrici o addirittura solventi per quei gusci, la cui composizione consta di SiO_2, carbonato e fosfato di Ca, solfato di stronzio. Può essere che la produzione di acido lattico (glicolisi) od altri prodotti metabolici per parte del tessuto maligno provochi dissoluzione di alcuni costituenti inorganici (carbonati) e anche distruzione della trama organica (azioni enzimatiche) che certo esiste negli esoscheletri, per cui anche i costituenti non verosimilmente attaccabili ne vengono dissociati e dispersi e quindi resultano non più riconoscibili nella forma primitiva. Un autore giapponese Naoaki Nagao [1] avrebbe osservato qualcosa di simile in inoculazioni di farina fossile insieme a somministrazione orale o inoculazione locale di o-aminoazotoluolo, agente pure cancerogeno ad azione prevalente sulle vie biliari e sulla vescica urinaria ossia sugli organi di

(1) Naoaki Nagao, « Gann », 35, 1, 1941.

eliminazione: in questi esperimenti l'agente chimico avrebbe indotto una sarcomatogenesi locale a partire dal nodulo da farina fossile; e – quello che mi preme notare qui – nel tessuto sarcomatoso diverrebbe introvabile la farina fossile. Potrà essere oggetto di studio ulteriore questa azione almeno apparentemente solvente del tessuto neoplastico per i costituenti della farina fossile, azione che manca del tutto nei comuni granulomi, nei quali detto materiale resta dimostrabile a lungo.

Patologia. — *L'azione del freddo sulla respirazione batterica* [1]. Nota II di R. Deotto, presentata [2] dal Socio P. Rondoni.

Precedenti osservazioni [3] hanno mostrato che brodoculture di Bact. coli esposte all'azione del freddo (— 2°, —3° C) per 20–40 minuti presentano, quando riportate a 38° C, una esaltazione dei processi respiratori (consumo di O_2 misurato col metodo manometrico diretto di Warburg) del 200–500 % nel confronto coi controlli allestiti con quantità uguali delle stesse culture e mantenuti, nell'intervallo, a 38° C. Il fenomeno, riprodotto con brodoculture poste in miscela frigorifera fra il 430° e il 460° e fra il 1040° e il 1070° minuto di vita, non si verifica se si saggia l'azione del freddo su culture più giovani (70° minuto). L'esaltazione dei processi respiratori, massima nella prima mezz'ora successiva alla permanenza a bassa temperatura delle brodoculture, diminuisce nei tempi successivi.

I dati ottenuti nelle particolari condizioni sperimentali permettevano di concludere per una azione del freddo rappresentata da uno stimolo sulla respirazione batterica per liberazione di sostanze eccitanti da parte dei germi offesi e del tutto indipendente dai processi moltiplicativi che dal suddetto trattamento non possono certo essere favoriti.

Nell'ulteriore svolgimento delle ricerche interessava assodare se il fenomeno osservato fosse esclusivo del ceppo o della specie batterica studiata o di carattere più generale, se presentato dai germi in qualunque fase del loro sviluppo moltiplicativo, se infine fosse legato a modificazioni del germe, o del mezzo ambiente (sia pure per cessione di materiale da parte delle cellule batteriche) e quindi passivamente trasportabile.

Si è misurato il consumo di O_2 col metodo manometrico diretto di Warburg, usando vaschette coniche munite di due appendici laterali e di un pozzetto centrale per la soluzione di KOH; nella cavità principale si

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di patologia generale di Milano.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) R. Deotto, «Atti R. Acc. d'Italia», Memorie Classe Scienze Fisiche, Matematiche e naturali, XIII, 1235 (1942); «Arch. f. exp. Zellforschung», XXV, 151 (1944).

ponevano, a seconda degli scopi di ricerca, cc. 3 di germi sospesi in soluzione fisiologica, oppure di brodoculture prelevate dal termostato dopo 24^h o 48^h di permanenza oppure, infine, di brodo sterile, nel qual caso la brodocultura, in piccola quantità (cc. 0.1-0.2), veniva posta in appendice laterale e, travasata, al momento opportuno, permetteva di effettuare le misurazioni su brodoculture a partire dai primi minuti. Temperatura del bagno 37°-38° C; oscillazioni complete dei manometri: 60 al minuto. Per sottoporle all'azione del freddo le vaschette venivano messe nella celletta del frigorifero (— 2° — 3° C) oppure in miscela di ghiaccio e sale. Ogni schema sperimentale è stato ripetuto più volte ed i risultati riferiti si intendono confermati in diverse esperienze.

1. *Azione del freddo su diverse specie batteriche.* – Germi studiati: Bact. coli, ceppo 76 I.S.M.; Bact. coli, ceppo Ferrari I.S.M.; Bact. Paratyphi A, ceppo Napoli 6 I.S.M.; Bact. Paratyphi B, ceppo Firenze I.S.M.; Bact. Typi, ceppo 45 I.S.M.; Stafilococco, ceppo 285 I.S.M.

In vaschette coniche si pongono cc. 3 di brodocultura da 24^h a 38° C; nel pozzetto centrale KOH. I risultati essenziali sono riportati nel protocollo parziale della tabella I; essi mostrano che l'azione del freddo, eccitante la respirazione, è netta sui due ceppi studiati di Bact. coli e su quello di paratifo B, debole e di breve durata sul paratifo A, ancor più incerta o forse nulla sullo stafilococco; sul tifo è manifesta invece un'azione inibente che non è sempre stata osservata così netta come per il caso riportato; mai, comunque, si è osservata una qualche azione eccitante. Il semplice salto termico che si realizza trasportando le vaschette dal bagno manometrico (38° C) alla temperatura ambiente (6°–20° secondo le stagioni) non è sufficiente ad esaltare minimamente la respirazione batterica.

Per quanto riguarda l'età della cultura nella quale l'azione del freddo si manifesta è da precisare che su brodoculture allestite in vaschetta di Warburg, brodoculture, cioè, studiate a partire dal minuto zero, l'azione del freddo comincia a farsi sentire dal 100°–120° minuto in poi, fino, sicuramente, alla 24^a ora, con una esaltazione della respirazione grossolanamente proporzionale all'età; culture di 48 o più ore non hanno mai reagito all'azione del freddo con aumento del consumo di O_2. Parrebbe logico dedurre che brodoculture da 24^h a 38° C in termostato, portato in vaschetta di Warburg, dovessero essere subito sensibili all'azione del freddo; invece anche per esse occorre generalmente un periodo di latenza di 100–120 minuti; non ho ancora chiarito la precisa ragione di questo comportamento; non è da pensare semplicemente ad una maggiore moltiplicazione batterica nelle brodoculture allestite in vaschette, sia perchè l'azione del freddo, quando si manifesta, è abbastanza indipendente dalla concentrazione batterica, sia perchè dette culture mantenute in bagno a 38° C restano normalmente ferme e non sono agitate che per un tempo relativamente breve, quanto interessa per la ricerca (Così,

TABELLA I.

Azione del freddo su diversi ceppi batterici: consumo di O_2 in mmc.

Intervalli di tempo in minuti	B. Coli 76 I.S.M.		B. Coli Ferrari I.S.M.		Paratifo A Napoli 6		Paratifo B Firenze		Tifo 45 I.S.M.		Stafilococco 285 I.S.M.	
	Manometri numero											
	6–6	12–12	7–7	9–9	5–5	15–15	16–16	3–24	4–10	14–26	1–1	13–13
.....												
160′	86.7	89.7	70.5	67.8	44.2	45.6	31.1	31.8	20.9	18.4	71.4	75
170′	79.8	81.6	63.2	61.4	45.6	44.2	28.8	30.3	19.9	18.4	60.8	66.1
180′	79.8	a	72.3	a	54.4	a	26.5	a	24	a	64.6	a
190′	79.	— 3° C	66.6	— 3° C	53	— 3° C	24.2	— 3° C	25.1	— 3° C	57.8	— 3° C
200′	79.8	per 30′	70.5	per 30′	54.4	per 30′	25	per 30′	24	per 30′	56.2	per 30′
210′	79.8		67.5		53		23.4		26.1		52.4	
220′	57.8	136	67.5	120.5	54.4	69.7	21.3	32.7	25.1	3.8	47.9	52.2
230′	76.8	116.1	67.5	132.7	55.1	68.3	21.3	40.2	26.1	8.4	51.7	59.5
240′	69.9	185.2	66.6	128.4	55.8	69	16.7	41.8	28.2	7.7	49.4	52.9
250′	60.8	161.7	65.7	129.3	55.1	67.6	16.7	43.3	32.4	12.2	59.3	62.5
260′	61.5	183.8	63.3	132.7	54.4	60.7	17.4	42.6	15.7	4.6	49.4	51.4
270′	62.3	1661.1	66.6	128.4	55.8	59.3	16.7	43.3	25.1	9.2	55.5	58.1

ad esempio, volendo studiare l'azione del freddo al 1000° minuto, le vaschette vengono agitate la prima ora per controllare il regolare andamento dell'esperimento, e poi dal 950° minuto in poi). Ritengo piuttosto che la cultura in vaschetta, dove scarso liquido (cc. 3) gode di una larga superficie (7-12 cmq.) e di una minima profondità (3-4 mm.) porti a crescita di germi in condizioni di molta maggiore ossigenazione e quindi a forme batteriche con metabolismo sostanzialmente diverso da quello delle brodoculture comuni in provetta dove a 2 cmq. scarsi di superficie corrispondono 3-5 cm. di profondità del brodo.

TABELLA II.

Azione del freddo sul consumo di O_2 (in mmc.) del B. coli sospeso in soluzione fisiologica.

Intervalli di tempo in minuti	Manometri numero		
	13-19	15-15	3-24
10'	185.5	193.8	188
20'	198	209.4	197.5 (1)
30'	190.5	197.1	189.5
40'	172.5		175
50'	162.5	a	160.6
60'	160	— 3° C	148.5
70'	140.6		136.4
80'	105.5	183.2	130.9
90'	72.7	166	127.6
100'	53.9	101.4	113.2
110'	51.5	76	109.2
120'	46.6	63.8	91.6
130'	42.5	54.8	60.2
140'	40.8	48.2	49
150'	40.8	45	46.6

(1) Aggiunto cc 0.5 di liquido limpido (non respirante) da centrifugazione di B. coli di 24h sospeso in sol. fisiologica e tenuto per 20' a-3° C.

Tabella III.

Azione dei criolisati sulla respirazione del B. coli: consumo di O_2 in mmc.

Intervalli di tempo in minuti	Manometri numero				
	3–25	12–18	13–13	11–17	14–14
.....					
1120′	5.5	4.3	5.4	5.9	2.4
1130′	4.6	6	5.4	9.3	4
1145′	4.6	5.2	4.8	8.4	4.8
1160′	5.5	a	a	9.3	3.2
1175′	4.6	— 3° C	— 3° C	7.6	4.8
1190′	4.6	per 20′	per 20′	8.4	6.4
1205′	4.6	26.8		5.9	5.6
1230′	5.5	43.2		(1)	(2)
1245′	2.8	27.7		27.1	24
1260′	2.8	32		28.7	25.6
1275′	1.9	25.1		25.4	20
1290′	0.9	30.3		27.9	24

(1) Aggiunto cc. 0,5 di liquido limpido (non respirante) da centrifugazione della brodocultura contenuta in 13–13.

(2) Aggiunto cc 0,5 di liquido limpido (non respirante) da centrifugazione di B. coli di 24^h sospeso in sol. fisiol. e tenuto per 20′ a —3° C.

2. *Azione del freddo su germi sospesi in soluzione fisiologica. Azione dei criolisati sulla respirazione batterica.* – I risultati essenziali sono raccolti nelle tabelle II e III. Patine batteriche di 24^h su agar, ripetutamente lavate e sospese in soluzione fisiologica e distribuite in vaschette di Warburg, non mostrano esaltazione del consumo di O_2 per azione del freddo; i dati del manometro 10–15 in tabella II sono infatti uguali a quelli del manometro di controllo (13–19) e solamente spostati rispetto a questi per il periodo di tempo di esposizione al freddo e di conseguente parziale o totale blocco della respirazione. L'aggiunta alla sospensione batterica (manometro 3–24) di liquido limpido (non respirante) ottenuto dalla centrifugazione di una

sospensione di B. coli in soluzione fisiologica a — 3° C per 20′ non porta a immediata esaltazione della respirazione, ma rallenta in modo notevole la caduta del consumo di O_2 che si ha normalmente col tempo nei « resting bacteria » (confronta manometri 13–19 e 3–24). Ciò si può spiegare pensando che i prodotti della criolisi agiscono in 15–15 su germi in parte lesi dall'azione del freddo, mentre in 3–24 agiscono su germi indenni. Ben più netta ed interessante è l'azione dei criolisati sulle brodoculture (tabella III); qui vediamo che la brodocultura di B. coli (di 1100 minuti) non solo reagisce all'azione diretta del freddo con una forte esaltazione del consumo di O_2 (manometro 12–18), ma tale esaltazione presenta se alla brodocultura aggiungiamo cc 0,5 di liquido limpido (non respirante) ottenuto dalla centrifugazione di identica brodocultura mantenuta per 20′ a–3° C e di B. coli sospeso in soluzione fisiologica ed ugualmente trattato (manometri 11–17 e 14–14).

Possiamo quindi concludere, limitatamente ai problemi studiati ed in base ai risultati finora ottenuti che: 1° l'esaltazione della respirazione (consumo di O_2) per azione del freddo è fenomeno comune ad alcune specie batteriche, nelle quali si può presentare con diverso grado di intensità, e completamente assente in altre. 2° Detta azione si svolge per liberazione, da parte delle cellule batteriche di sostanze che passano nel mezzo e che hanno la proprietà di esaltare la respirazione dei germi sottoposti all'azione del freddo e, maggiormente, dei germi indenni. 3° È probabile che tali sostanze siano da identificare più come catalizzatori della respirazione, che come metaboliti, in quanto non esaltano il consumo di O_2 dei « resting bacteria » (Tab. II, manometro 3–24); a meno che non si vogliano interpretare come metaboliti attaccabili solo dal germe in fase moltiplicativa. 4° Il fatto che con brodoculture di 48^h, sicuramente vive, non risentono l'azione del freddo, autorizza a pensare che il fenomeno osservato sia strettamente legato ad una determinata fase evolutiva del germe, a quella fase cioè di intensa moltiplicazione nella quale i processi enzimatici sono, presumibilmente, esaltati in modo particolare e la superficie protoplasmatica si presenta particolarmente ricca di gruppi attivi che possono essere in parte staccati da agenti lesivi; può infatti avere qualche interesse ricercare se risultati analoghi a quelli ottenuti per l'azione del freddo non si possano avere ad opera di altri stimoli (elettrici, meccanici). La osservata reazione al freddo rimane comunque un fenomeno strettamente legato all'età del germe e dimostra, ciò che del resto era intuibile, come la cellula batterica (e non solo questa, presumibilmente) presenti una continua evoluzione di cui con la nostra indagine non rileviamo, di solito, che le fasi più lente.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 18 aprile 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di Calcolo delle Variazioni.* Nota [1] del Corrisp. L. Tonelli.

In una Memoria *Su un nuovo tipo di problemi di Calcolo delle Variazioni* [2], che ebbe origine dallo studio di una questione di alta tecnica e che venne pubblicata nel 1941, ho dato un teorema di minimo per una classe di problemi di Calcolo delle Variazioni che si presentano sotto condizioni diverse da quelle consuete, poichè sulle curve che in essi si prendono in considerazione deve esser costantemente verificata una certa disuguaglianza differenziale. Inoltre, il campo del piano (x, y) in cui si muovono queste curve è un rettangolo R, a lati paralleli agli assi coordinati, e da uno dei lati paralleli all'asse delle x la funzione integranda dell'integrale da render minimo $\int_C g(y, y')\,dx$ — che è un integrale curvilineo in forma ordinaria, con la $g(y, y')$ dipendente soltanto da y e y' — diventa singolare, perchè, fissato un qualsiasi valore positivo della y', al tendere della y all'ordinata del lato di R indicato la $g(y, y')$ diventa infinita.

Nel teorema da me dimostrato, il quale riflette le ipotesi imposte dalla questione tecnica che ad esso condusse, il punto iniziale, comune a tutte le curve prese in esame, è situato fuori dal lato di R su cui la $g(y, y')$ diventa

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 febbraio u. s., un mese prima che l'illustre Autore e caro amico fosse colpito da morte prematura. Il mssc. era accompagnato da una lettera in cui l'A. mi annunziava che la Memoria sullo stesso argomento citato più avanti era già redatto e pronto per la stampa. G. Castelnuovo.

(2) « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. X (1941) pp. 167–189.

singolare; ed in base a ciò ho potuto liberarmi completamente della zona di singolarità per la $g(y, y')$ dimostrando preliminarmente:

1°) che ogni curva ammissibile, uscente da un punto non appartenente al lato di R che contiene la singolarità della $g(y, y')$, non può mai raggiungere tale lato;

2°) che le curve di ogni successione minimizzante per l'integrale della $g(y, y')$, tutte uscenti da uno stesso punto non situato sul lato indicato di R, si mantengono tutte ad una distanza, da tale lato, maggiore di un numero positivo fisso, determinabile *a priori*.

Per dare al mio teorema un campo di applicazione più largo di quello che richiede la particolare questione che al teorema stesso mi ha condotto, interessa vedere se esso si estende al caso in cui le curve ammissibili escono tutte da uno stesso punto del lato di R su cui la $g(y, y')$ diviene singolare. L'indagine, in tale caso, si complica maggiormente; ma, introdotta qualche ulteriore precisazione sul comportamento della $g(y, y')$ nella zona di singolarità, il teorema resta ancora valido.

Prima di provare quanto ora ho affermato, ho voluto ritrovare i risultati già stabiliti nella mia Memoria citata con un nuovo procedimento. La nuova via, da me ora seguìta, evita completamente il passaggio dalla forma ordinaria dell'integrale da render minimo alla forma parametrica, e consente perciò una maggiore larghezza nelle ipotesi sulla funzione integranda.

Rimandando ad una Memoria di prossima pubblicazione la dimostrazione completa dei risultati ai quali sono giunto, esporrò qui gli enunciati precisi di questi risultati.

1. Nel piano che vogliamo considerare, assumeremo un sistema cartesiano ortogonale di assi x e y, e indicheremo con R il rettangolo costituito da tutti i punti (x, y) soddisfacenti alle disuguaglianze

$$X_0 \leq x \leq X_1 \quad , \quad Y_0 \leq y \leq Y_1 ,$$

nelle quali X_0, X_1, Y_0, Y_1 sono delle costanti date, tali che $X_0 < X_1$ e $Y_0 < Y_1$.

Ciò posto, siano $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ due funzioni, reali e ad un valore, definite sull'intervallo (Y_0, Y_1), continue, e tali che la prima di esse ammetta, pure finite e continue, in tutto l'intervallo detto, le due derivate $\varphi'(y)$ e $\varphi''(y)$; inoltre, si abbia

$$\varphi(Y_1) = 0 \quad , \quad \psi(Y_1) < 0 ,$$

e, per ogni y soddisfacente alle disuguaglianze $Y_0 \leq y < Y_1$,

$$\varphi(y) > 0 .$$

Sia poi $f(y, y')$ una funzione, reale e ad un valore, definita per ogni y tale che $Y_0 \leq y < Y_1$ e per ogni valore finito di y', e soddisfacente alle seguenti condizioni:

1°) per tutti gli y e y', indicati, essa sia continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, verifichi la disuguaglianza

$$f_{y'y'}(y, y') > 0,$$

e sia tale che

$$f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') \to 0,$$

per $y' \to +\infty$;

2°) esistano due costanti γ e $\overline{Y}$, con $\gamma > 0$ e $Y_0 \leqq \overline{Y} < Y_1$, in modo da risultare, per tutti gli y tali che $\overline{Y} \leqq y < Y_1$,

$$f(y, y) \geqq 0, \quad \text{se} \quad y' \leqq 0, \quad \text{e} \quad f(y, y') \geqq \gamma y', \quad \text{se} \quad y' > 0.$$

2. Indicato con Y_i un valore soddisfacente alle disuguaglianze $Y_0 \leqq Y_i < Y_1$, vale la seguente proposizione:

Nella classe K *di tutte le funzioni* $y(x)$, *reali e ad un valore, definite in* (X_0, X_1), *assolutamente continue, tali che*

$$y(X_0) = Y_i,$$

$$Y_0 \leqq y(x) \leqq Y_1, \quad \textit{in tutto} \quad (X_0, X_1),$$

$$(1) \qquad y'(x) \geqq \psi(y(x)), \quad \textit{in quasi tutto} \quad (X_0, X_1),$$

e tali, inoltre, che la funzione $\dfrac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))$ *risulti integrabile (nel senso del Lebesgue) sull'intervallo* (X_0, X_1) – *intendendo di sostituire ad essa il valore* 0 *ove è* $y(x) = Y_1$ *e ove non esiste finita la derivata* $y'(x)$ – *l'integrale*

$$I[y(x)] \equiv \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx$$

ammette il minimo assoluto.

Ogni funzione $y(x)$ *minimante per* $I[y]$ *nella classe* K *ammette sempre la derivata* $y'(x)$ *finita e continua, ovunque soddisfacente alla disuguaglianza* (1).

3. Supponiamo che, mantenendo inalterate tutte le altre ipotesi fatte nel n. 1, quella contenuta in 2°), relativa alla $f(y, y')$, venga modificata in modo da precisare maggiormente il comportamento di tale funzione in prossimità del valore $y = Y_1$ per il quale la $\varphi(y)$ si annulla.

Sostituiremo dunque alla condizione 2°) la seguente:

2′) esistano due costanti, γ e $\overline{Y}$, con $\gamma > 0$ e $Y_0 \leqq \overline{Y} < Y_1$, e due funzioni $\alpha(\tau)$ e $\beta(\tau, u)$, reali, ad un valore, non negative, definite per ogni $\tau > 0$ e ogni $u \leqq 0$, e per le quali sia

$$\frac{\alpha(\tau)}{\tau} \to +\infty, \quad \text{per} \quad \tau \to 0,$$

$$\frac{\beta(\tau, u)}{\tau} \to +\infty, \quad \text{per} \quad \tau + |u| \to 0,$$

in modo da risultare, per tutti gli y tali che $\overline{Y} \leq y < Y_1$,

$$f(y, y') \geq \beta(\varphi(y), y'), \quad \text{se} \quad y' \leq 0$$
$$f(y, y') \geq \gamma y' + \alpha(\varphi(y)), \quad \text{se} \quad y' < 0;$$

inoltre, per ciascun $\bar{y}' < 0$, il rapporto $\dfrac{f(y, \bar{y}')}{\varphi(y)}$, considerato come funzione della sola y, resti limitato in tutto l'intervallo (Y_0, Y_1) da cui si escluda l'estremo Y_1 (3).

4. Sotto le condizioni indicate, sussiste la proposizione che segue:

Nella classe K_1 *di tutte le funzioni* $y(x)$, *reali e ad un valore, definite in* (X_0, X_1), *assolutamente continue, tali che*

$$y(X_0) = Y_1,$$
$$Y_0 \leq y(x) < Y_1, \quad \textit{per} \quad X_0 < x \leq X_1,$$
$$(1') \qquad y'(x) \geq \psi(y(x)), \quad \textit{in quasi tutto} \quad (X_0, X_1),$$

e tali, inoltre, che la funzione $\dfrac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}$ *risulta integrabile (nel senso di Lebesgue) sull'intervallo* (X_0, X_1) – *intendendo di sostituire ad essa il valore* 0 *in* $x = X_0$ *e in quegli* x *per i quali non esiste finita la derivata* $y'(x)$ – *l'integrale*

$$I[y(x)] \equiv \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx$$

ammette il minimo assoluto.

Ogni funzione $y(x)$, *minimante per* $I[y]$ *nella classe* K_1, *ammette per tutti gli* $x > X_0$, *la derivata* $y'(x)$ *finita e continua, ovunque soddisfacente alla disuguaglianza* (1').

(3) Questa condizione 2') si trova verificata nel caso della funzione $f(y, y') \equiv ay' + \sqrt{a^2 y'^2 + \varphi(y)}$, $(a > 0)$, che figura nell'integrale

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{ay' + \sqrt{a^2 y'^2 + \varphi(y)}}{\varphi(y)}\, dx$$

da quale ha tratto origine la ricerca contenuta nella mia Memoria già citata.

Matematica (Geometria). — *Curvatura relativa a una data direzione o ad un punto dato di una linea qualsiasi.* Nota [1] del Socio G. Silva.

1. Si consideri una qualunque linea piana o sghemba l; se ne indichi con k la prima curvatura in un suo generico punto P, in cui essa sia finita, e si rappresenti al solito con $\boldsymbol{n}$ il versore della normale principale in P, rivolta verso la concavità della linea; si consideri inoltre un punto fisso O dello spazio e si indichi con $\boldsymbol{M}$ il versore di O — P, generalmente variabile con P, o costante nel caso particolare in cui il punto O è a distanza infinita. Definisco quale *curvatura della linea relativa al punto* O, *nel punto* P, la componente del vettore $k\boldsymbol{n}$ secondo la direzione orientata di O — P. Indicandola con K, scrivo dunque

$$\text{(1)} \qquad K = k\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M}.$$

Ho già date in altra Nota alcune espressioni di K al fine di riconoscere dal loro segno positivo o negativo se la linea rivolge alla direzione orientata di $\boldsymbol{M}$, ossia al punto O, la sua concavità o la sua convessità [2]; ritrovo più rapidamente in questa Nota le dette espressioni per via vettoriale.

2. Supponiamo che, rispetto a un sistema di coordinate cartesiane comunque scelto, la posizione del punto generico P della linea l, che riterremo generalmente sghemba, sia data in funzione di un parametro ω, e indichiamo con apici le derivazioni rispetto ad ω. Consideriamo, insieme con ω, l'arco s, misurato su l da un'origine arbitraria e in un verso prefissato fino al punto P, e designiamo al solito con $\boldsymbol{t}$ il versore della tangente orientata nel senso delle s crescenti e con $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$ il versore della binormale.

Derivando rispetto ad ω per il tramite di s, abbiamo

$$P' = s'\boldsymbol{t} \quad , \quad P'' = s''\boldsymbol{t} + s'^2 k\boldsymbol{n},$$
$$P' \wedge P'' = s'^3 k\boldsymbol{b} \quad , \quad (P' \wedge P'') \wedge P' = s'^4 k\boldsymbol{n}.$$

Moltiplichiamo internamente ambo i membri dell'ultima di queste uguaglianze per $\boldsymbol{M}$ e teniamo conto della (1) e della relazione $P' \times P' = s'^2$, che si ottiene dalla prima delle stesse eguaglianze, ed otteniamo

$$\text{(2)} \qquad K = \frac{(P' \wedge P'') \wedge P' \times \boldsymbol{M}}{(P' \times P')^2} = \frac{(P' \times P')(P'' \times \boldsymbol{M}) - (P' \times P'')(P' \times \boldsymbol{M})}{(P' \times P')^2}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 gennaio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) G. Silva, *Concavità, convessità e curvatura di una linea relative a un punto dato o a una data direzione.* « Atti e Memorie del R. Istituto Veneto di S. L. A. », to. CIV, parte II, 1944-45.

Dalla (2) scendono facilmente le espressioni generali di K in coordinate cartesiane (3).

3. Se il parametro ω coincide con l'arco s, è $P' = \boldsymbol{t}$, $P'' = k\boldsymbol{n}$, per cui $P' \times P' = 1$, $P' \times P'' = 0$, e risulta subito

$$K = P'' \times \boldsymbol{M}. \tag{3}$$

Se $\boldsymbol{M}$ è il versore di una direzione orientata fissa, diamo all'asse y del sistema cartesiano di riferimento questa direzione, per modo che le componenti di $\boldsymbol{M}$ diventino $0, 1, 0$, e per la curvatura K_y relativa all'asse y otteniamo

$$K_y = \frac{d^2 y}{ds^2}. \tag{4}$$

4. Proiettiamo la linea sghemba l dal punto O e indichiamo con θ l'angolo curvo di vertice O descritto dalla generatrice OP del cono Γ così costruito, misurato nello stesso senso in cui abbiamo supposto crescere l'arco s, a partire da una posizione iniziale arbitrariamente scelta della detta generatrice. Indichiamo inoltre con r la distanza OP e poniamo quindi

$$P = O - r\boldsymbol{M}. \tag{5}$$

Designiamo con $\boldsymbol{N}$ il versore che si ottiene facendo ruotare di 90° nel senso delle θ crescenti il versore $\boldsymbol{M}$ parallelamente al piano che è tangente a Γ lungo la generatrice OP. Una rotazione elementare $\delta\theta$ del raggio vettore OP produce eguali rotazioni elementari dei vettori unitari $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{N}$, che fanno loro assumere le posizioni espresse, a meno di infinitesimi di ordine superiore, da $\boldsymbol{M} + \delta\theta\,\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N} - \delta\theta\,\boldsymbol{M}$. Segue da ciò, evidentemente

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{d\theta} = \boldsymbol{N}, \qquad \frac{d\boldsymbol{N}}{d\theta} = -\boldsymbol{M}.$$

Supposto ancora ω coincidente con s, otteniamo dalla (5), tenuto conto delle relazioni ora scritte,

$$P' = -\frac{dr}{ds}\boldsymbol{M} - r\frac{d\theta}{ds}\boldsymbol{N},$$

$$P'' = \left[-\frac{d^2 r}{ds^2} + r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\right]\boldsymbol{M} - \left[2\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + r\frac{d^2\theta}{ds^2}\right]\boldsymbol{N},$$

e pertanto la (3) mostra che K coincide con il coefficiente di $\boldsymbol{M}$ in questa espressione di P''. Tenuto conto che $dr^2 + r^2 d\theta^2 = ds^2$, possiamo dunque scrivere

$$K = \frac{1}{r}\left[1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{ds^2}\right] = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds^2}\right]. \tag{6}$$

(3) G. Silva, loc. cit.

5. Supponiamo ora che il parametro ω coincida con l'anomalia θ descritta da OP sul cono Γ. Mantenendo gli apici per indicare le derivazioni rispetto a θ, abbiamo dalla (5)

$$P' = -r' \boldsymbol{M} - r \boldsymbol{N},$$
$$P'' = (r - r'') \boldsymbol{M} - 2r' \boldsymbol{N},$$
$$P' \times P' = r^2 + r'^2 \quad , \quad P' \times \boldsymbol{M} = -r',$$
$$P' \times P'' = r'(r + r'') \quad , \quad P'' \times \boldsymbol{M} = r - r'',$$

e quindi, sostituendo nella (2),

$$(7) \qquad K = \frac{r(r^2 + 2r'^2 - r r'')}{(r^2 + r'^2)^2} = \left[\frac{r^2}{r^2 + r'^2}\right]^2 \left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right].$$

6. Svolgiamo il cono Γ su un piano e indichiamo con l' la linea piana lungo la quale si svolge la linea sghemba l. È evidente che per due punti P e P', corrispondentisi sulle due linee, rimangono eguali anche i valori di r, di s e di θ; restano quindi eguali anche i valori di K definiti dalla (6) o dalla (7), e pertanto l ed l' hanno la stessa curvatura relativa al vertice O del cono Γ. Per la medesima ragione, la detta curvatura rimane invariata se deformiamo la superficie conica Γ, considerata però inestendibile e a generatrici rigide.

È pure evidente che rimane inalterato per le due linee l ed l' l'angolo φ che, in due punti corrispondenti P e P', la tangente, orientata nel senso in cui crescono s e θ, forma con il raggio vettore, orientato da O verso P. È facile del resto riconoscere che le relazioni, ben note per le linee piane,

$$(8) \qquad \frac{dr}{ds} = \cos\varphi \quad , \quad \frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang}\varphi \quad , \quad \frac{r\,d\theta}{ds} = \operatorname{sen}\varphi,$$

valgono anche per le linee sghembe [4], e poichè esse legano l'angolo φ ad r, s, θ, dimostrano che, restando inalterati questi elementi per le due linee l, l', resta pure invariato l'angolo φ.

(4) G. Silva, loc. cit. Si può anche osservare che, posta l'origine delle coordinate cartesiane in O, è $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, e quindi $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$; che i coseni di direzione del raggio vettore OP sono $x/r, y/r, z/r$; che quelli della tangente sono dx/ds, dy/ds, dz/ds, e pertanto che

$$\cos\varphi = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r\,ds} = \frac{dr}{ds}.$$

Ottenuta così la prima delle (8), la relazione $dr^2 + r^2 d\theta^2 = ds^2$ conduce subito alla terza; e da esse, per divisione, scende la seconda.

Fisica. — *Temperature e reazioni nucleari.* Nota [1] del Socio A. Amerio.

Nei fenomeni radio-attivi si osservano velocità paragonabili a quella della luce.

I raggi α che vengono emessi giungono a velocità dell'ordine di $2 \cdot 10^9$ cm/sec., e i raggi β a velocità che giungono a $2{,}9 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

Queste velocità sono possedute da poche particelle diffuse nella massa r. a.; la grande energia di esse viene, per conseguenza, dispersa in tutta la massa e, in parte di gran lunga prevalente, emessa e distribuita alle altre sostanze che sono in contatto, come recipiente e aria. Perciò, poco influisce sulla temperatura della sostanza r. a. È noto, però, che quando il radio è in quantità di alcuni decigrammi, la sua temperatura supera sensibilmente quella dell'ambiente.

Se si attribuisce alla particella che si muove la temperatura che corrisponderebbe a un gas che fosse costituito da particelle aventi la stessa sua massa, dotate di quella stessa velocità molecolare, in base alla teoria cinetica dei gas, si vedrebbero temperature quali si possono supporre soltanto nella parte centrale del sole e delle stelle.

Queste temperature possono essere calcolate facilmente.

Fino a che le velocità sono inferiori a 1/10 di quella della luce, si può applicare la nota formula della teoria cinetica dei gas, che lega la temperatura alle velocità e alle masse molecolari. Per velocità superiori converrà applicare la formula analoga della teoria della relatività.

Cominciamo dal primo caso: esso si verifica generalmente per le masse materiali emesse dai corpi radioattivi. È noto che, indicando con p la pressione, con d la densità del gas e con u la velocità molecolare si ha:

$$p = \frac{1}{3} d u^2$$

ed essendo p_0 la pressione a 0° e u_0 la corrispondente velocità se ne deduce, indicando con T la temperatura assoluta del gas:

$$\text{(1)} \qquad T = 273 \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 .$$

Per le particelle α che, essendo nuclei di elio, hanno la massa 4 e la velocità molecolare a 0° di circa $1{,}3 \cdot 10^5$ cm/sec., per una velocità di 10^9 cm/sec. risulta:

$$T = 1{,}60 \cdot 10^{10} .$$

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

Per una particella β lenta, posto $u = 10^9$ cm. poichè a 0° essa ha una velocità di $1{,}12 \cdot 10^7$, risulta:

$$T = 2.180.000°.$$

Per velocità superiori, finchè si tratta delle particelle α, si potrà ancora applicare la formula (1), perchè le velocità non giungono mai a 1/10 della velocità della luce, e lo stesso si dica per particelle più pesanti. Ma per le β occorrerà ricorrere alla formula relativistica, sebbene questa non alteri sostanzialmente l'ordine di grandezza delle temperature, che essa eleva rispetto alla prima.

L'energia cinetica, E_c, indicando con N il numero di molecole contenute nell'unità di volume preso nelle condizioni normali, con m la massa molecolare e con c la velocità della luce, è:

$$(2) \qquad E_c = Nm\,c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

la pressione, indicando con p_0 la pressione a 0° C, è:

$$p = \frac{2}{3} E_c = p_0 \alpha T$$

e la temperatura è:

$$T = \frac{2}{3} \frac{Nm}{p_0 \alpha} c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

dove $\alpha = \frac{1}{273}$ è il coefficente di dilatazione dei gas.

In questa formula il complesso di costanti $\frac{2}{3} \frac{Nm}{p_0 \alpha} c^2$ vale $3{,}97 \cdot 10^9$. Ne risulta per $u = 10^{10}$ cm/sec.··· $T = 2{,}4 \cdot 10^8$.

Per $u = 2 \cdot 10^{10}$ cm/sec.··· $T = 1{,}3 \cdot 10^9$ e infine per $u = 2{,}9 \cdot 10^{10}$ cm/sec.··· $T = 1{,}1 \cdot 10^{10}$.

Si hanno quindi, tanto per i raggi α quanto per i β, temperature elevatissime di ordine enormemente superiore a quelle che noi sappiamo produrre, e anche molto superiori a quelle della superficie del sole e delle stelle più calde.

È interessante notare questo fatto: se una particella α viene proiettata da un atomo di radio con la velocità $1{,}5 \cdot 10^9$ il residuo, che è un atomo di emanazione, viene proiettato in senso opposto con la velocità $2{,}7 \cdot 10^7$.

Alla particella α spetta, per conseguenza, la temperatura $3{,}6 \cdot 10^{10}$, mentre all'atomo di emanazione la cui velocità molecolare a 0° è 175 m./sec. spetta la temperatura molto inferiore

$$T = 273 \left(\frac{2.7 \cdot 10^7}{1{,}75 \cdot 10^4} \right)^2 = 6{,}5 \cdot 10^8.$$

Le temperature sopra calcolate spetterebbero ai gas aventi le masse e le velocità ammesse per un elettrone, per un elione e per un atomo di emanazione, e in realtà non possono essere osservate, data l'enorme dispersione dell'energia e dato l'esiguo numero di particelle che, in un dato istante, sono in possesso di quelle velocità.

Ma quando l'azione r. a. sia molto rapida in modo da manifestarsi con una rapida reazione nucleare o addirittura con l'esplosione di tutta una massa, allora tutte o almeno gran parte delle particelle, in un tempo straordinariamente breve assumono le grandi velocità sopradette e pertanto le temperature devono essere elevatissime.

Ciò è confermato dalle osservazioni fatte nelle esplosioni delle bombe atomiche. La luce emessa era più abbagliante di quella del sole, pure partendo da un'area piccolissima posta a grande distanza e l'istantanea fatta era senz'altro virata, come per eccesso di esposizione.

È dunque certo che le temperature raggiunte sono state elevatissime. Dato, quindi, che in una di tali esplosioni si raggiungono temperature molto più elevate di quella che si ha alla superficie del sole, vediamo qualche conseguenza circa l'emissione di energia raggiante.

Una legge dell'emissione per temperatura è quella nota sotto il nome di legge di spostamento, che dà, tra l'altro, la lunghezza dell'onda che nello spettro del corpo nero, avente una data temperatura, viene emessa col massimo di energia. Esprimendo le lunghezze d'onda in unità Å, essa è:

$$\lambda_m T = 2{,}93 \cdot 10^7 .$$

In base a questa, si calcola facilmente che il massimo di emissione in uno spettro si ha per un'onda di raggi X lunga 0,001 μ, pari a 10 Å, con una temperatura di 2.930.000°; temperatura molto inferiore alla minima di quelle calcolate sopra, eccetto che per i raggi β lenti. Se poi si volesse vedere a quale temperatura il massimo di radiazione spetterebbe a un'onda γ lunga 0,01 Å, si troverebbe $2{,}93 \cdot 10^9$.

Per conseguenza, anche ammesso che l'enorme irraggiamento impedisca che si possano raggiungere le temperature sopra calcolate, perchè l'esplosione, per quanto rapida, richiederà sempre un certo tempo, è presumibile che durante un'esplosione r. a. si abbia emissione per temperatura tanto di raggi X quanto di raggi γ, oltrechè di ultravioletti e luminosi.

Il dubbio che potrebbe sorgere che l'emissione per temperatura potesse mancare a queste piccole lunghezze d'onda, in causa di un troppo piccolo potere assorbente, non ha base in quanto i corpi che si ottengono con le note reazioni sono in gran parte, dotati di forti pesi atomici come cripton, bario ecc. e per conseguenza hanno notevoli poteri assorbenti per questi raggi.

Geologia. — *Le fratture e le rughe della Crosta terrestre.* Nota II [1] del Socio F. Sacco.

Premessi i dati generali sopra le forme principali della superficie terrestre (Nota I; p. 146) cerchiamo ora di spiegarne le modalità e le direttive.

Anzitutto dobbiamo ammettere che le prime aree continentali furono prodotte da intensi corrugamenti nonchè sollevamenti di formazioni prevalentemente sialiche (diventate poi scisti gneissei e simili per metamorfismo), pur con frequenti e copiose intercalazioni ed intrusioni sia sialiche (granitoidi), sia simiche (peridotiche e simili), in modo da costituire i nuclei dei cosidetti *Massicci antichi*, relativamente piccoli rispetto alle immense aree dei Bacini oceanici, ma che andarono poi gradatamente crescendo (almeno in generale) nei successivi sforzi diastrofici caledoniani, erciniani ed alpini, sino ad oggi. Ma vi fu in tuttociò una regola, una direttiva? e quale ne fu la causa?

Molte e varie teorie furono già emesse su tale proposito, come già esposi nelle due precedenti Note, precitate, sull'*Orogénie* . . . (1895) [2] e *Les Lois fondamentales* . . . (1906), alle quali quindi rimando. Solo ricordo che tale direttiva si volle trovarla specialmente come avente un carattere quasi cristallografico o geometrico, sorgendo dapprima la teoria di E. De Beaumont del *Reseau pentagonal* (1829-1852), poi del *Sistema tetraedrico* del Green (1873) colle susseguenti modifiche di Michel Levy, Lapparent, Arldt, ecc. Poscia cercandosi di fondare l'architettura della crosta terrestre su speciali assi-meridiani di simmetria e *cerchi* meridiani e paralleli incrociati, costituenti linee tra loro ortogonali di deformazione (per esempio, del Pacifico, dell'India, dell'Africa e dell'Atlantico), come variamente proposero Macpherson (1888), M. Bertrand (1887-1888), Golfier (1903), e più recentemente Fourmarier (1935). Altre teorie furono proposte basandosi sull'*isostasia*, su *correnti magmatiche*, su *scivolamenti*, sull'*oscillazione*, sulla *deriva dei Continenti* (Wegener, 1912) ecc., ma senza potersi adottare in generale come convincenti.

Parmi che la superficie del globo terrestre non abbia dovuto andar soggetta a precise regole cristallografiche o geometriche, ma solo ad influenze fisico-meccaniche alquanto irregolari. Come già delineai nell'*Essai sur l'Orogénie de la Terre* (1895, p. 6), la più antica area corrugata, sollevata, emersa in Continente, sembra esser stata la regione africana, come indicherebbero la sua costituzione geologica, la sua forma, la sua alterazione, la sua fratturazione, ecc.

(1) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Ne posseggo ancora alcune copie a disposizione di chi se ne interessa.

I fautori della trasmigrazione dei poli nelle epoche geologiche trascorse potrebbero pensare che la regione africana corrispondesse allora ad una regione polare, ma sarebbe un'ipotesi gratuita. Attorno a questa prima area continentale africana, o quasi contemporaneamente ad essa, ma a grande distanza, sorse analogamente una specie di interrotta collana di altri Massicci antichi (Americano nord e sud, Antartico, Australiano, Sinico, Siberiano e Balteo) coll'intermezzo delle grandi depressioni oceaniche (Atlantica, Indiana e Mediterranea o Tetide), mentre che sul lato opposto dell'emisfero, direi africano, si verificava l'immensa depressione dell'Oceano Pacifico.

Ricerche sulla deformazione di una sfera in contrazione per diminuzione di volume furono già eseguite con varii metodi da Green, Fairbairn, Lallemand, O. Fischer, dal gen. Schubert, dal col. Clarke, ecc., e mostrarono che un globo sottoposto a tali deformazioni può diventare, invece di una sfera, un ellissoide a tre assi diseguali od una forma consimile.

Studi di altro genere, piuttosto di Fisica matematica, mostrarono che una massa rotante può assumere la cosidetta *figura d'equilibrio di Jacobi*, che deformandosi diventa la *figura di Poincaré* (1885) calcolata da G. H. Darwin (1886-87-98), la quale si avvicina, per trasformazione di raffreddamento, alla pera planetaria di F. H. Jeans, che, nel mio lavoro sopra *Les Lois fondamentales de l'Orogénie de la Terre* (Turin, 1906, fig. 3 della Tavola) interpretai appunto in modo da risultarne uno sferoide che sulla superficie presenta una vasta area di emersione continentale circondata da una estesa depressione (oceanica), nonchè da una grande cintura continentale, ed avente sull'emisfero opposto un'immensa depressione oceanica, come appunto mostra la superficie del globo terracqueo.

Ad ogni modo il globo terrestre, originariamente fluido, poi magmico, ecc., rapidamente rotante, oltre alla nota depressione polare, potè assumere una forma leggermente asimmetrica e tale, colla contrazione generale ed il corrugamento superficiale, da presentare i rilievi e le depressioni sovraccennate e realmente esistenti.

Comunque formatisi i primi Massicci antichi in mezzo alle vastissime aree oceaniche, riesce relativamente facile ricostruire le successive trasformazioni della superficie terrestre fondandosi sui dati geologici.

Detti Massicci costituirono i nuclei, quasi lo scheletro irrigidito, dei futuri Continenti, formatisi gradatamente per continue aggiunte di successive zone orogeniche, sorte dalle circostanti aree sedimentarie ancora flessibili, sotto l'azione delle forze tangenziali e poi consolidatesi anch'esse per metamorfismo, ecc., come ho delineato sin dal primo lavoro del 1895 a cui quindi rimando, anche per i rapporti (indicati a p. 47) tra diastrofismo e diluvio-glacialismo.

Si è già sovraccennato che le fratture e le rughe della superficie terrestre, come analogamente anche della Luna, hanno un andamento prevalentemente meridiano o submeridiano, pur con numerose eccezioni, anche

grandiose, di andamenti diversi; ciò può forse attribuirsi per le fratture, ad un laterale *sostegno manco*, come nel caso tipico dell'Africa orientale per lo sprofondamento verso il Bacino dell'Oceano indiano; ma sorge anche l'idea che vi possa aver contribuito in parte la rapidissima rotazione del globo terrestre, ciò che pare confermato dal seguente altro fatto.

Se guardiamo in complesso le linee di corrugamento della superficie terrestre, vediamo che spesso sono dritte od ondulate, ma spesso anche più o meno ricurve colla convessità volta verso est, come per esempio in grande scala le gigantesche onde orogeniche che dalla regione australiana si sviluppano in immensi archi subellittici nell'Oceano Pacifico, ed in scala minore, ma ancora più tipica, le collane delle Antille e delle Orcadi meridionali. Vi sono però eccezioni, come per esempio le Aleutine che scendono a sud nel Pacifico settentrionale, le collane della Malesia che si espandono a S–O nell'Oceano Indiano, ecc.

Ma dove non ci sono cause speciali (ostacoli o, viceversa, accentuata pendenza del prossimo fondo marino, od altro) predomina tale arcuatura (anche molto accentuata e ripetuta) verso oriente.

La causa di tale fenomeno può forse trovarsi in una specie di accelerazione di trascinamento che la rotazione della Terra (oggi di 465 metri al 1″ nella regione equatoriale) deve, col tempo, produrre nelle onde di corrugamento che si formarono sul fondo (relativamente debole per natura sedimentaria e simica). Si può cioè immaginare che alcune delle onde orogenetiche che dal fondo del Pacifico orientale si innalzarono e si addensarono abbattendosi in gigantesche rughe contro i Massicci antichi americani e l'Antartico, là dove trovarono via libera, per la locale mancanza di detti rigidi Massicci, poterono, abbassandosi e restringendosi ad arco semiellittico, costituire le curiose collane, quasi ernie strozzate, delle Antille e delle Orcadi (naturalmente assai sismiche e vulcaniche), dirette verso est, appunto per trascinamento operato su di esse dalla rotazione del globo terrestre in tale senso.

Tale fenomeno può essersi verificato fin dai tempi geologici più antichi, giacchè vediamo che, per esempio, le formazioni arcaico–paleozoiche dell'Australia presentano consimile curvatura verso oriente.

Fatti analoghi, ma pure con numerose eccezioni, veggonsi sulla superficie della Luna nelle caratteristiche ondulazioni del già magma, simico–basaltoide, dei *Maria*.

Ma un problema fondamentale rimane ancora da accennarsi, cioè la causa generale del fenomeno di corrugamento della litosfera terrestre.

La prima idea, logica, naturale che viene alla mente è che trattasi di fenomeno dipendente dalla contrazione prodotta da *condensazione* e quindi *concentrazione* e lento raffreddamento relativo del globo terrestre; per cui la diminuzione del suo volume, del suo diametro e conseguentemente della sua superficie, avrebbe cagionato quelle spinte tangenziali che originarono

detti corrugamenti; notando che anche gli sprofondamenti accompagnanti le fratture (per azione gravitazionale) debbano aumentare dette spinte orizzontali. È infatti l'idea classica già emessa da Descartes nei suoi *Principes de Philosophie* (del 1644), poi da Leibniz in *Protogaea* del 1695 e sempre in seguito, da Buffon, E. de Beaumont, nelle sue *Recherches* del 1824, Prevost, Dana, Suess, Heim, Le Conte, Schuber, ecc.

Ma in questi ultimi decenni tale idea fu generalmente abbandonata per adottarne alcune delle sovraccennate, specialmente quella del Wegener della deriva dei continenti staccatisi da una Pangea originaria, per cui, forse, tratterebbesi piuttosto di una dilatazione che non di una contrazione. Però, siccome ciò è in netto contrasto coi fatti che ho già esposti nel mio *Essai sur l'Orogènie de la Terre* del 1895, così sempre credetti ammettere come più logica e naturale la teoria della contrazione per condensazione, confortato anche recentemente dal lavoro del Kober sopra la *Tektonische Geologie* del 1942 che la sviluppa e l'appoggia in modo specialissimo.

Del resto, il fenomeno della condensazione è uno di quelli più tipici e regolari dell'evoluzione cosmica; così, cominciando dalle immense Nebulose originarie e dalle Stelle giganti [3] a densità debolissima (per esempio 0,000.000.6 rispetto all'acqua = 1), si scende gradatamente, attraverso le fasi successive (antariana, aldebariana, argoniana, algoliana e siriana) alle Stelle nane come il Sole (densità circa 1,4) ed alle Stelle pisciane a densità anche di oltre 10; notando che nella fase argoniana le masse stellari, raggiungendo temperature fotosferiche anche di oltre 50.000°, talora presentano esplosioni tali da produrre Stelle *Novae* che possono originare *Nebule* (*Stelle*) *anulari* e quindi anche Sistemi planetari [4], i cui elementi (per quanto conosciamo dal nostro Sistema solare) presentano densità varie da circa 1 nei Pianeti gassosi esterni a circa 4-5 nei Pianeti interni già incrostati come la Terra (5,6), sino circa a 6 come in quello più interno, Mercurio. Così pure, riguardo al diametro e relativo volume, si scende da 600 e più Soli nelle Stelle giganti, attraverso detta evoluzione stellare, ad 1 (pel Sole) ed a meno di 0,007 Soli nella fase ultima pisciana; come pure nell'evoluzione planetaria, per quanto sappiamo, si discende dai 140.000 km. pel diametro equatoriale del Pianeta esterno gassoso, Giove, ai diametri molto minori dei Pianeti interni incrostati, come la Terra (12750 km.; e 4900 per Mercurio).

Analogamente per la temperatura, dopo iniziata la fase discendente, vediamo abbassarsi la temperatura fotosferica da oltre 50.000° nelle Stelle giganti a solo più 6000° nelle Stelle nane (come nel Sole) ed anche sotto 2000° nelle Stelle pisciane, finchè si incrostano raffreddandosi completamente all'esterno, ma conservando poi ancora temperature di qualche migliaio di gradi nell'interno sino al completo raffreddamento quando, ben più tardi,

(3) F. Sacco, *L'evoluzione stellare*. « Atti Acc. Sc. Torino », vol. 80, 1941.
(4) Id., *L'Origine del Sistema solare*. « Atti Acc. Sc. Torino », 1944.

Schema geotettonico della superficie terrestre.

1. – Zone orogeniche più o meno giovani. 2. – Zone orogeniche antiche e fratture spec. continentali.
3. – Fratture-faglie perimetrali dei Continenti.

N. B. – Le aree punteggiate rappresentano i Massicci antichi (compresa l'Antartide che non fu punteggiata.

si verifica la consolidazione, anche interna, di tutto il globo planetario, per cui vi cessa ogni attività orogenetica.

Da tutto ciò può logicamente dedursi che il globo terrestre, analogamente a quanto verificasi in generale nell'evoluzione cosmica, dopo esser passato dallo stato gasoso, poi fluido-magmico ed essersi incrostato (pur rimanendo magmico in profondità), deve aver continuato nelle successive epoche geologiche a diminuire di temperatura, di densità, di volume e quindi di superficie; per cui esso dovette corrugarsi nella sua litosfera, costituendovi speciali zone orogeniche. Tali fenomemi però non dovettero esser regolari, ma, come tutto in natura, verificarsi a ritmo, come già nella formazione delle *Novae* e nella pulsazione delle Stelle variabili, compreso il nostro Sole, continuando poi anche nelle masse planetarie con alternanza di lunghe fasi di calma per lento accumulo di energie interne finchè queste raggiungono tale potenza da produrre diastrofismi, quasi rivoluzioni, di tipo orogenico e quindi oroidrografico, climatico, biologico, ecc., ciò che costituisce e distingue i diversi periodi geologici.

Concludendo, la massa terrestre, seguendo le leggi generali della evoluzione cosmica, nelle successive sue fasi (gasosa, fluida, magmica, incrostata, cioè jovica, selenica, plutonica) sino all'attuale geica, dovette gradatamente diminuire, non solo di temperatura, ma (per condensazione e concentrazione) di volume e di superficie e quindi corrugarsi ed originare dapprima i Massicci antichi, poi le varie zone orogeniche nei successivi periodi diastrofici (arcaico, caledoniano, erciniano, alpino), finchè, diminuendo l'atmosfera e l'idrosfera, nonchè le energie interne, dopo che le zone orogeniche avranno invaso gran parte dei bacici marini e che i relativi rilievi continentali saranno stati abbassati ed alterati dalle azioni esogene fisico-chimiche, la Terra passerà nella fase areica o marziale, cioè con superficie in prevalenza pianeggiante, arida, sabbiosa o rocciosa, giallo-rossastra, ancora con alcune aree maremmano-paludose, con atmosfera scarsa e povera di vapor acqueo, ecc., cioè nella fase a cui è già giunta la superficie del pianeta Marte che, per la sua massa minore di quella della Terra, ebbe una evoluzione più rapida, e quindi ormai molto avanzata.

Fisiologia Vegetale. — *La nutrizione dei meristemi e l'ingiallimento dei tessuti verdi.* Nota [1] del Socio G. Gola.

Occorre anzitutto distinguere la nutrizione dei tessuti in due fasi, quella che ha luogo durante l'elaborazione mitotica dei meristemi, e quella della nutrizione dei meristemi stessi, quando, colla distensione e la differenziazione, assumono caratteri ed una mole ben distinti da quella iniziale.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

L'apporto del materiale nutritizio per i meristemi ha luogo per diffusione e per imbibizione attraverso le cellule meristematiche più adulte e più prossime alle cellule già differenziate in elementi conduttori. Da dove proviene tale materiale? è esso un diretto prodotto di elaborazione delle cellule assimilatrici più prossime, o ha un'origine più lontana nel tempo e nella localizzazione?

Se si considerano le fonti di nutrizione di alcuni tra i meristemi più attivi e tipici, si costata che esse sono sempre date da tessuti di riserva; tali i semi, tali le gemme, siano esse le gemme rameali, che quelle dei bulbi e dei rizomi; tale anche il cambio, la cui attività maggiore si svolge quando la ripresa vegetativa determina la lisi delle riserve liberiane e midollari. L'intensa attività mitotica che caratterizza la prima fase dello sviluppo di nuovi organi ha luogo, evidentemente, mediante derivati di una lisi di cellule differenziate per una tale funzione (quella di riserve), e quando per lo più mancano altri tessuti in piena attività, così che si può escludere la possibilità di afflusso di prodotti di immediata organicazione.

La composizione chimica dei meristemi in via di sviluppo corrisponde assai, del resto, a quella dei tessuti di riserva, ricchezza di proteidi e fosfatidi, elementi delle ceneri prevalentemente fosforati e potassici, magnesio e traccie di manganese, povertà estrema di calcio e di silicio, in contrasto con quella dell'apparato vegetativo, nel quale, a lato dell'N proteico, si hanno altre forme non tali, ceneri ricche di Ca, di Si, nonchè tannini, flavoni ed altri composti della serie aromatica che sono assai meno diffusi nelle riserve.

Sono insomma prodotti di lisi che si ricongiungono insieme a formare cellule capaci di ogni ulteriore differenziazione.

Anche nella fase di distensione e di differenziazione, che caratterizza un'ulteriore attività delle cellule meristematiche, è da escludere l'intervento di materiali di recente assimilazione, ma sono ancora prodotti di lisi cellulare quelli che hanno parte in questa costruzione.

Ricordo a questo proposito, un'esperienza di Pigorini: all'inizio della primavera egli pose tre giovani piante di gelso di eguale sviluppo l'una in sabbia lavata, l'altra in una miscela di sabbia e terra e la terza in terra fertile; collo sviluppo primaverile i tre individui entrarono in germogliazione e formarono le nuove foglie ed i nuovi rigetti senza sensibile differenza tra i distinti individui; tale uniformità di comportamento durò fino a giugno, quando fu completamente sviluppato il nuovo apparato dell'annata; in seguito, apparve ben evidente il differente sviluppo durante la stagione estiva, in relazione alle condizioni di nutrizione offerte dai diversi sustrati.

Evidentemente tutta la fase dello sviluppo primaverile si era svolta a spese delle riserve egualmente accumulate nell'autunno precedente da tutti e tre gli individui; solo la fase estiva si è svolta coll'apporto, l'organicazione e l'assimilazione di nuovo materiale nutritizio.

È noto come le ortensie siano particolarmente sensibili alla presenza di calcare nel terreno e come siano soggette, in tal caso, a clorosi fogliare. Se tali piante vivono su terreni i quali contengono calcare in misura non tale da impedirne lo sviluppo, ma sufficiente per determinare una manifestazione di clorosi, si osserva un caratteristico comportamento ad ogni ripresa vegetativa primaverile: dapprima le gemme dànno sviluppo a foglie completamente verdi, in seguito le altre che si sviluppano mostrano più o meno marcatamente fatti di clorosi; le prime si sono nutrite con le riserve dell'anno precedente senza ricevere alcunchè di elementi capaci di determinare la clorosi; le altre hanno ricevuto l'apporto di materiali assorbiti nell'annata colle conseguenze sui cloroplasti che sono note.

Si può affermare che i meristemi ai quali ho accennato ricevono, tanto nella fase mitotica quanto in quella successiva di distensione e di differenziazione, solamente materiali provenienti dalla lisi di cellule preesistenti, che abbiano già fatto parte di una cellula viva ed attiva; che, cioè, risultino da una precedente assimilazione nel senso stretto della parola; occorre che le diverse molecole di materiali nutritizi si siano legate fra loro nelle proporzioni caratteristiche per ogni singolo tipo di plasma, mentre i composti divenuti superflui sono stati o eliminati o immobilizzati nell'ambito cellulare, così da non prendere più parte attiva al ricambio cellulare (ad esempio residui purinici, tannici ecc.).

Che tale comportamento debba considerarsi come una legge generale del ricambio dei viventi lo possono dimostrare molti fatti.

Ogni attività meristematica esige la presenza di prodotti di lisi cellulare; la colture dei tessuti, siano essi vegetali che animali, hanno strette necessità a questo riguardo; il sustrato delle coltivazioni dei tessuti animali, oltre che essere strettamente regolato quanto alla concentrazione idrogenionica, deve essere frequentemente rinnovato mediante l'aggiunta di nuovo siero di sangue (che contiene prodotti di lisi cellulare destinata ai tessuti da irrorare), o da estratti di embrioni di fresco preparati in modo da fornire il *pabulum* alle nuove cellule coltivate; i tessuti vegetali in via di coltivazione esigono di frequente rinnovamento, nel sustrato, di frammenti di tessuto vivo, dai quali derivano i prodotti di lisi necessari allo sviluppo delle cellule in via di moltiplicazione.

Quando non vi siano tessuti di riserva, da dove traggono le piante tali prodotti di lisi? quali sono le cellule che si involvono per cedere il loro contenuto utilizzabile alle altre che ingrandiranno l'organismo o ne perpetueranno i caratteri nella discendenza?

Esse sono essenzialmente le foglie; l'ingiallimento delle foglie corrisponde appunto a questa mobilizzazione dei materiali utili, specialmente azotati, dell'organismo vegetale.

Nelle piante annuali il fatto si svolge con una semplicità che ne rende chiaro il manifestarsi. Il frumento sviluppa, mediante i materiali delle

riserve del seme, alcune poche foglie (due o tre), delle quali la prima, (quella per lo più costituita da una sola guaina), è già essiccata alla fine di gennaio; le altre due, dopo aver assimilato quel tanto da valere a preparare foglie ulteriori, sono progressivamente ingiallite nel mese di febbraio; quando, collo sviluppo della spiga, il culmo si allunga e le foglie cauline, assai più grandi, assumono la parte preminente nello sviluppo dell'individuo, quelle inferiori si sono già essiccate dopo un lento e graduale ingiallimento; il quale prosegue gradualmente dal basso in alto per terminare poi coll'ingiallimento della spiga. Fatti analoghi si osservano nella successione delle fasi di sviluppo del papavero, ecc.

Nelle piante bienni sono manifesti l'esaurirsi della rosetta fogliare quando si inizia la ripresa vegetativa primaverile della gemma principale, e la successiva involuzione dei tessuti dal basso in alto.

Su quelle perenni si possono citare molti casi di correlazione tra l'inizio di una nuova attività merismatica e l'involuzione fogliare. Le piante a bulbo esauriscono le riserve dei catafilli quando sviluppano l'apparato epigeo; a sua volta l'apparato epigeo ingiallisce e si involve quando si inizia lo sviluppo della nuova gemma (come è noto, fatto assai precoce), che darà luogo all'apparato epigeo dell'annata seguente.

Tipico è il caso dell'esaurimento delle foglie d'Agave quando si sviluppano i meristemi dello scapo fiorale.

L'ingiallimento autunnale che precede la caduta delle foglie precede di poco lo sviluppo visibile delle gemme di svernamento; nelle sempreverdi, nelle quali la caduta delle foglie è primaverile, le foglie manifestano i segni del loro scadimento quando si elaborano e si muovono le gemme all'inizio della ripresa della buona stagione.

Nelle emicriptofite la preparazione delle gemme ibernanti si inizia quando la parte epigea comincia il suo declino e ha termine col termine dell'esaurimento di questi organi in via di evoluzione.

Quando l'ovario fecondato ha ricevuto dagli organi vicini quanto è necessario per la sua nutrizione e si avvicina al periodo della maturazione, la funzione nutritiva per i semi è devoluta alle pareti carpellari, appartengano essi al tipo dei frutti secchi che a quelli carnosi; esse subiscono allora una specie di crisi per la quale, o si essiccano lasciando dei tessuti essenzialmente meccanici, oppure si trasformano in un ammasso di materiali energetici che sono però definitivamente estranei al ricambio materiale dell'organismo che li ha prodotti. Tali organi subiscono l'involuzione propria delle foglie, e la clorofilla scompare per lasciare il posto alle colorazioni xantofilliche o antocianiche dei frutti.

Analoghe osservazioni possiamo fare sulle cloroficee, nelle quali la sporulazione si inizia col cambiamento di colore dei plastidi.

Ho accennato all'ingiallimento come all'indice più sensibile e più facile a rilevare all'inizio dell'involuzione dei tessuti eminentemente vegetativi,

quali sono quelli assimilatori, ma è da ritenere che la scomparsa della clorofilla dai tessuti verdi costituisca un indice veramente appropriato dei fenomeni legati a questa profonda modificazione di chimismo fogliare.

Della caduta delle foglie si invocano, di solito, altri fattori sopratutto ambientali, l'umidità autunnale, la secchezza estiva, ecc.; senza escludere che fattori ambientali possano determinare condizioni tali da dar luogo allo sviluppo dei tessuti di distacco, come ne sono capaci anche fattori parassitari, o comunque nocivi, essi sono, tuttavia, troppo eterogenei fra loro per costituire il fattore fondamentale di tale processo.

Se si dovesse fare una graduatoria del valore delle diverse forme di combinazioni di azoto nelle piante e del modo col quale esse si comportano durante la regressione cellulare, si constaterebbe che l'ultima combinazione azotata che si insedia nella cellula in via di accrescimento è la clorofilla; e la prima a staccarsene, quando la cellula stessa ha raggiunto l'acme della sua attività, è ancora la clorofilla.

La foglia giovanissima, a tessuti non ancora completamente evoluti, ma nei quali il plasma ha già svolto la fase di sineresi per passare a plasma adulto, è ancora ricca di carotinoidi e povera di pigmenti clorofilliani; una anche lieve carenza di N a disposizione della pianta si manifesta col pallore dei tessuti fogliari; un pronto rimedio a tale deficienza di clorofilla si ha nella somministrazione di N nitrico, che provoca il rapido e intenso inverdimento delle foglie, la cui intensità è, per ogni agricoltore, l'indice più chiaro nella perfezione delle sue coltivazioni.

Una ferita, un'attacco parassitario che valga a provocare nel parenchima di una foglia adulta una anche leggera reazione cellulare, vi determina spesso la permanenza della colorazione verde, mentre gli altri tessuti indenni iniziano e progrediscono nel loro ingiallimento. La lisi degli altri costituenti azotati della cellula verde si svolge in una fase ulteriore; tanto che non poche foglie ingiallite conservano per non breve tempo un certo turgore, e spesso cadono essendo ancora in stato di apparente normale turgore cellulare, indici questi che il plasma ha conservato a lungo la sua vitalità malgrado la progressiva uscita di non pochi composti azotati.

Io sono d'avviso che l'ingiallimento fogliare è legato ad una sottrazione di N da parte di altri tessuti, che, come quelli meristematici, ne hanno intenso bisogno in un dato periodo della loro attività; nello stesso modo che i succhioni possono determinare un forte deperimento di impalcature caulinari anche di mole notevole.

Che, oltre all'N, anche altri elementi relativamente preziosi per la pianta, quali P e K, possano seguire questo comportamento non è da escludere.

Ma mi sembra di un certo interesse per la fisiologia del ricambio, lo stabilire che alcuni particolari aggregati atomici si trasferiscono da una cellula all'altra di uno stesso organismo, dopo una limitata disintegrazione,

durando assai più a lungo che non le cellule che per prime li hanno costituiti, e migrando dall'una all'altra a costituire il sustrato della vita. Sono aggruppamenti che avendo già fatto parte di altre cellule viventi sono già completamente equilibrati fra loro, e, senza lasciare speciali scorie che potrebbero essere dannose per la nuova cellula in via di sviluppo, possono essere rapidamente e completamente assimilati (con un coefficente di assimilazione elevatissimo) dalle nuove cellule delle quali entrano a far parte.

Nè questo quadro è limitato alle cellule dei tessuti verdi; i tessuti di riserva presentano un analogo comportamento; le spore dei funghi, persino quelle dei bacteri, risultano chiaramente da una lisi dei plasmi circostanti.

È probabilmente da aggiungere che la strettissima specificità di alcuni parassiti per determinati ospiti, quale, ad esempio, quella di molti emibasidiomiceti, sia dovuta ad una tale modalità di alimentazione del parassita stesso.

Come conclusione di tali considerazioni, io vorrei affermare che la nutrizione dei tessuti nuovi non ancora differenziati si svolge nelle piante in modo ben distinto da quanto ha luogo nei tessuti differenziati.

I primi abbisognano di alimenti, specialmente le proteine, che abbiano una costruzione molecolare complessa e caratteristica per ogni entità biologica e cioè non siano affatto denaturati. I secondi abbisognano invece di composti organici assai più semplici, anzi denaturati fino a entità molecolari assai piccole, talora addirittura solo composti inorganici da organicare. Tali composti possono, dopo l'organicazione, essere legati strettamente alle molecole costituenti il plasma primitivo della cellula, e, così, assimilati fino ad aumentarne la massa; la quale in un tempo ulteriore, quando per la cellula si inizia la fase di decadenza, va soggetta ad un processo di lisi formando, così, in misura maggiore (corrispondente cioè al patrimonio iniziale della cellula giovane, più quanto essa ha assimilato nel corso della sua attività funzionale), quel materiale non disintegrato che andrà a costruire nuove e più numerose cellule embrionali dell'individuo fattosi adulto.

Biologia. — *Espansione in superficie ed accrescimento individuale delle cellule.* Nota [1] del Socio G. Levi.

Tra le norme che regolano l'architettura degli organismi, hanno certamente importanza essenziale la legge delle superfici minime delle cellule di Lord Kelvin, e la legge del rapporto tra superficie e volume delle medesime di Herbert Spencer.

È evidente che queste due leggi sono in contrasto reciproco.

Infatti, tutte le cellule per assunzione di materiale nutritivo, dal mezzo in cui si trovano, tendono a crescere di volume, a meno che i processi

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

anabolici e catabolici non siano in perfetto equilibrio; ma ad un certo punto la riduzione della superficie specifica rappresenta un ostacolo agli scambi metabolici della cellula. Affinchè una cellula mantenga un massimo di volume con un minimo di superficie, essa non può oltrepassare un determinato volume optimum per un normale metabolismo; quando questo volume limite è oltrepassato, la cellula è stimolata a dividersi dai prodotti del catabolismo cellulare; per il processo di scissione, il rapporto superficie–volume compatibile con una funzione normale, viene ristabilito. La legge di Spencer ci rende adunque ragione della legge della costanza della grandezza cellulare di cui Driesch diede la dimostrazione sperimentale, e che fu confermata da tutte le osservazioni successive.

Effettivamente si uniformano alla legge delle superficie minime soltanto quelle cellule, nelle quali si può ristabilire rapidamente con un processo di scissione il rapporto normale tra superficie e volume; e più precisamente vi si uniformano le cellule dei parenchimi vegetali, di alcuni epiteli e di molte uova in segmentazione (Fréderic Lewis, Matzke, Wetzel); queste cellule molto stipate, considerevolmente di più dei mattoni in un muro, hanno la forma di poliedri e la previsione teorica di Lord Kelvin risultò per esse confermata con sensibile approssimazione; F. Lewis trovò che su 100 cellule di sambuco, 16 avevano la forma di poliedri a 14 facce; ve ne erano 21 con 13 facce ecc. Dato che non tutte le cellule hanno la stessa grandezza, nè le stesse proprietà, e data la influenza perturbatrice della mitosi, un certo divario dalle previsioni teoriche non sorprende.

Quando le cellule non possono per varie ragioni ristabilire rapidamente il rapporto superficie–volume optimum, vanno soggette a mutamenti di forma, i quali importano un incremento della superficie specifica. È infatti di dominio comune che qualsiasi deformazione dalla sfera conferisce ad un corpo una superficie più estesa; mentre una sfera di 1 cm^3 di volume ha una superficie di 4,36, un cubo di eguale grandezza ha una superficie di 6, un tetraedro di 7,20. Se questo non uniformarsi alla legge dell'economia di spazio dipenda, come ritiene J. Gray, da caratteri inerenti alle cellule, profondamente stabiliti e predeterminati, oppure sia regolata esclusivamente da necessità inerenti al metabolismo, non è il caso di discutere qui.

I mutamenti di forma che si verificano nelle cellule dei tessuti degli organismi sono, com'è noto, molto vari; esse si appiattiscono, oppure emettono dei prolungamenti, od assumono forma di lunghi cilindri o di fusi.

In grado molto più alto che col semplice mutamento di forma, lo sviluppo della superficie limitante di un corpo, viene prodotto colla *difformazione* (*Ausformung* o *Difformation*). Wolfang Ostwald dà questo nome a tutti i mutamenti di forma i quali importano un grandissimo aumento della superficie; egli distingue i sistemi difformi in due dimensioni (in fibrille) od in una sola dimensione (in film). E come la discontinuità grossolana della materia si collega alla discontinuità discreta o molecolare,

nello stesso modo, con un'altra operazione stereometrica, si passa per gradi da lamine o filamenti dell'ordine di grandezza macroscopico o microscopico a corpi di spessore submicronico sino alla grandezza molecolare, quale si realizza ad esempio nei film monomolecolari di Langmuir. È noto che nel materiale inorganico la difformazione può raggiungere un grado altissimo; con un cm^3 di oro si possono ottenere 1000 m^2 di film; e se si tira un corpo di un cm^3 in un filamento di 10 mμ di diametro, si ottiene un filo di 127 milioni di chilometri di lunghezza, con una superficie di 400 metri quadri.

Nelle cellule coltivate in vitro lo spazio non è, come nei tessuti dell'organismo, limitato, ed esse hanno la più grande libertà di movimento; si comprende adunque che nelle medesime si abbiano condizioni opposte a quelle previste dalla legge dell'economia di spazio, e le più favorevoli per una difformazione.

È noto che le cellule che hanno abbandonato l'espianto ed emigrano nel coagulo di plasma, hanno forma di fusi molto allungati, oppure emettono vari sottili pseudopodi (cellule dette comunemente di tipo fibrocitario): difformazione in due dimensioni.

Relativamente frequente è pure la difformazione in una sola dimensione da parte delle cellule in coltura, e più particolarmente di quelle che emigrano dall'espianto in contatto con una superficie consistente e liscia (vetro o mica); questi elementi si presentano al microscopio a forma di film molto sottili, a contorno irregolare, con propaggini brevi e tozze, oppure di poligoni (pentagoni, esagoni ecc.) intimamente aderenti l'uno all'altro, in modo che costituiscono un mosaico molto regolare, simile a quello degli epiteli pavimentosi dell'organismo, colla differenza che in tal caso l'espansione in superficie è di grado molto più alto.

È di questa seconda varietà di difformazione delle cellule coltivate in vitro che mi propongo di occuparmi qui.

È ovvio che un'espansione in superficie di grado tanto alto si ripercuote sulla loro intima struttura, come già Lewis e Lewis e io stesso abbiamo rilevato in colture di cellule di vari tessuti e Fauré-Fremiet in amebociti di invertebrati.

Qual'è anzi tutto il limite massimo di espansione in superficie che una cellula in queste condizioni può raggiungere? Fu supposto che i protozoi ed i veli ialini dei macrofagi possano assottigliarsi sino ad uno spessore vicino a quello di un film monomolecolare. Ebbene questo presupposto risultò infondato. Policard da un lato e Fauré-Fremiet dall'altro sovra materiale differente e con metodi diversi hanno dimostrato che lo spessore delle suddette strutture non discende mai al disotto di un limite minimo di 110 mμ.

Tale limitazione nell'espansione in superficie non dipende già da particolari proprietà fisiche del protoplasma; è bensì probabile che le forze

di coesione tra le macromolecole filamentose di polipeptidi, le quali, secondo la concezione di Frey-Wissiling, costituiscono la sostanza fondamentale del protoplasma (ialoplasma) siano in contrasto colle forze di energia capillare, le quali determinano l'espansione in superficie della cellula; esse impediscono l'interruzione delle connessioni tra le macromolecole in corrispondenza dei punti di attacco (Haftpunkte, Frey-Wissling); ma quando la tensione superficiale all'interfacie tra il protoplasma ed il liquido con cui esso è in contatto si abbassa molto, il protoplasma diffluisce in un velo di spessore submicronico; quest'espansione eccessiva non è però compatibile colla sopravvivenza della cellula, come Penard e Young hanno osservato nei protozoi. E Fauré-Fremiet, Ephrussi e Rapkin hanno constatato, che un infusorio posto all'interfacie acqua–aria in presenza di una soluzione di $CaCl_2$ diffluisce in un velo, il cui spessore risultò inferiore ai 5,7 mμ, sino a 4,2 mμ (e forse meno), vale a dire presso a poco eguale a quello dei film monomolecolari; però una difformazione tanto elevata determinava immediatamente la disintegrazione del protoplasma.

L'espansione in superficie si manifesta quasi sempre in colture di cellule ottenute da espianti di vari tessuti (miocardio di embrione di pollo dal 4° all'8° giorno, muscoli di embrioni a vario stadio, mesenchima ecc.), se l'espianto fu allevato in goccia pendente in soluzioni saline (liquido di Tyrode, di Locke ecc.); si manifesta pure in colture in un coagulo molto tenue di plasma (plasma molto diluito con soluzioni saline e con succo di embrioni disteso in uno strato molto sottile); condizione indispensabile per l'espansione in superficie delle cellule è che esse aderiscano intimamente ad un supporto consistente e perfettamente liscio; infatti nelle colture in goccia pendente la difformazione di più alto grado si osserva nelle cellule che scorrono sulla faccia inferiore del vetrino (o della mica), e, nelle colture in bottiglia di Carrel, nelle cellule in contatto col fondo della bottiglia.

L'adesione al supporto consistente è però la condizione indispensabile per l'espansione in superficie della cellula, ma non può essere il fattore che la determina. I fattori sono probabilmente molteplici, ma di questi il più essenziale è certamente la diminuzione della tensione superficiale all'interfacie cellula-liquido con cui essa è in contatto e l'imbibizione del protoplasma; questi fattori si manifestano nelle cellule prima ancora che esse abbandonino l'espianto. I rapporti d'interdipendenza tra diminuzione di tensione superficiale ed imbibizione sono incerti; ritengo probabile che l'aumentata permeabilità della cellula, connessa alla diminuzione della tensione superficiale, favorisca l'imbibizione altissima del ialoplasma.

Le forze che determinano l'espansione in superficie delle cellule sono in contrasto, come abbiamo accennato più sopra, colle forze di coesione intraprotoplasmatica; abitualmente questi due ordini di forze sono in equilibrio. Ma eccezionalmente la tensione che si manifesta sulla cellula può

provocare delle discontinuità nel citoplasma senza che la vitalità della cellula sia compromessa; questo fu da me osservato in alcune colture di elementi sdifferenziati di muscolo, per condizioni sconosciute. Si passa per gradi dalla formazione di ampie lacune sino alla trasformazione di gran parte del citoplasma in isolotti ialini, i quali sono collegati l'uno coll'altro, e colla parte centrale della cellula contenente il nucleo, mediante sottili filamenti di ialoplasma; i lunghi condrioconti si spingono dal pirenoforo verso la periferia, seguendo la via tracciata dai filamenti di ialoplasma, ove questi hanno uno spessore sufficiente per consentire il passaggio dei condrioconti.

Durante la mitosi i fattori che mantengono espanse in superficie queste cellule ed i fattori che durante la profase ne elevano la tensione superficiale (Giardina, Burrows, Levi), sono in contrasto; talora i primi (l'adesione al vetro e le anastomosi colle cellule vicine) sono sufficienti a limitare durante la metafase e l'anafase l'azione della tensione superficiale; la cellula, pur retraendosi lievemente, rimane appiattita ed unita alle cellule contigue da innumerevoli sottili filamenti ialoplasmatici.

Poichè in tutte le cellule in coltura, la superficie specifica diviene più estesa di quel che era in precedenza, il suo metabolismo diviene più attivo, il che importerebbe un incremento del protoplasma; ma questo sarebbe di vario grado a seconda della sorta di difformazione alla quale è soggetta, ed anche a seconda del grado di differenziazione che la cellula aveva raggiunto prima dell'espianto. Nelle cellule indifferenziate o sdifferenziate espanse in film molto sottili, la massa del citoplasma aumenterebbe quasi sempre, in grazia alla maggiore permeabilità della membrana, connessa alla diminuzione della tensione superficiale. Però quest'incremento è variabile a seconda della natura della cellula, a seconda delle proprietà del mezzo di coltura ed anche nelle cellule di una stessa coltura.

Il citoplasma delle cellule espanse in superficie aumenta per idratazione del ialoplasma (*accrescimento passivo*) ed anche per aumento della sostanza vivente (*accrescimento attivo*, secondo Driesch). Il criterio più sicuro per riconoscere se si ebbe accrescimento attivo o passivo, è quello del numero e della lunghezza dei mitocondri; il condrioma, quando si verifica un accrescimento attivo, aumenta considerevolmente, rimane invariato se l'accrescimento è passivo.

Ma anche tra le cellule espanse in superficie l'accrescimento attivo sarebbe più o meno considerevole nelle cellule di una stessa coltura e talora non si produce affatto. Nelle cellule estremamente espanse l'accrescimento è quasi sempre soltanto passivo.

L'aumento dell'area nucleare dipende in queste cellule in gran parte dall'espansione e dall'idratazione; però in alcune cellule si ha accrescimento attivo del nucleo. Ma quando l'accrescimento del citoplasma oltrepassa un certo limite, l'equilibrio tra accrescimento citoplasmatico e nucleare si sposta costantemente a detrimento del nucleo.

L'accrescimento di cui sono suscettibili le cellule difformi in una dimensione, pur essendo superiore a quello dei tessuti dell'organismo, è ciononostante limitato.

Le cellule difformi in una dimensione si dividono meno attivamente per mitosi di quelle difformi in due dimensioni; sembra che vi sia un certo antagonismo tra accrescimento individuale delle cellule e potere di moltiplicazione delle medesime.

Le cellule che prima dell'espianto erano ben differenziate e che conservano in vitro dei caratteri di specificità (fibrociti del connettivo maturo, alcuni epiteli, ecc.) aumentano molto limitatamente di volume in vitro; tanto l'accrescimento attivo che il passivo sono limitati. Ed in alcune varietà di cellule differenziate il potere di espandersi in superficie è limitato, anche se le condizioni del mezzo sono tali da favorirlo.

Zoologia. — *Mutazioni e varietà fenotipiche di alcuni Echinodermi.* Nota [1] del Socio A. Russo.

In un articolo, pubblicato in « Scienza e Tecnica » [2], ho rilevato che la *Sistematica*, quale è esercitata nei Musei, nelle Cattedre universitarie, dovrebbe trasformarsi in una *Scienza della sistematica*, fondata, sopratutto, su i risultati della *Genetica*.

A tale richiamo ho dato un contenuto di realizzazione, nei limiti delle possibilità, offerte dal mio materiale di studio, pubblicando alcune Note, nelle quali ho discusso, in due Asteroidi, *Astropecten bispinosus* Otto ed *Astropecten Ionstoni* Delle Chiaie, un carattere modificato, diverso da quello della specie tipo. E poichè tale carattere potrebbe riferirsi ad un processo mutativo, data la rarità delle *mutazioni spontanee*, ho ritenuto opportuno ritornare su l'argomento non solo per auspicare che altri, con mezzi più adatti, possa ottenere su lo stesso materiale risultati migliori, ma anche per rilevare che gli *Echinodermi*, forniti di tardi movimenti di traslazione, vivendo per lo più accantonati in aree determinate, che costituiscono il loro *ambiente biologico*, potrebbero fornire un materiale di studio molto adatto per una conoscenza più esatta di tali mutazioni, dei fenomeni che vi sono connessi e delle cause che li determinano, specialmente quelle che si ritiene siano connesse agli scambi di complessi atomici, che possono avvenire nelle cellule sessuali durante la *sinapsi* ed il *crossingover*.

Astropecten bispinosus Otto.

Ambiente biologico. – Nel Golfo di Catania, la zona in cui vive, in numerosi esemplari, *Astropecten bispinosus*, si estende a S. O., dove, per

(1) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) A. Russo, *Confidenze di uno Zoologo.* « Scienza e tecnica », vol. 7, fasc. 2. Soc. it. Progr. Scienze, 1943.

lo sbocco del *Simeto*, a corso perenne, e di alcuni torrenti, si è formata una vasta *platea continentale* con il fondo costituito dal limo trasportato dalla corrente fluviale (fig. 1ª).

Le *paranze*, dette localmente *ragni a vela*, rastrellando il fondo, alla profondità di 40–50 m., catturano con il sacco varie specie di *Asteroidi*,

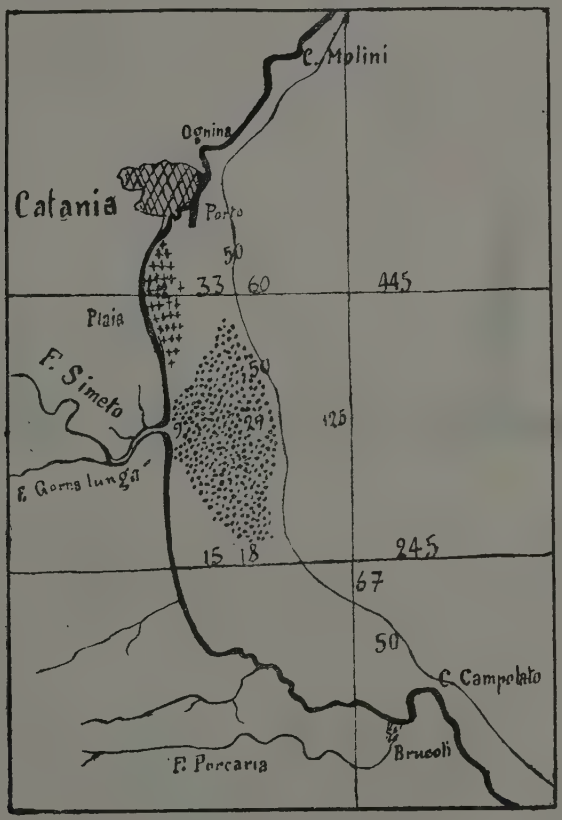


Fig. 1ª. — Golfo di Catania.

linea di spiaggia ——— limite della platea continentale
Zona di fango . . . . . ambiente biologico di *Astropecten bispinosus* Otto.
Zona di sabbia +++++ ambiente biologico di *Astropecten Ionstoni* D. Chiaie.
I numeri indicano le profondità. Scala 1 : 250.000 circa.

fra i quali prevale *Astropecten bispinosus* adulto ed in diversi stadi dello sviluppo. Di tale specie, dal 1935 al 1941, furono raccolte alcune centinaia di esemplari soltanto nella zona fangosa anzidetta, non essendo stato finora possibile averne altri da zone diverse del Golfo catanese; sicchè può ritenersi la zona di fango sia l'*ambiente biologico* della specie in esame.

Fra i numerosi esemplari raccolti, il 2 ottobre 1939, uno mi si è presentato affatto diverso, che ha richiamato tutta la mia attenzione (3).

Mutazione o varietà fenotipica? – *Astropecten bispinosus* si distingue per un carattere saliente, costituito da spine lunghe e robuste poste su i due margini dorsale e ventrale delle braccia (fig. 2 *A* nel testo e fot. 1 nella Tavola). Tale carattere fu trovato profondamente modificato nell'individuo, rinvenuto, dopo alcuni anni di ricerche, fra numerosi esemplari di diversa età, tutti con caratteri normali. Nella nuova forma, infatti, le lunghe e robuste spine, lungo i margini delle braccia, erano ridotte a minute appendici spiniformi di forma quasi triangolare, come si vede nella fig. 2 *B* nel testo, e nella fot. 2 della Tavola.

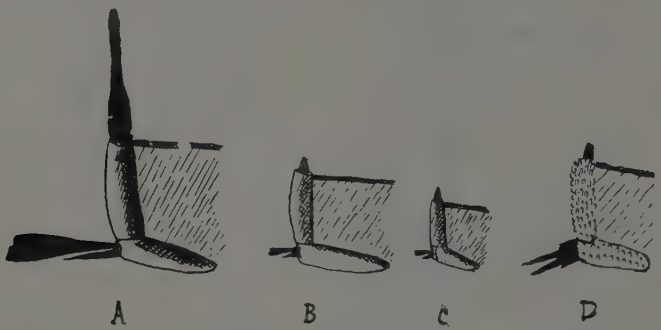


Fig. 2ª. – Figure schematiche delle spine dorsali e ventrali lungo le braccia, rappresentate da un solo lato in:

A — *Astropecten bispinosus* Otto - (Specie tipo del Golfo di Catania).
B — » » » – (Mutazione del Golfo di Catania con spine ridotte).
C — » » » – (Mutazione raccolta a Porto Said in forme di piccole dimensioni).
D — *Astropecten platyacanthus* M. e Tr. – (Golfo di Catania).

L'individuo con le spine così ridotte, convivendo nello stesso ambiente del tipico *A. bispinosus*, ha fatto sorgere il sospetto possa rappresentare una *mutazione spontanea*, anzichè una *varietà fenotipica*, che ordinariamente si forma quando la specie passa dal proprio ambiente in un ambiente diverso, come avviene negli animali camminatori, volatori o comunque migratori.

La considerazione che gli Echinodermi sono quasi sedentanei e che, per lo più, ciascuna specie vive accantonata nello stesso ambiente biologico, mi ha fatto persuaso che la nuova forma possa rappresentare una *mutazione*; ma, ciò che maggiormente mi ha indotto in tale persuasione si è il fatto che nella stessa nuova forma si manifestano alcuni fenomeni, che

(3) A. Russo, *Rapporti di « Astropecten bispinosus » con la forma ridotta del Canale di Suez e con la prima forma omologa dragata nel Mediterraneo.* « R. Comit. Talassogr. italiano », Mem. CCLXXVII, 1940.

accompagnano le *mutazioni sperimentali indotte*. Fra tali fenomeni sono notevoli la comparsa, nelle forme mutate, di caratteri anormali (*carattere abnorme*) e di una diminuita vitalità dei nuovi individui (*fattore letale*).

Entrambi i fenomeni furono rilevati nell'unico individuo esaminato, in quanto il *carattere abnorme* è rivelato dalle spine, lungo i due margini dorsali delle braccia, ridotte a piccole appendici spiniformi; il *fattore letale* della estrema rarità con cui la nuova forma fu raccolta, per la prima volta, nel Golfo di Catania.

Ciò non ostante, manca una documentazione, che è risolutiva, cioè che il nuovo carattere della forma mutata, negli incroci con la forma normale, sia *recessivo mendelizzante* nella F^2, incroci, che, fino ad ottenere gli adulti, è difficile avere nell'*Asteroide* in esame.

La forma con spine ridotte raccolta a Porto Said. - Sebbene manchi la sopra cennata documentazione, pure un altro fenomeno potrebbe confermare che la nuova forma possa essere ascritta tra le *mutazioni spontanee*. Il fatto singolare che numerosi esemplari, anche a spine ridotte, del tutto simili e quello della forma mediterranea, ma di minore grandezza (*forma nana*), sono stati raccolti a Porto Said, durante la *Crociera* della *R. N. Amm. Magnaghi*, fa ritenere che le larve della *mutazione*, avvenuta nel Mediterraneo, trasportate con il *Plancton* dalle correnti, abbiano trovato nel fondo fangoso, alla imboccatura del Canale di Suez, le condizioni più adatte al loro ulteriore sviluppo.

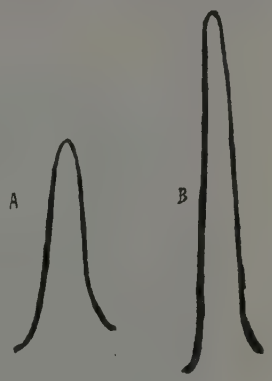


Fig. 3ª. - Lunghezza delle braccia in:

A — *Astropecten bispinosus* Otto - (specie tipo) Golfo di Catania.

B — Forma a braccia lunghe - mutazione (?), raccolta nella stessa zona del Golfo di Catania (Schematica).

Pertanto, cade l'ipotesi da me fatta nel 1938 (4), quando ancora non avevo rinvenuta la nuova forma nel Golfo di Catania, cioè che la larva del tipico *A. bispinosus*, giunta nelle acque del *Canale*, abbia potuto mutare la sua costituzione genetica.

Th. Mortensen (5), non avendo rivolta la sua attenzione ai problemi biologici dei quali da più tempo mi occupo, ha dichiarato le forme raccolte a Porto Said siano degli *Astropecten bispinosus* perfettamente simili a quelli del Mediterraneo. Tutto ciò è evidentemente un errore, per cui alla forma mutata spetta altro nome (cfr. fot. 1, tipo, con la fot. 2, forma mutata, nella Tavola).

Astropecten myosurus Mar. e Per. - Nella massa di *Astropecten bispinosus*, raccolta nel Golfo di Catania, spesso si sono trovati alcuni individui, che

(4) A. Russo, *Adattamenti biologici di alcuni Echinodermi nel Canale di Suez*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. XXVIII, ser. 6ª, Roma, 1938.

(5) Th. Mortensen, *Report on the Echinodermes*. «Trans. Zool. Soc. London», 1926; *Fishery Grounds near Alexandria*. XIII. *Echinoderme*. Cairo, 1937.

si distinguono per le braccia più lunghe e più sottili, come schematicamente fu rappresentato nella fig. 3 qui inserita.

Difatti, mentre nella specie tipo allo stato adulto, esse, misurate dal centro del disco, raggiungono cm. 5–6, nella nuova forma sono di cm. 9–10.

Marenzeller e Perrier dettero a tale forma il valore di specie, ma altri, come il Koehler[6], la considerano una *varietà fenotipica*. Non si hanno però dati sufficienti per accettare l'una o l'altra interpretazione, ovvero che si tratti di una *mutazione spontanea*, mancando la prova dell'incrocio e della segregazione dell'*allelia corto-lungo* nella F^2. Ciò non ostante, per il *carattere anormale* (braccia lunghe) e per la rarità con cui si raccoglie (*fattore letale*) la nuova forma potrebbe rappresentare un'altra *mutazione spontanea*.

Astropecten platyacanthus Mull. e Trosch. – Questa forma fu ritenuta affine ad *Astropecten bispinosus* per un carattere saliente, le spine dorsali, lungo i due margini delle braccia, robuste, ma ridotte a monconi, non ostante altri caratteri la distinguano.

È stato discusso perciò se *A. platyacanthus* sia una specie distinta della *bispinosus* o una sua varietà. H. Ludwig[7] ritenne non sia una varietà di *A. bispinosus*, perchè la forma *platyacanthus* non fu mai rinvenuta in un ambiente diverso, convivendo insieme le due forme.

Tale circostanza è confermata dalle raccolte da me fatte nel Golfo di Catania, avendo nella massa dei *bispinosus* trovato sempre pochissimi esemplari del *platyacanthus*, per cui è nato il sospetto possa trattarsi di una *mutazione spontanea*[8]. Troppe differenze però esistono tra i caratteri dell'una e dell'altra forma, come le spine ventrali lungo i due margini delle braccia, le spine dei denti buccali, le piccole appendici che coprono i mammelloni posti lungo i margini dorsali delle braccia (fig. 2 *D*), perchè si possa stabilire una derivazione.

Date tali differenze, a me pare *Astropecten platyacanthus* possa costituire un'entità sistematica a parte.

Astropecten Ionstoni Delle Chiaie.

Ambiente biologico. – La zona, in cui vive *Astropecten Ionstoni* nel Golfo di Catania, si estende lungo la spiaggia sabbiosa, posta a S. O., in prossimità dell'abitato della città di Catania e nota con il nome di *Plaia* (fig. 1ª).

Tale zona si estende verso il largo fino a raggiungere 1–2 km., ma verso la foce del Simeto diventa fangosa; per cui le due zone, arenosa e

(6) R. Koehler, *Les Echinodermes des Mers d'Europe*, to. 4. Paris 1924.

(7) H. Ludwig, *Die Seesterne des Mittelmeers. Fauna und Flora des Golfes von Neapel*. Berlin 1897.

(8) A. Russo, *Rapporti di «Astropecten platyacanthus» M. Tr. con «Astropecten bispinosus» O. del Mediterraneo e con la forma ridotta del canale di Suez*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», vol. XXIX, ser. 6ª, Roma 1939.

fangosa, pure essendo contigue, costituiscono due diversi *ambienti biologici*, arenoso per *A. Ionstoni*, fangoso per *A. bispinosus*.

Lungo la zona costiera sabbiosa, che propriamente è denominata *Plaia*, le profondità sono minime, raggiungendo i 3–4 m., ed acquistando il carattere di *spiaggia sottile*. In tale località con un piccolo rastrello si possono raccogliere molti individui di *Astropecten Ionstoni*.

Mutazione o varietà fenotipica? - Mi sono occupato di questa specie in una Nota precedente [9], nella quale ho fatto rilevare che negli individui viventi nel Golfo di Napoli (*Cuma*), nel Golfo di Catania (*Plaia*) ed a Porto Said, le piccole spine, lunghe circa 2-3 mm., sporgenti a guisa di birilli

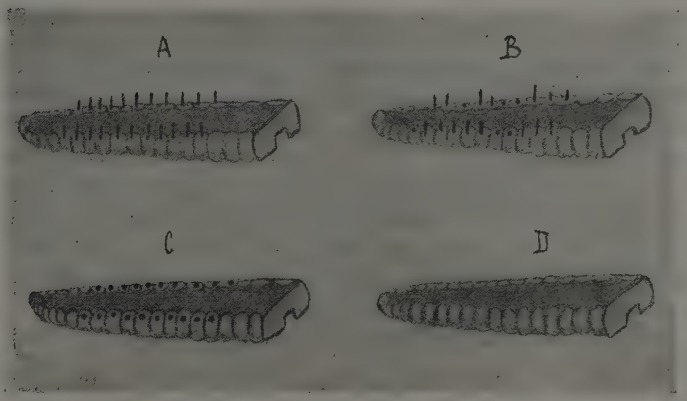


Fig. 4ª. – Figure schematiche delle braccia di *Astropecten Ionstoni* D. Chiaie con le spine alla sommità dei segmenti variamente sviluppate:

A — con spine tutte uguali (specie tipo *Cuma*). B — con spine di diversa lunghezza (*Plaia*).
C — con spine tutte ridotte a tubercoli (*Plaia*). D — senza traccia di spine (Porto Said).

dalla sommità dei mammelloni, lungo i due margini dorsali delle braccia, si estinguono gradatamente fino a scomparire affatto in quelli dell'ultima località (Tav. fot. 3 e 4).

La totale estinzione di tali appendici negli esemplari di Porto Said è preceduta da stadi, nei quali esse sono integre o gradualmente più corte. Infatti, mentre in quelli di *Cuma* quasi tutti gl'individui sono forniti di spine normali, della stessa lunghezza, in quelli di Catania si osservano tutti gli stadi di passaggio fino alla loro scomparsa. Nella figura 4ª furono rappresentati tali stadi, per i quali da *A* (*Cuma*) si passa a *B* e *C* (*Plaia*) per giungere a *D* (*Porto Said*), nella quale località la superficie dei mam-

(9) A. Russo, *Rapporti di « Astropecten Ionstoni »* D. Ch. *del Mediterraneo con la forma ridotta del Canale di Suez*. « Arch. di Oceanografia e Limnologia ». A. I, fasc. 2, 1941.

melloni lungo i due margini delle braccia dell'*Asteroide* è perfettamente levigata.

La graduale estinzione delle spine in *Astropecten Ionstoni*, potrebbe essere messa in relazione con i risultati sperimentali, ottenuti nel campo della *Genetica*, sulla riduzione delle spine o delle setole di alcuni Insetti, nelle *mutazioni indotte* sotto l'azione dei *Raggi X*.

H. I. Müller, Serebrovski, Dubinin ed altri, dal 1930 al 1935, in vari lavori, descrissero alcune *allelie scute*, a carattere *recessivo*, riguardanti la riduzione delle setole, poste sulla testa e sul torace di *Drosophila*, che furono ritenute, per ipotesi, dipendenti dai mutamenti di un complesso atomico, che costituirebbe il *gene*, regolatore della lunghezza. A tale *gene* fu attribuito anche un nome, oggi noto come *chetocentro* o *basigene*. Si volle sapere, d'altra parte, se il regolatore della lunghezza della spina o della setola sia un solo *gene* o un *complesso di geni* (*compound*), ma anche in ciò si è vagato fra le ipotesi di lavoro. Non è fuor di luogo però avvertire che non poche sono le difficoltà che s'incontrano nel genere di ricerche, appena sopra cennate, difficoltà non solo dipendenti dalla tecnica da impiegare, ma anche dal materiale di studio che, solo se è bene appropriato, può avviare alla soluzione così difficili problemi. La diversa lunghezza delle spine nello stesso braccio di alcuni individui di *Astropecten Ionstoni*, fa ritenere che su ciascuna di esse possa esercitare la sua influenza un solo fattore o *gene*. La mancanza di tali spine in altri individui, raccolti nel Mediterraneo, e la totale loro estinzione in tutti quelli che vivono a Porto Said, potrebbe far anche ritenere che lo stesso fattore non eserciti più alcuna influenza e che, in questa località, essendosi raggiunto l'ultimo grado della *mutazione*, l'assenza delle spine si trasmetta come carattere recessivo mendeliano di un'*allelia presenza–assenza*.

Lo studio dei problemi sopra cennati, fatto con materiale fornito dagli Echinodermi, che, per la loro poca mobilità e per il loro frequente accantonamento, forniscono spesso *mutazioni spontanee*, potrebbe gettare nuova luce su l'eredità di alcune appendici cutanee dei Vertebrati, fra le quali i denti buccali, che, anche nell'Uomo, sono trasmessi con carattere recessivo abnorme, come la malformazione o l'assenza di alcuni di essi.

Ciò che si è detto per la forma mutata di *A. bispinosus*, raccolta a Porto Said, vale anche per quella di *A. Ionstoni*, raccolta nella stessa località; per cui, anche per questa è da ritenere che le larve, trasportate dalle correnti, si siano ivi stabilizzate fino a raggiungere la forma adulta. Anche per questa specie, gl'individui di Porto Said sono di minore dimensione di quelli del Mediterraneo.

Analogamente a quanto si è detto per la forma mutata di *A. bispinosus*, anche alla forma mutata di *A. Ionstoni* spetta un nome diverso, che proporranno i *tassonomisti*, non ostante il parere contrario espresso dal Mortensen provetto *museista*.

Echinocardium cordatum Penn.

Fra gli Echinodermi, raccolti a Porto Said, durante la campagna della R. Nave Magnaghi, nel 1923–24, furono dragati otto esemplari, tutti delle stesse dimensioni e di statura assai ridotta (forme nane), in confronto agli *Echinocardium cordatum* del Mediterraneo (Tavola, figg. 5, 6, 7, 8). Ad un primo esame furono ritenuti i rappresentanti di una specie diversa della forma mediterranea, ma la loro identità venne documentata da alcuni caratteri somatici, come il solco anteriore della *rosetta ambulacrale*, che raggiunge la regione apicale, la disposizione delle aree spinifere, la forma generale del corpo. Si è escluso che gli esemplari, per le loro piccole dimensioni fossero forme giovanili, perchè le gonadi si presentavano bene sviluppate con i condotti genitali evidenti anche ad occhio nudo ed in numero e disposizione identici a quelli della specie del Mediterraneo. Ma, la dimostrazione che ha fatto ritenere trattarsi di specie adulta, fu data dall'esame microscopico, sia delle gonadi femminili sia maschili, nelle quali gli elementi sessuali erano maturi. Sia nell'una che nell'altra gonade però, le ova e gli spermi erano in numero esiguo, sparsi su le pieghe di uno stroma connettivale, molto sviluppato, dando l'impressione o che gli elementi sessuali fossero stati già emessi ovvero che le gonadi non fossero in uno stato normale.

Se fosse vera la seconda di tali possibilità, si potrebbe ritenere che l'anormalità dello sviluppo dei due elementi cellulari della gonade, sia un segno di *fattore letale* e che quindi gli esemplari di Porto Said potrebbero essere annoverati tra le *mutazioni spontanee*.

Come avanti si è detto, il problema relativo a tale fenomeno presenta non poche difficoltà; per cui nuovi studi su altro materiale sono necessari per poter trarre conclusioni più attendibili.

Conclusioni.

1. I due *Astropecten*, *bispinosus* e *Ionstoni*, tipicamente mediterranei, che rappresentano il ceppo, per mutamenti interni di alcuni individui, conviventi nello stesso ambiente biologico, hanno dato origine a due nuove forme, che debbono essere distinte con altro nome specifico.

2. Le due *mutazioni spontanee* verrebbero avvalorate da ciò che fu rilevato nelle *mutazioni indotte* sperimentalmente, in quanto anch'esse presentano un *carattere abnorme* (*spine brachiali atrofiche* o *assenti*) ed un *carattere letale* (*fattore letale*), dimostrato dai rari esemplari raccolti nell'ambiente biologico, dove vivono numerosi individui appartenenti alla specie tipo.

3. È da ritenere che la *mutazione* di entrambe le specie di *Astropecten* si sia stabilizzata nelle acque all'imboccatura del Canale di Suez (*Porto Said*), dove furono raccolti diversi individui della forma mutata, provenienti dal Mediterraneo allo stato di larva con il *Plancton*.

4. Le due mutazioni, raccolte a Porto Said, sono di più piccole dimensioni in confronto agl'individui della specie tipo del Mediterraneo.

5. Per *Echinocardium cordatum* Penn. del Mediterraneo non si è potuto fare alcun rilievo, relativamente all'ambiente biologico, come nei due *Astropecten*; per cui la forma nana raccolta a Porto Said rimane inspiegabile fino a nuovi accertamenti.

6. Le specie studiate, per i tardi movimenti di traslazione, vivendo in zone determinate, che formano il loro ambiente biologico, potrebbero essere utilizzate per la ricerca delle cause delle *mutazioni spontanee*.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. – Due braccia di *Astropecten bispinosus* Otto, raccolto nella zona di fango del Golfo di Catania. Specie tipo con spine lungo le braccia molto sviluppate.
(*Fot. grand. naturale*).

Fig. 2. - Due braccia di *Astropecten bispinosus*, raccolto nella stessa zona di fango, con spine lungo le braccia ridotte a piccole appendici.
(*Fot. grand. naturale*).

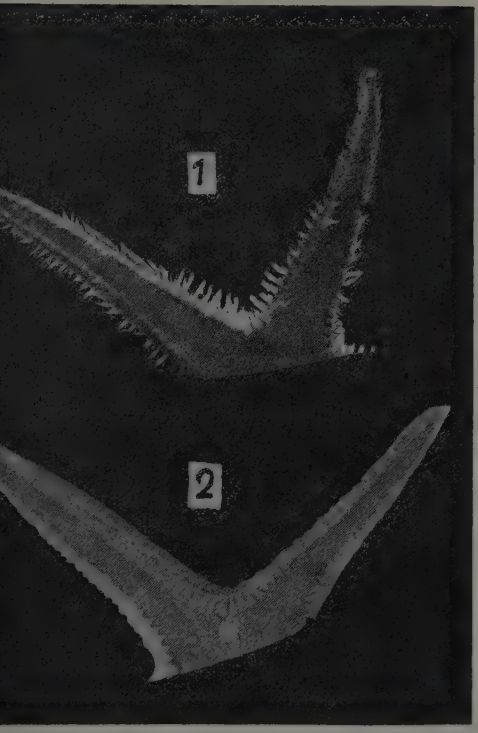
Fig. 3. – Due braccia di *Astropecten Ionstoni* Delle Chiaie con spine alla sommità dei segmenti laterali. Specie tipo raccolta nella zona di sabbia a Cuma nel Golfo di Napoli.
(*Fot. ingrand. circa 3 volte*).

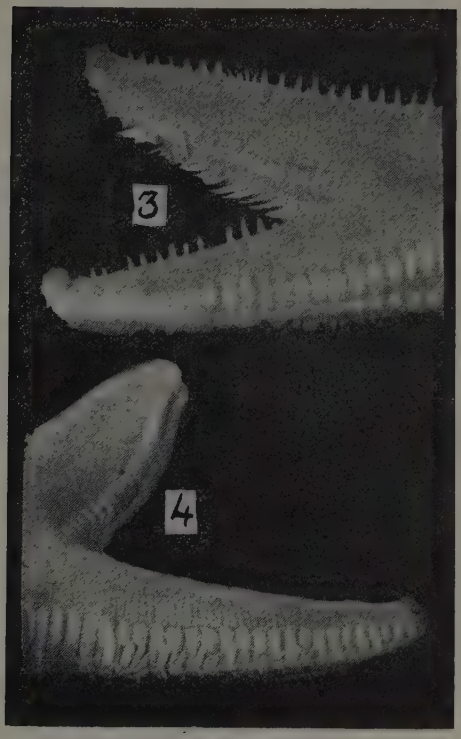
Fig. 4. - Due braccia di *Astropecten Ionstoni* senza spine alla sommità dei segmenti laterali delle braccia, raccolto nel Golfo di Catania, località Plaia.
(*Fot. ingrand. circa 3 volte*).

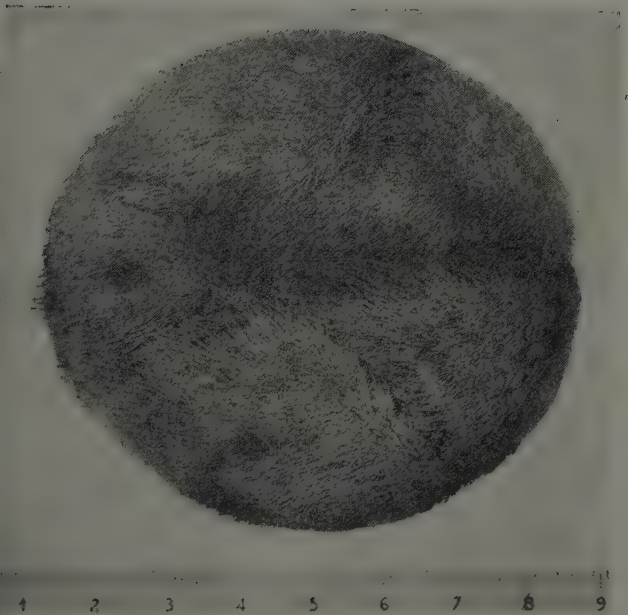
Fig. 5. – *Echinocardium cordatum* Penn. dalla superficie aborale. Grande esemplare del Golfo di Napoli.
(*Fot.*).

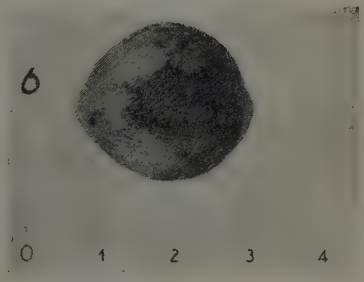
Figg. 6, 7. – Forme nane di *Echinocardium cordatum* dal lato aborale ed orale. Forme nane raccolte a Porto Said.
(*Fot.*).

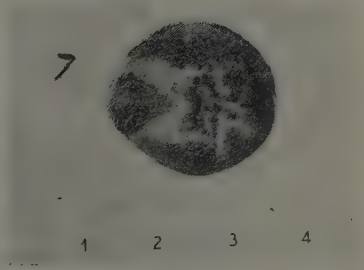
Fig. 8. – Guscio di *Echinocardium cordatum* di Porto Said, con la rosetta ambulacrale.
(*Fot.*).

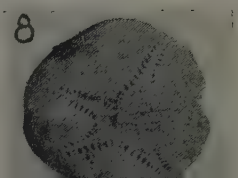

1
2


3
4


1 2 3 4 5 6 7 8 9


6
0 1 2 3 4


7
1 2 3 4


8

Biologia. — *Valore biologico dei globuli di deutoplasma nell'ovocite (in rapporto alle recenti vedute su la struttura del citoplasma ed all'ultima ricerca micrografica di C. Golgi).* Nota [1] del Socio A. Russo.

Questa Nota prende le mosse dai reperti del Golgi pubblicati nel 1924, ed ha lo scopo di avvalorare quanto fu detto in precedenza [2] su l'utilità dell'indirizzo morfologico, quale uno dei mezzi necessarii non solo per far progredire lo studio di alcuni problemi biologici, ma quanto per poterne formulare dei nuovi.

I reperti del Golgi riguardano la struttura e la funzione dei *globuli di deutoplasma* dell'ovocite, che, ritenuti, sul parere di His, elementi inerti, necessari solo a nutrire l'embrione, egli li considerò organismi viventi, dotati di attività formative (« Memorie Ist. lombardo di Scienze e Lettere », 1924).

Molte critiche suscitò tale affermazione, che, anche oggi, da taluni si ritiene poco attendibile; per cui, nel trattare il tema, ho ritenuto necessario, come primo orientamento, una distinzione tra i globuli, che sono il prodotto dell'attività *esocrina* ed *endocrina* delle cellule glandolari ed i globuli che si costituiscono dentro l'ovocite e che in esso esplicano una particolare funzione per lo sviluppo di un nuovo essere, non tanto nutritizia quanto morfogenetica.

Tale distinzione è necessaria, in quanto, essendosi comparato l'ovo ad una cellula glandulare, furono confuse le due categorie di globuli, ritenendosi, in entrambi gli elementi, essi si sviluppino con lo stesso processo e che siano perciò forniti delle stesse attività vitali, attività, che, a mio avviso, debbono essere distinte.

Siffatta interpretazione è da imputare, sopratutto, al Saint-Hilaire (« Zool. Jahrb. Abt. Zoologie », Bd. 34, 1914), che, nel 1914, dette ai globuli, comunque costituiti, il significato di elementi, che si generano, si accrescono e si dissolvono, in contrasto con il parere, espresso nel 1895, da Gino Galeotti, uno dei più acuti nostri biologi, da cui molto attendevamo se non si fosse spento in piena feconda attività, il quale, in base ai suoi studi su i globuli di secreto nelle cellule glandulari, ritenne le trasformazioni di essi siano dovute a *forze sconosciute*, che si sprigionerebbero dal protoplasma circostante (« Intern. Monatsch. f. Anat. u. Physiol. », Bd. 12, 1895).

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 marzo 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Russo A., *Indirizzo morfologico, indirizzo biochimico e problemi biologici.* Relazione letta il 21 novembre 1942 all'Accademia d'Italia.

D'altra parte, sebbene fosse noto dentro l'ovoplasma siano alcuni organiti come il *nucleo vitellino*, o delle zone differenziate, come la *couche vitellogène*, produttori di globuli deutoplasmatici, e che formazioni endocellulari, ritenute analoghe, come l'*ergastoplasma* o l'*ergoplasto*, diano origine ai globuli di secreto in alcune cellule glandolari, a ben considerare l'origine di tali globuli, potrebbe rilevarsi che i primi sono una graduale trasformazione di elementi citoplasmatici dell'oocite o delle cellule ad esso connesse e che hanno la medesima origine da un unico germe embrionale [3], i secondi sono un prodotto di elaborazione, che si forma successivamente, ad ogni atto secretorio, dallo stesso elemento proenzimatico del citoplasma, o addirittura sono costituiti da globuli già formati, che fuoriescono dal nucleo, come Galeotti osservò nelle cellule glandulari dello Spelerpes.

Pertanto, a me pare poco preciso il concetto che accomuna l'elemento ovarico ad una cellula glandolare, come dubbio è quello, sostenuto anche oggi da taluni morfologi, che l'ovo sia un serbatoio di sostanze nutritizie, che ad esso verrebbero fornite dalle cellule, che quasi sempre lo accompagnano e che formano intorno ad esso un rivestimento o *follicolo*, cellule, che furono dette perciò *nutrici* o *sussidiarie*.

Sgombrato il terreno da interpretazioni, che, a mio giudizio, mancano della voluta precisione, occorre dire che le ova dei *Mammiferi* e di altri gruppi animali hanno i globuli di deutoplasma diversamente costituiti da quelli dei *Sauropsidi* e degli *Ittiopsidi*, che fornirono il materiale di studio al Golgi e ad altri ricercatori.

Ricerche personali (« Archiv f. Zellenforsch. », 1910) dimostrarono che, negli ovociti con follicolo polistratificato della Coniglia, i globuli deutoplasmici sono costituiti da corpuscoli mielinici, i quali si originano per trasformazione chimica dei *granuli condriosomici* del citoplasma, in quanto, mentre aumentano di volume, mutano gradatamente la loro *basofilia* per divenire *acidofili*.

Tale trasformazione fu provocata sperimentalmente, facendo agire su la coniglia determinati stimoli, come la *ipernutrizione*, ottenuta mediante le iniezioni di *lecitina*, od il *digiuno* [4] nel suo valore iniziale di iponutrizione, ed ottenendo, in entrambi i casi, un aumento del metabolismo costruttivo

(3) In un *Turbellario* (*Syndesmis echinorum* Fr.) le cellule, che faranno parte delle *ovaie* e dei *vitellogeni*, hanno origine da unico germe embrionale ed, in tale stadio, sono fra loro simili. Durante lo sviluppo, solo le cellule, che formeranno i *vitellogeni*, per trasformazione dei loro elementi citoplasmatici, producono globuli di deutoplasma (Russo A., *Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia normale in Roma ed in altri Laboratori biologici*. Roma 1895).

(4) L'aumento e la precoce formazione dei globuli deutolecitici, nelle coniglie sottoposte al digiuno, richiama il digiuno dei *Salmoni del Reno* i quali, senza prendere cibo, risalgono l'alto Reno, maturando le ova per essere deposte. In tale periodo, come osservò Miescher, i Salmoni diminuiscono di peso, specialmente per la riduzione dei grossi muscoli del tronco, mentre le ovaie lo aumentano.

dell'ovaia, con conseguente precoce formazione ed aumento del numero dei globuli (« Atti Acc. Gioenia », 1910). Da tali studi non ho creduto però poter dedurre che i globuli delle ova dei *Mammiferi* possano aver valore di organismi viventi, ma che, invece, possano essere influenzati da *stimoli*, che esercitano la lorò azione sul metabolismo generale, ed essere tra i fattori determinanti che collaborano con altri per la produzione di alcuni fenomeni dell'*ontogenesi*.

Spetta al Golgi il merito di aver messo in discussione tale problema e di essere penetrato, con l'osservazione di materiale più adatto, le ova dei *Sauropsidi*, nella natura dei globuli. Egli, difatti, con nuova tecnica, la malfamata *Tecnica microscopica*, ha potuto rilevare che i globuli dell'oocite abbiano struttura analoga a quella dei plasmi viventi, in quanto, nella loro compagine, sono sparsi minuti granuli, resi evidenti dall'impregnazione argentica, che ha identificato a quelli, già osservati da altri ricercatori con altri metodi, nel citoplasma delle più diverse cellule, ai quali Benda, nel 1898, dette il nome di *mitocondri* o *condriosomi*.

Poichè le deduzioni del Golgi sono ancora oggetto di critica, ho creduto necessario trattare, in breve, il punto fondamentale del problema; se, cioè, le attuali conoscenze su la struttura del citoplasma e dei sistemi colloidali possano giustificare il particolare significato attribuito ai granuli dentro i globuli e quindi ai globuli medesimi.

Pur non potendo prevedere quale progresso il *Microscopio elettronico* o la *Fisica atomica* apporteranno alla conoscenza delle strutture cellulari, sebbene qualche segno premonitore si sia avuto per la struttura submicroscopica del citoplasma, che, secondo A. Frey–Wyssling, sarebbe formata da un *graticcio* di molecole proteiche lineari, nei cui interstizi sono raccolti fasci di molecole lipo-protidiche (cristalli liquidi) (A. Frey–Wyssling, *Protoplasma*, « Monographien », 1938), è certo che oggi l'elemento granulare del citoplasma, comunque costituito, si ritiene non inerte ed immutabile, ma dotato d'importanti funzioni.

È dimostrato, infatti, che esso eserciti la sua azione sul metabolismo, in quanto una cellula ricca di granuli è sempre ad alto potenziale fisiologico, come affermò Bottazzi nel 1923 (Atti S. I. P. S., 1923), e come, nel 1927 (« C. R. Acc. d. Sciences », 1927), confermò Joyet–Lavergue, il quale scoprì in essi la presenza del *glutatione*, un *tripeptide*, che presiede ai processi ossido–riduttori, che si svolgono nel citoplasma.

Ma, per la più esatta valutazione dei reperti del Golgi, è da ricordare che nel citoplasma, come nei sistemi colloidali, *grosso modo*, fu distinta una fase *omogenea* ed una *gelificata*, nella prima delle quali sono le *micelle* (*amicroni*), visibili all'*ultramicroscopio*, costituite, secondo Heilbrunn, da gruppi molecolari di *proteine*, *lipidi* e *sterine*, nella seconda i granuli microscopici (*microni*), che formano la *fase dispersa*. La fase omogenea è considerata la matrice dei granuli per il fatto che essi si generano per aggregazione delle

micelle e perchè i granuli stessi possono disgregarsi nelle *micelle* da cui ebbero origine.

La fase omogenea e liquida è quindi anch'essa un sistema eterogeneo, nel quale la fase dispersa è formata da *micelle* fortemente imbibite di acqua, in continuità con l'ambiente liquido, tanto che, all'*ultramicroscopio*, presentano spesso una diffusa luminosità, ritenuta da taluni *filosofi della natura*... l'alba della vita (?)!

Oltre a ciò, esperimenti di Laboratorio hanno potuto farci addentrare nella natura del magma, per cui oggi si ritiene la matrice non sia inerte, avendo anch'essa alcuni attributi, che caratterizzano la vita. Centrifugando, infatti, le ova di alcuni Echinodermi e separando la parte fondamentale meno viscosa, dai condriosomi con maggiore viscosità, come fece Chambers (« General Cytology », Chicago, 1924), anche la prima poteva essere fecondata e dare un embrione con la successiva ricostituzione dei granuli.

È stato poi possibile rilevare che nel citoplasma le due fasi, quella anista e meno viscosa, la matrice, e quella viscosa gelificata sono in continuo scambio in quanto i granuli condriosomici si dissolvono nel magma e si ricostituiscono, sicchè la massa dell'elemento granulare disperso può diminuire ed aumentare o formarsi *ex novo* nella stessa cellula, come, sperimentalmente, fu dimostrato da Chr. Hirsch, nel 1935, distruggendolo con l'irradiazione ed ottenendo dopo la sua ricostituzione.

Per valutare meglio i reperti del Golgi, occorre dire che le conoscenze, sopra cennate, furono integrate con l'indagine chimica su i granuli, nei quali fu rilevata la presenza di *lipoidi* e di *lipoproteidi*, e con l'analisi del siero del sangue, in mancanza di analisi sul citoplasma, nel quale furono riscontrati, come nelle micelle, anche aggruppamenti di *proteine, lipidi* e *sterine* (Machebeuf, 1929).

Con i risultati generali, sopra cennati, potrebbero coincidere le mie ricerche sul trattamento lecitinico alle coniglie, con il quale fu ottenuto l'aumento dei granuli negli elementi dello ovisacco, specie nell'ovoplasma, ed, in conseguenza, l'aumento dei globuli deutolecitici, che assunsero particolare valore biologico, per quanto poco sia noto il loro meccanismo di azione (« Atti R. Acc. Lincei », 1907).

Relativamente alla mutabilità e reversibilità dei granuli condriosomici, analoghi risultati ho ottenuto assoggettando le coniglie a conveniente prolungato digiuno, per cui, anche per questo, si è dedotto che l'ovocite sia un elemento assai sensibile agli stimoli fisiologici (« Arch. f. Zellenforsch. », 1910).

Le mie ricerche, nel 1905–907, furono oggetto di critica e di vivace polemica con i giovani esponenti delle scuole citologiche italiane (Giuseppe Levi ed Aldo Perroncito), i quali, seguendo le conoscenze allora vigenti, ritennero i granuli citoplasmici elementi immutabili; oggi non sorprende più che i granuli si dissolvano e si ricostituiscano o si formino *ex novo* per

aggruppamento delle *micelle*, dando ragione al costituirsi dei granuli dentro i globuli deutoplasmici, e quindi al reperto micrografico del Golgi.

A mio avviso, tali globuli, per la loro natura chimica, prevalentemente lipoidea, non solo potrebbero essere il terreno più adatto o la *matrice* per il formarsi dei granuli, ma quanto i globuli stessi, per la presenza dei granuli, potrebbero assumere la proprietà di entità vitali.

Il Golgi ha insistito particolarmente su tale attributo dei globuli, specie dopo avere identificato in essi, com'egli dice, *quell'organo elementare, la cui fondamentale importanza nell'organizzazione, quale documento delle attività vitali, è universalmente riconosciuto, il centrosoma.*

E perciò poteva chiudere l'ultima sua pubblicazione con queste altre parole: *Da quanto sono andato esponendo in questa Nota, non esito a ripetere l'iniziale mia affermazione che i globuli del tuorlo sono elementi forniti di tutte le proprietà degli organismi viventi, non esclusa l'attività formativa.*

Con tale affermazione si chiude la ricerca del Golgi, che fu ripresa, soprattutto, in Italia.

Tra il 1925 ed il 1927, M. Nobile, nell'*Istituto Zoologico* dell'Università di Catania, seguì l'evoluzione dei globuli deutoplasmici nell'ovocite del pollo, dimostrando che essi si originano per trasformazione chimica, dai granuli mitocondriali; che nel globulo originario, così costituitosi, si formano nuovi granuli, dai quali hanno origine *globuli secondari*, e dopo, per ripetizione dello stesso processo, *globuli terziari*, fino a che si ha il globulo definitivo dell'uovo maturo. Le fasi di sviluppo dei globuli, in questo caso, conforme al concetto fondamentale del Golgi, fanno ritenere essi abbiano una propria attività funzionale, caratteristica dei plasmi viventi (« Atti Acc. Gioenia », Catania, 1927).

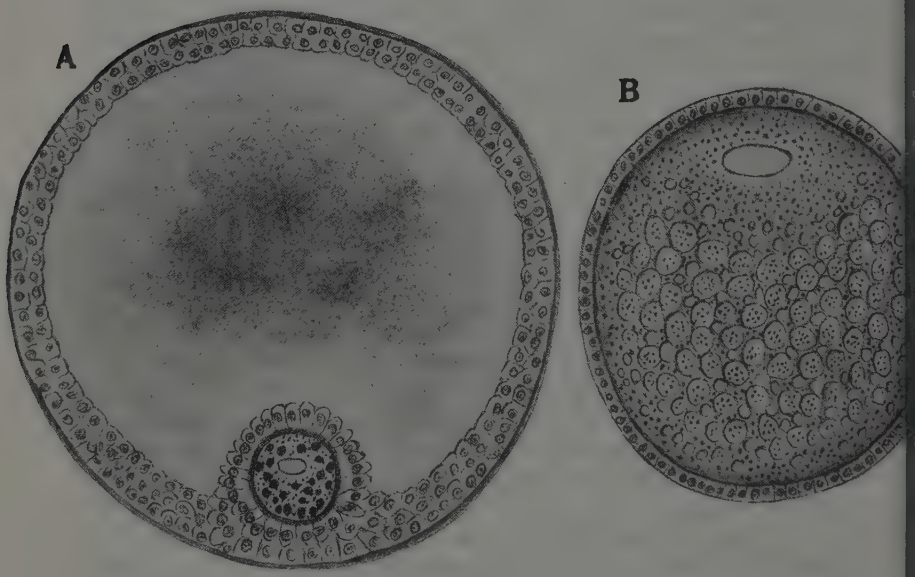
U. Pierantoni, che, tra il 1927 ed il 1932, compì le sue ricerche su le ova degli *Anfibi*, oltre a tenere in cultura i globuli, ritenuti organismi simbiontici, sostenne che la loro attività formativa verrebbe documentata dalla produzione di *cataboliti*, come i granuli di pigmento, e di *proteine*, che vengono fornite all'embrione. In base ai risultati ottenuti, descrisse un *ciclo vitale*, che il globulo compirebbe dall'inizio, sotto forma di granulo elementare, che denominò *vitelloplasto*, fino al pieno sviluppo dentro l'ovo; da che fu indotto a stabilire un'analogia con i *plastidi* delle cellule vegetali, anch'essi con attività formativa (« Mem. R. Acc. N. Lincei », 1928; « Boll. Zool. », 1930; « Arch. Zool. », 1931; « Soc. Naturalisti », Napoli, 1937).

Dalle attuali conoscenze sul valore biologico dei globuli di deutoplasma dell'oocite, scaturiscono alcune illazioni, che potrebbero essere motivo di nuovi studi su oscuri problemi dell'*ontogenesi*.

Da quanto sopra si è detto risulta, in primo luogo, che una sostanziale differenza esista tra i globuli dell'oocite dei *Sauropsidi* e degli *Ittio-*

psidi e quelli dei *Mammiferi*, essendo i primi paragonabili a plasmi viventi, in numero tale da formare una rilevante massa, che accompagna l'embrione oltre la sua schiusa, mentre ai secondi non può darsi tale attributo, avendo struttura mielinica.

La diversa struttura dei globuli e la loro diversa funzione potrebbe essere messa in relazione con la costituzione della complessa formazione ovulare e con il fatto che le molteplici cellule che la compongono, formano un *sistema armonico* (Russo A., « Acc. Gioenia », Catania, 1918). Le fun-



Schema di follicolo ovarico.

A – Di Mammifero. *B* – Di Sauropside.

zioni delle cellule, che accompagnano l'ovocite, non sono ancora abbastanza conosciute, ma si sa che la loro presenza è necessaria, non solo perchè non mancano quasi mai, ma perchè, alcune volte, l'oocite stesso le produce con una *divisione differenziale*, prima della maturazione, come fu osservato in un Coleottero, il *Dytiscus*, ed in altri animali.

Il nesso esistente tra i due elementi del complesso sistema, potrebbe, a mio modo di vedere, essere anche documentato da altri elementi cellulari, connessi all'ovo, come fu osservato in varii animali, nei quali, oltre le cellule di rivestimento o altrimenti aggregate, in relazione con l'ovocite, questo produce cellule particolari, che seguono l'embrione nelle prime fasi dello sviluppo come negli Imenotteri parassiti, illustrati da F. Silvestri. Tale

gruppo di cellule, noto col nome di *trofamnio* potrebbe ricordare quanto si osserva nel *sacco embrionale* delle *Fanerogame*, che produce anche cellule particolari, le *sinergidi* e le *antipode*, delle quali, se si conosce il destino finale, come per l'aggruppamento cellulare degli Insetti, nulla si sa dei rapporti intercorrenti con la *cellula-ovo* propriamente detta e dei prodotti chimici od ormonici, che potrebbero fornirle.

Nella formazione ovarica dei due gruppi avanti considerati (*Sauropsidi* e *Mammiferi*) le cellule follicolari e l'ovocite stanno fra loro in ragione inversa, perchè, mentre nei *Sauropsidi* e negli *Ittiopsidi*, ad un limitato numero di cellule follicolari corrisponde un ovocite di grandi dimensioni, ricco di globuli, con struttura analoga a quella dei plasmi viventi, nei *Mammiferi*, ad un involucro cellulare molto sviluppato e differenziato in organo a *secrezione interna*, con funzioni varie nelle sfera genitale, finanche di attecchimento dell'ovo su la mucosa uterina, quando si è trasformato in *corpo luteo*, corrisponde un oocite di piccole dimensioni, con globuli relativamente pochi a struttura mielinica.

Le parti dei due sistemi cellulari, messi a confronto, potrebbero offrire un caso di *ordine* ed *armonia* del microcosmo, in quanto il rilevante numero e la natura dei globuli nell'ovocite dei *Sauropsidi* potrebbero assumere le funzioni del follicolo ovarico dei *Mammiferi* ricco di cellule. Se non che, mentre su le funzioni di tali cellule si hanno nozioni piuttosto estese, per i globuli delle ova dei *Sauropsidi*, ancora mancano esatte conoscenze sul loro meccanismo di azione, nonostante, da lungo tempo, sia noto tali globuli o la zona endoplasmica, da cui, alcune volte, derivano (*Tegenaria*), seguano l'embrione fino a stadi avanzati dello sviluppo.

Ma, i reperti del Golgi potrebbero far sorgere altri problemi, che sono connessi alla complessa struttura dell'ovo, ritenuto, per le sue manifestazioni, un organismo elementare in potenza od un complesso sistema in equilibrio dinamico. E poichè esso è l'elemento fondamentale, necessario, dentro cui si svolgono i fenomeni relativi alla sessualità, nuove indagini si attendono dai biochimici sul chimismo dei suoi prodotti metabolici e su le trasformazioni che essi subiscono durante la maturazione dell'ovocite e lo sviluppo dell'embrione [5].

Alla complessa struttura potrebbero riferirsi problemi ritenuti già risolti in senso negativo, come quello su l'esistenza di un *parablasto*, l'*ematoblasto* di His [6]; come quello su la partecipazione dei *grossi blastomeri*,

(5) In relazione al problema della sessualizzazione, tenendo presente i reperti del Golgi, senza escludere possa influirvi anche il fattore cromosomico, mantengo il mio punto di vista, espresso fin dal 1907, che l'ovo debba avere spiccata influenza su tale fenomeno in conseguenza di un particolare tipo di metabolismo dei suoi elementi citoplasmatici.

(6) Secondo tale teoria, nel tuorlo dei *Sauropsidi* si organizzerebbero elementi non derivati dal *disco blastodermico* (archiblasto), i quali, ritenuti provenienti dall'esterno con

ricchi di globuli deutoplasmici, alla formazione dei foglietti germinativi, secondo O. Hertwig e Brachet, partecipazione che fu da altri contrastata (His e Ruffini), o pure quello su la specificità dei fattori, per cui dall'ovo di ciascuna specie, non ostante l'apparente somiglianza, in alcuni gruppi animali ha origine sempre un organismo simile al genitore, sul quale soggetto molte speranze, oggi svanite, aveva suscitato fra i biologi la scoperta, fatta dal Kossel negli spermi di molti pesci, delle più *semplici proteine*, le *protamine*, differenti da una specie all'altra.

Oltre ai problemi avanti cennati, sono meritevoli di considerazione, per un addentellato che potrebbero anche avere con i reperti del Golgi, quelli relativi alla *polarità* ed al *gradiente assiale* (Child) dell'ovo, nel quale, al polo vegetativo, insieme ai globuli deutoplasmici, si trova spesso la *sostanza germinale* sotto forma di *corpi cromatoidi*. Se la sorgente di tale sostanza ci è ancora ignota, si sa però che essa ha parte attiva nello sviluppo dell'embrione in quanto si localizza in una delle cellule di segmentazione, che sarà la *1ª cellula sessuale* del nuovo essere, il quale, alla sua volta, con lo stesso processo, la trasmetterà alle future generazioni, seguendo una *via germinale* già prestabilita.

A mio avviso, tale fenomeno potrebbe assumere un valore di alta portata per il fatto che una *zona germinativa polare* fu osservata nelle ova dei più diversi tipi animali, finanche nei *Mammiferi*, con polarità poco distinta, nei quali l'*epitelio germinativo*, di origine mesodermica, ritenuto da Waldeyer e da altri il primo abbozzo della gonade, sarebbe invece il punto di fermata e di ulteriore evoluzione di cellule sessuali migrate, provenienti dal materiale di segmentazione.

La generalizzazione di tale fenomeno ed i rapporti esistenti tra zona polare ricca di globuli, *sostanza germinale* e *cellule sessuali*, verrebbero confermati dai risultati sperimentali ottenuti nel 1924 da Bounour, il quale, distruggendo con l'irradiazione la calotta ventrale dell'*ovo* o della *blastula* o della *gastrula*, negli *Anfibi*, sede dei globuli, ha osservato che le cellule sessuali non si sviluppavano o si sviluppavano in minor numero dei controlli (*L'origine des cellules reproductives*, Gauthier-Villars, Paris, 1924).

Il complesso dei fatti, finora acquisiti, indurrebbe a ritenere che il lungo asse dell'ovo, non sia un fenomeno occasionale, ma fondamentale *differenziamento polare* ed il *gradiente assiale*, con le sue varie manifestazioni

le *fecondazioni polispermiche*, potrebbero essere rimessi in discussione dopo i reperti del Golgi. A me sembra che il formalismo, secondo il quale molti non hanno accettato l'affermazione di Golgi, che dà valore di organismi viventi ai globuli del tuorlo, possa trovare un correttivo nel pensiero dei fratelli Hertwig, i quali associarono la *teoria del parablasto* alla *teoria del mesenchima*. Sta di fatto che gli elementi del mesenchima hanno funzione prevalentemente nutritizia e che fra essi fu identificato l'*ematoblasto* (His), non ostante Ruffini abbia ritenuto le *isole sanguigne* abbiano origine metamerica, a lato dei *somiti*, e che quindi siano di origine mesodermica.

dell'organizzazione del nuovo essere, e che i fatti stessi potrebbero, a più ragione, assegnare al protoplasma dell'ovo ed ai globuli deutoplasmici una funzione essenziale, per quanto poco precisata, su fenomeni dell'ontogenesi, ancora oscuri, e su la trasmissione di alcuni caratteri, indipendentemente dalla *cromatina nucleare*, ritenuta l'unica depositaria di tale fenomeno dalla maggioranza dei ricercatori, i quali oggi si appoggiano anche su risultati sperimentali, solo in parte positivi, di *merogonia ibrida* ed *interspecifica* (Delage, Boveri, Wilson, Wettstein ed altri), senza considerare che le *zone organogenetiche*, localizzate nella massa ovoplasmica, dalle quali hanno origine determinati organi dell'animale adulto, debbano avere anche valore ereditario.

A conclusione della rapida rassegna su alcuni problemi dell'ontogenesi, è necessario avvertire che le illazioni, tratte dai fatti, relativi alla natura vivente dei globuli deutoplasmici dell'ovocite, hanno solo valore informativo e di avviamento per nuovi studi, in quanto quelli riguardanti i fenomeni iniziali dello sviluppo finora sono stati sfiorati, ma non risolti. Fra tante incertezze, i reperti del Golgi potrebbero fornire elementi chiarificatori, ma occorre dire che nuove ricerche sono necessarie con metodi perfezionati e con la collaborazione dei *Biochimici*, dei *Fisici* e dei *Morfologi*.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla moltiplicazione delle serie doppie* [1]. Nota [2] di L. Cesari, presentata dai Corrisp. L. Tonelli.

1. Sia

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{1}$$

una serie doppia e siano:

$$s_{mn} = \sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n} a_{rt} \quad , \quad \sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^{m}\sum_{t=0}^{n} s_{rt} ,$$

$$m , n = 0 , 1 , 2 , \cdots ,$$

rispettivamente le sue somme parziali e le sue medie del Cesaro. Secondochè esistono finiti i limiti

$$\lim_{\substack{m \\ n}\} \to \infty} s_{mn} \quad , \quad \lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} s_{mn} \right) \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} s_{mn} \right) \quad , \quad \lim_{\substack{m \\ n}\} \to \infty} \sigma_{mn} ,$$

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Vedi nota (1) a p. 247.

si dice che la (1) *è convergente in senso ordinario* (secondo Stolz e Pringsheim), *per righe, per colonne*, oppure che la (1) *è sommabile* (C, 1, 1) [3]. Si dice infine che la (1) *è sommabile* (C, 1, 1)$_r$ se, per ogni coppia di numeri

$$l, L \quad , \quad 0 < l < L < +\infty ,$$

esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{m \\ n} \{ \to \infty \\ l < \frac{m}{n} < L} \sigma_{mn} \ [4].$$

2. Siano

$$(1) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \quad , \qquad (2) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} ,$$

due serie doppie. Si dice prodotto delle due serie (1) e (2) la nuova serie doppia

$$(3) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} \quad , \quad c_{mn} = \sum_{r+u=m} \sum_{s+v=n} a_{rs} \, b_{uv} \ [5].$$

È noto che se le (1) e (2) convergono [6], la (3) è non necessariamente convergente e neppure sommabile (C, 1, 1) o (C, 1, 1)$_r$ e ciò accade anche se una delle due serie (1) e (2) converge assolutamente.

Ciò mostra il seguente esempio:

$$a_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ -1 & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad n > 1 \end{cases} \quad , \qquad b_{mn} = \begin{cases} b_n \neq 0 & , \quad m = 0 \\ 0 & , \quad m > 0 \end{cases} ,$$

ove $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è una serie convergente assolutamente.

(3) In ogni caso detti limiti diconsi *somma* della serie. Ricordiamo che una serie può convergere per righe e per colonne e non essere convergente in senso ordinario. Di più la somma per righe e quella per colonne non sono necessariamente uguali. Una serie può convergere in senso ordinario e non convergere per righe e per colonne. Tuttavia se una serie doppia converge in senso ordinario, per righe e per colonne, le tre somme risultano tra loro uguali. Per quanto riguarda i legami tra la convergenza ordinaria e la sommabilità (C, 1, 1) vedasi L. Cesari, *Sulla convergenza delle serie doppie.* « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. XI (1942), pp. 133-150.

(4) Detto limite, che risulta indipendente da l ed L, dicesi somma generalizzata della (1). Per i legami tra questa nozione di sommabilità e le precedenti, vedi L. Cesari, loc. cit. in (3).

(5) Questa definizione di *prodotto* è utilissima nella teoria delle serie doppie di potenze di due variabili.

(6) Se le due serie (1) e (2) convergono assolutamente anche la (3) converge assolutamente. Ricordiamo che la serie doppia (1) si dice convergente assolutamente se converge la serie doppia $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}|$. Una serie doppia convergente assolutamente converge in senso ordinario, per righe e per colonne ed è sommabile (C, 1, 1).

Si ha

$$c_{mn} = \begin{cases} a_{m\,0}\, b_{00} & , \quad n = 0 \\ a_{m\,0}\,(b_{0n} - b_{0,n-1}) & , \quad n > 0 \end{cases}$$

e quindi

$$c_{mn} = b_n - b_{n-1} \ , \ s_{mn} = (m+1)\, b_n \ , \ \sigma_{mn} = \frac{1}{2}\,\frac{m+2}{n+1}\,(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$

e queste ultime formule dimostrano che la serie $\sum_{m\,,\,n=0}^{\infty} c_{mn}$ è non convergente, non sommabile (C , 1 , 1) e non sommablle (C , 1 , 1)$_r$.

3. Queste singolarità nel comportamento della serie prodotto spariscono non appena si assoggettino le serie (1) e (2) a deboli condizioni, di solito soddisfatte nelle applicazioni.

Io ho dimostrato precisamente le seguenti proposizioni:

Teorema I. - *Se le serie* (1) *e* (2) *convergono ed* A *e* B *sono le loro somme, se*

$$\lim_{m+n\to\infty} a_{mn} = 0 \quad , \quad \lim_{m+n\to\infty} b_{mn} = 0 , \tag{4}$$

allora la serie (3) *è sommabile* (C , 1 , 1)$_r$ *e la sua somma è* $C = AB$ [7].

Teorema II. - *Se, per ogni coppia di numeri* $0 < l' < L' < +\infty$, *esistono i limiti*

$$\lim_{\substack{m \\ n}\{\to\infty \\ l' < \frac{m}{n} < L'}} s'_{mn} = A \quad , \quad \lim_{\substack{m \\ n}\{\to\infty \\ l' < \frac{m}{n} < L'}} s''_{mn} = B \ [8], \tag{5}$$

ove s'_{mn} *e* s''_{mn} *sono rispettivamente le somme parziali delle serie* (1) *e* (2); *se esistono cinque costanti positive* P , Q , R , σ , τ *tali che, per ogni* m , n ,

$$\begin{vmatrix} s'_{mn} \\ s''_{mn} \end{vmatrix} < P + Q\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{\sigma} + R\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{\tau} \quad , \quad \sigma < 1 \ , \ \tau < 1 ,$$

allora la serie (3) *è sommabile* (C , 1 , 1)$_r$ *e la sua somma è* $C = AB$.

(7) Ricordiamo che le serie doppie di Fourier verificano in ogni punto la condizione (4).

(8) La (5) rappresenta una nozione di convergenza generalizzata che può talora essere utile. Vedi E. C. Titchmarsh, *The double Fourier series of a discontinous function*. « Proc. Royal Society », S. A. vol. 106 (1924) e pp. 299–314; L. Cesari, *Su di un tipo di condizioni necessarie per la convergenza dei polinomi di Fourier e di Fejer e su altre questioni concernenti le serie doppie di Fourier*. « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. VIII, n. 10 (1937), pp. 445–551.

Teorema III. – *Se la* (1) *converge in senso ordinario, per righe e per colonne, se la* (2) *converge assolutamente, allora la* (3) *converge in senso ordinario, per righe e per colonne e la sua somma è* $C = AB$, *ove* A *e* B *sono le somme delle serie* (1) *e* (2) [9].

Matematica. — *Un complemento alla Nota «Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie»*. Nota [1] di L. Cesari, presentata dal Corrisp. L. Tonelli.

Nella Nota citata [2], stabiliti alcuni criteri di uguale continuità, ho dimostrato, facendo uso del metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, un teorema del tipo di Schwarz, che assicura l'esistenza di una rappresentazione quasi conforme, sul cerchio unità, per ogni superficie poliedrica del tipo topologico del disco circolare. Precisamente ho dimostrato che, per ogni superficie poliedrica Σ del tipo detto, esiste una particolare rappresentazione

$$(1) \qquad \Sigma: \quad x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in C \equiv [u^2 + v^2 \leq 1],$$

per la quale l'integrale

$$J = \iint_C (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)\, du\, dv$$

assume il minimo valore nella classe di tutte le rappresentazioni per le quali le funzioni $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ sono a variazione limitata e assolutamente continue secondo Tonelli in C e le loro derivate parziali prime sono integrabili L^2 in C. Ho poi dimostrato che ogni rappresentazione avente la detta proprietà di minimo risulta quasi conforme in C.

In applicazione di tali considerazioni, ne è risultata una nuova dimostrazione di un teorema di C. B. Morrey che assicura l'esistenza di una rappresentazione quasi conforme sul cerchio unità per ogni superficie continua del tipo topologico del disco circolare e di area finita secondo Lebesgue.

A complemento di quanto precede mostrerò, nella presente Nota, con considerazioni elementari, che per ogni superficie continua S avente le proprietà dette, le rappresentazioni quasi conformi della superficie S, sul

(9) Questo teorema estende alle serie doppie il ben noto teorema di Mertens relativo al prodotto delle serie semplici. Come si vede, si avrebbe un enunciato particolarmente semplice ed elegante se si dicessero «convergenti» le sole serie doppie convergenti in senso ordinario, per righe e per colonne.

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Vedi nota (1) a p. 247.

(2) L. Cesari, *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*. «Annali Scuola Normale Sup. di Pisa», ser. II, vol. XII (1943), pp. 63–84.

cerchio unità, godono di una proprietà di minimo analoga a quella osservata per le superficie poliedriche; e, viceversa, le rappresentazioni che godono di tale proprietà di minimo sono quasi conformi.

1. Sia A una regione aperta di Jordan del piano $\pi \equiv (u, v)$ e sia A* la curva continua, semplice e chiusa costituente la sua frontiera. Sia $\bar{A} = A + A^*$ la regione chiusa di Jordan corrispondente. Siano $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ funzioni continue in $\bar{A}$ e quindi sia

$$(2) \qquad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in \bar{A},$$

la rappresentazione di una superficie continua S.

Ad ogni punto $P \equiv (u, v)$ di $\bar{A}$ corrisponde per le (2) un punto $Q \equiv (x, y, z)$ dello spazio (x, y, z) che dicesi l'immagine $Q \equiv S(P)$ del punto P sulla superficie S. Ogni punto $Q \equiv (x, y, z)$ della superficie S è l'immagine di almeno un punto di $\bar{A}$. Diciamo $S^{-1}(Q)$ l'insieme di tutti i punti di $\bar{A}$ la cui immagine cade in Q. L'insieme $S^{-1}(Q)$ è chiuso ed i suoi componenti sono, come è noto, dei continui. Diciamo G la collezione di tutti i continui g di $\bar{A}$ che sono componenti di qualche insieme $S^{-1}(Q)$. Ogni punto di $\bar{A}$ appartiene ad uno e ad un solo continuo g di G; continui g distinti di G non hanno punti in comune. I continui g di G sono i continui massimali di $\bar{A}$ sui quali le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono (tutte e tre) costanti.

Ai punti di A* corrispondono sulla superficie S, con le usuali convenzioni, i punti di una curva continua e chiusa C, non necessariamente semplice. Diremo talvolta che la superficie S si appoggia alla curva C.

Diremo L(S) l'area secondo Lebesgue della superficie S.

2. (3) Si dice che la superficie S è *di tipo* A se la relativa collezione G gode della seguente proprietà:

α) per ogni continuo g di G, l'insieme aperto $\pi - g$ è connesso.

Si dice che la superficie S è *non degenere*, ossia *del tipo topologico del disco circolare*, se la relativa collezione G gode delle seguenti proprietà:

α′) per ogni continuo g di G, l'insieme aperto $A - Ag$ è connesso;

β′) nessun continuo g di G, contiene interamente A*.

Se, per una data rappresentazione di una superficie S, sono soddisfatte la condizione α), oppure le condizioni α′) e β′), altrettanto accade per ogni altra rappresentazione della stessa superficie. In altre parole la proprietà di

(3) Riporto qui, per comodità del lettore, alcune definizioni e risultati della mia Nota citata in (2), § 1, nn. 3 e 4. Rilevo inoltre i seguenti errori sfuggiti nella affrettata correzione delle bozze di tale Nota; deve leggersi «connesso» al posto di «semplicemente connesso» in § 1, n. 3, riga 3 (p. 63) e § 1, n. 4, riga 1 della p. 64; «quasi conforme» al posto di «non degenere» in § 4, n. 6, teor. II, riga 2 (p. 83).

essere di tipo A, oppure non degenere, è una proprietà della superficie e non della sua rappresentazione.

Ogni superficie non degenere è di tipo A, ma non viceversa. Ogni superficie di tipo A che si appoggia ad una curva di Jordan dello spazio (x, y, z) è non degenere.

3. Vale il seguente

TEOREMA A. – *Se*

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in \bar{A},$$

è una superficie continua di area finita secondo Lebesgue, se le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *sono a variazione limitata e assolutamente continue in* A, *se le derivate parziali* $x_u, x_v, \cdots, z_v$ *sono integrabili* L^2 *in* A, *allora*

$$L(S) = \iint_A \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

ove

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad , \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad , \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

e la funzione $\sqrt{EG - F^2}$ *è integrabile* L *in* A [4].

Diremo che la rappresentazione

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in \bar{A},$$

della superficie continua S è *quasi conforme* se

a) le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono a variazione limitata e assolutamente continue in A;

b) le derivate parziali $x_u, x_v, \cdots, z_v$ sono integrabili L^2 in A;

c) quasi ovunque in A si ha $E = G, F = 0$.

Valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA I (del tipo di Schwarz) [5]. – *Ogni superficie poliedrica non degenere ammette una rappresentazione quasi conforme sul cerchio unità.*

TEOREMA II (di C. B. Morrey) [6]. – *Ogni superficie continua non degenere di area finita secondo Lebesgue ammette una rappresentazione quasi conforme sul cerchio unità.*

4. Sia S una superficie continua non degenere di area finita secondo Lebesgue e sia K la classe di tutte le rappresentazioni

$$(3) \qquad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in C \equiv [u^2 + v^2 \leq 1],$$

(4) Cfr. § 3, teor. I e teor. II della Nota citata (2).

(5) Loc. cit. in (2), § 4, teor. I (p. 75)

(6) Cfr. C. B. MORREY, *An analytic characterisation of surfaces of finite Lebesgue area.* « Amer. Journ. of Math. », vol. LVII (1935), pp. 692-702. Inoltre L. CESARI, loc. cit. in (2), § 4, teor. II (p. 83).

della superficie S sul cerchio unità che soddisfano alle seguenti condizioni:

a) le funzioni $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ sono a variazione limitata e assolutamente continue in C;

b) le derivate parziali $x_u, x_v, \cdots, z_v$ sono integrabili L^2 in C. La classe K non è vuota in forza del teorema II.

Dimostriamo il seguente

TEOREMA III. – *Se* S *è una superficie continua non degenere di area finita secondo Lebesgue, se* K *è la classe di tutte le sue rappresentazioni sul cerchio unità che godono delle proprietà* a) *e* b), *allora l'integrale*

$$J(S) = \frac{1}{2}\iint_C (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)\, du\, dv$$

ha minimo nella classe K *e tale minimo è dato da* $L(S)$. *Ogni rappresentazione quasi conforme della superficie S sul cerchio unità è minimante rispetto all'integrale* $J(S)$ *nella classe* K *e, viceversa, ogni rappresentazione minimante è quasi conforme.*

Dal teorema II sappiamo già che esistono rappresentazioni della superficie S quasi conformi sul cerchio unità e tali rappresentazioni appartengono necessariamente alla classe K. Sia

$$S: \quad x = X(u,v), \quad y = Y(u,v), \quad z = Z(u,v),$$
$$(u,v) \in C = [u^2 + v^2 \leq 1]$$

una siffatta rappresentazione. Quasi ovunque in C si ha $E = G, F = 0$ e quindi, pure quasi ovunque in C, risulta

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{1}{2}(E + G).$$

Ne segue, ricordando il teorema A,

$$J(S) = \frac{1}{2}\iint_C (E + G)\, du\, dv = \iint_C \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = L(S).$$

Sia ora la (3) una rappresentazione della superficie S appartenente alla classe K ma *non* quasi conforme. Allora, in un insieme I di punti di C di misura > 0, deve essere

$$(E - G)^2 + F^2 > 0.$$

Dimostriamo che in tutti i punti di I si ha pure

$$\frac{1}{2}(E + G) > \sqrt{EG - F^2}. \tag{4}$$

Sappiamo già che, per ogni E e G, il primo membro della (4) è $\geq$ al secondo membro. Perciò, se, in un punto di I, la (4) non fosse vera, dovrebbe essere ivi

$$\frac{1}{2}(E + G) = \sqrt{EG - F^2}$$

e quindi, elevando a quadrato e trasformando,

$$(E - G)^2 + 4F^2 = 0,$$

ossia $E = G$, $F = 0$, $(E - G)^2 + F^2 = 0$, contro il supposto. La (4) è così dimostrata in tutto I. Ne consegue, essendo $|I| > 0$,

$$\frac{1}{2}\iint_C (E + G)\, du\, dv > \iint_C \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

e quindi

$$J(S) > L(S).$$

Il teorema III è così dimostrato.

Matematica. — *Alcune considerazioni sull'esistenza della soluzione delle equazioni alle derivate parziali.* Nota [1] di E. Baiada, presentata dal Corrisp. L. Tonelli.

§ 1. – Partendo dall'analogia con le equazioni alle derivate ordinarie, Cauchy ha posto il problema seguente:

data una equazione:

$$p = f(x, y, z, q), \tag{1}$$

dove $z = z(x, y)$ è una funzione incognita definita su un certo campo, p e q le sue derivate parziali rispettivamente rispetto a x e a y, e data una funzione $\omega(y)$ con derivata $\omega'(y)$, trovare una funzione $z = z(x, y)$, derivabile rispetto a x e a y, tale che per un certo $x = x_0$ sia $z(x_0, y) = \omega(y)$, e che soddisfi all'equazione (1).

Grande importanza per la risoluzione del problema di Cauchy sono i teoremi d'esistenza e d'unicità della soluzione. Svolgeremo alcune considerazioni sui teoremi d'esistenza relativi a questo problema di Cauchy.

È chiaro che per affermare o negare l'esistenza della soluzione d'un tipo di problema come il precedente bisogna fissare anzitutto in quale classe di funzioni questa soluzione deve ricercarsi. È anche evidente che, in linea di massima, più la classe di funzioni che dovrà comprendere la soluzione è particolare e più condizioni restrittive bisogna imporre alle funzioni $f(x, y, z, b)$ e $\omega(y)$, e in generale alle ipotesi del problema, per far sì che questo problema ammetta la soluzione desiderata.

§ 2. – Una delle classi più ristrette in cui si sia cercata la soluzione della (1) è la classe delle funzioni analitiche. Il problema si risolve, ammet-

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Vedi nota (1) a p. 247.

tendo tra l'altro l'analiticità [2] delle funzioni $\omega(y)$ e $f(x, y, z, q)$, e questo fatto non sorprende minimamente. Non insistiamo particolarmente su questo caso non avendo particolare interesse.

La classe di funzioni più particolarmente presa in considerazione dai vari Autori che si sono occupati di questa questione, è stata quella delle funzioni con derivate parziali continue. Anzi, si può affermare che tutti coloro [3] che hanno portato un effettivo contributo in questo problema si sono esclusivamente occupati di ricercare la soluzione fra le funzioni con derivate parziali continue. Questo fatto ha due ragioni, la prima perchè nel problema corrispondente per una sola variabile reale e precisamente nel problema di Cauchy relativo alle equazioni alle derivate ordinarie, il campo di funzioni in cui si va a ricercare la soluzione è proprio quello delle funzioni con derivata continua, la seconda perchè la maggioranza delle applicazioni richiede proprio la continuità delle derivate parziali.

I teoremi, però, che si è riuscito a dare per questo problema impongono delle condizioni non precisamente lievi tanto alla $f(x, y, z, q)$ quanto alla $\omega(y)$. Le ipotesi più ampie che si conoscono sono: le derivate parziali f_y, f_z, f_q Lipschitziane rispetto a y, z, q e la $\omega'(y)$ anch'essa Lipschitziana. Il campo su cui la soluzione si prova esistere deve essere tale che $|x - a| < m$, dove m è un numero legato [4] alle costanti di Lipschitz sopradette.

Da quanto detto sopra, poteva sembrare che le condizioni così imposte alla f e alla ω fossero troppo restrittive e non sono mancati i tentativi per rimuoverle, lo scopo ultimo essendo di lasciare la sola continuità della $f(x, y, z, q)$ e della $\omega'(y)$. Ma questi tentativi sono rimasti infruttuosi. Ho fatto vedere in una Nota precedente [5] che le condizioni minime da imporre devono essere più restrittive della semplice esistenza delle derivate parziali rispetto a y, z, q della $f(x, y, z, q)$ e ciò dà ragione della estrema

(2) Vedere per esempio GERMAY, *Sur une méthode d'intégration par aproximations successives.* « Comptes Rendus », *180.*

(3) Vedere: E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, 1930, pp. 352-359; C. SEVERINI, *Sul Problema di Cauchy.* « Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania », ser. 5ª, vol. X, 1916; T. WAŻEWSKI, *Ueber die Bedingungen der Existenz der integrale partieller Differentialgleichungen erster ordnung.* «Math. Zeitschrift», 43 Bd.; E. DIGEL, *Ueber des Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster ordnung.* « Math. Zeitschrift », 44 Bd.

Tanto il WAŻEWSKI quanto il DIGEL non citano il lavoro ed il risultato ottenuto precedentemente dal SEVERINI.

(4) Vedere: E. BAIADA, *Il teorema d'esistenza per le equazioni alle derivate parziali.* La relazione che lega m è meno restrittiva di quella data dai vari altri Autori. Nota tuttora non data alla stampa a causa degli eventi bellici, ma di prossima pubblicazione.

(5) Vedere: E. BAIADA, *Sul problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali.* Nota tuttora non data alla stampa a causa degli eventi bellici, ma di prossima pubblicazione.

difficoltà che presenta l'allargare seppur di poco le condizioni ora note del teorema d'esistenza.

Si può però pensare di andare a cercare la soluzione dell'equazione alle derivate parziali nella classe, molto più ampia di quella sino adesso considerata, delle funzioni con derivate parziali limitate.

Si può così sperare [6] di riuscire a dare un teorema d'esistenza che presupponga soltanto la continuità della funzione $f(x, y, z, q)$ e la limitatezza di $\omega'(y)$?

Scopo di questa Nota è proprio di far vedere che questa prospettiva non esiste. Daremo un esempio molto semplice di equazione $p = f(x, y, z, q)$ con la f continua, che non ammette soluzione nel campo delle funzioni con derivate parziali limitate.

§ 3. – Consideriamo la funzione a due variabili definita nel modo seguente:

$$(1) \qquad \begin{cases} z = xy(x-y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x-y} & \text{per } x \neq y \\ z = 0 & \text{per } x = y. \end{cases}$$

Questa funzione definita su tutto il piano (x, y) è ovunque continua. Inoltre, per ogni punto (x, y) del piano in cui $x \neq y$, essa ammette derivate parziali tanto rispetto a x quanto rispetto a y e precisamente avremo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y(x-y)\operatorname{sen}\frac{1}{x-y} + xy\operatorname{sen}\frac{1}{x-y} - \frac{xy}{x-y}\cos\frac{1}{x-y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(x-y)\operatorname{sen}\frac{1}{x-y} - xy\operatorname{sen}\frac{1}{x-y} + \frac{xy}{x-y}\cos\frac{1}{x-y}.$$

Queste derivate sono continue, quindi limitate in ogni campo limitato e chiuso in cui $x - y \neq 0$.

Osserviamo però che la funzione (1) non ammette derivate parziali nei punti (x, y) in cui $x = y$ escluso il punto $(0, 0)$.

Inoltre, la funzione (1) si annulla identicamente su gli assi coordinati.

§ 4. – Consideriamo ora l'equazione alle derivate parziali

$$(2) \qquad p = f(x, y, z, q),$$

dove p indica la derivata della funzione incognita $z(x, y)$ rispetto alla x e q ne indica la derivata rispetto alla y. La funzione $f(x, y, z, q)$ è definita per x, y, z, q qualunque, nel modo seguente:

(6) Vedere: G. Sansone, «Rendiconti di Mat. della R. Università di Roma», ser. V, vol. 3, fasc. 1, marzo 1942. Problema n. 131.

$$(2') \quad \begin{cases} f(x,y,z,q) = -q + x(x-y)\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{x-y} - \\ \qquad\qquad -y(x-y)\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{x-y} \quad \text{per} \quad x \neq y \\ f(x,y,z,q) = -q \quad \text{per} \quad x = y \end{cases}$$

La funzione $f(x,y,z,q)$ così definita è continua rispetto a tutti i suoi argomenti e per qualunque valore di essi.

Osserviamo adesso che la funzione $z = z(x,y)$ definita dalla (1) soddisfa all'equazione alle derivate parziali (2), (2') per tutti i punti (x,y) del piano esclusi i punti della bisettrice $x = y$ diversi dall'origine. Essa soddisfa inoltre alla condizione iniziale di annullarsi identicamente per $x = 0$.

§ 5. – Supponiamo ora l'esistenza d'una funzione $z = \bar{z}(x,y)$, definita e continua su tutto il piano (x,y) ammettente ovunque derivate parziali $p = \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial y}$ limitate su ogni campo limitato. Supponiamo inoltre che questa funzione si annulli identicamente per $x = 0$ e soddisfi su tutto il piano (x,y) all'equazione alle derivate parziali (2), (2').

Ammessa questa ipotesi, se ne deduce l'esistenza d'una funzione $z = \zeta(x,y)$ definita su tutto il piano (x,y) come differenza tra la funzione definita dalle (1) e la funzione $z = \bar{z}(x,y)$. Questa funzione differenza risulta continua su tutto il piano, si annulla identicamente per $x = 0$, ma non è identicamente nulla, viste le ipotesi. La funzione $z = \zeta(x,y)$ ammette derivate parziali rispetto alla x e rispetto alla y su tutti i punti del piano (x,y) esclusi i punti della bisettrice $x = y$, non compresa l'origine; queste derivate risultano inoltre limitate in ogni campo finito e chiuso in cui la minima distanza dalla bisettrice sia diversa da zero.

Osserviamo adesso che la funzione $z = \zeta(x,y)$ soddisfa all'equazione alle derivate parziali:

$$p = -q$$

esclusi i punti del piano (x,y) per cui $x = y$ (eventualmente anche l'origine, ma la considerazione o meno di ciò che accade nell'origine non ha importanza per le considerazioni che seguono).

Faremo ora vedere che la funzione $z = \zeta(x,y)$ deve essere, contrariamente all'ipotesi, identicamente nulla. Avremo così dimostrato che l'equazione alle derivate parziali (2), (2') non può ammettere una soluzione con ovunque derivate parziali finite.

§ 6. – Ammessa l'esistenza della $z = \zeta(x,y)$ esiste allora un'altra funzione che gode di tutte le proprietà della $\zeta(x,y)$ enunciate nel paragrafo precedente e sia inoltre non negativa. Basta evidentemente andare a considerare la funzione $z = \zeta^2(x,y)$.

Ammessa l'esistenza della funzione $z = \zeta(x, y)$, esiste allora un'altra funzione che gode di tutte le proprietà della $\zeta(x, y)$ e che è inoltre simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$. Infatti, basta considerare la funzione

$$z = \zeta(x, y) \cdot \zeta(y, x),$$

che gode di tutte le proprietà suddette ed è inoltre simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$.

Consideriamo allora fra tutte le funzioni che godono delle proprietà enunciate nel paragrafo precedente una qualunque che sia simmetrica rispetto alla bisettrice e non negativa. Se queste funzioni sono identicamente nulle, per quanto si vedrà in seguito, lo saranno tutte quante. Indicheremo ancora con $z = \zeta(x, y)$ una qualunque di queste funzioni.

Consideriamo la funzione:

$$(3) \qquad z = Z(x, y) = \int_0^y \zeta(x, y)\, dy,$$

questa funzione è definita e continua su tutto il piano (x, y), e, ricordata la continuità di $\zeta(x, y)$, essa ammette ovunque derivata parziale rispetto a y continua; avremo

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \zeta(x, y).$$

Inoltre è immediato vedere che $Z(0, y) = 0$.

D'altra parte, ricordando che $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ si mantiene limitata in ogni campo chiuso in cui $|x - y| > 0$, per un teorema di derivazione sotto il segno, avremo che la funzione $z = Z(x, y)$ ammette derivata parziale rispetto a x almeno sulla regione del piano (x, y) formato dagli angoli opposti per il vertice costituiti dall'asse y e dalla bisettrice $x = y$, regione che contiene interamente l'asse x. Avremo

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x, y)\, dy,$$

e ricordando le ipotesi del paragrafo precedente:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) = -\int_0^y \frac{\partial \zeta}{\partial y}(x, y)\, dy = -\zeta(x, y).$$

Concludiamo che la (3) sulla regione anzidetta ammette derivate parziali continue e soddisfa all'equazione alle derivate parziali:

$$p = -q,$$

essa inoltre si annulla per $x = 0$. È facile vedere con ovvie considerazioni elementari che nella regione considerata prima è $Z(x, y) = 0$. Ricordando

che la funzione $\zeta(x, y)$ è non negativa, se ne deduce che anche essa si deve annullare identicamente sulla regione stessa. Ma siccome sappiamo che $\zeta(x, y)$ è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$, se ne deduce che essa si annulla identicamente su tutto il piano, come avevamo affermato.

Osservazione. – Le considerazioni svolte si possono immediatamente estendere a classi di funzioni più ampie di quelle con derivate parziali limitate, a condizione di adoperare un teorema di derivazione sotto il segno meno elementare di quello adoperato sopra.

Matematica. — *Sull'esistenza di funzioni di accumulazione di un insieme di funzioni continue.* Nota [1] di B. Pettineo, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

È noto che un insieme F di funzioni $f(x)$ continue in un intervallo (a, b), ed ivi ugualmente limitate [2], non sempre possiede *funzioni di accumulazione* [3], potendo peraltro stabilirsene l'esistenza in condizioni di grande generalità (come han fatto l'Ascoli [4], l'Arzelà [5], l'Hilbert [6]). Il teorema di esistenza dell'Ascoli [4], dimostrato con rigore scientifico dal Tonelli [7], può comprendere come casi particolari i teoremi dell'Arzelà [5] e dell'Hilbert [6] e si fonda sull'ipotesi che F sia un insieme di funzioni *ugualmente continue* [8] nell'intervallo (a, b); quest'ipotesi non si rende però *necessaria* perchè il dato insieme di funzioni ammetta qualche funzione di accumulazione e la stessa cosa può dirsi delle condizioni di esistenza date dagli altri Autori. Ad una condizione necessaria e sufficiente, che comprenda la condizione dell'Ascoli come caso particolare, ci potrà invece condurre la teoria delle

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 aprile 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Con ciò intendiamo esprimere che esiste un numero positivo L tale che si abbia: $|f(x)| < L$, qualunque sia la funzione $f(x)$ del dato insieme e per qualsiasi valore x dell'intervallo (a, b).

(3) La terminologia che qui adottiamo è quella del Tonelli (*Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna, 1921, vol. I, pp. 71–76).

(4) G. Ascoli, *Le curve limiti di una varietà data di curve.* «Mem. Accad. Lincei», 1884.

(5) C. Arzelà, *Sulle serie di funzioni.* «Mem. Accad. Bologna», 1889-1900.

(6) D. Hilbert, *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip.* «Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung», 1900.

(7) L. Tonelli, *Sul valore di un certo ragionamento.* «Atti R. Accad. delle Scienze di Torino», 1913.

(8) Diciamo con l'Ascoli (3) che F è un insieme di funzioni *ugualmente continue* nell'intervallo (a, b) se, dato ad arbitrio un numero positivo ε, esiste un numero positivo δ tale che l'oscillazione di qualsivoglia funzione di F, in ogni intervallo contenuto in (a, b) e di ampiezza minore di δ, sia minore di ε.

successioni di insiemi numerici ideata dal Cipolla [9] ed estesa opportunamente alle successioni di insiemi di funzioni.

Risulterà così confermato l'alto valore scientifico di tale teoria, sempre feconda di belle applicazioni.

1. Si stabiliscono facilmente le seguenti proposizioni [10]:

I. « Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di insiemi: $F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ di funzioni $f(x)$ continue in un intervallo (a, b) converga *uniformemente* [3] ad una funzione definita nello stesso intervallo, è che ad ogni numero positivo ε corrisponda un indice ν tale che, per ogni coppia di indici p, q maggiori di ν, si abbia: $|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$ qualunque sia l'elemento $f_p(x)$ di F_p ed $f_q(x)$ di F_q e per qualsivoglia valore x dell'intervallo (a, b) ».

II. « Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme di funzioni $f(x)$ continue in un intervallo (a, b) ammetta in quest'intervallo almeno una funzione di accumulazione $\varphi(x)$, è che esista una successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ convergente uniformemente alla $\varphi(x)$ ».

Ciò premesso, consideriamo una successione di insiemi infiniti

$$(1) \qquad F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$$

di funzioni $f(x)$ continue in un intervallo (a, b) e supponiamo:

1° che ciascun termine di tale successione contenga il successivo;

2° che per ogni numero positivo ε esista un numero positivo δ ed un insieme F_n tali che l'oscillazione di qualsivoglia funzione di quest'insieme, in ogni intervallo contenuto in (a, b) e di ampiezza minore di δ, sia minore di ε.

In queste ipotesi, è facile riconoscere che ad ogni successione ε_n convergente a zero di numeri positivi decrescenti corrisponde una successione di insiemi infiniti: $F'_1, F'_2, \cdots, F'_n, \cdots$ contenuta nella (1) [11] ed una successione δ_n di numeri positivi tali che l'oscillazione di qualsivoglia funzione di F'_n, in ogni intervallo contenuto in (a, b) e di ampiezza minore di δ_n, sia minore di ε_n. Diremo allora che la (1) è una « successione di insiemi di funzioni *similmente continue* ». Orbene:

III. « Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme di funzioni $f(x)$ continue ed ugualmente limitate in un intervallo (a, b) possieda in

(9) M. Cipolla, *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni*. « Atti dell'Accad. Gioenia in Catania », serie 5ª, vol. VI.

(10) Si tenga conto sopratutto del seguente teorema: « Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di insiemi (numerici) X_n sia convergente, è che ad ogni numero positivo ε corrisponda un indice ν tale che, per ogni coppia di indici p, q maggiori di ν, e qualunque sia l'elemento x_p di X_p e x_q di X_q, si abbia: $|x_q - x_p| < \varepsilon$ ». (M. Cipolla, loc. cit).

(11) Tale, cioè, che l'insieme F'_n sia contenuto in F_n. (M. Cipolla, loc. cit.).

quest'intervallo almeno una funzione di accumulazione, è che esista una successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ similmente continue ».

Supponiamo in primo luogo che il dato insieme F di funzioni $f(x)$ possieda una funzione di accumulazione $\varphi(x)$ definita in (a, b).

Ne segue, per definizione, che ad ogni numero positivo ε corrisponde un insieme F' di infinite funzioni $f(x)$ tali che si abbia: $|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per qualsivoglia valore x di (a, b); pertanto, assunta ad arbitrio una successione ε_n convergente a zero di numeri positivi decrescenti, esiste una successione di insiemi infiniti

$$F'_1, F'_2, \cdots, F'_n, \cdots \tag{2}$$

di funzioni $f(x)$ tali che si abbia:

$$|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon_n}{3} \tag{3}$$

per qualsivoglia funzione $f_n(x)$ dell'insieme F'_n e per qualsiasi valore x di (a, b). Si riconosce immediatamente che ciascun termine della successione (2) contiene il successivo (basta tener presente che ε_n è una successione a termini positivi *decrescenti*); inoltre, poichè la funzione di accumulazione è, com'è noto, continua nell'intervallo (a, b) e quindi *uniformemente* continua, ad ε_n si può fare corrispondere un numero positivo δ_n tale che si abbia:

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon_n}{3} \tag{4}$$

per ogni coppia di valori x, x' di (a, b) che soddisfino alla condizione:

$$|x - x'| < \delta_n . \tag{5}$$

Si ha intanto: $|f_n(x) - f_n(x')| \leq |f_n(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x')| + |\varphi(x') - f_n(x')|$ e da ciò segue, tenuto conto delle (3) e (4):

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon_n \tag{6}$$

per qualsivoglia funzione $f_n(x)$ dell'insieme F'_n e per ogni coppia di valori x, x' di (a, b) che soddisfino alla condizione (5). La (2) è dunque una successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ similmente continue e la necessità è quindi dimostrata.

Supponiamo allora che esista una successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ similmente continue e cioè, data ad arbitrio una successione ε_n convergente a zero di numeri positivi decrescenti, che esista una successione δ_n di numeri positivi ed una successione (1) di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ tali che abbia luogo la (6) per qualsivoglia funzione $f_n(x)$ di F_n e per ogni coppia di valori x, x' di (a, b) che soddisfino alla condizione (5). Definiamo la successione di punti

$$x_1, x_2, x_3, \cdots \tag{7}$$

assumendo per x_1 il centro dell'intervallo (a, b), per x_2 il centro dell'intervallo (a, x_1), per x_3 il centro dell'intervallo (x_1, b), per x_4 il centro dell'intervallo (a, x_2), ecc. Denotiamo quindi con $F_n(x_1)$ l'insieme dei valori assunti dalle funzioni di F_n per $x = x_1$ e consideriamo distinti due elementi di $F_n(x_1)$, che provengano da funzioni distinte di F_n, anche quando risultino uguali. Poichè le funzioni $f(x)$ sono ugualmente limitate, l'insieme $F_n(x_1)$ è contenuto, e perciò addensato, in un certo intervallo I_n ed ammette quindi necessariamente qualche punto limite. Detto fra questi $\varphi_n(x_1)$ il minimo, la successione: $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1), \cdots, \varphi_n(x_1), \cdots$ risulta addensata nell'intervallo I_1 ed ammette quindi in quest'intervallo qualche punto limite; tra questi sia $\varphi(x_1)$ il minimo. Intanto, poichè l'insieme $F_n(x_1)$ contiene il successivo $F_{n+1}(x_1)$, e quindi tutti quelli che lo seguono, i numeri $\varphi_{n+1}(x_1), \varphi_{n+2}(x_1), \cdots$ sono, al pari di $\varphi_n(x_1)$, valori limiti dell'insieme $F_n(x_1)$ e $\varphi(x_1)$, essendo, conseguentemente, punto limite dei punti limiti $\varphi_n(x_1), \varphi_{n+1}(x_1), \varphi_{n+2}(x_1), \cdots$ di tale insieme, risulta pure valore limite di esso. Esiste allora una classe $F_n^{(1)}(x_1)$ di infiniti termini $f_n(x_1)$ dell'insieme $F_n(x_1)$ tali che si abbia:

$$|f_n(x_1) - \varphi(x_1)| < \varepsilon_n . \tag{8}$$

Un qualsivoglia termine $f_{n+1}(x_1)$ dell'insieme $F_{n+1}^{(1)}(x_1)$, appartenendo all'insieme $F_{n+1}(x_1)$, appartiene pure ad $F_n(x_1)$ e poichè si ha: $f_{n+1}(x_1) - \varphi(x_1)| < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, si conclude che $f_{n+1}(x_1)$ fa parte di $F_n^{(1)}(x_1)$; insomma ogni termine della successione $F_1^{(1)}(x_1), F_2^{(1)}(x_1), \cdots, F_n^{(1)}(x_1), \cdots$ contiene il successivo. Denotando infine con $F_n^{(1)}$ la classe delle funzioni $f(x)$ dell'insieme F_n che per $x = x_1$ assumono i valori dell'insieme $F_n^{(1)}(x_1)$, possiamo concludere che esiste una successione di insiemi infiniti: $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \cdots, F_n^{(1)}, \cdots$ di funzioni $f(x)$ che godono delle seguenti proprietà:

a) ciascun termine di tale successione contiene il successivo;

b) per qualsiasi funzione $f_n(x)$ dell'insieme $F_n^{(1)}$ hanno luogo le relazioni (8) e (6) e quest'ultima per ogni coppia di valori x, x' di (a, b) che soddisfino alla condizione (5).

Considerando ora il punto x_2 e la successione di insiemi $F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \cdots, F_n^{(1)}, \cdots$ e ripetendo le argomentazioni precedenti, potremo stabilire l'esistenza di un punto limite $\varphi(x_2)$ e di una successione di insiemi infiniti: $F_2^{(2)}, F_3^{(2)}, \cdots, F_n^{(2)}, \cdots$ di funzioni $f(x)$ che godono delle seguenti proprietà:

a) ciascun termine di tale successione contiene il successivo;

b) per qualsiasi funzione $f_n(x)$ dell'insieme $F_n^{(2)}$ hanno luogo:

1° la relazione (8) (ciò perchè $F_n^{(2)}$ risulta contenuto in $F_n^{(1)}$);

2° la relazione: $|f_n(x_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon_n$;

3° la relazione (6) per ogni coppia di valori x, x' di (a, b) che soddisfino alla condizione (5).

Continuando in modo analogo, potremo costruire un punto limite $\varphi(x_m)$ ed una successione di insiemi infiniti:

$$F_m^{(m)}, F_{m+1}^{(m)}, \cdots, F_n^{(m)}, \cdots$$

di funzioni $f(x)$ che godono delle seguenti proprietà:

a) ciascun termine di tale successione contiene il successivo;

b) per ciascun termine $f_n(x)$ dell'insieme $F_n^{(m)}$ hanno luogo:

1° le relazioni:

$$|f_n(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{9}$$

2° la relazione (6) per ogni coppia di valori x, x' di (a, b) che soddisfino alla condizioni (5).

Assunto ora ad arbitrio un numero positivo ε, esiste un indice μ tale che si abbia $\varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{4}$ per ogni $m \geqq \mu$ e si può sempre considerare un intero ν, non minore di μ, tale che i termini

$$x_1, x_2, \cdots, x_\nu \tag{10}$$

della successione (7) costituiscano, ordinati in senso crescente, una divisione dell'intervallo (a, b) in intervalli parziali di ampiezze minori di δ_μ. Per conseguenza, ad ogni punto x di (a, b) potremo far corrispondere sempre un termine x_i del sistema (10), in modo che si abbia:

$$|x - x_i| < \delta_\mu . \tag{11}$$

Ed allora, dati ad arbitrio due indici p e q non minori di ν (e quindi di μ) e dette $f_p(x)$ ed $f_q(x)$ due qualsiasi funzioni degli insiemi $F_p^{(p)}$ ed $F_q^{(q)}$ rispettivamente, poichè questi sono contenuti in $F_\mu^{(\mu)}$ (essendo p e q non minori di μ), dalla (6), tenuto conto della (11), si ricava:

$$|f_p(x) - f_p(x_i)| < \varepsilon_\mu \quad , \quad |f_q(x) - f_q(x_i)| < \varepsilon_\mu .$$

Considerando poi le funzioni $f_p(x)$ ed $f_q(x)$ come termini degli insiemi $F_p^{(p)}$ ed $F_q^{(q)}$ rispettivamente, si ricava pure, in virtù delle (9) (dopo aver notato che i non può superare nè p nè q):

$$|f_p(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon_p \quad , \quad |f_q(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon_q$$

ed infine:

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqq |f_p(x) - f_p(x_i)| + |f_p(x_i) - \varphi(x_i)| +$$
$$+ |\varphi(x_i) - f_q(x_i)| + |f_q(x_i) - f_q(x)| < \varepsilon_\mu + \varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_\mu < \varepsilon .$$

Si conclude allora, in virtù della proposizione I, che la successione di insiemi infiniti $F_1^{(1)}, F_2^{(2)}, \cdots, F_m^{(m)}, \cdots$ converge uniformemente ad una funzione definita in (a, b), la quale risulta funzione di accumulazione del nostro insieme, in virtù della proposizione II.

2. Il criterio dell'Ascoli [3] col quale viene stabilita l'esistenza di funzioni di accumulazione di un insieme di funzioni $f(x)$, continue ed ugualmente limitate nell'intervallo (a, b), nell'ipotesi che esse (o infinite di esse) siano in tale intervallo ugualmente continue, si può dedurre immediatamente dal teorema che abbiamo enunciato, supponendo che i termini della successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ similmente continue coincidano tutti col dato insieme di funzioni, ovvero abbiano, più in generale, un insieme infinito in comune.

Geometria. — *Sui piani tripli con un fascio irrazionale.* Nota [1] di G. Pompilj, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

Studio in questa Nota i piani tripli che provengono da superficie algebriche possedenti un fascio irrazionale di curve.

Indicando con F la superficie, con $(\mathcal{C})$ il fascio irrazionale, con p il suo genere, con I_3 l'involuzione razionale che dà luogo al piano triplo, i risultati ottenuti possono essere così enunciati: *il fascio* $(\mathcal{C})$ *non è composto* (*n. 3*) *con l'involuzione* I_3 *solo se il suo genere è: uno* $(p = 1)$ (*n. 5*); *in tal caso il fascio è rappresentato, nel piano triplo, da un sistema* $\infty^1 \{C_n\}$ *d'indice 3, le cui curve appartengono ad una rete* $|C_n|$ *di equazione*

$$\lambda_1 f_n^{(1)} + \lambda_2 f_n^{(2)} + \lambda_3 f_n^{(3)} = 0,$$

e l'equazione di un modello proiettivo (principale) della superficie F *è data da:*

$$f^{[3]}\left(z \mid f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)}\right) = 0,$$

dove

$$f^{[3]}(z \mid \xi, \eta, \tau) = 0,$$

in uno spazio (ξ, η, z, τ), *è l'equazione di un modello proiettivo (principale) del piano triplo che ha per curva di diramazione una sestica con 9 cuspidi (duale della cubica piana generale) (n. 8).*

Ad eccezione del caso precedente, il fascio $(\mathcal{C})$ *è sempre composto con l'involuzione* I_3 *e la curva di diramazione è spezzata in non più di* $2p + 4$ *curve (o forse componenti di curve) di un fascio* (C); *le curve di* $(\mathcal{C})$ *hanno per immagine, a tre a tre, una curva di* (C) (*n. 11*).

Viceversa scelte $2p + 4$ *curve di un fascio* (C) *esistono*

$$\frac{3^{2p+2} - 1}{2}$$

piani tripli, birazionalmente distinti, che hanno la curva di diramazione spezzata nelle $2p + 4$ *curve del fascio* (C); *questi piani tripli posseggono tutti un fascio*

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

irrazionale ($\mathscr{C}$), *di genere p, le cui curve hanno per immagine, a tre a tre, una curva di* (C) (n. 12).

1. Sia F una superficie algebrica irriducibile su cui faccio le seguenti due ipotesi:

α) è rappresentabile su un piano triplo, mediante un'involuzione razionale I_3 del terzo ordine non ciclica,

β) possiede un fascio irrazionale ($\mathscr{C}$), di genere $p (> 0)$, la cui generica curva è irriducibile.

Fissata una *generica* curva $\mathscr{C}_1$ del fascio sono *a priori* possibili tre casi:

I. – nessuno dei coniugati, nella I_3, di un punto variabile su $\mathscr{C}_1$, varia ancora su $\mathscr{C}_1$; in questo caso dirò che le curve del fascio sono *non appartenenti* all'involuzione I_3;

II. – uno solo dei coniugati, nella I_3, di un punto variabile su $\mathscr{C}_1$, varia ancora su $\mathscr{C}_1$;

III. – tutti e due i coniugati, nella I_3, di un punto variabile su $\mathscr{C}_1$, variano ancora su $\mathscr{C}_1$.

2. *La generica curva del fascio irrazionale* ($\mathscr{C}$) *è non appartenente all'involuzione* I_3.

Ho già dimostrato in un altro lavoro [2] che il secondo dei casi elencati al numero precedente non può mai presentarsi, quindi basta dimostrare che anche il terzo caso è impossibile. Se si presentasse il terzo caso il fascio irrazionale ($\mathscr{C}$) sarebbe rappresentato, curva per curva, su un fascio del piano triplo, ma ogni fascio su un piano (superficie regolare) è razionale, quindi anche ($\mathscr{C}$), contro le ipotesi fatte, sarebbe razionale. È quindi assurdo supporre che si presenti il terzo dei casi elencati al numero precedente, c. v. d.

È appena necessario avvertire che l'ipotesi della genericità della curva del fascio è essenziale, perchè per particolari curve il risultato potrebbe non esser vero.

3. Dobbiamo ancora distinguere tre casi *a priori* possibili:

I. – nessuno dei coniugati, nella I_3, di un punto variabile su $\mathscr{C}_1$ varia ancora su una curva del fascio; in questo caso dirò che il fascio ($\mathscr{C}$) non è composto con l'involuzione;

II. – uno solo dei coniugati, nella I_3, di un punto variabile su $\mathscr{C}_1$ varia su un'altra curva $\mathscr{C}_2$ del fascio;

III. – i due coniugati, nella I_3, di un punto variabile su $\mathscr{C}_1$, variano su altre due curve $\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$ del fascio; in questo caso dirò che il fascio ($\mathscr{C}$) è composto con l'involuzione.

(2) Ved., G. Pompili, *Sui piani tripli con quartica di diramazione.* « Ann. di Mat. 1946 », n. 12.

4. *Il fascio* $(\mathcal{C})$ *può essere solo composto o non composto con l'involuzione* I_3.

Basta evidentemente dimostrare che il secondo dei tre casi elencati al n. 3 non può mai presentarsi.

Siano P_1, P_2, P_3 i tre punti di un gruppo generico dell'involuzione I_3 e siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ le tre curve del fascio, necessariamente distinte (n. 2), che passano per i tre punti; ordinatamente $\mathcal{C}_i$ per P_i $(i = 1, 2, 3)$. Dimostreremo che, se quando P_1 descrive $\mathcal{C}_1$, P_2 descrive $\mathcal{C}_2$, necessariamente P_3 descrive $\mathcal{C}_3$; il che, appunto, basta per provare l'impossibilità del secondo caso. Nelle nostre ipotesi, quando P_3 descrive $\mathcal{C}_3$, uno degli altri due punti, sia P_2, deve descrivere una curva del fascio, necessariamente coincidente con $\mathcal{C}_2$; cioè quando P_2 descrive $\mathcal{C}_2$, il punto P_3 descrive $\mathcal{C}_3$; ed allora quando il punto P_1 descrive $\mathcal{C}_1$, P_2 descrive $\mathcal{C}_2$ e P_3 descrive $\mathcal{C}_3$, c. v. d.

Si osservi che in questa dimostrazione non interviene l'ipotesi dell'irrazionalità del fascio $(\mathcal{C})$, che può essere sostituita dall'ipotesi che la generica curva di $(\mathcal{C})$ è non appartenente all'involuzione.

5. *Se il fascio irrazionale* $(\mathcal{C})$ *è non composto con l'involuzione* I_3, *il suo genere p è necessariamente eguale ad* 1 (fascio ellittico).

Sia Γ una curva immagine del fascio $(\mathcal{C})$ come ente ∞^1 di curve.

L'involuzione razionale I_3 subordina sul fascio $(\mathcal{C})$, e quindi su Γ, una serie algebrica γ_3^2 del terzo ordine e di dimensione due. La γ_3^2 è razionale come l'involuzione I_3 e quindi [3] i suoi gruppi sono equivalenti. Ne segue che la γ_3^2 è contenuta in una serie lineare g_3^r di dimensione r non minore di due, cioè o in una g_3^2 o in una g_3^3. Ma se esistesse in Γ una g_3^3, la curva sarebbe razionale, contro le ipotesi fatte; resta quindi l'unica possibilità della g_3^2, nel qual caso Γ è una curva ellittica $(p = 1)$, c. v. d.

6. Sia $\{C_n\}$ il sistema ∞^1, d'indice 3, di curve d'ordine n, immagine, nel piano triplo, del fascio ellittico $(\mathcal{C})$.

Nello spazio $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ ad $\frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni, i cui punti rappresentano le curve C_n, d'ordine n, del piano, il sistema $\{C_n\}$ è rappresentato da una cubica ellittica; ma una cubica ellittica è necessariamente contenuta in un piano, e pertanto possiamo affermare che le curve del sistema ∞^1 $\{C_n\}$ appartengono ad una rete $|C_n|$ individuata da tre curve (generiche) del sistema. Indicheremo con m il grado della rete $|C_n|$.

7. Sia $m = 1$. In tal caso, a meno di una trasformazione cremoniana, la rete $|C_n|$ coincide con la rete delle rette, la superficie F appartiene

(3) Ved. per esempio, F. Enriques - O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* (Zanichelli - Bologna), vol. III, p. 78.

alla famiglia delle rigate ellittiche, e la curva di diramazione è una restica con 9 cuspidi (duale di una cubica ellittica) (4).

Introdotto un sistema cartesiano omogeneo (ξ, η, ζ, τ) di riferimento, indichiamo con:

$$f^{[3]}(\zeta/\xi, \eta, \tau) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di un modello proiettivo (principale) del piano triplo che ha per curva di diramazione una restica con 9 cuspidi.

8. Sia $m > 1$. Se l'equazione della rete $|C_n|$ è data da:

$$\lambda_1 f_n^{(1)}(xyt) + \lambda_2 f_n^{(2)}(xyt) + \lambda_3 f_n^{(3)}(xyt) = 0$$

possiamo considerare la corrispondenza definita da:

$$\{\rho\xi = f_n^{(1)}, \rho\eta = f_n^{(2)}, \rho\tau = f_n^{(3)}\}.$$

Questa corrispondenza muta le curve della rete $|C_n|$ del piano (x, y, t) nelle rette del piano (ξ, η, τ) e quindi il sistema $\{C_n\}$ viene trasformato in un sistema di rette d'indice 3; di modo che, in tal caso $(m = 1)$, l'equazione di un modello proiettivo del piano triplo è dato dalla (1). Ne segue che l'equazione di un modello proiettivo del nostro piano triplo è data da:

$$f^{[3]}(\zeta/f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)}) = 0 \tag{2}$$

dove il primo membro della (2) coincide con il primo membro della (1) in cui però le variabili ξ, η, τ sono state ordinatamente sostituite con i polinomi $f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)}$.

9. Avendo in tal modo esaurito il caso che il fascio $(\mathcal{C})$ non sia composto con l'involuzione I_3, resta solo da studiare (n. 4) il caso che il fascio sia composto con l'involuzione razionale.

Le curve del fascio $(\mathcal{C})$ sono, nelle nostre ipotesi, rappresentate, sul piano triplo, a tre a tre, da curve di un fascio (razionale) (C); e quindi l'involuzione I_3 subordina sul fascio $(\mathcal{C})$, come ente ∞^1 di curve, e di conseguenza su Γ, una g_3^1.

10. Prima, però, di procedere oltre nel nostro studio, conviene esaminare alcuni fatti che possono presentarsi in casi particolari.

Se una particolare curva $\mathcal{C}^*$ del fascio presenta il terzo dei casi elencati al n. 1, la corrispondente curva C* del fascio (C) non è immagine di tre curve distinte di $(\mathcal{C})$ ma solo di $\mathcal{C}^*$ contata tre volte, nel senso che ad un punto generico di C* corrispondono tre punti distinti di $\mathcal{C}^*$. In questo caso la curva C* è tripla, cioè è formata da una $\overline{C}^*$ contata tre volte.

(4) Ved., G. Pompili, *Su una classe di piani multipli rigati*. «Rend. di Mat. 1946», n. 12.

Se poi una particolare curva $\mathcal{C}^*$ del fascio presenta il secondo dei casi elencati al n. 1, la corrispondente curva C* del fascio (C) non è immagine di tre curve distinte di $(\mathcal{C})$ ma solo di $\mathcal{C}^*$ contata due volte e di un'altra curva $\bar{\mathcal{C}}$; in tal caso C* è doppia e tale è pure $\bar{\mathcal{C}}$.

Infine, supponiamo che una particolare curva $\mathcal{C}^*$ del fascio sia spezzata in due parti:

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{C}_1^* + \mathcal{C}_2^*,$$

e che di queste due parti una, sia $\mathcal{C}_2^*$, presenti il secondo dei casi elencati al n. 1, mentre l'altra parte presenti il primo; per le ipotesi fatte al n. 1 la $\mathcal{C}_2^*$ non può essere comune a due curve del fascio e quindi delle due curve di $(\mathcal{C})$ residue (5) di $\mathcal{C}^*$ una deve coincidere con $\mathcal{C}^*$ dato che la residua di $\mathcal{C}_2^*$ è spezzata in $\mathcal{C}_2^*$ e $\bar{\mathcal{C}}_2$; ne segue che $\mathcal{C}_1^*$ è luogo di punti doppi per l'involuzione I_3. L'immagine C* di $\mathcal{C}^*$, sul piano triplo, è anch'essa spezzata in due parti:

$$C^* = C_1^* + C_2^*$$

di cui la C_2^* (immagine di $\mathcal{C}_2^*$) è doppia; la curva C* è immagine della $\mathcal{C}^*$ contata due volte e di un'altra curva $\bar{\mathcal{C}}$ anch'essa spezzata in due parti, di cui una, $\bar{\mathcal{C}}_2$, è doppia.

E potrei proseguire a considerare le altre particolarità che potrebbero presentare le curve del fascio $(\mathcal{C})$; ma ritengo inutile farlo perchè le cose fin qui dette bastano a chiarire quello che incontreremo nel seguito.

Mi basta per ora far osservare che *se nel fascio* (C) *non vi sono curve multiple, o con componenti multiple, tutte le curve del fascio* $(\mathcal{C})$ *presentano il primo dei casi elencati al n. 1*; si tenga però presente che la condizione è solo sufficiente, perchè curve multiple di (C) possono anche provenire da curve multiple di $(\mathcal{C})$.

A questo punto è però necessario mettere ben in chiaro che tutti i casi particolari sopra elencati sono possibili *a priori*; questo non garantisce che essi sono *realmente* possibili; per ottenere questa assicurazione bisognerebbe costruire qualche esempio dove queste particolarità si presentassero; ma io non posseggo tali esempi, e quindi la questione, in questo senso, rimane aperta.

11. *Se il fascio irrazionale, di genere* p, $(\mathcal{C})$, *è composto con l'involuzione* I_3, *la curva di diramazione del piano triplo è spezzata in curve (o forse componenti di curve) di un fascio*; *il numero di queste curve non supera* $2p + 4$.

Dalle ipotesi fatte deriva che la curva dei punti doppi dell'involuzione I_3 non può avere intersezioni variabili con le curve di $(\mathcal{C})$ e quindi è spezzata in curve, o forse in componenti di curve, del fascio; da qui segue che la curva di diramazione del piano triplo è spezzata in curve, o forse componenti di curve, del fascio (C) immagine, sul piano triplo, di $(\mathcal{C})$.

(5) Ved. loc. cit. (2), n. 10.

Ci rimane ora dà contare il numero di queste curve. Se $\mathcal{C}^*$ è una curva, del fascio $(\mathcal{C})$, luogo dei punti doppi dell'involuzione I_3, il punto corrispondente su Γ è un punto doppio della g_3^1 (n. 9) subordinata dalla I_3; non è però vero il viceversa perchè un punto doppio (o triplo) della g_3^1 può anche provenire da una curva per cui si presenta il secondo (o il terzo) dei casi elencati al n. 1. Siccome infine i punti doppi della g_3^1 sono $2p+4$, possiamo dire che la curva di diramazione del piano triplo è formata al massimo da $2p+4$ curve del fascio (C), c. v. d.

Si osservi ancora che se il fascio (C) non contiene curve multiple, o con componenti multiple, (n. 7) la curva di diramazione del piano triplo è formata esattamente da $2p+4$ curve del fascio, contando però come doppia una eventuale curva di diramazione (1, 2, 3).

12. *Scelte in un fascio* (C), *del piano,* $2p+4$ *curve, esistono*

$$\frac{3^{2p+2}-1}{2}$$

piani tripli, birazionalmente distinti, che hanno la curva di diramazione spezzata nelle $2p+4$ *curve assegnate dal fascio; questi piani tripli posseggono tutti un fascio irrazionale* $(\mathcal{C})$, *di genere* p, *le cui curve hanno per immagine, a tre a tre, una curva di* (C).

Prima di tutto ricordo che la locuzione « piani tripli birazionalmente distinti » significa che tra due modelli proiettivi dei due piani tripli non intercorre una corrispondenza birazionale che trasforma l'una nell'altra le due involuzioni del terzo ordine che dànno luogo ai piani tripli.

Premesso questo chiarimento, passo alla dimostrazione dell'enunciato.

Supponiamo anzitutto che il fascio (C) sia un fascio di rette per il punto Q, e fissiamo $2p+4$ rette nel fascio. Una generica retta r, del piano π, non appartenente al fascio, interseca le $2p+4$ rette fissate in $2p+4$ punti $P_1, P_2, \cdots, P_{2p+4}$. Interpretando la retta r come una retta tripla con i $2p+4$ punti di diramazione $P_1, P_2, \cdots, P_{2p+4}$ possiamo costruire, nel piano per retta r ed il punto, O_ζ, all'infinito dell'asse ζ, più curve, di genere p, d'ordine n, sufficientemente alto, ed aventi in O_ζ un punto $(n-3)$-plo in modo che vengano proiettate da O_ζ, nella retta tripla r con i punti di diramazione $P_1, P_2, \cdots, P_{2p+4}$ [6], e, come è noto, possiamo in tal modo costruire

$$\frac{3^{2p+2}-1}{2}$$

rette triple birazionalmente distinte [7].

(6) Ved. per esempio loc. cit. (3), vol. III, p. 360.
(7) Ved. per esempio loc. cit. (3), vol. III, p. 370.

Fissata una $\mathfrak{A}$, di tali curve, costruiamo il cono F che la proietta dal punto Q (centro del fascio); questo cono viene rappresentato sul piano triplo che ha la curva di diramazione spezzata nelle $2p + 4$ rette assegnate, ed è chiaro che in tal modo si costruiscono

$$\frac{3^{2p+2} - 1}{2}$$

piani tripli, birazionalmente distinti, con la stessa curva di diramazione.

Se il piano π ha equazione $z = 0$ e se Q coincide con l'origine delle coordinate, l'equazione del cono F è del tipo:

$$(3) \qquad a_{n-3} z^3 + 3 b_{n-2} z^2 + 3 c_{n-1} z + d_n = 0$$

dove $a_{n-3}, b_{n-2}, c_{n-1}, d_n$ sono polinomi omogenei in x, y.

Rinunciamo ora all'ipotesi che (C) sia un fascio di rette.

Sia

$$(4) \qquad \lambda_1 f^{(1)} + \lambda_2 f^{(2)} = 0$$

l'equazione del fascio (C), dove $f^{(1)}$ e $f^{(2)}$ sono due polinomi in x, y (per esempio di grado m); sia poi $f^{(3)} = 0$ l'equazione di una generica curva d'ordine m; si consideri, sul piano π, la rete di equazione:

$$(5) \qquad \lambda_1 f^{(1)} + \lambda_2 f^{(2)} + \lambda_3 f^{(3)}$$

e sia $\partial\,(= m^2)$ il grado della rete.

Una corrispondenza proiettiva tra le curve della rete (5) e le rette di un piano α, definisce tra i due piani π ed α una corrispondenza $[1, \partial]$ la cui equazione si può porre sotto la forma:

$$(6) \qquad \{\rho\xi = f^{(1)} \quad , \quad \rho\eta = f^{(2)} \quad , \quad \rho\tau = f^{(3)}\}$$

dove ξ, η, τ sono le coordinate omogenee del piano α.

Con questa trasformazione il fascio (C) diventa, su α, un fascio di rette per l'origine. Possiamo allora ripetere le considerazioni fatte prima e costruire così, su α, $\frac{3^{2p+2} - 1}{2}$ piani tripli birazionalmente distinti su cui sono rappresentati dei coni la cui equazione è del tipo:

$$(3') \qquad a_{n-3} z^3 + 3 b_{n-2} z^2 + 3 c_{n-1} z + d_n = 0$$

dove $a_{n-3}, b_{n-2}, c_{n-1}, d_n$ sono polinomi omogenei in ξ, η.

Trasformando la (3') con la (6) si ottiene infine:

$$(7) \qquad a_{n-3}(f^{(1)}, f^{(2)}) z^3 + 3 b_{n-2}(f^{(1)}, f^{(2)}) z^2 + \\ + 3 c_{n-1}(f^{(1)}, f^{(2)}) z + d_n(f^{(1)}, f^{(2)}) = 0$$

cioè:

$$(8) \qquad a_{m(n-3)}\zeta^3 + 3\,b_{m(n-2)}\zeta^2 + 3\,c_{m(n-1)}\zeta + d_{mn} = 0$$

dove $a_{m(n-3)} = 0$ è l'equazione complessiva di $n-3$ curve del fascio (C) e così pure $b_{m(n-2)} = 0$, $c_{m(n-1)} = 0$, $d_{mn} = 0$ sono rispettivamente le equazioni complessive di $n-2$, $n-1$, n curve del fascio (C).

La superficie (6) dà luogo ad un piano triplo la cui curva di diramazione è spezzata nelle $2p+4$ curve assegnate ed è chiaro che di piani tripli siffatti se ne ottengono

$$\frac{3^{2p+2}-1}{2}$$

birazionalmente distinti.

Inoltre, alle generatrici del cono (3') corrispondono sulla superficie (8) le curve del fascio irrazionale (©), c. v. d.

Geometria. — *Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche.* Nota I [1] di B. Segre, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. La totalità delle forme f di S_r di ordine n assegnato ($r \geq 1$, $n \geq 2$) è un sistema lineare di dimensione $\rho = r_{n+1} - 1$, dove poniamo

$$r_h = (r+h-1)_r = \binom{r+h-1}{r} = \frac{(r+h-1)!}{r!\,(h-1)!},$$

e può quindi venir rappresentata linearmente coi punti di un S_ρ. I sistemi ottenuti in S_r coll'assoggettare le f a date condizioni hanno così per imagini in S_ρ varietà le cui proprietà riflettono quelle dei sistemi considerati.

Ad esempio, preso in S_r un punto P od un iperpiano q, e fissato uno qualunque h dei numeri $1, 2, \cdots, n$, le totalità delle f di S_r passanti per P con molteplicità $\geq h$ o contenenti q come componente di molteplicità $\geq n-h+1$ si rappresentano in S_ρ mediante due spazi lineari, che denoteremo rispettivamente con π_h e χ_h, aventi dimensioni duali $\rho - r_h$ ed $r_h - 1$. Quando P e q variano in S_r, gli spazi π_h e χ_h descrivono in S_ρ due sistemi algebrici ∞^r, diciamo Φ_h e Ψ_h; indicheremo colle stesse lettere le varietà algebriche luoghi dei punti di tali spazi, le cui rispettive dimensioni valgono $\rho + r - r_h$ ed $r + r_h - 1$, colle sole eccezioni di Φ_1 per $r \geq 1$, $n \geq 2$ e di Ψ_n per $r = 1$, $n \geq 2$ che sono due sistemi ∞^r di iperpiani e che perciò, come luoghi di punti, comprenderebbero l'intero S_ρ. Le singolarità della

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 marzo 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

varietà Φ_2 sono già state studiate da Hilbert per $r = 1$ ed n arbitrario (2), ed ho già avuto occasione di considerare le Φ, Ψ e le loro varietà multiple per r arbitrario ed $n = 2$ quali varietà di Veronese a due indici (3).

In questa Nota, ed in una che verrà appresso, stabilisco i due seguenti teoremi, validi per $r \geq 1$ ed $n \geq 2$ arbitrari.

Teorema I. – *Supposto* $2 \leq h \leq k \leq n$, *la varietà* Φ_h *ha l'ordine* $(r_h)_r (n - h + 1)^r$ *e contiene la* Φ_k *colla molteplicità* $(k - h + 1)^r$. *Supposto* $1 \leq h < k \leq n$, *la varietà* Ψ_h *ha l'ordine* $(r + r_h - 1)_r (n - h + 1)^r$ *ed appartiene alla* Ψ_k *colla molteplicità* $(k - h + 1)^r$, *ove occorre inoltre supporre* $k < n$ *se* $r = 1$. *La* Ψ_k *contiene la varietà formata dagli spazi* $(k - h)$ *— osculatori della* Ψ_h, *e coincide con questa varietà nei casi seguenti, ed in essi soltanto:*

$$r = 1\ 0\ 2 \quad , \quad h \ e \ k \ arbitrari;$$

$$r = 3, h = 2, k = 3 \quad ; \quad r = 3, h = 2\ 0\ 3, k = 4;$$

$$h = 1 \quad , \quad r \ e \ k \ arbitrari.$$

Teorema II. – *Le omografie di* S_ρ *che trasformano in sè una qualunque determinata delle varietà* Φ, Ψ *dianzi definite costituiscono un gruppo continuo* $\infty^{r(r+2)}$, *e trasformano anche in sè ciascuna delle varietà rimanenti. Gli spazi generatori di* Φ_h *sono trasformati in quelli di* Ψ_h $(h = 1, 2, \cdots, n)$ *da un sistema continuo* $\infty^{r(r+2)}$ *di reciprocità, il quale contiene un sistema continuo* $\infty^{r(r+3)/2}$ *di polarità rispetto a quadriche. Quando r è pari, non vi sono altre reciprocità involutorie trasformanti* Φ_h *in* Ψ_h. *Invece, quando r è dispari, vi è uno ed un solo sistema ulteriore di reciprocità involutorie siffatte, avente dimensione* $(r+2)(r-1)/2$ *e comprendente una sola trasformazione per* $r = 1$; *queste reciprocità sono polarità rispetto a quadriche o polarità nulle, a seconda che n è pari o dispari.*

Il teorema I verrà ulteriormente approfondito in un prossimo lavoro. Esso ha interesse generale nella *geometria differenziale proiettiva*, in quanto una V_r (non necessariamente algebrica) che non soddisfi ad alcuna equazione differenziale di ordine $\leq n$, e che perciò appartenga ad uno spazio di dimensione $\geq \rho$, può venir approssimata fino all'ordine n nell'intorno di un suo punto generico da una trasformata proiettiva della Ψ_1: pertanto, localmente, il comportamento della V_r e delle varietà formate dai suoi spazi tangenti, 2 — osculatori, $\cdots$, $(n - 1)$ — osculatori, coincide con quello delle $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \cdots, \Psi_n$.

Il teorema II mostra che le varietà Φ sono in un certo senso *duali* delle Ψ, e fornisce un'interpretazione geometrica della teoria dell'*apolarità* in S_r (n. 9). In particolare, per $r = 1$ la Φ_h coincide ovviamente colla

(2) Ved. D. Hilbert, *Ueber die Singularitäten der Diskriminantenfläche*. « Math. Ann. » *30*, 437-441 (1887) = « Ges. Abh. », II, 117-120 (Berlin 1933).

(3) Cfr. B. Segre, *Sulle varietà di Veronese a due indici*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei » (6) *23*, 303-309 e 391-397 (1936)$_{I}$.

Ψ_{n-h+1}, ed inoltre $\Phi_n = \Psi_1$ è una curva razionale normale di $S_\varrho = S_n$. Allora l'unica polarità a cui si riduce il sistema considerato alla fine del teorema II coincide con quella ben nota scoperta da Clifford (4); inoltre, in base al teorema II, vi sono sempre esattamente ∞^2 polarità ulteriori rispetto a quadriche che trasformano i punti negli iperpiani osculatori di Φ_n (5).

2. La rappresentazione delle forme f di ordine n di S_r coi punti di S_ϱ, di cui al n. 1, si ottiene col porre

$$(1) \qquad f = f(x|\xi) = \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_r=n \\ i_0\geq 0,\cdots,i_r\geq 0}} \frac{\xi_{i_0,i_1,\cdots,i_r}}{i_0!\,i_1!\cdots i_r!}\, x_0^{i_0} x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r},$$

dove le (x) sono coordinate omogenee di punto in S_r, e coll'interpretare le (ξ) come coordinate omogenee di punto in S_ϱ. Il punto che così corrisponde in S_ϱ ad una data f ha le coordinate

$$(2) \qquad \xi_{(i)} = \{f\}^{(i)}_{(x)} \qquad (i_0 + i_1 + \cdots + i_r = n),$$

dove, per abbreviare, si è posto

$$\xi_{(i)} = \xi_{i_0,i_1,\cdots,i_r} \quad , \quad \{f\}^{(i)}_{(x)} = \frac{\partial^{i_0+i_1+\cdots+i_r} f}{\partial x_0^{i_0}\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_r^{i_r}}.$$

Con queste notazioni, la varietà Φ_h definita nel n. 1 si rappresenta colle r_h equazioni

$$(3) \qquad \{f\}^{(i)}_{(x)} = 0 \qquad (i_0 + i_1 + \cdots + i_r = h-1),$$

che sono lineari nelle (ξ) e contengono gli $r+1$ parametri (x) omogeneamente a grado $n-h+1$. Se $h > 1$, l'ordine della Φ_h uguaglia il numero delle soluzioni del sistema formato dalle (3) e da $\varrho + r - r_h$ equazioni lineari nelle (ξ), a coefficienti costanti e generici; in base ad un risultato noto (6), *tale ordine vale dunque* $(r_h)_r (n-h+1)^r$.

(4) Cfr. W. K. Clifford, *On the classification of loci.* « Philos. Trans. of the Royal Society », part II, 663–681 (1878) = « Math. Papers », 305–331 (London 1882).

(5) È facile vedere che le ∞^2 coniche le cui polarità trasformano in sè una data conica irriducibile, Φ_2, sono quelle bitangenti a Φ_2 e tali che, insieme a Φ_2, separano armonicamente le due coniche degeneri del fascio che determinano con Φ_2.

Del pari, le ∞^2 quadriche di S_3 trasformanti in sè una cubica sghemba irriducibile, Φ_3, si hanno tutte nel modo seguente. Denotando con A, B due punti distinti di Φ_3, con a, b le relative tangenti, con α, β i relativi piani osculatori, si condideri il fascio di quadriche passanti per a, b e tangenti ad α, β rispettivamente in A, B. Questo fascio contiene la quadrica degenere $\alpha\beta$, un'altra quadrica spezzata in due piani, ed una quadrica passante per Φ_3; la quadrica del fascio formante dopo queste tre birapporto $-1/3$ soddisfa alla condizione voluta.

(6) Cfr. S. Roberts, *Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables.* « Journ. f. Math. », *67*, 266–278 (1867), e K. Th. Vahlen, *Ueber den Grad der Eliminationresultante eines Gleichungssystems.* Ibid., *113*, 348–352 (1894).

Notiamo che si soddisfa nel modo più generale alle suddette equazioni lineari esprimendo le (ξ) come funzioni lineari ed omogenee di $r_h - r + 1$ parametri $(\lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{r_h - r})$. Con ciò, la (1) diventa

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{r_h - r} f_{r_h - r},$$

dove le $f_0, \cdots, f_{r_h - r}$ sono $r_h - r + 1$ forme di grado n nelle (x) fra loro linearmente indipendenti, e le (3) si riducono ad r_h equazioni lineari nelle (λ), per la cui coesistenza è necessario e sufficiente che si annullino tutti i minori di ordine $r_h - r + 1$ della matrice ad r_h righe ed $r_h - r + 1$ colonne:

$$(4) \quad \left| \{ f_j \}_{(x)}^{(i)} \right| \quad (j = 0, 1, \cdots, r_h - r \ , \ i_0 + i_1 + \cdots + i_r = h - 1).$$

Le equazioni che così si hanno nelle (x) possegono in generale $(r_h)_r (n - h + 1)^r$ soluzioni distinte, ciascuna delle quali corrisponde ad una soluzione $(x \mid \xi)$ del sistema dianzi considerato.

Se ora, in particolare, la forma f_0 ha un punto P di molteplicità $k \geq h$, tutte le forme nella prima colonna della matrice (4) hanno in P molteplicità $\geq k - h + 1$; dunque P assorbe almeno $(k - h + 1)^r$ dei punti (x) in cui la matrice (4) ha caratteristica $\leq r_h - r$, e, si può vedere ponendo P in uno dei punti fondamentali delle coordinate, non ne assorbe in generale di più. Ciò prova che Φ_h *contiene il punto generico di* Φ_k *colla molteplicità* $(k - h + 1)^r$, com'è asserito dal teorema I.

3. Quest'ultimo risultato viene confermato nel caso $k = n$ dal seguente esempio, anche altrimenti istruttivo. Consideriamo r_h forme lineari generiche $\alpha_j(x)$ di S_r, e poniamo per abbreviare

$$\alpha_j^s = \frac{1}{s!} [\alpha_j(x)]^s \quad (j = 1, \cdots, r_h \, ; \, s = 1, 2, \cdots).$$

Osserviamo che in S_r non vi è alcuna ipersuperficie di classe $h - 1$ tangente agli r_h iperpiani $\alpha_j(x) = 0$, e quindi il determinante ad elementi costanti

$$\left| \{ \alpha_j^{h-1} \}_{(x)}^{(i)} \right| \quad (j = 1, \cdots, r_h \, ; \, i_0 + i_1 + \cdots + i_r = h - 1)$$

non si annulla. Prendiamo inoltre r_h forme lineari generiche $\omega_j = \omega_j(\lambda)$ in $r_h - r + 1$ parametri (λ), ed assumiamo

$$(5) \qquad f = \omega_1 \alpha_1^n + \omega_2 \alpha_2^n + \cdots + \omega_{r_h} \alpha_{r_h}^n,$$

sicchè le (3) ora diventano

$$\omega_1 \alpha_1^{n-h+1} \{ \alpha_1^{h-1} \}_{(x)}^{(i)} + \cdots + \omega_{r_h} \alpha_{r_h}^{n-h+1} \{ \alpha_{r_h}^{n-1} \}_{(x)}^{(i)} = 0.$$

In virtù dell'osservazione precedente, queste equazioni sono soddisfatte se, e solamente se,

$$\omega_1(\lambda)[\alpha_1(x)]^{n-h+1} = 0, \cdots, \omega_{r_h}(\lambda)[\alpha_{r_h}(x)]^{n-h+1} = 0.$$

Si ottengono tutte le soluzioni di quest'ultimo sistema coll'annullare contemporaneamente $r_h - r$ qualsiansi delle ω e le α di indici complementari, il che fornisce $(r_h)_r$ soluzioni nelle $(\lambda), (x)$. Ognuna di queste conduce ad una forma (5) avente molteplicità n nel rispettivo punto (x), onde le $(r_h)_r(n-h+1)^r$ forme (5) con punto h-plo si riducono a tali $(r_h)_r$ forme possedenti ciascuna un punto n-plo. Ne consegue che *ognuna di queste assorbe esattamente* $(n-h+1)^r$ *di quelle.*

4. In base ai nn. 1, 2, le forme f di S_r rappresentate in S_ϱ mediante punti della varietà Ψ_h sono quelle date dalla

$$f = (qx)^{n-h+1} g_{h-1}(x \mid \lambda), \tag{6}$$

dove, per abbreviare, si è posto

$$(qx) = q_0 x_0 + q_1 x_1 + \cdots + q_r x_r,$$

e $g_{h-1}(x \mid \lambda)$ denota una forma arbitraria di grado $h-1$ nelle (x) avente le $r_h(\lambda)$ quali coefficienti. Le equazioni parametriche della Ψ_h si ottengono pertanto sostituendo la (6) nelle (2), con che le (ξ) vengono espresse come forme dei gradi rispettivi $n-h+1$ ed 1 nelle due serie di parametri (q) e (λ).

L'ordine della Ψ_h uguaglia il numero delle soluzioni del sistema formato da queste ultime equazioni e da $r+r_h-1$ equazioni lineari a coefficienti costanti generici nelle (ξ), epperciò, in virtù di un risultato richiamato nel n. 2, *tale ordine vale* $(r+r_h-1)_r(n-h+1)^r$.

Notiamo che la più generale combinazione lineare a coefficienti costanti delle derivate parziali prime della forma (6), rispetto ai parametri omogenei (q) e (λ) da cui essa dipende, è data dalla

$$(qx)^{n-h} g_h(x \mid \mu), \tag{7}$$

dove

$$g_h(x \mid \mu) = \varphi_1(x) g_{h-1}(x \mid \lambda) + (qx)\varphi_{h-1}(x), \tag{8}$$

e le φ_1, φ_{h-1} sono due forme arbitrarie nelle (x) di gradi uguali ai rispettivi indici. Se $h \leqq n-1$, la (7) è una forma dello stesso tipo della (6), tranne il cambiamento di h in $h+1$; interpretato in S_ϱ, ciò fornisce la proprietà che Ψ_{h+1} *contiene la varietà degli spazi tangenti di* Ψ_h. Inoltre quest'ultima varietà *coincide* colla Ψ_{h+1} se, e soltanto se, una qualunque forma di grado h nelle (x) può venir espressa colla (8) mediante una scelta opportuna delle φ_1, φ_{h-1}, e dei parametri (q) e (λ). Ciò equivale a chiedere in quali casi ogni V^h_{r-1} di S_r contiene qualche S_{r-2}, ed è subito visto che questo accade

nei soli casi $r = 1, 2$ ed h arbitrario, od $r = 3$ ed $h = 2, 3$, oppure r arbitrario ed $h = 1$.

Se $h \leq n - 2$, si fissi un qualunque intero i soddisfacente alle $2 \leq i \leq n - h$, e si osservi che la più generale combinazione lineare a coefficienti costanti delle derivate parziali i-me della forma (6), rispetto ai parametri omogenei (q) e (λ) da cui essa dipende, è data dalla

$$(9) \qquad (qx)^{n-h-i+1} g_{h+i-1}(x \mid \mu),$$

dove

$$(10) \qquad g_{h+i-1}(x \mid \mu) = \varphi_i(x)\, g_{h-1}(x \mid \lambda) + (qx)\, \varphi_{h+i-2}(x),$$

e le $\varphi_i, \varphi_{h+i-2}$ sono due forme arbitrarie nelle (x) di gradi uguali ai rispettivi indici. La (9) è una forma dello stesso tipo della (6), tranne il cambiamento di h in $h + i$; interpretato in S_ϱ, ciò fornisce la proprietà che Ψ_{h+i} *contiene la varietà degli spazi i-osculatori di* Ψ_h. Inoltre, quest'ultima varietà *coincide* colla Ψ_{h+i} se, e soltanto se, una qualunque forma di grado $h + i - 1$ nelle (x) può venir espressa colla (10) mediante una scelta opportuna delle $\varphi_i, \varphi_{h+i-2}$, e dei parametri (q) e (λ). Ciò accade se, e soltanto se, $r = 1, 2$ ed h arbitrario, od $r = 3$ ed $h = i = 2$, oppure r, i arbitrari ed $h = 1$.

Abbiamo così dimostrato tutti i risultati enunciati nel teorema I, tranne quello concernente la molteplicità di Ψ_h per Ψ_k, il quale verrà stabilito nella Nota II (n. 10).

Geometria. — *Sui piani tripli birazionalmente identici.* Nota [1] di G. Pompilj, presentata dal Socio F. Enriques.

Studiando la rappresentazione algebrica dei piani tripli [2] feci osservare che come modello proiettivo dell'ente algebrico ∞^2 rappresentato su un assegnato piano triplo si può prendere la superficie F di equazione:

$$(1) \qquad z^3 + 3 p_{2m} z + q_{3m} = 0$$

dove p_{2m} e q_{3m} sono due polinomi in x ed y rispettivamente di grado $2m$ e $3m$.

Introdotto così questo *modello proiettivo*, che chiamerò *principale*, del piano triplo, nasce spontaneo il problema di determinare quali rapporti passino tra i modelli proiettivi principali di uno stesso piano triplo, o, più in generale, di due piani tripli birazionalmente identici [3]. Risolverò questo

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Ved. «Rend. Sem. Mat. R. Università di Roma», ser. IV, vol. 3, 1939.

(3) Nel n. 2 della presente Nota sarà precisato il significato della dizione: «piani tripli birazionalmente identici».

problema dimostrando che *due modelli proiettivi principali di due piani tripli birazionalmente identici sono l'uno il trasformato dell'altro mediante una conveniente trasformazione cremoniana spaziale* del tipo de Jonquières che muta in se stessa la stella delle rette per il punto O_z all'infinito dell'asse z.

1. Il gruppo J. – Benchè uno studio sui piani tripli, come del resto una qualunque ricerca di geometria algebrica, abbia un suo naturale campo di validità nel dominio delle trasformazioni birazionali, tuttavia, sia per la particolare natura delle questioni che si presentano sia per la maniera stessa con cui vengono trattate, accade che molte delle proprietà e degli enti che si incontrano in questa teoria risultano invarianti rispetto ad un gruppo più ristretto di trasformazioni birazionali; precisamente rispetto al gruppo delle trasformazioni cremoniane dello spazio ambiente che mutano in se stessa la stella di rette per il punto O_z all'infinito dell'asse z. Si tratta, evidentemente, di particolari trasformazioni del tipo di de Jonquières il cui sistema omaloidico è formato da ∞^3 monoidi con il vertice nel punto O_z.

Indicherò con la lettera J questo gruppo di trasformazioni cremoniane.

Due superficie che sono una la trasformata dell'altra con una operazione del gruppo J le chiamerò: *cremonianamente equivalenti in senso stretto.*

L'intima ragione dell'importanza che ha il gruppo J in questa teoria sarà messa in luce al n. 5; ma fin da ora voglio ricordare che tutte le trasformazioni sui modelli proiettivi principali, di cui mi sono servito nei precedenti lavori sui piani tripli, appartengono al gruppo J.

2. Piani tripli birazionalmente identici. – Dirò che due piani tripli sono *birazionalmente identici* quando tra i loro modelli proiettivi principali passa una corrispondenza birazionale che trasforma l'una nell'altra le due involuzioni razionali del terzo ordine che dànno luogo ai piani tripli.

Per chiarire questa definizione, si osservi che due piani tripli che non sono birazionalmente identici possono avere i due modelli principali birazionalmente equivalenti; basta pensare ad una superficie Φ con due involuzioni razionali del terzo ordine non mutate una nell'altra da una trasformazione birazionale della superficie Φ in sè (per esempio: superficie del 5° ordine con punto doppio e tacnodo); in tal caso, le due involuzioni dànno luogo a due piani tripli che non sono birazionalmente identici, eppure i due modelli proiettivi principali sono certamente equivalenti essendo i trasformati della stessa superficie Φ.

3. Segue dalla definizione precedente che le curve di diramazione di due piani tripli birazionalmente identici sono cremonianamente equivalenti, nel senso che ho già precisato in un'altra Nota[4]; la trasformazione

(4) Ved., G. Pompili, *Osservazioni sui piani tripli.* «Rend. R. I. Lombardo di Scienze e lettere», vol. LXXXIV, 1940-41, § I.

cremoniana si genera facendo corrispondere i punti, dei piani tripli, immagini di terne (delle involuzioni) omologhe nella corrispondenza birazionale tra i due modelli proiettivi principali.

4. Teorema dell'equivalenza cremoniana. - *I modelli proiettivi principali di due piani tripli birazionalmente identici sono cremonianamente equivalenti in senso stretto.*

Siano $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ i due modelli proiettivi principali dei due piani tripli birazionalmente identici e $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ le rispettive curve di diramazione. Per il n. 3 esisterà una trasformazione cremoniana δ del piano che trasforma $D^{(2)}$ in $D^{(1)}$; sia poi τ la trasformazione cremoniana dello spazio, associata a δ rispetto alla superficie $F^{(2)}$ (5); trasformando la $F^{(2)}$ con la τ si ottiene una superficie $\overline{F}^{(2)}$ che è il modello proiettivo principale di un piano triplo (birazionalmente identico ai due precedenti) che ha la stessa curva di diramazione del piano triplo il cui modello proiettivo principale è la superficie $F^{(1)}$.

Abbiamo così costruito due piani tripli birazionalmente identici, con la stessa curva di diramazione e tali che nella corrispondenza birazionale tra i due modelli proiettivi principali si corrispondono le terne (delle involuzioni) che hanno per immagine lo stesso punto del piano $z = 0$.

Siccome la trasformazione τ appartiene al gruppo J le due superficie $F^{(2)}$ ed $\overline{F}^{(2)}$ sono cremonianamente equivalenti in senso stretto e quindi per dimostrare il nostro teorema basta far vedere che sono tali anche le superficie $F^{(1)}$ ed $\overline{F}^{(2)}$.

Fissiamo sul piano $z = 0$ un punto P_0 di coordinate x_0, y_0; la retta r_0, per P_0 e per il punto O_z all'infinito dell'asse z, interseca (fuori di O_z) la superficie $F^{(1)}$ in tre punti P_1, P_2, P_3 di quote z_1, z_2, z_3 e la superficie $\overline{F}^{(2)}$ in tre punti $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ di quote $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$, $\overline{z}_3$. Supposto, come è lecito, che la corrispondenza birazionale tra le due superficie muti P_1 in $\overline{P}_1$, P_2 in $\overline{P}_2$, P_3 in $\overline{P}_3$, si può dire che se si fa descrivere alla retta r_0 un ciclo nella stella di centro O_z gli indici dei punti P_i e $\overline{P}_i$ subiscono le stesse sostituzioni.

Premesso questo, determiniamo l'equazione della proiettività, sulla retta r_0, che porta ordinatamente il punto $\overline{P}_i$ nel punto P_i ($i = 1, 2, 3$); l'esistenza e l'unicità di questa proiettività viene assicurata dal teorema di Staud, ma a noi occorre dimostrare ancora che i coefficienti di questa trasformazione sono funzioni razionali delle coordinate x_0, y_0 del punto P_0.

Prendendo come ordinate sulla retta r_0 le quote z dei punti, l'equazione della proiettività in questione è

$$\overline{z} = \frac{\alpha_0 z + \beta_0}{\gamma_0 z + \delta_0}$$

(5) Ved. loc. cit. (4) n. 1.

dove si può porre:

$$\alpha_0 = \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{z}_1 z_1 & \bar{z}_1 & -1 \\ \bar{z}_2 z_2 & \bar{z}_2 & -1 \\ \bar{z}_3 z_3 & z_3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\beta_0 = \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{z}_1 z_1 & \bar{z}_1 & z_1 \\ \bar{z}_2 z_2 & \bar{z}_2 & z_2 \\ \bar{z}_3 z_3 & \bar{z}_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_0 = \left(\begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 3 \end{vmatrix} \right)^2$$

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{z}_1 z_1 & z_1 & -1 \\ \bar{z}_2 z_2 & z_2 & -1 \\ \bar{z}_3 z_3 & z_3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Si osservi ora che, quando la retta r_0 descrive un ciclo nella stella di centro O_z, i determinanti che compaiono nelle formule precedenti o rimangono tutti invariati o cambiano tutti di segno; ne segue che le quantità $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$, attenendosi come prodotto di due di questi determinanti, rimangono invariate, cioè sono funzioni univoche del punto P_0 e quindi funzioni razionali delle coordinate $x_0\, y_0$ del punto. Anzi, si tratta di funzioni intere, cioè di polinomi, perchè non possono avere poli al finito dato che le z_i e le $\bar{z}_i$, fino a che P_0 si conserva al finito, non diventano mai infinite e questo succede, di conseguenza, anche per i determinanti.

Si può quindi affermare che esistono quattro polinomi in x, y: $\mathbf{H}, \mathbf{U}, \mathbf{K}, \mathbf{V}$, non dipendenti dal punto P_0, tali che sussistano le identità:

$$\alpha_0 = \mathbf{H}(x_0, y_0)\ ,\ \beta_0 = \mathbf{U}(x_0, y_0)\ ,\ \gamma_0 = \mathbf{K}(x_0, y_0)\ ,\ \delta_0 = \mathbf{V}(x_0, y_0).$$

Questo ci assicura che la trasformazione cremoniana $\overline{T}$ (del gruppo J) la cui equazione è:

$$\overline{T} \equiv \left\{ \bar{x} = x, \bar{y} = y, \bar{z} = \frac{\mathbf{H}z + \mathbf{U}}{\mathbf{K}z + \mathbf{V}} \right\}$$

muta la $\overline{F}^{(2)}$ nella $F^{(1)}$; cioè le due superficie sono cremonianamente equivalenti in senso stretto; ed allora, per quanto si è detto, sono tali anche i due modelli proiettivi principali $F^{(2)}$ ed $F^{(1)}$, c. v. d.

È chiaro che la trasformazione cremoniana T (del gruppo J) definita dalla relazione:

$$T = \bar{T} \cdot \tau$$

trasforma direttamente la $F^{(2)}$ nella $F^{(1)}$.

5. L'ultimo teorema dimostrato ci spiega l'importanza del gruppo J; infatti, nelle varie questioni fin qui trattate, ci siamo serviti di trasformazioni birazionali per passare da un modello proiettivo principale ad un altro, rimanendo così sempre nel campo delle operazioni di J.

Matematica. — *Sulla convergenza in media della derivata del polinomio interpolante di Lagrange* [1]. Nota [2] di L. Merli, presentata dal Corrisp. E. Bompiani.

1. – Sia data una funzione $f(x)$ ed un sistema di punti $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ dell'intervallo $(-1, 1)$; la formula di interpolazione di Lagrange

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^{(n)}\right) l_k^{(n)}(x), \tag{1}$$

dove

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{W_n(x)}{\left(x - x_k^{(n)}\right) W_n'(x_k)}, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

e

$$W_n(x) = C \prod_{i=1}^{n} (x - x_i^{(n)}) \qquad (C \neq 0,\ C = \text{costante}),$$

dà il polinomio interpolante di grado $\leq n-1$ che nei punti $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ prende rispettivamente i valori $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \cdots, f(x_n^{(n)})$.

Sono noti [3] i classici teoremi di Faber e Bernstein i quali assicurano che non è possibile una scelta di ascisse $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ per le quali la (1) converga, per $n \to \infty$, verso $f(x)$ qualunque sia $f(x)$ continua. Di qui la necessità di imporre nuove condizioni alla funzione oltre alla semplice continuità e vari teoremi sono stati dati da L. Fejer, G. Szegö, J. Shohat, che risolvono tale questione. Nell'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia derivabile, si possono scegliere varie successioni di ascisse $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ per le quali si ha

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x) = f(x),$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 marzo 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) Cfr. per la bibliografia, per esempio: L. Merli, *Recenti risultati sulla convergenza dei polinomi di interpolazione di Lagrange e di Hermite*. « Giorn. Ist. It. Attuari », XI (1940), pp. 107–118.

uniformemente in $(-1, 1)$. Sorge allora il problema di approssimare, con la derivata del polinomio $L_n(x)$, la derivata della funzione $f(x)$; di vedere cioè quando si ha simultaneamente

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x), \tag{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} L_n'(x) = f'(x)\ (4).$$

Recentemente abbiamo dimostrato che se la $f(x)$ ha *derivata seconda* che soddisfa ad una condizione di Lipschitz di ordine $\alpha > 0$ e la successione $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ è data dagli zeri del polinomio di Tchebycheff $W_n(x) = \cos n\theta$, $x = \cos\theta$, le (2) sono verificate simultaneamente (5).

Nella presente Nota studieremo la convergenza in media di $L_n'(x)$ verso $f(x)$ e dimostreremo il *teorema*:

sia $f(x)$ una funzione definita in $(-1, 1)$, con derivata prima che ivi soddisfi ad una condizione di Lipschitz *di ordine $\alpha > \frac{1}{2}$; se $L_n(x)$ è il polinomio di interpolazione di* Lagrange *che interpola la funzione nei punti $x_k = \cos\theta_k$, con $\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$, si ha allora:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[f'(x) - L_n'(x)]^2\,dx = 0. \tag{3}$$

2. – Osserviamo in primo luogo, che se $P_m(x)$ è un polinomio di grado $\leq n-1$, si ha:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[f'(x) - L_n'(x)]^2\,dx \leq$$
$$\leq 2\int_{-1}^{1} [f'(x) - P_m'(x)]^2\,dx + 2\int_{-1}^{1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} [P_m(x_k) - f(x_k)]\, l_k'^{(n)} \right\}^2 dx,$$

e posto

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f'(x) - L_m'(x)| = \varepsilon_1, \qquad \max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - P_m(x)| = \varepsilon_2,$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[f'(x) - L_n'(x)]^2\,dx \leq 4\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left| \int_{-1}^{1} l_k'(x)\, l_j'(x)\,dx \right| \leq$$
$$\leq 4\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2\, n \sum_{k=1}^{n} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[l_k'^{(n)}(x)]^2\,dx.$$

(4) L'esistenza di polinomi che approssimano contemporaneamente una funzione $f(x)$ e la sua derivata $f'(x)$ risulta da un teorema di Jackson-Szegö, [G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Soc. Colloquium pubbl. » (1939), XXIII, p. 6]; partendo dalla formula di interpolazioue di Lagrange, con la sola conoscenza della successione $\left\{ f\left(x_k^{(n)}\right) \right\}$, se ne dà una costruzione effettiva [cfr. nota (5)].

(5) Cfr. L. Merli, *Sulla contemporanea approssimazione di una funzione e della sua derivata prima.* « Boll. Un. Mat. It. », ser. II, n. 2 (1941), pp. 116-125.

Nel nostro caso, trattandosi delle ascisse di Tchebycheff, cioè degli zeri del polinomio $W_n(x) = \cos n\theta$, $x = \cos\theta$, $l_k(x)$ è dato dalla seguente formula:

$$l_k(x) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} \cos r\theta_k \cos r\theta, \quad x = \cos\theta \ (6),$$

da cui derivando

$$l_k'(x) = \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} r \cos r\theta_k \frac{\operatorname{sen} r\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \quad x = \cos\theta,$$

per cui si ha:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,[l_k'^{(n)}(x)]^2\,dx = \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\pi}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1} rs\cos r\theta_k \cos s\theta_k \operatorname{sen} r\theta \operatorname{sen} s\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1} rs\cos r\theta_k \cos s\theta_k \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} r\theta \operatorname{sen} s\theta\, d\theta\right);$$

ed essendo:

$$\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} r\theta \operatorname{sen} s\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad s \pm r \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{per} \quad s = r, \end{cases}$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,l_k'^2(x)\,dx = \frac{2\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n-1} r^2\cos^2 r\theta_k\right) <$$

$$< \frac{2\pi}{n}\sum_{r=1}^{n-1} r^2 = \frac{2\pi}{n}\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{\pi}{3}(n-1)(2n-1) < K n^2,$$

con K costante assoluta.

Si ottiene così:

$$(4) \qquad \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,[f'(x) - L_n'(x)]^2\,dx < 4\varepsilon_1^2 + 2K\varepsilon_2^2 n^3.$$

Sia ora $f(x)$ continua con derivata che soddisfa ad una condizione di Lipschitz di ordine $\alpha = \frac{1}{2} + \mu$, $\mu > 0$. Per un teorema di Jackson-Szegö (7), ad ogni intero n si può associare un polinomio $P_n(x)$ di grado non superiore ad $n-1$, per il quale si ha:

(6) Cfr. L. Fejer, *Mechanische Quadraturen mit positiven Coteshen Zahlen.* (« Math. Zeitschrift », to. 57 (1933), pp. 287-309).

(7) G. Szegö, *Ortogonal polynomials.* « Amer. Math. Soc. Colloquium publ. », XXIII, p. 6.

$$\varepsilon_1 = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| < \frac{C}{(n-1)^{\frac{1}{2}+\mu}}$$

$$\varepsilon_2 = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f'(x) - P'_n(x)| < \frac{C}{(n-1)^{\frac{3}{2}+\mu}},$$

con C costante assoluta e tenuto conto della (4) si ha:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[f(x) - L'_n(x)]^2\,dx < \frac{4C^2}{(n-1)^{1+2\mu}} + \frac{2KCn^3}{(n-1)^{3+2\mu}},$$

da cui segue la (3), e quindi il teorema.

Matematica. — *Su una generalizzazione della convergenza in media.* Nota I di C. Birindelli, presentata [1] dal Corrisp. M. Picone.

1. Nel breve corso di questa trattazione vengono stabilite alcune estensioni di noti teoremi sulla convergenza in media di successioni di funzioni hilbertiane [2]. Ricordiamo che se E è un insieme misurabile, limitato o no, una funzione $f(X)$ è hilbertiana in E se essa è ivi quasi continua e di quadrato sommabile e che una successione di funzioni hilbertiane $f_1(X)$, $f_2(X), \cdots, f_n(X), \cdots$, in E, è convergente in media verso la $f(X)$ quando

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [f_n(X) - f(X)]^2\,dT = 0. \tag{1}$$

Sussiste il noto

I Teorema. – Date in E due successioni $f_n(X)$, $g_n(X)$ di funzioni hilbertiane convergenti in media verso le $f(X)$, $g(X)$, rispettivamente, allora, detto U un qualsiasi insieme misurabile contenuto in E, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_U f_n(X)\cdot g_n(X)\,dT = \int_U f(X)\cdot g(X)\,dT \tag{2}$$

uniformemente rispetto ad U. Ne seguono, in particolare, gli altri importanti.

II Teorema. – Detto U un qualsiasi insieme misurabile contenuto in E, se $f_n(X)$ converge in media verso $f(X)$ risulta $\lim_{n\to\infty} \int_U f_n^2(X)\,dT = \int_U f^2(X)\,dT$ uniformemente al variare di U in E.

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(2) Vedi M. Picone, *Teoria dell'integrazione Lebesguiana*. Dispense Universitarie S.A. (D.U.S.A), Città Universitaria, Roma, 1941-42.

III Teorema. – Sotto le condizioni del II teorema, se $g(X)$ è una funzione hilbertiana in E, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_U f_n(X)\cdot g(X)\cdot dT = \int_U f(X)\cdot g(X)\,dT$$

uniformemente rispetto ad U. Si ha poi, particolarizzando ancora, se E ha misura finita, nel qual caso si può porre $g(X) = 1$, il

IV Teorema. – Se l'insieme E ha misura finita ed U è un arbitrario insieme misurabile contenuto in E, dall'essere $f_n(X)$ convergente in media verso la $f(X)$ segue che

$$\lim_{n\to\infty}\int_U f_n(X)\,dT = \int_U f(X)\,dT$$

uniformemente rispetto ad U.

Dal III e IV teorema si ha, nel caso particolare in cui la successione $f_n(X)$ è la somma parziale di una serie $u_0(X) + u_1(X) + \cdots$, con $s_n(X) = f_n(X)$ funzione hilbertiana,

V Teorema. – Se $u_0(X) + u_1(X) + \cdots$ converge in media verso $f(X)$ e se $g(X)$ è una funzione hilbertiana in E, allora si ha

$$\int_U u_0(X)\cdot g(X)\,dT + \int_U u_1(X)\cdot g(X)\,dT + \cdots = \int_U f(X)\cdot g(X)\,dT$$

uniformemente al variare in E dell'insieme misurabile U.

VI Teorema. – Se $u_0(X) + u_1(X) + \cdots$ converge in media verso $f(X)$ nell'insieme E, supposto di misura finita, allora si ha

$$\int_U u_0(X)\,dT + \int_U u_1(X)\,dT + \cdots = \int_U f(X)\,dT$$

uniformemente al variare di U in E, vale a dire la serie $\sum_{\nu}^{0,\infty} u_\nu(X)$ convergente, in media in un insieme E di misura finita, si può integrare termine a termine.

2. Allo scopo di ottenere generali estensioni dei precedenti teoremi ricordati sopra, è necessario riassumere qui la definizione del « più generale procedimento di sommazione » (3).

Data una serie $\sum_{\nu}^{0,\infty} u_\nu$ od una successione s_ν a termini reali o complessi, sia assegnata, nell'insieme illimitato A di uno spazio lineare ad un qualsiasi

(3) M. Picone, *Sui metodi di sommazione delle serie.* « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, to. II, 1924–25.

numero di dimensioni, la successione di funzioni $\sigma_0(P), \sigma_1(P), \cdots, \sigma_k(P), \cdots$, reali, limitate, mai negative, verificanti le condizioni di essere, in ogni P di A,

$$\sigma_0(P) \geqq \sigma_1(P) \geqq \sigma_2(P) \geqq \cdots \geqq \sigma_k(P) \geqq \cdots, \quad \lim_{P \to \infty} \sigma_k(P) \text{ (su A)} = 1.$$

Posto

$$F_\nu(P) = \overset{0,\nu}{\sum_r} u_r \cdot \sigma_r(P) = \overset{0,\nu-1}{\sum_r} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P)) s_r + \sigma_\nu(P) \cdot s_\nu,$$

si indichi, per ogni P di A,

$$F'(P) = \lim'_{\nu \to \infty} F_\nu(P) \quad ; \quad F''(P) = \lim''_{\nu \to \infty} F_\nu(P).$$

Detti minima e massima somma, su A, della serie $\overset{0,\infty}{\sum_\nu} u_\nu$ o della successione s_ν, rispettivamente, i seguenti limiti

$$\lim'_{P \to \infty} F'(P) \text{ (su A)} \quad , \quad \lim''_{P \to \infty} F''(P) \text{ (su A)},$$

la serie o la successione si dice sommabile o non sommabile, su A, secondochè questi due limiti coincidono o no. Nel caso della sommabilità, il valore comune dei due limiti si dirà la somma generalizzata su A, della serie o della successione. Secondochè la somma generalizzata è finita od infinita, la serie o la successione si dirà convergente o divergente, su A.

È notevole il fatto di essere sempre l'intervallo di indeterminazione del « più generale procedimento di sommazione » contenuto nell'intervallo di indeterminazione del procedimento ordinario di sommazione.

In particolare, se esiste la somma ordinaria s esiste pure quella generalizzata e coincide con s (ciò vale naturalmente anche nel caso della divergenza).

È necessario accennare a qualche ulteriore approfondimento sulle proprietà del « più generale procedimento di sommazione ».

Siano H e K due arbitrari insiemi di punti di due spazi che possono anche essere di dimensioni diverse, e, variando il punto X in H e il punto Y in K, sia definita la funzione $\varphi(X, Y)$ e si supponga che H sia illimitato. La $\varphi(X, Y)$ sia supposta, provvisoriamente, reale. Diremo che al tendere di X all'infinito su H la funzione $\varphi(X, Y)$ si comporta uniformemente in K rispetto al suo massimo limite $\varphi''(Y)$, oppure che la relazione di limite $\lim''_{X \to \infty} \varphi(X, Y) \text{ (su H)} = \varphi''(Y)$ è uniforme in K, se:

1) è sempre in K o $\varphi''(Y)$ finita, o $\varphi''(Y) = +\infty$, oppure $\varphi''(Y) = -\infty$;

2) nel primo caso, comunque si assegnino due numeri positivi ε ed R, è sempre possibile:

a) determinare un numero positivo R_ε tale che, per X in H e $\overline{OX} \geqq R_\varepsilon$ (O essendo l'origine dello spazio a cui appartiene H) riesca

$$\varphi(X, Y) \leqq \varphi''(Y) + \varepsilon, \quad \text{ovunque si prenda il punto Y in K,}$$

b) trovare un punto $X_{\varepsilon R}$ di H per cui $\overline{OX}_{\varepsilon R} \geqq R$ ed inoltre

$$\varphi(X_{\varepsilon R}, Y) \geqq \varphi''(Y) - \varepsilon, \quad \text{ovunque si prenda il punto Y in K,}$$

nel secondo caso, comunque si assegnino due numeri positivi M ed R, è sempre possibile trovare un punto X_{MR} di H, per cui $\overline{OX}_{MR} \geqq R$ ed inoltre

$$\varphi(X_{MR}, Y) \geqq M, \quad \text{ovunque si prenda il punto Y in K,}$$

nel terzo caso, comunque si assegni il numero positivo M, è sempre possibile determinarne un altro R_M tale che per X in H e $OX \geqq R_M$, risulti:

$$\varphi(X, Y) \leqq -M, \quad \text{ovunque si prenda il punto Y in K.}$$

In modo analogo si pone la definizione di comportamento uniforme, in K, della $\varphi(X, Y)$, al tendere di X all'infinito su H, rispetto al suo minimo limite $\varphi'(Y)$.

Diremo poi che al tendere di X all'infinito su H la funzione si comporta uniformemente in K se essa si comporta uniformemente tanto rispetto al suo massimo limite quanto rispetto al suo minimo limite.

La funzione $\varphi(X, Y) = \Psi(X, Y) + i\chi(X, Y)$ sia ora complessa. Diremo che essa, al tendere di X all'infinito su H, si comporta uniformemente in K rispetto al suo massimo limite (rispetto al suo minimo limite) se in tal modo si comportano tanto la parte reale Ψ quanto il coefficiente χ dell'immaginario. Sussiste il

Teorema della continuità. – Per ogni punto X, comunque fissato in H, la $\varphi(X, Y)$ sia funzione di Y, continua nel punto Y_0, di K e del suo derivato: se, al tendere di X all'infinito su H, la $\varphi(X, Y)$ ha un massimo limite $\varphi''(Y)$, [un minimo limite $\varphi'(Y)$] ovunque finito in K, e inoltre essa si comporta ivi uniformemente rispetto al suo massimo limite (rispetto al suo minimo limite), questo limite è pur esso funzione di Y continua nel punto Y_0.

Premesso ciò, torniamo al « più generale procedimento di sommazione », nell'ipotesi che i termini della $\sum_{\nu}^{0,\infty} u_\nu(Q)$ o della $s_\nu(Q)$ siano funzioni di un punto Q, simultaneamente definite in un certo insieme B di uno spazio ad un certo numero arbitrario di dimensioni.

Porremo

$$F_\nu(P, Q) = u_0(Q)\sigma_0(P) + u_1(Q)\sigma_1(P) + \cdots + u_\nu(Q)\sigma_\nu(P),$$

ovvero

$$F_\nu(P, Q) = \sum_{r}^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P)) s_r(Q) + \sigma_\nu(P) \cdot s_\nu(Q),$$

e

$$(a)\quad \lim'_{\nu\to\infty} F_\nu(P,Q) = F'(P,Q)\ ,\quad \lim''_{\nu\to\infty} F_\nu(P,Q) = F''(P,Q)\,,$$

$$(b)\quad \lim'_{P\to\infty} F'(P,Q)(\text{su A}) = u'(Q)\ ,\quad \lim''_{P\to\infty} F''(P,Q)(\text{su A}) = u''(Q)\,.$$

Il procedimento di sommazione della serie o della successione si dirà uniforme in B se:

1) comunque si fissi il punto P in A, le relazioni di limite (a) sono entrambe uniformi in B,

2) le ulteriori relazioni di limite (b) sono entrambe, pur esse, uniformi in B.

Dal precedente teorema si ha il seguente

Teorema della continuità per il « più generale procedimento di sommazione » per le serie e successioni di funzioni.

La minima e la massima somma $u'(Q)$ e $u''(Q)$ siano sempre finite in B, mentre i termini delle serie, o le $s_\nu(Q)$, sono funzioni continue nel punto Q_0 di B e del suo derivato. Se il procedimento di sommazione è uniforme in B, entrambe le somme $u'(Q)$ e $u''(Q)$ risultano, esse pure, continue in Q_0.

3. Sia E un insieme misurabile, limitato o no, ed in E sian date due funzioni $f(X)$, $g(X)$, hilbertiane in E, oltre a due successioni $f_\nu(X)$, $g_\nu(X)$ di funzioni pure hilbertiane in E.

Vale la seguente generalizzazione del I Teorema:

I Teorema generalizzato. – Se delle due successioni $\int_E [f_\nu(X)]^2\,dT$, $\int_E [g_\nu(X)]^2\,dT$, una almeno è limitata, sup.te, mentre le due

$$\sqrt{\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2\,dT}\quad ,\quad \sqrt{\int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2\,dT}\,,$$

sono sommabili secondo un « più generale procedimento di sommazione » con le somme generalizzate entrambe nulle, se cioè, come diremo d'ora innanzi, le due successioni $f_\nu(X)$, $g_\nu(X)$ convergono in media, in E, secondo il « più generale procedimento di sommazione » assegnato e verso le $f(X)$, $g(X)$, rispettivamente, allora la successione

$$\int_U f_\nu(X)\cdot g_\nu(X)\,dT$$

è sommabile secondo lo stesso « più generale procedimento di sommazione » verso la somma generalizzata

$$\int_U f(X)\cdot g(X)\cdot dT,$$

se U indica un arbitrario insieme misurabile contenuto in E.

Per la dimostrazione si osservi anzi tutto che per la non negatività delle quantità $\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P)$, $\sigma_\nu(P)$, risulta

$$\sum_r^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P)) \int_U |f_r(X)\cdot g_r(X) - f(X)\cdot g(X)|\, dT +$$

$$+ \sigma_\nu(P) \int_U |f_\nu(X)\cdot g_\nu(X) - f(X)\cdot g(X)|\, dT \leq$$

$$\leq \sum_r^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P)) \sqrt{\int_U [f_r(X) - f(X)]^2\, dT \cdot \int_U (g_r(X))^2\, dT} +$$

$$+ \sigma_\nu(P)\cdot \sqrt{\int_U [f_\nu(X) - f(X)]^2\, dT \cdot \int_U [g_\nu(X)]^2\, dT} + \sum_r^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P))\cdot$$

$$\cdot \sqrt{\int_U [f(X)]^2\, dT \cdot \int_U [g_r(X) - g(X)]^2\, dT} + \sigma_\nu(P)\cdot \sqrt{\int_U [f(X)]^2\, dT \cdot \int_U [g_\nu(X) - g(X)]^2\, dT}.$$

Poichè si è supposto che ad esempio la $\int_E [g_\nu(X)]^2\, dT$, per essere limitata, sia minore, per ogni ν, di un L^2 opportuno (scelto opportunamente grande affinchè sia anche $\int_E [f(X)]^2\, dT < L^2$) risulta, sostituendo E ad U nel secondo membro,

$$\left| \sum_r^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P)) \int_U f_r(X)\cdot g_r(X)\cdot dT + \sigma_\nu(P) \int_U f_\nu(X)\cdot g_\nu(X)\, dT - \sigma_0(P)\cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_U f(X)\cdot g(X)\cdot dT \right| \leq L\cdot \left\{ \sum_r^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P))\cdot \sqrt{\int_E [f_r(X) - f(X)]^2\, dT} + \sigma_\nu(P)\cdot \right.$$

$$\cdot \left. \sqrt{\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2\, dT} + \sum_r^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P))\cdot \sqrt{\int_E [g_r(X) - g(X)]^2\, dT} + \right.$$

$$\left. + \sigma_\nu(P)\cdot \sqrt{\int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2\, dT} \right\}.$$

Passando al limite per $\nu \to \infty$, in P di A, si ha

$$\left.\begin{aligned}&\lim''_{\nu\to\infty}\left[\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-\sigma_{r+1}(P))\int_U f_r(X)\cdot g_r(X)\,dT+\sigma_\nu(P)\int_U f_\nu(X)\,g_\nu(X)\,dT\right]-\\&\qquad-\sigma_0(P)\int_U f(X)\,g(X)\,dT\\&\sigma_0(P)\int_U f(X)\cdot g(X)\,dT-\lim''_{\nu\to\infty}\left[\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-\sigma_{r+1}(P))\int_U f_r(X)\cdot g_r(X)\,dT+\right.\\&\qquad\left.+\sigma_\nu(P)\int_U f_\nu(X)\,g_\nu(X)\,dT\right.\end{aligned}\right\}\leq$$

$$\leq L\cdot\left[\lim'_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-\sigma_{r+1}(P))\cdot\sqrt{\int_E[f_r(X)-f(X)]^2\,dT}+\right.\right.$$

$$+\sigma_\nu(P)\sqrt{\int_E[f_\nu(X)-f(X)]^2\,dT}\Big\}+\lim''_{\nu\to\infty}\Big\{\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-\sigma_{r+1}(P))\sqrt{\int_E[g_r(X)-g(X)]^2dT}+$$

$$\left.\left.+\sigma_\nu(P)\cdot\sqrt{\int_E[g_\nu(X)-g(X)]^2\,dT}\right\}\right],$$

e con un ulteriore passaggio al limite, per $P \to \infty$ su A, essendo $\lim_{P\to\infty}\sigma_0(P)=1$,

$$\left.\begin{aligned}&\lim''_{P\to\infty}\lim''_{\nu\to\infty}\left[\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-\sigma_{r+1}(P))\int_U f_r(X)\,g_r(X)\,dT+\sigma_\nu(P)\int_U f_\nu(X)\,g_\nu(X)\,dT\right]-\\&\qquad-\int_U f(X)\,g(X)\,dT\\&\int_U f(X)g(X)\,dT-\lim''_{P\to\infty}\lim''_{\nu\to\infty}\left[\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-\sigma_{r+1}(P))\int_U f_r(X)\cdot g_r(X)\,dT+\right.\\&\qquad\left.+\sigma_\nu(P)\int_U f_\nu(X)\,g_\nu(X)\,dT\right]\end{aligned}\right\}\leq$$

$$\leq L\cdot\left[\lim''_{P\to\infty}\lim''_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-\sigma_{r+1}(P))\cdot\sqrt{\int_E[f_r(X)-f(X)]^2\,dT}+\right.\right.$$

$$+\sigma_\nu(P)\sqrt{\int_E[f_\nu(X)-f(X)]^2\,dT}\Big\}+\lim''_{P\to\infty}\lim''_{\nu\to\infty}\Big\{\sum_{r}^{0,\nu-1}(\sigma_r(P)-$$

$$\left.\left.-\sigma_{r+1}(P))\sqrt{\int_E[g_r(X)-g(X)]^2\,dT}+\sigma_\nu(P)\cdot\sqrt{\int_E[g_\nu(X)-g(X)]^2\,dT}\right\}\right]=0.$$

Ne segue la

$$\lim_{P\to\infty}{}'' \lim_{\nu\to\infty}{}'' \left[\sum_{r}^{0,\nu-1} (\sigma_r(P) - \sigma_{r+1}(P)) \int_U f_r(X)\, g_r(X)\, dT + \right.$$

$$\left. + \sigma_r(P) \int_U f_\nu(X) \cdot g_\nu(X)\, dT \right] = \int_U f(X) \cdot g(X)\, dT ,$$

e in modo analogo si vede che altrettanto avviene per la minima somma.

Osservazione. - Segue dalle precedenti deduzioni che se, per $U < E$, le $\sqrt{\int_U [f_\nu(X) - f(X)]^2\, dT}$, $\sqrt{\int_U [g_\nu(X) - g(X)]^2\, dT}$ sono tali che la loro sommazione generalizzata, con somma zero, secondo il dato « più generale procedimento di sommazione » si comporta uniformemente rispetto agli U di E, ne segue allora che il « più generale procedimento di sommazione » è uniforme, rispetto agli U di E, nel caso della successione

$$\int_U f_\nu(X) \cdot g_\nu(X) \cdot dT.$$

Come caso particolare, si ottiene la corrispondente generalizzazione del II Teorema, semprechè $\int_E [f_\nu(X)]^2\, dT$ sia limitata. Questa condizione, come si vede subito, non è invece necessaria per la generalizzazione del III Teorema e del IV Teorema, e altrettanto avviene, di conseguenza, per la generalizzazione del V Teorema e di quello VI.

Matematica. — *Un'osservazione sui sistemi di equazioni algebriche.* Nota [1] di G. Scorza-Dragoni, presentata dal Socio M. Picone.

In questa mia mi propongo di dare ancora una dimostrazione del seguente noto risultato:

A) *Se i polinomi* $f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n)$, *a coefficienti reali, nelle variabili reali* $x_1, \cdots, x_n$, *soddisfanno alle condizioni*

$$(1) \quad \begin{cases} f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \cdots, x_n) \leq 0 & (i = 1, \cdots, n), \\ f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, \ 1, x_{i+1}, \cdots, x_n) \geq 0 & (i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

sulle faccie $(n-1)$*-dimensionali del cubo n-dimensionale*

$$C: \quad -1 \leq x_1 \leq 1, \cdots, \quad -1 \leq x_n \leq 1,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

il sistema

$$(2) \qquad f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

ammette almeno una soluzione in C [2].

La dimostrazione qui esposta riconduce il teorema *A*) al seguente lemma di Birkhoff-Kellogg, che enuncio nella forma più adatta all'applicazione attuale:

B) *I polinomi*

$$g_i(x_1, \cdots, x_n \mid \lambda) \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

a coefficienti reali, nelle $n + 1$ *variabili reali* $x_1, \cdots, x_n, \lambda$, *si annullino simultaneamente nel punto*

$$(3) \qquad x_1 = \cdots = x_n = \lambda = 0$$

e sia ivi diverso da zero il determinante jacobiano

$$(4) \qquad \frac{\partial(g_1, \cdots, g_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)};$$

allora il sistema

$$(5) \qquad g_1(x_1, \cdots, x_n \mid \lambda) = 0, \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_n \mid \lambda) = 0$$

ammette, sulle faccie del parallelepipedo $(n + 1)$*-dimensionale*

$$I: \quad -1 \leq x_1 \leq 1, \cdots, \quad -1 \leq x_n \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

almeno una soluzione diversa da quella fornita dalle (3) [3].

La deduzione di *A*) da *B*) è presso che immediata. Ed è anche facile intuire *a priori* la possibilità di una simile deduzione. Infatti Birkhoff e Kellogg si sono serviti del teorema *B*), nelle loro ricerche sui punti uniti in una trasformazione continua di uno spazio funzionale, per dimostrare il teorema di Brouwer [4] sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni

(2) L. Brusotti, *Dimostrazione di un lemma algebrico utile in questioni d'analisi* [« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. XI (1942), pp. 211–215].

Altre dimostrazioni del teorema *A*), con le f_i funzioni continue, si costruiscono facilmente a partire dai ragionamenti svolti da L. E. J. Brouwer in *Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff* [« Journal für die reine und angewandte Mathematik », vol. 142 (1913), pp. 146–152; se ne vedano in particolare le pp. 150–152; si veda anche la p. 253 del vol. 153 (1924)] e da H. Lebesgue in *Sur les correspondances entre les points des deux espaces* [« Fundamenta Mathematicae », vol. 2 (1921), pp. 256-285; se ne vedano in particolare i nn. 3-8 e 14; per un primo schizzo della dimostrazione si vedano anche le pp. 166–168 del vol. 70 (1911) dei « Mathematische Annalen »]. Ma la prima dimostrazione del teorema *A*), con le f_i funzioni continue, è stata data da Brouwer in *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* [« Mathematische Annalen », vol. 70 (1911), pp. 161–165].

(3) G. D. Birkhoff e O. D. Kellogg, *Invariant points in function space* [« Transactions of the American Mathematical Society », vol. 23 (1922), pp. 96–115], pp. 98–99.

(4) Si vegga la nota a pie' di p. 100 della Memoria di Birkhoff–Kellogg ora citata e L. E. J. Brouwer, *Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* [« Mathematische Annalen », to. 71 (1912), pp. 97–115], p. 115.

continue in sè, o in sue parti, dell'elemento a n dimensioni [5]. D'altra parte, una volta stabilito il teorema A) nel caso dei polinomi, è evidente che esso vale anche nel caso delle funzioni continue, se le disuguaglianze analoghe alle (1) sono soddisfatte nel senso forte [6]. Dopo di che si riconosce subito che quest'ultima restrizione è inessenziale [7]. Ma in queste ipotesi il teorema A) è equivalente proprio al teorema di Brouwer ricordato [e l'osservazione è di Miranda [8]]; ecc.

Come avrò occasione di chiarire in seguito, la dimostrazione attuale ne richiama un'altra, che per il teorema A) ho indicata di recente [9], imitandone una dello Zwirner [10].

1. Dimostrazione. – Per il nostro scopo, basta particolarizzare le funzioni g_i, che compaiono nel teorema B), ponendo

$$g_i(x_1, \cdots, x_n \mid \lambda) = (1 - \lambda)\, x_i + \lambda f_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Fatte queste posizioni, se $\lambda = 0$, il sistema (5) ammette soltanto la soluzione data dalle (3), e il determinante jacobiano (4) vale 1 nel punto $x_1 = \cdots = x_n = \lambda = 0$. Epperò il sistema (5) ammette almeno un'altra soluzione $x_1^0, \cdots, x_n^0, \lambda^0$, tale che il punto $P_0 \equiv (x_1^0, \cdots, x_n^0, \lambda^0)$ appartenga alle faccie (n — dimensionali) di I.

Il punto P_0 non può evidentemente appartenere all'iperpiano $\lambda = 0$; cioè non può essere evidentemente $\lambda^0 = 0$. Ma non può essere nemmeno $\lambda^0 > 0$ e < 1; perchè dalle (1) segue facilmente

$$(6) \qquad \begin{cases} 1 - \lambda + \lambda f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, \quad 1, x_{i+1}, \cdots, x_n) > 0, \\ \lambda - 1 + \lambda f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \cdots, x_n) < 0, \end{cases}$$

se $0 < \lambda < 1$, $-1 \leq x_1 \leq 1, \cdots, -1 \leq x_{i-1} \leq 1$, $-1 \leq x_{i+1} \leq 1, \cdots, -1 \leq x_n \leq 1$.

(5) Birkhoff e Kellogg dimostrano il teorema di Brouwer supponendo dapprima che la trasformazione sia rappresentabile mediante funzioni analitiche, anzi mediante polinomi; e poi deducono il caso che la trasformazione sia soltanto continua dal precedente, mediante un passaggio al limite [che sarebbe forse riuscito più semplice se avessero prima sostituito $f(x)$ con $kf(x)$, ove $0 < k < 1$; poi approssimato $kf(x)$ mediante $p(x)$; indi fatto tendere k ad 1 (mi servo dei simboli degli Autori citati)].

(6) L'osservazione è analoga a quella ricordata nella nota precedente. Peraltro essa è stata già fatta in modo esplicito da S. Cinquini in *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali ordinarie* [« Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. XIV (1940), pp. 157–170], nota (2) a pie' delle pp. 168–169.

(7) Cfr. C. Miranda, *Un'osservazione su un teorema di* Brouwer [« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », serie II, vol. III (1940–41), pp. 5-7].

(8) Loc. cit. nota prec.

(9) G. Scorza Dragoni, *Un'osservazione sulle radici di un sistema di equazioni non lineari* [in corso di stampa nei « Rendiconti del Seminario Matematico di Padova »].

(10) G. Zwirner, *Sulle radici dei sistemi di equazioni non lineari* [in corso di stampa nei « Rendiconti del Seminario Matematico di Padova »].

Quindi deve essere $\lambda^0 = 1$. Ma allora è (anche $|x_1^0| \leq 1, \cdots, |x_n^0| \leq 1$ e)

$$f_i(x_1^0, \cdots, x_n^0) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

come appunto si voleva.

2. Osservazione. – Nella mia Nota citata, escluso il caso banale che le f_i si annullassero simultaneamente in un punto del contorno di C, io deducevo dalle (1) che il sistema di funzioni $f_1, \cdots, f_n$ sul contorno (orientato) di C aveva la stessa caratteristica o indice di Kronecker del sistema di funzioni $x_1, \cdots, x_n$ [e quindi aveva palesemente una caratteristica non nulla, cioè il sistema (2) ammetteva soluzioni in C]. E ciò ottenevo appunto facendo osservare, sia pure senza scriverle esplicitamente, che le (6), in virtù del teorema di Poincaré–Bohl, permettono di dire che i due sistemi di funzioni

$$g_i(x_1, \cdots, x_n \mid 0) = x_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

e

$$g_i(x_1, \cdots, x_n \mid 1) = f_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

hanno lo stesso indice di Kronecker sul contorno orientato di C. Questa dimostrazione e quella attuale sono concettualmente affini, per non dire coincidenti.

Matematica. — *Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche* [1]. Nota I [2] di José Sebastião e Silva, presentata dal Corrisp. M. Picone.

1. V'è ancora chi concepisce la Matematica come un'attività spirituale diretta soprattutto a fini estetici, contemplativi, senza alcun legame con la vita materiale. È tuttavia un fatto generalmente riconosciuto che, isolata a lungo nel mondo delle pure idee platoniche, la Matematica tende a esaurirsi in un groviglio di cogitazioni morbose. Essa deve, al contrario, rendersi sempre più atta a risolvere le questioni, talvolta difficilissime, che le sono poste dalla Tecnica, e, a questo scopo, non deve neanche racchiudersi in un basso e miope utilitarismo, giacchè il progresso scientifico nasce da un'equilibrata cooperazione della *teoria* con la *pratica*, e non sarebbe possibile senza uno sforzo di crescente astrazione.

Ora l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo ha, per l'appunto, l'ufficio pregevolissimo di stabilire un contatto fecondante tra la Matematica e la Tecnica, favorendone i reciproci influssi. In particolare, l'attività svolta in

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. L'autore fruisce di una borsa di studio dell'« Instituto para a Alta Cultura » di Lisbona, presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

questo Istituto, come in altri dello stesso genere, ha messo in piena luce questo fatto rilevante: che i matematici hanno troppo trascurato le questioni di calcolo numerico, accontentandosi, in genere, di *eleganti* dimostrazioni di esistenza, che non forniscono nessun metodo di costruzione eseguibile nella pratica.

Uno dei generi di questioni che attendono tuttora indagini accurate, tendenti a diminuire la fatica dei calcolatori, è precisamente quello della risoluzione di equazioni algebriche. Una parte importante dei problemi che si presentano all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo (specialmente questioni riguardanti l'integrazione di equazioni lineari ordinarie e a derivate parziali) richiedono, in ultima analisi, il calcolo delle radici di equazioni algebriche di grado elevato. Così, per esempio, lo studio di una rete di circuiti elettrici è sostanzialmente legato alla risoluzione di un'equazione algebrica, detta l'*equazione caratteristica* della rete stessa, ed il fatto più notevole è che, di tale equazione, vanno determinate *tutte le radici*, *reali* e *complesse* (3).

I metodi tradizionali che fanno dipendere il calcolo delle radici complesse di un'equazione algebrica dall'approssimazione delle radici reali di un'equazione risolvente, valgono soltanto in teoria: la pratica li ha assolutamente condannati. Un metodo che, invece, si è dimostrato particolarmente utile in tale caso è il cosidetto *metodo di Gräffe*, il quale, però, richiede ancora perfezionamenti, soprattutto in quel che riguarda la determinazione degli argomenti e la valutazione degli errori. La presente Nota tende, precisamente, ad introdurre alcuni di questi perfezionamenti.

2. Per la perfetta intelligenza di ciò che segue, è conveniente fare qui un'esposizione riassuntiva del metodo di Gräffe, nella sua forma originale.

Supponiamo data un'equazione

$$F(x) \equiv x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

i cui coefficienti siano numeri complessi qualsivogliano. Le radici di quest'equazione si trovano, naturalmente, distribuite in gruppi di radici equimodulari; più precisamente: vi sarà un certo numero ν_1 di radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\nu_1}$ di modulo ρ_1 massimo; un certo numero ν_2 di radici $\alpha_{\nu_1+1}, \alpha_{\nu_1+2}, \cdots, \alpha_{\nu_1+\nu_2}$ di modulo ρ_2 immediatamente inferiore a ρ_1; $\cdots$; un certo numero ν_r di radici $\alpha_{n-\nu_r-1}, \alpha_{n-\nu_r-2}, \cdots, \alpha_n$ di modulo ρ_r minimo. Per maggiore comodità di esposizione poniamo ancora $m_1 = \nu_1, m_2 = \nu_1 + \nu_2, \cdots, m_r = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r = n$.

In particolare, può avvenire che le radici abbiano tutte moduli distinti, ed allora sarà $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_r = 1, r = n$. Ciò posto, sia

$$F_p(x) = x^n + A_{1,p} + \cdots + A_{n-1,p} x + A_{n,p} = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots)$$

(3) V. Aldo Ghizzetti, *La trasformazione di Laplace ed il calcolo simbolico degli elettrotecnici*. Zanichelli, Bologna, 1943, p. 136.

l'equazione che ha come radici le potenze $\alpha_1^{2^p}, \alpha_2^{2^p}, \cdots, \alpha_n^{2^p}$ delle radici dell'equazione $F(x) = 0$, essendo naturalmente $F_0(x) = F(x)$. Il passaggio da ciascuna di queste equazioni $F_p(x) = 0$, all'equazione successiva $F_{p+1}(x) = 0$, si può effettuare secondo le note formule di ricorrenza

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} -A_{1,p+1} = A_{1,p}^2 - 2A_{2,p} \\ A_{2,p+1} = A_{2,p}^2 - 2A_{1,p}A_{3,p} + 2A_{4,p} \\ -A_{3,p+1} = A_{3,p}^2 - 2A_{2,p}A_{4,p} + 2A_{1,p}A_{5,p} - 2A_{p,6} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^n A_{n,p+1} = A_{n,p}^2 \end{array}\right.$$

Ora, è da osservare che ciascuno dei coefficienti $A_{k,p}$, moltiplicato per $(-1)^k$, non è altro che la somma di tutti i possibili prodotti dei numeri $\alpha_1^{2^p}, \alpha_2^{2^p}, \cdots, \alpha_n^{2^p}$, presi a k a k, senza ripetizione ($k = 1, 2, \cdots, n$). Possiamo allora scrivere

$$(-1)^k A_{k,p} = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k)^{2^p} + \Sigma^* (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k})^{2^p},$$

dove il sommatorio Σ^* si estende a tutti i detti prodotti, escluso quello delle k prime radici: $(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k)^{2^p}$. E verrà dunque

$$\left|\sqrt[2^p]{A_{k,p}}\right| = |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| \cdot \left|\sqrt[2^p]{1 + \Sigma^* \left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}\right)^{2^p}}\right|.$$

Allora, se diamo a k soltanto i valori notevoli $m_1, m_2, \cdots, m_r$, i termini $\left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}\right)^{2^p}$, cui si riferisce il sommatorio Σ^*, avranno certamente modulo inferiore ad 1 (saranno tutt'al più uguali, in valore assoluto, a $\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|$), il che vuol dire che tenderanno a zero, quando p cresce indefinitamente. Quindi sarà

$$(2)\quad \lim_{p \to \infty} \left|\sqrt[2^p]{A_{k,p}}\right| = |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| \qquad (k = m_1, m_2, \cdots, m_r).$$

D'altra parte, se si tiene conto anche delle relazioni

$$|\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{m_i}| = \rho_1^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \cdots \rho_i^{\nu_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

verrà

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho_1 = \lim\limits_{p \to \infty} \left|\sqrt[\nu_1 2^p]{A_{\nu_1,p}}\right| \\ \rho_i = \lim\limits_{p \to \infty} \left|\sqrt[\nu_i 2^p]{A_{m_i,p} / A_{m_{i-1},p}}\right| \qquad (i = 2, 3, \cdots, r). \end{array}\right.$$

3. Le formule (3) consentono di calcolare, per approssimazioni successive, i moduli delle radici della $F(x) = 0$. Rimangono però da determinare gli argomenti (o le parti reali) delle stesse radici e, per questo complemento, sono stati suggeriti parecchi metodi, i quali si possono elencare nei seguenti gruppi (4).

A) *Metodi delle funzioni razionali.* – Supponiamo che l'equazione proposta $F(x) = 0$, abbia tutti i coefficienti reali. Allora, il quadrato del modulo di una sua radice complessa, α, è uguale al prodotto $\alpha\bar{\alpha}$ di questa radice per la coniugata, $\bar{\alpha}$. Se, d'altra parte, non esiste nessun'altra coppia di radici della $F(x) = 0$ che abbia lo stesso prodotto, un noto teorema di Lagrange ci insegna che la somma $\alpha + \bar{\alpha}$, ossia il doppio della parte reale delle due radici considerate, si può esprimere nel prodotto $\alpha\bar{\alpha}$, mediante una funzione razionale, i cui coefficienti sono a loro volta combinazioni razionali dei coefficienti dell'equazione proposta. Anzi, vi saranno infinite funzioni razionali, calcolabili in modi diversi, soddisfacenti le dette condizioni. In particolare, Encke, nei suoi complementi al metodo di Gräffe, ha indicato un modo di costruire siffatte funzioni.

Inconvenienti di questi metodi: 1) Per $n > 6$, la costruzione delle funzioni razionali diventa troppo pesante; 2) Il grado di approssimazione con cui siano stati ottenuti i moduli delle radici verrà in gran parte sciupato nel calcolo delle rispettive parti reali.

B) *Metodo particolare basato sulle formule di Vieta.* – Nei casi in cui l'equazione, avendo tutti i coefficienti reali, non abbia più di due coppie di radici complesse, i coseni degli argomenti di queste radici possono determinarsi in modo molto semplice – risolvendo tutt'al più un sistema di due equazioni lineari – se si tiene conto delle note formule di Vieta, che relazionano le radici con i coefficienti dell'equazione proposta. Se questa ha invece tre coppie di radici complesse, l'impiego delle dette formule, per il calcolo degli argomenti, conduce alla risoluzione di un'equazione di secondo grado; e, nei casi in cui vi siano più di tre coppie di radici complesse, il metodo va decisamente abbandonato.

C) *Metodo dello spezzamento della trasformata* (5). – Questo metodo, che è forse il più elegante, si basa sul fatto seguente, dimostrato rigorosamente da Rey Pastor: *Se m radici dell'equazione* $F(x) = 0$ *hanno moduli superiori*

(4) Per i dettagli, vedi M. Picone, *Lezioni di calcolo numerico*, « D. U. S. U. », Roma, Città Universitaria, 1940-41; e Runge und König, *Vorlesungen ueber numeriches Rechnen*. Berlin, 1924.

(5) Su questo perfezionamento del metodo di Gräffe, v.: J. Rey Pastor, *Lecciones de Algebra*, 2ª ed. 1932, p. 101; R. San Juan, *Complementos al metodo di Gräffe para a resolución de ecuaciones algebricas*. « Rev. Mat. Hisp. Amer. », to. 1, 1939; M. F. Carvallo, *Extension de la méthode de Gräffe*. « Ann. Fac. Sc. Toulouse. – Sc. Math. et Ph. », to. III, 1889, Paris, Gauthier-Villars.

a quelli di tutte le altre radici, allora, per un valore di p abbastanza elevato, la trasformata $F_p(x) = 0$ *si può spezzare nelle due equazioni*

$$x^m + A_{1,p}\, x^{m-1} + \cdots + A_{m-1,p}\, x + A_{m,p} = 0 \quad ,$$

$$A_{m,p}\, x^{n-m} + A_{m+1,p}\, x^{n-m-1} + \cdots + A_{n,p} = 0 ,$$

le radici delle quali costituiscono valori approssimati, rispettivamente, delle m radici di modulo massimo e delle $n - m$ *radici di modulo minimo, dell'equazione trasformata* $F_p(x) = 0$, *con un errore relativo che tende a zero quando p cresce indefinitamente.*

Quindi possiamo dire, secondo le convenzioni del numero precedente, che, per un conveniente valore di p, la trasformata $F_p(x) = 0$ si può spezzare in r equazioni ${}^1F_p(x) = 0$, ${}^2F_p(x) = 0, \cdots, {}^rF_p(x) = 0$, di gradi rispettivamente $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$.

Osserviamo intanto che, se l'equazione proposta ha tutti i coefficienti reali, e se questi sono forniti empiricamente, senza dover soddisfare nessuna condizione teorica relativa alla natura particolare del problema, la probabilità che vi siano due radici equimodulari *non coniugate*, è praticamente nulla. Del resto, se vi fossero alcune radici in tali condizioni, basterebbe un semplice spostamento dell'origine per distruggere l'eguaglianza dei loro moduli (6).

Ammettendo allora che tale coincidenza non sia verificata, ciascuna delle equazioni frammentarie sarà: o di primo grado (con una radice reale) o di secondo grado (con due radici complesse coniugate). Si possono quindi ottenere, in tale modo, valori approssimati delle radici $\alpha_1^{2^p}, \alpha_2^{2^p}, \cdots, \alpha_n^{2^p}$ della $F_p(x) = 0$. Per passare da queste alle radici dell'equazione proposta, si potrebbe adottare il metodo seguente, suggerito da Carvallo:

Scrivendo il polinomio $F_{p-1}(x)$ sotto la forma $F_{p-1}(x) \equiv \varphi_{p-1}(x^2) + x\psi_{p-1}(x^2)$, verrà, naturalmente, $\alpha_i^{2^{p-1}} = -\dfrac{\varphi_{p-1}(\alpha_i^{2^p})}{\psi_{p-1}(\alpha_i^{2^p})}$ $[i = 1, 2, \cdots, n]$, e così, utilizzando successivamente i polinomi $F_{p-1}(x), F_{p-2}(x), \cdots, F_1(x), F(x)$, si perviene finalmente alla determinazione approssimata delle $\alpha_1\ \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

Ma tale metodo presenta manifestamente uno degli inconvenienti che abbiamo indicato per i metodi del gruppo A): ogni radice della $F(x) = 0$ verrà determinata mediante una certa funzione razionale $\Phi_p(x)$ (la stessa per tutte le radici) e, perciò, l'approssimazione raggiunta nella prima parte della risoluzione potrà risultare grandemente ridotta in questi calcoli com-

(6) Anche per il caso della esistenza di radici equimodulari non coniugate, è stato indicato un modo di procedere. Bisogna tuttavia osservare che, tranne il caso delle radici coniugate, l'*uguaglianza rigorosa* dei moduli delle radici non ha propriamente un significato pratico, visto che, nello sviluppo del calcolo numerico, essa degenera in *uguaglianza soltanto approssimata*, producendosi allora uno di quei grappoli di radici che rendono così difficile l'applicazione di qualsiasi metodo risolutivo.

plementari. Anzi, non si è nemmeno dimostrato che, se $\alpha_{i,p}^{*}$ rappresenta il valore approssimato della α_i^p, si avrà necessariamente $\alpha_i = \lim_{p\to\infty} \Phi_p(\alpha_{i,p}^{*})$ $[i = 1, 2, \cdots, n]$.

Molto più consigliabile sarà, allora, il metodo seguente: Si cominci con l'estrarre la radice quadrata al valore approssimato $\alpha_{i,p}^{*}$ di α_i^p $[i = 1, 2, \cdots, n]$; l'indeterminazione proveniente dall'esistenza di due radici quadrate per ogni valore approssimato si può togliere più facilmente, mediante una verifica diretta sulla $F_{p-1}(x)$ (utilizzando alcuni dei coefficienti $A_{i,p-1}$). Procedendo così via via, si arriva finalmente alla determinazione approssimata delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

D) *Metodo dello spostamento dell'origine.* - Questo metodo, sebbene poco elegante, è uno dei più indicati nella pratica, nei casi in cui non si possa applicare il metodo B): Preso comunque un numero λ, si costruiscano le trasformate $F(x-\lambda) = 0$, $F(x+\lambda) = 0$ dell'equazione proposta, $F(x) = 0$, e si applichi il metodo di Gräffe anche a quelle due equazioni; allora per ogni radice α_i della $F(x) = 0$, verranno calcolati i tre moduli $|\alpha_i|$, $|\alpha_i + \lambda|$, $|\alpha_i - \lambda|$, i quali consentiranno di completare la determinazione della radice, con l'approssimazione che si desidera. Resta però da eseguire la scelta dei gruppi di tre moduli, in guisa che ogni gruppo corrisponda ad una stessa radice dell'equazione proposta; per questa scelta, si può ricorrere ad una previa determinazione grafica delle radici, mediante circonferenze di centri $(0, 0)$, $(0, \lambda)$, $(0, -\lambda)$, ed aventi come raggi, rispettivamente, i moduli delle radici delle $F(x) = 0$, $F(x-\lambda) = 0$, $F(x+\lambda) = 0$; ed è evidente che solo i punti dove si incrociano tre di queste circonferenze corrispondono a radici della $F(x) = 0$ (7).

4. Uno degli scopi principali di questa Nota è quello di indicare, per complemento del metodo di Gräffe, un nuovo metodo, suggerito dal precedente, ma forse meno faticoso di questo. *La sua idea generatrice consiste nel considerare, anzichè due spostamenti di amplitudine λ determinata, uno spostamento unico, ma infinitesimo.* Questa idea si svolge naturalmente come segue:

Consideriamo un numero complesso $\alpha = a + bi$, qualunque, e poniamo $\rho = |\alpha|$, $\rho(t) = |\alpha + t|$, essendo t una variabile reale. Allora, verrà $\rho'(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{(a+t)^2 + b^2} = \frac{a+t}{\sqrt{(a+t)^2 + b^2}}$, e quindi $\rho'(0) = \frac{a}{\rho}$. Cioè, in parole: *La derivata del modulo, rispetto allo spostamento reale, t, coincide, per $t = 0$, col coseno dell'argomento.*

Per applicare questo risultato al problema che ci interessa, cominceremo col considerare soltanto equazioni a coefficienti reali, ed i cui gruppi

(7) Invece di due spostamenti, si potrebbe effettuarne uno solo; ma è chiaro che allora si avrebbe l'inconveniente dell'indeterminazione.

di radici equimodulari siano tutt'al più le coppie di radici coniugate. Conservando ancora ai simboli $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$; $m_1, m_2, \cdots, m_r$ i significati loro attribuiti nel n. 2 (con la sola restrizione che, in questo caso, gli indici $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$ possono prendere unicamente i valori 1, 2) consideriamo la trasformata $F(x+t) = 0$, con t indeterminato, e poniamo

$$\Phi_t(x) \equiv F(x+t) \equiv x^n + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(t) + \cdots + xF'(t) + F(t),$$

e ancora:

$$\Phi_{t,p}(x) \equiv x^n + \varphi_{1,p}(t) \cdot x^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1,p}(t) \cdot x + \varphi_{n,p}(t),$$

rappresentando con $\Phi_{t,p}(x) = 0$ l'equazione che ha come radici le potenze di esponente 2^p delle radici della $\Phi_t(x) = 0$.

Allora, tenendo conto delle formule (3), non è difficile dimostrare che si ha

$$\begin{cases} -\dfrac{a_1}{\rho_1} = \rho_1'(0) = \lim\limits_{p\to\infty} \left[\dfrac{d}{dt} \left| \sqrt[\nu_1 2^p]{\varphi_{m_1,p}(t)} \right| \right]_0 \\ -\dfrac{a_{m_i}}{\rho_i} = \rho_i'(0) = \lim\limits_{p\to\infty} \left[\dfrac{d}{dt} \left| \sqrt[\nu_i 2^p]{\varphi_{m_i,p}(t)/\varphi_{m_{i-1},p}(t)} \right| \right]_0 \quad (i = 2, 3, \cdots, r), \end{cases}$$

formole queste che consentono di calcolare, per approssimazioni successive, i coseni degli argomenti di tutte le radici [8].

Nel caso in cui vi fossero radici equimodulari non coniugate, si dovrebbe ricorrere a derivate seconde, terze, ecc. ed alla risoluzione di equazioni di secondo grado, terzo grado, ecc. Tuttavia, non bisogna dimenticare che, secondo quanto abbiamo detto nel n. 3, C), il caso cui ci siamo qui limitati è quello che più interessa nella pratica. Ma ne riparleremo più innanzi.

Occorre adesso aggiungere alcune osservazioni relative al modo di rendere pratico questo metodo. Osserviamo dapprima che i coefficienti delle equazioni $\Phi_{t,p}(x) = 0$ sono polinomi interi in t, dei quali basta calcolare, per lo scopo che ci interessa, *i termini indipendenti ed i coefficienti di t*. Poniamo $\varphi_{i,p}(t) \equiv A_{i,p} + B_{i,p}\, t + \cdots$ $[i = 1, 2, \cdots, n]$. Per la determinazione degli $A_{i,p}$ abbiamo già indicato le formule (1). Quanto alla determinazione dei $B_{i,p}$, servono ancora le stesse formule, mettendo dappertutto

(8) Si potrebbe anche fare il calcolo delle derivate $\rho_i'(0)$ secondo il teorema delle funzioni implicite, osservando che il quadrato del modulo è uguale al prodotto della radice per la sua coniugata. Basterebbe quindi utilizzare a questo scopo l'equazione che ha come radici i prodotti delle radici della $\Phi_t(x) = 0$, a due a due. Ma si ricadrebbe allora in un metodo del gruppo A). [V. Nota dell'Autore, *Problemas relativos a funções racionais das raizes duma equação algébrica.* «Port. Math.», vol. II (1940)].

i coefficienti variabili $\varphi_{i,p}(t)$ al posto dei coefficienti costanti $A_{i,p}$ ed effettuando i debiti sviluppi, limitati ai due primi termini. Verrà quindi:

$$-B_{1,p+1} = 2(A_{1,p}B_{1,p} - B_{2,p})$$
$$B_{2,p+1} = 2(A_{2,p}B_{2,p} - A_{1,p}B_{3,p} - A_{3,p}B_{1,p} + B_{4,p})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^n B_{n,p+1} = 2A_{n,p}B_{n,p}.$$

Abbiamo così, per il calcolo dei coseni degli argomenti, un processo d'iterazione molto simile a quello di Gräffe per il calcolo dei moduli. Per farsi un'idea chiara del modo con cui avviene la convergenza di questo processo, basta tenere conto delle relazioni che legano i coefficienti $B_{i,p}$ alle radici $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Supponiamo, per fissare le idee, che tutte le radici della $F(x) = 0$ siano complesse. Allora, se poniamo $2^p = s$, verrà (9)

$$\frac{1}{s}B_{2,p} = -\frac{1}{s}\varphi'_{2,p}(0) = (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1\alpha_2)^{s-1} + \Sigma^*\beta_{i,k}(\alpha_i\alpha_k)^{s-1}$$

$$\frac{1}{s}B_{4,p} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^{s-1} + \Sigma^*\beta_{i,j,k,l}(\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l)^{s-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dove i sommatori Σ^* vanno intesi in modo analogo a quello convenuto nel n. 2, ed i coefficienti $\beta_{i,k}\,\beta_{i,j,k,l}$ rappresentano funzioni delle radici, indipendenti da p ($\beta_{i,k} = \alpha_i + \alpha_k$, $\beta_{i,j,k,l} = \alpha_i\alpha_j\alpha_k + \alpha_i\alpha_j\alpha_l + \alpha_i\alpha_k\alpha_l + \alpha_j\alpha_k\alpha_l, \cdots$).

Ma d'altra parte si ha

$$A_{2,p} = (\alpha_1\alpha_2)^s + \Sigma^*(\alpha_i\alpha_k)^s$$
$$A_{4,p} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_k)^s + \Sigma^*(\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l)^s$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

donde, badando alle formule precedenti,

$$-\frac{B_{2,p}}{sA_{2,p}} = \frac{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\Sigma^*\gamma_{ik}\left(\frac{\alpha_i\alpha_k}{\alpha_1\alpha_2}\right)^s}{1+\Sigma^*\left(\frac{\alpha_i\alpha_k}{\alpha_1\alpha_2}\right)^s},$$

$$-\frac{B_{4,p}}{sA_{4,p}} = \frac{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}+\Sigma^*\gamma_{i,j,k,l}\left(\frac{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\right)^s}{1+\Sigma^*\left(\frac{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_k}\right)^s},$$

(9) Conviene osservare che si ha $\varphi_{2,p}(t) = \sum_{i<k}[(\alpha_i - t)(\alpha_k - t)]^s$, $\varphi_{4,p}(t) = \sum_{i<k}[(\alpha_i - t)(\alpha_j - t)(\alpha_k - t)(\alpha_e - t)]^s, \cdots$

e quindi

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=-\frac{1}{2^p}\lim_{p\to\infty}\frac{B_{2,p}}{A_{2,p}}$$

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_4}=-\frac{1}{2^p}\lim_{p\to\infty}\frac{B_{4,p}}{A_{4,p}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

le quali consentono di calcolare le parti reali dei reciproci delle radici [10].

Più generalmente, ammettendo le convenzioni del n. 2, possiamo scrivere

$$(4)\qquad \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_k}=-\frac{1}{2^p}\lim_{p\to\infty}\frac{B_{k,p}}{A_{k,p}}\quad (k=m_1,m_2,\cdots,m_r).$$

Finalmente, se rappresentiamo con $C_{i,p}$ il coefficiente di t^2 nello sviluppo del polinomio $\varphi_{i,p}(t)$ $[i=1,2,\cdots,n]$, verrà

$$\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_1}\cdot\frac{1}{\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{k-1}}\cdot\frac{1}{\alpha_k}=$$

$$=\frac{1}{2^{2p+2}}\lim_{p\to\infty}\frac{2^p\cdot A_{k,p}\,C_{k,p}-(2^p-1)\,B_{k,p}^2}{A_{k,p}^2}$$

e analogamente per i coefficienti degli altri termini.

Matematica. — *Sui problemi d'equilibrio della Fisica-Matematica* [1]. Nota di S. Faedo, presentata [2] dal Corrisp. M. Picone.

1. W. Ritz [3] ha indicato un procedimento per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali (ordinarie e a derivate parziali) che si può così riassumere:

Si debba integrare l'equazione differenziale lineare (ad esempio del 2° ordine), autoaggiunta

$$(1)\qquad E(u)=f,$$

(10) Abbiamo posto $\gamma_{i,k}=\dfrac{\beta_{i,k}}{\alpha_i\alpha_k}$, $\gamma_{i,j,k,l}=\dfrac{\beta_{i,j,k,l}}{\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_l}$. Si osservi d'altra parte che è $\alpha_i+\alpha_{i+1}=\alpha_i\alpha_{i+1}\left(\dfrac{1}{\alpha_i}+\dfrac{1}{\alpha_{i+1}}\right)$ $[i=2,4,\cdots]$, con $\alpha_i\alpha_{i+1}=(\alpha_i)^2$.

(1) Lavoro eseguito all'I.N.A.C.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) W. Ritz, *Oeuvres*, pp. 192-314, Paris, Gauthier-Villars, 1911.

dove u è definita in un campo C e sulla frontiera FC sia assegnata una condizione lineare, al più del 1° ordine, che si può sempre supporre omogenea

$$E_1(u) = 0. \tag{2}$$

Sia $I[u]$ un funzionale che possieda la (1) come equazione di Eulero. Allora, scelto un sistema di funzioni $\{\varphi_s\}$ $(s = 1, 2, \cdots)$ completo in C e tale che sia su FC

$$E_1(\varphi_s) = 0. \quad (s = 1, 2, \cdots), \tag{3}$$

si pone

$$u^{(n)} = \sum_{s=1}^{n} a_s \varphi_s \tag{4}$$

e si determinano le costanti a_s in guisa da rendere stazionaria (rispetto alle variabili $a_1, \cdots, a_n$) la funzione $I[u^{(n)}]$.

Si conoscono condizioni sotto le quali la successione (4) converge puntualmente o in media alla soluzione del problema (1) (2). Di tale metodo si è occupato anche M. Picone (4), che ha osservato come il principale ostacolo all'applicazione del metodo di Ritz stia nel trovare un sistema $\{\varphi_s\}$ che sia completo e per cui *ogni* funzione φ_s verifichi la (3) su FC.

2. In una Nota dallo stesso titolo della presente e che uscirà nei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni » considero quei problemi di equilibrio della Fisica-matematica (in particolare della teoria dell'elasticità) per cui le condizioni (3) si riducono a tipi assai semplici; esse traducono semplici tipi di vincoli, come appoggi o incastri o contorno fisso, che sono della massima importanza per le applicazioni; in questi casi è facile trovare sistemi $\{\varphi_s\}$ che verificano su FC le (3). In particolare, mi occupo del caso in cui il contorno sia libero o soggetto a una forza di richiamo. Allora le (1) (2) si ottengono, la prima come equazione di Eulero e la seconda come condizione di trasversalità, quando si ricerchi il *minimo assoluto* dell'integrale $I(u)$ che esprime l'energia potenziale del sistema.

In questo caso, le funzioni φ_s non devono verificare ad alcuna condizione al contorno, salvo quella che sia completo anche il sistema di valori a cui si riduce $\{\varphi_s\}$ su FC.

3. Come applicazione, riprendo in esame il problema della deformazione di un diedro di cristallo indefinito soggetto all'azione di una forza concentrata in un punto dello spigolo; problema che è stato proposto dall'Istituto Nazionale di Ottica di Firenze.

(4) M. Picone, *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-Matematica.* « Rend. Circolo Mat. di Palermo », to. LII, 1928.

Questo problema è stato già studiato [5] col metodo delle equazioni integrali di Fischer-Ritz di M. Picone [6], metodo che ha il vantaggio di fornire una successione di funzioni che converge alla soluzione del problema e le cui derivate prime approssimano le corrispondenti derivate della soluzione.

Però, le grandi difficoltà di calcolo che si incontrano hanno finora permesso di raggiungere soltanto la prima approssimazione, cioè il primo termine della detta successione.

Occorre quindi controllare per altra via i risultati conseguiti.

Trattando con il metodo di Ritz il problema del diedro si ottiene, con grandissima semplicità, una successione di funzioni per la quale dò una dimostrazione di convergenza in media alla soluzione. L'esame qualitativo dei primi termini di detta successione fa presumere un buon accordo con i risultati già ottenuti col metodo di M. Picone.

I relativi sviluppi numerici saranno eseguiti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo e nella Nota, che qui è preannunciata, verranno confrontati i risultati ottenuti con i due metodi.

Anche nei casi in cui il metodo di Ritz si può applicare soltanto in forma euristica, esso va segnalato ai cultori delle Matematiche applicate per la grande rapidità con cui consente di giungere a risultati concreti; se non altro, servirà ottimamente per il controllo dei risultati raggiunti per altre vie. Per legittimare l'applicazione del metodo di Ritz al problema del diedro, sviluppo alcune considerazioni sulle funzioni di Hermite e Laguerre e pongo in relazione il problema di Calcolo delle variazioni che ne sorge (in cui il campo d'integrazione è il diedro indefinito) con le mie recenti ricerche [7] sul calcolo delle variazioni per integrali su campi infiniti secondo il metodo di L. Tonelli.

(5) F. Conforto, *Sulle deformazioni elastiche di un diedro omogeneo e isotropo.* « Memorie R. Accad. Torino », ser. II, to. LXX, 1940–41.

(6) M. Picone, *Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica-Matematica.* « Questioni di Matematica Applicata », vol. I, Bologna, Zanichelli, 1939; v. anche « Ann. Sc. Univ. Jassy », to. XXVI, 1940.

(7) S. Faedo, *Il calcolo delle variazioni per gli integrali su un intervallo infinito.* « Comm. Pont. Acad. Scient. », vol. VIII, 1944.

Matematica. — *Sull' equazione del calore* [1]. Nota I di L. Amerio, presentata [2] dal Corrisp. M. Picone.

Negli *Appunti di Analisi Superiore* del Picone i problemi al contorno per le equazioni lineari di tipo parabolico [3] vengono trattati con lo stesso criterio adoperato per le equazioni di tipo ellittico, criterio che fa dipendere, in virtù delle considerazioni svolte dall'Autore sulla formula di Green, la soluzione di tali problemi dalla preventiva determinazione di successioni di funzioni soddisfacenti ad opportune condizioni di chiusura nel dominio di integrazione o sul suo contorno.

Scopo di questa Nota riassuntiva è di esporre, omettendo le dimostrazioni che saranno esposte in una Memoria [4] di prossima pubblicazione, un procedimento di integrazione della classica equazione di propagazione del calore

$$(1) \qquad E(u) = \Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y} = f \quad , \qquad \left(\Delta_2 u = \sum_1^m {}_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)$$

con il quale vengono risolti, sotto condizioni assai larghe, i problemi in tal modo posti dal Picone. La trattazione seguìta, analogamente e quanto ho già dimostrato per le equazioni di tipo ellittico [5], è sostanzialmente basata sulla dimostrazione che la prima formula fondamentale di Green (quella cioè in cui il punto potenziato si suppone esterno al dominio τ di integrazione) costituisce l'*equazione di compatibilità* tra i valori assunti sul contorno σ di τ da un'integrale della (1) e dalla sua derivata conormale. Si indicano inoltre delle condizioni sufficienti ad assicurare la validità, per l'integrazione della (1), del metodo della trasformata a dominio di integrazione limitato, ideato dal Picone.

1. Diremo che una funzione u è di classe h in un dominio limitato τ dello spazio S_{m+1} $(x_1, \cdots, x_m, y)$ se possiede, all'interno di τ, tutte le derivate parziali di ordine $\leq h$ e se è possibile prolungare la definizione della u e di tali derivate anche sul contorno σ di τ in modo che risultino continue in tutto τ.

Una varietà σ a m dimensioni, dello spazio S_{m+1}, si dirà poi di classe h in un suo punto M se risulta definita, in un intorno completo di M, da

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

(3) M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*. Rondinella, Napoli, 1940, pp. 761–62.

(4) Presso i «Rend. di Mat. e delle sue Appl. della R. Università di Roma e dell'Ist. di Alta Mat.», 1946.

(5) L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*. «Rend. Ist. Lomb.», vol. LXXVIII, 1945; *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.*

una rappresentazione delle coordinate dei suoi punti come funzioni di classe h di m parametri variabili in un certo dominio, con matrice funzionale mai nulla.

Ciò premesso, supponiamo che il contorno σ di τ soddisfi a quelle condizioni che rendono applicabile in τ la formula di Green relativa all'operatore E per ogni coppia u, w di funzioni di classe 2 in τ:

$$(2) \qquad -\int_\tau u\,\mathrm{E}^*(w)\,d\tau =$$

$$= \int_\sigma \left\{ \left(u\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} w \right) \operatorname{sen}(ny) + uw\cos(ny) \right\} d\sigma - \int_\tau \mathrm{E}(u)\, w\, d\tau ,$$

dove

$$(3) \qquad \mathrm{E}^*(w) = \Delta_2 w + \frac{\partial w}{\partial y}$$

è l'espressione differenziale aggiunta di $\mathrm{E}(u)$, n e ν sono rispettivamente la normale e la conormale a σ, orientate verso l'interno di τ.

Ricordiamo anche che la conormale è indeterminata nei punti in cui l'iperpiano tangente è caratteristico, cioè $\operatorname{sen}(ny) = 0$; in ogni punto in cui l'iperpiano tangente non è caratteristico, la conormale è situata nell'iperpiano caratteristico passante per il punto e risulta normale al contorno della sezione di τ effettuata da tale iperpiano. Osserviamo inoltre che σ può contenere una successione di parti iperpiane situate su iperpiani caratteristici i cui punti interni (su σ) costituiscono un insieme σ^*, aperto su σ, nel quale sono indeterminate le derivate $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, $\frac{\partial w}{\partial \nu}$, ma risulta $\operatorname{sen}(ny) = 0$; in tutti i punti di σ^* si dovrà porre $\left(u\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \operatorname{sen}(ny) = 0$.

Se u è un'integrale della (1), di classe 2 in τ, si ricava poi dalla (2) la classica formula

$$(4) \qquad -\int_\tau u\,\mathrm{E}^*(w)\,d\tau =$$

$$= \int_\tau \left\{ \left(u\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} w \right) \operatorname{sen}(ny) + uw\cos(ny) \right\} d\sigma - \int_\tau fw\, d\tau .$$

Ricordiamo ora che, prefissato comunque in S_{m+1} un punto $N(x'_1, \cdots, x'_m, y')$, la soluzione fondamentale $F(M, N)$ dell'equazione $\mathrm{E}^*(w) = 0$ risulta definita in tutto S_{m+1} dalle eguaglianze

$$(5) \qquad \mathrm{F}(M,N) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sum_1^m \frac{(x_k - x'_k)^2}{4(y'-y)}}}{(y'-y)^{\frac{m}{2}}} & \text{per } y < y', \\ 0 & \text{per } y \geqq y'. \end{cases}$$

La funzione F (M , N) è perciò continua insieme a tutte le sue derivate parziali (rispetto alle coordinate di M o di N) in tutto lo spazio S_{m+1}, escluso il solo punto N e, come funzione di N, soddisfa all'equazione $E(u) = 0$.

Se in luogo di w si pone nella (4) la funzione F (M , Q), Q essendo un punto esterno a τ, si ricava la prima formula fondamentale di Green:

$$(6) \qquad 0 \equiv \int_{\sigma} \left\{ \left(u(M) \frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(M)}{\partial \nu} F(M,Q) \right) \operatorname{sen}(n\nu) + \right.$$

$$\left. + u(M) F(M,Q) \cos(n\nu) \right\} d\sigma - \int_{\tau} f(M) F(M,Q) \, d\tau,$$

mentre, se il punto P si suppone interno a τ, vale la seconda formula fondamentale di Green:

$$(7) \quad (2\sqrt{\pi})^m u(P) \equiv \int_{\sigma} \left\{ \left(u(M) \frac{\partial F(M,P)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(M)}{\partial \nu} F(M,P) \right) \operatorname{sen}(n\nu) + \right.$$

$$\left. + u(M) F(M,P) \cos(n\nu) \right\} d\sigma - \int_{\tau} f(M) F(M,P) \, d\tau,$$

dove M è il punto rispetto alle cui coordinate si effettuano le integrazioni.

Precisiamo ora le ipotesi da farsi sulla natura della funzione f, del contorno σ e delle funzioni ivi definitive.

Supporremo, riguardo alla f, che soddisfi in τ a una condizione di Hölder: con tale ipotesi, come è noto, la funzione

$$u'(P) = \int_{\tau} f(M) F(M,P) \, d\tau$$

è entro τ un integrale della (1).

Quanto a σ, ammetteremo che abbia misura ipersuperficiale finita, soddisfi alla condizione posta a proposito della (2) e che in ogni punto M di $\sigma - \sigma^*$, esclusi al più i punti di un insieme chiuso χ di misura (ipersuperficiale) nulla, risulti di classe 2 ed abbia iperpiano tangente non caratteristico. Le condizioni così poste sono, nei casi, pratici, largamente soddisfatte: si noti, in particolare, che la connessione di ogni ordine $\leq m$ può essere qualsiasi, anche infinita.

Se A (M) , B (M) sono due funzioni, la prima sommabile su σ, la seconda tale che il prodotto B (M) sen $(n\nu)$ risulti sommabile su $\sigma - \sigma^*$, e se σ soddisfa alle condizioni ora indicate, diremo che A , B , σ appartengono all'insieme (α).

Un secondo insieme, (β), contenuto in (α), si definirà imponendo ad A , B , σ condizioni più restrittive.

Supporremo che al variare di N in un dominio τ', contenente τ nel suo interno, gli integrali

$$(8) \qquad J_1(N) = \int_\sigma \left| \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu} \operatorname{sen}(n\nu) \right| d\sigma,$$

$$(9) \qquad J_2(N) = \int_\sigma F(M, N) \left| \cos(n\nu) \right| d\sigma$$

si mantengano limitati.

Ammetteremo inoltre che la funzione A(M) risulti continua in tutti i punti di σ, la B(M) in tutti i punti di $\sigma - \sigma^* - \chi$ e che l'integrale

$$10) \qquad J_3(N) = \int_\sigma B(M) F(M, N) \operatorname{sen}(n\nu) \, d\sigma$$

sia funzione continua in tutti i punti di τ'.

Le condizioni poste per gli integrali (8), (9) sono, come è noto, poco restrittive; ricordiamo inoltre che la continuità dell'integrale (10) nei punti di $\sigma - \chi$ resta assicurata con ipotesi, relativamente a B(M), assai più larghe della continuità in $\sigma - \sigma^* - \chi$.

Se, in particolare, si suppone che σ consti di una successione di tronchi di cilindri con le generatrici parallele all'asse y e le basi su due iperpiani caratteristici, di equazioni $y = a, y = b$, indicata con ω la sezione di σ effettuata dagli iperpiani $y = k$, con $a < k < b$, e posto $t = y' - y, \rho = \left\{ \sum_1^m (x_k - x'_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, si ricava

$$0 \leq J_1(N) < \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \int_\omega \left| \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-\frac{\rho^2}{4t}} \right| d\omega = \frac{1}{2} \int_\omega \rho \left| \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right| d\omega \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{t^{\frac{m}{2}+1}} dt =$$

$$= 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_\omega \rho^{-(m-1)} \left| \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \right| d\omega = \begin{cases} 2 \int_\omega \left| \frac{\partial \log \rho}{\partial \nu} \right| d\omega & \text{per } m = 2, \\ \frac{2^{m-1}}{m-2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_\omega \left| \frac{\partial \rho^{-(m-2)}}{\partial \nu} \right| d\omega & \text{per } m > 2, \end{cases}$$

$$0 \leq J_2(N) < \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{t^{\frac{m}{2}}} dx_m = (2\sqrt{\pi})^m.$$

La limitatezza di $J_1(N)$ resta perciò assicurata se ω soddisfa alle stesse condizioni già considerate per le equazioni di tipo ellittico.

2. – Indicheremo con Γ_α l'insieme delle funzioni $u(P)$ per cui valgono le seguenti proprietà:

a) è soddisfatta la (1) nei punti interni a τ;

b) preso quasi ovunque su σ un punto M, esiste finito il limite

$$\lim_{P \to M} u(P) = A(M), \tag{11}$$

dove $P \to M$ lungo la normale in M a σ se M appartiene a σ^*, lungo la conormale se M appartiene a $\sigma - \sigma^*$;

c) preso quasi ovunque su $\sigma - \sigma^* - \chi$ un punto M, esiste finito il limite

$$\lim_{P \to M} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu} = B(M), \tag{12}$$

dove $P \to M$ lungo la conormale in M a σ;

d) A (M), B (M), σ appartengono all'insieme (α) e risultano soddisfatte le equazioni

$$0 \equiv \int_\sigma \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu} \operatorname{sen}(n y) + F(M, Q) \cos(n y) \right) - \right.$$
$$\left. - B(M) F(M, Q) \operatorname{sen}(n y) \right\} d\sigma - \int_\tau f(M) F(M, Q) \, d\tau, \tag{13}$$

$$(2\sqrt{\pi})^m u(P) = \int_\tau \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu} \operatorname{sen}(n y) + F(M, P) \cos(n y) \right) - \right.$$
$$\left. - B(M) F(M, P) \operatorname{sen}(n y) \right\} d\sigma - \int_\tau f(M) F(M, P) \, d\tau. \tag{14}$$

Un secondo insieme, Γ_β, di funzioni si definirà imponendo, come ulteriori condizioni, che A, B, σ appartengano all'insieme (β), che la (11) valga per tutti i punti M di σ e comunque $P \to M$, che la (12) valga in tutti i punti M di $\sigma - \sigma^* - \chi$.

Ciò premesso, osserviamo che *condizione necessaria perchè due funzioni* A (M), B (M), *dell'insieme* (α) *o* (β), *coincidano rispettivamente con i valori limiti, per* $P \to M$, *di un integrale* $u(P)$ *della* (1) (*appartenente all'insieme* Γ_α *o* Γ_β) *e della derivata conormale* $\frac{\partial u(P)}{\partial \nu}$, *è che la coppia* A (M), B (M) *soddisfi all'equazione* (13).

Ora tale proposizione può essere invertita, come risulta dal seguente teorema.

I. – *Sia* A, B *una soluzione dell'equazione* (13). *Allora la funzione* u (P) *definita entro* τ *dalla* (14) *è un integrale della* (1) *soddisfacente alle* (11), (12) *ed appartenente all'insieme* Γ_α *o* Γ_β *a seconda che* A, B, σ *appartengano all'insieme* (α) *o* (β).

In virtù di questo teorema si può perciò dire, analogamente a quanto si è dimostrato per le equazioni di tipo ellittico, che la prima formula fondamentale di Green rappresenta *la condizione di compatibilità* tra i valori

assunti su σ da un integrale u della (1), appartenente agli insiemi Γ_α o Γ_β, e dalla sua derivata conormale $\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Per risolvere poi i problemi al contorno per l'equazione del calore, valendoci della (13), useremo lo stesso procedimento già adoperato per le equazioni di tipo ellittico. Sia τ' un dominio limitato contenente τ nel suo interno e sia $\{ g_r(Q) \}$ una successione di funzioni continue nel dominio $\tau'' = \tau' - \tau + \sigma$, chiusa rispetto alla totalità delle funzioni continue nei punti interni a τ'', sommabili in τ'', funzioni cui appartengono gli integrali a secondo membro della (13), anche nella sola ipotesi della sommabilità, nei rispettivi insiemi di definizione, delle A, B sen (ny), f. Si può, ad esempio, porre $g_r(Q) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} y^{\alpha_{m+1}}$, con $\alpha_k = 0, 1, \cdots$

La (13) equivale allora al sistema di infinite equazioni

$$(15)\quad \int_{\tau''} g_r(Q) \left[\int_\sigma \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} \operatorname{sen}(ny) + F(M,Q) \cos(ny) \right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - B(M) F(M,Q) \operatorname{sen}(ny) \right\} d\sigma - \int_\tau f(M) F(M,Q)\, d\tau \right] d\tau'' = 0 .$$

Indicata con τ_k'' la parte di τ'' nei cui punti risulta $y \geqq k$ e posto

$$(16)\quad v_r(M) = \int_{\tau''} g_r(Q) F(M,Q)\, d\tau'' = \int_{\tau_y''} g_r(Q) F(M,Q)\, d\tau'',$$

dalla (15) si deduce il sistema di infinite equazioni di Fischer–Riesz

$$(17)\quad \int_\sigma \left\{ A \left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu} \operatorname{sen}(ny) + v_r \cos(ny) \right) - B v_r \operatorname{sen}(ny) \right\} d\sigma - \int_\tau f v_r\, d\tau = 0$$

equivalente alla (13).

Supponiamo, ad esempio, di cercare un integrale della (1) assegnandone il valore su tutto σ, esclusa quella parte, σ_1^*, di σ^* in cui sia $\cos(ny) = -1$. È ben noto che vale per tale problema il teorema di unicità nell'insieme Γ_β. Posto $\sigma_1 = \sigma - \sigma^*$, si ricava dalle (17) per le incognite A e B, su σ_1^*, σ_1 rispettivamente, il sistema

$$(18)\quad \int_{\sigma_1^*} A v_r\, d\sigma_1^* + \int_{\sigma_1} B v_r \operatorname{sen}(ny)\, d\sigma_1 = c_r$$

dove le c_r sono costanti note. Seguendo il procedimento indicato dal Picone [6] per la risoluzione dei sistemi di Fischer–Riesz di tipo più generale e fondato su una generalizzazione dell'ordinaria teoria degli sviluppi in serie di Fourier, considereremo (nello spazio S_2) un vettore $\mathbf{G}$, le cui componenti secondo gli assi siano date dalle funzioni A in σ_1^*, B sen (ny) in σ_1, e una successione $\{ \omega_r \}$ di vettori, le cui componenti siano v_r in σ_1^*, v_r in σ_1.

(6) M. Picone, loc. cit. in (3), pp. 632–34.

La somma di integrali a primo membro della (18) si indicherà col simbolo $(\mathbf{G}, \omega_r)$ e si dirà il *prodotto integrale* dei vettori $\mathbf{G}, \omega_r$, o il *coefficiente di Fourier* del vettore $\mathbf{G}$ rispetto al vettore ω_r. Si chiamerà poi *norma integrale* del vettore $\mathbf{G}$ il prodotto integrale $(\mathbf{G}, \mathbf{G})$.

Per le (18) sono perciò noti i valori

$$(19) \qquad (\mathbf{G}, \omega_r) = c_r$$

dei coefficienti di Fourier dell'incognito vettore $\mathbf{G}$ rispetto alla successione di vettori $\{\omega_r\}$, successione che è *chiusa*, in virtù del teorema I e del teorema di unicità, nella totalità dei vettori $\mathbf{G}$ di componenti A continua in σ_* e raccordantesi con continuità ai valori prescritti su $\sigma - \sigma_1^*$, B sen $(n\nu)$ soddisfacente alle condizioni indicate per l'insieme Γ_β.

Matematica. — *Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali* [1]. Nota I di L. Amerio, presentata [2] dal Corrisp. M. Picone.

Nei suoi Appunti di Analisi Superiore [3] il Picone dimostra che la soluzione dei problemi al contorno per le equazioni lineari a derivate parziali si deduce immediatamente dalla preventiva risoluzione di alcuni problemi di Analisi, che l'Autore pone in modo ben preciso.

In alcuni recenti lavori [4] ho risolto i problemi del Picone per le equazioni del secondo ordine di tipo ellittico (a coefficienti variabili) con un procedimento di carattere generale che ho successivamente esteso ad equazioni di altro ordine o tipo.

Il metodo di integrazione che così si ottiene conduce a tradurre i problemi considerati in un sistema di equazioni di Fischer–Riesz, in generale vettoriali [5], del tipo cioè

$$(1) \qquad (\mathbf{G}, \mathbf{z}_r) = \gamma_r, \qquad (r = 0, 1, \cdots)$$

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*. Rondinella, Napoli, 1940. pp. 754–55.

(4) L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*. « Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lett. », vol. LXXVIII, 1945; *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*. In corso di stampa; *Sull'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico*. « Acta Pont. Acad. Sc. », vol. IX, pp. 213–28; *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$. « Annali di Matematica », 1946; *Sull'equazione di propagazione del calore*. « Rend. del Seminario Mat. dell'Università di Roma », 1946.

(5) La teoria generale dei sistemi vettoriali di Fischer–Riesz, è stata svolta da M. Picone nella Memoria: *Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica-Matematica*. « Atti del I Convegno di Matematica applicata », Roma, 1936. Vedasi anche M. Picone, loc. cit. in (3), pp. 632–34.

essendo $\mathbf{G}$ un vettore incognito, $\{\mathbf{z}_r\}$ una successione di vettori, γ_r i coefficienti di Fourier, noti attraverso i dati del problema, di $\mathbf{G}$ rispetto alla successione $\{\mathbf{z}_r\}$. La risoluzione dei problemi del Picone consiste appunto nella determinazione dei vettori $\mathbf{z}_r$ i quali debbono esser tali che il sistema (1) abbia soluzione $\mathbf{G}$ tutte e sole le volte che il problema considerato ammette soluzione.

In particolare, a ogni vettore $\mathbf{G}$ che sia ortogonale alla successione $\{\mathbf{z}_r\}$, sia cioè autosoluzione del sistema

$$(2) \qquad (\mathbf{G}, \mathbf{z}_r) = 0,$$

viene a corrispondere un'autosoluzione del problema.

Si presenta perciò la questione di risolvere il sistema omogeneo (2), questione che è l'oggetto della presente Nota, nella quale si indicano dei procedimenti per ottenere *tutte le autosoluzioni appartenenti allo spazio hilbertiano, cioè aventi norma integrale* $(\mathbf{G}, \mathbf{G})$ *finita.*

1. Cominciamo col ricordare un procedimento del Picone [6] (al quale si ricollega quello che successivamente indicheremo) per ottenere *tutti* i vettori $\mathbf{G}$ che soddisfano al sistema (1).

Supponiamo la successione $\{\mathbf{z}_r\}$ ortogonale e normale e sia $\boldsymbol{\Phi}$ un arbitrario vettore.

Per il teorema di Fischer–Riesz, condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (1) ammetta una soluzione è che converga la serie $\sum_0^\infty{}_r \gamma_r^2$.

Poniamo

$$(3) \qquad \mathbf{G} \sim \boldsymbol{\Phi} - \sum_0^\infty{}_r c_r \mathbf{z}_r$$

essendo le c_r costanti incognite.

Risulta, per le (1),

$$(4) \qquad c_r = (\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{z}_r) - \gamma_r$$

che determina le c_r.

Dalle (3), (4) segue allora

$$\mathbf{G} \sim \sum_0^\infty{}_r \gamma_r \mathbf{z}_r + \boldsymbol{\Phi} - \sum_0^\infty{}_r (\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{z}_r) \mathbf{z}_r.$$

Facendo variare $\boldsymbol{\Phi}$ *in tutto lo spazio hilbertiano, il Picone ottiene in tal modo tutte le soluzioni del sistema* (1).

Osserviamo però che, se si cercano tutte le autosoluzioni del sistema (2), queste risultano date dalla formula

$$(5) \qquad \mathbf{G} \sim \boldsymbol{\Phi} - \sum_0^\infty{}_r (\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{z}_r) \mathbf{z}_r$$

(6) M. Picone, loc. cit. in (5).

con la condizione che il secondo membro *non* sia di norma integrale nulla, cioè che Φ *non* sia sviluppabile in serie di Fourier

$$\sum_0^\infty{}_r (\Phi , z_r) z_r .$$

Come è noto, condizione caratteristica affinchè ciò avvenga è che risulti

$$(6) \qquad (\Phi , \Phi) > \sum_0^\infty{}_r (\Phi , z_r)^2 .$$

2. Sia

$$(7) \qquad \mathrm{E}(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

un'equazione differenziale del secondo ordine, in m variabili $(x_1 , \cdots , x_m)$, e supponiamo le a_{ik} , b_i funzioni di classe [7] $2\,\mathrm{H} , 1\,\mathrm{H}$, le c , f di classe H in un dominio limitato τ di S_m, di cui indicheremo con σ il contorno.

Se

$$(8) \qquad \mathrm{E}^*(w) = \sum \frac{\partial^2 (a_{ik} w)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum \frac{\partial (b_i w)}{\partial x_i} + cw$$

è l'espressione differenziale aggiunta di $\mathrm{E}(u)$, risulta, per la formula di Green,

$$(9) \qquad -\int_\tau u \mathrm{E}^*(w)\, d\tau = \int_\sigma \left\{ u \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - \mathrm{L}w \right) - \frac{\partial u}{\partial \nu} w \right\} d\sigma - \int_\tau fw\, d\tau$$

dove ν è la direzione conormale, orientata verso l'interno di σ e si è posto

$$\mathrm{L} = \sum \left(b_i - \sum \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \cos (n x_k) \right) ,$$

n essendo la normale a σ, orientata verso l'interno di σ.

Prolungata poi la definizione delle a_{ik} , b_i , c in un dominio τ' contenente τ nel suo interno, in modo che in τ' risultino ancora di classi $2\,\mathrm{H} , 1\,\mathrm{H} , \mathrm{H}$ rispettivamente, e indicata con $\mathrm{F}(\mathrm{M} , \mathrm{N})$ la soluzione fondamentale dell'equazione $\mathrm{E}^*(v) = 0$, singolare nel punto N di τ' (soluzione che si può scegliere in modo da soddisfare alla $\mathrm{E}(\mathrm{F}) = 0$, come funzione di N) valgono le formule fondamentali di Green

$$(10) \qquad k_m u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \left\{ \mathrm{A}(\mathrm{M}) \left(\frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{M} , \mathrm{P})}{\partial \nu} - \mathrm{L}(\mathrm{M})\, \mathrm{F}(\mathrm{M} , \mathrm{P}) \right) - \mathrm{B}(\mathrm{M})\, \mathrm{F}(\mathrm{M} , \mathrm{P}) \right\} d\sigma - \int_\tau f(\mathrm{M})\, \mathrm{F}(\mathrm{M} , \mathrm{P})\, d\tau ,$$

(7) Diremo che una funzione φ è di classe $t\mathrm{H}$ in τ se è dotata internamente a τ di tutte le derivate parziali di ordine $\leq t$, prolungabili anche sul contorno σ di τ in modo da risultare continue in tutto τ. Si scriverà H in luogo di $0\,\mathrm{H}$.

$$o \equiv \int_\sigma \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - L(M) F(M,Q) \right) - B(M) F(M,Q) \right\} d\sigma - \int_\tau f(M) F(M,Q) \, d\tau$$

dove k_m è una costante $\neq o$ dipendente solo da m, P e Q rappresentano rispettivamente un punto interno e un punto esterno a τ, M è il punto, di τ o di σ, rispetto alle cui coordinate si effettuano le integrazioni e si è posto, su σ,

$$u(M) = A(M) \quad , \quad \frac{\partial u(M)}{\partial \nu} = B(M). \tag{12}$$

Consideriamo la totalità Γ *degli integrali della* (1) *per cui volgono le* (10), (11), *le funzioni* A(M), B(M) *intendendosi, nel caso più generale, definite come i limiti (supposti esistenti quasi ovunque su* σ)

$$A(M) = \lim_{P \to M} u(M) \quad , \quad B(M) = \lim_{P \to M} \frac{\partial u(M)}{\partial \nu}, \tag{13}$$

(*dove* $P \to M$ *lungo la conormale a* σ *in* M) *e sommabili su* σ.

In un recente lavoro, ho dimostrato che *se* A, B *sono due funzioni soddisfacenti alla* (11), *la funzione* u(P) *definita dalle* (10) *è un integrale della* (7) *che verifica le* (13) *e appartiene perciò a* Γ.

Posto inoltre $\bar{\tau} = \tau' - \tau + \sigma$ e

$$v_r(M) = \int_{\bar{\tau}} g_r(Q) F(M,Q) \, d\bar{\tau}, \tag{14}$$

dove $\{g_r(Q)\}$ è una successione di funzioni continue, chiusa rispetto alla totalità delle funzioni sommabili nel dominio $\bar{\tau}$ (si può, ad esempio, prendere $g_r = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, con $\alpha_i = o, 1, \cdots$), si dimostra che la (11) *equivale* al sistema di Fischer–Riesz

$$\int_\sigma \left\{ A\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - L v_r \right) - B v_r \right\} d\sigma - \int_\tau f v_r \, d\tau = o. \tag{15}$$

Considerata poi la (9), posto, su σ, $A = u$, $B = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ e in luogo di w la funzione

$$w_r = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}, \qquad (\alpha_i = o, 1, \cdots) \tag{16}$$

si dimostra che il sistema

$$-\int_\tau u E^*(w_r) \, d\tau = \int_\sigma \left\{ A\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - L w_r \right) - B w_r \right\} d\sigma - \int_\tau f w_r \, d\tau \tag{17}$$

è *equivalente al sistema* (10), (11). Precisamente si ha che *se* A, B *sono funzioni sommabili su* σ *soddisfacenti alla* (11) *e se* u(P) *è definita entro* τ

dalla (10), *la terna* u, A, B *soddisfa al sistema* (17); *viceversa, se* u, A, B *sono tre funzioni sommabili nei rispettivi insiemi di definizione e soddisfacenti al sistema* (17), *allora* A, B *soddisfano alla* (11) *e la* $u(P)$, *ove se ne alteri al più il valore in un insieme di misura nulla, è data dalla* (10).

3. Consideriamo ora, ad esempio, il problema di Dirichlet e cerchiamone quelle autosoluzioni, la cui derivata conormale B risulti di quadrato sommabile su σ.

Per le (10), (15) ogni autosoluzione $u(P)$ di tale problema è definita entro τ dalla formula

$$k_m u(P) = -\int_\sigma B(M) F(M, P)\, d\sigma, \tag{18}$$

dove $B(M)$ è una autosoluzione del sistema

$$\int_\sigma B v_r\, d\sigma = 0. \tag{19}$$

Per trovare le autosoluzioni si può procedere nel modo seguente.

Sia $\{P_s\}$ *una successione di punti di* $\tau - \sigma$, *ovunque densa in tale insieme e sia* $\{v'_r\}$ *la successione dedotta dalla* $\{v_r\}$ *con il noto procedimento di ortogonalizzazione e normalizzazione.*

Considerato il sistema

$$\int_\sigma B v'_r\, d\sigma = (B, v'_r) = 0, \tag{20}$$

equivalente al sistema (19), dimostriamo che *condizione necessaria e sufficiente perchè esista un'autosoluzione* B'_1 *è che esista un indice* s_1 (*e se ne esistono più sceglieremo il minore*) *tale che la funzione* $F(M, P_{s_1})$ *non sia sviluppabile in serie di Fourier* $\sum_r^\infty (F(M, P_{s_1}), v'_r) v'_r$, *cioè risulti*

$$(F(M, P_{s_1}), F(M, P_{s_1})) > \sum_0^\infty {}_r (F(M, P_{s_1}), v'_r)^2. \tag{21}$$

In tal caso si può porre

$$B'_1 \sim F(M, P_{s_1}) - \sum_0^\infty {}_r (F(M, P_{s_1}), v'_r) v'_r. \tag{22}$$

La condizione è necessaria. Infatti se per ogni s risulta

$$F(M, P_s) \sim \sum_0^\infty {}_r (F(M, P_s), v'_r) v'_r,$$

si ha dalla (18), per ogni eventuale autosoluzione B del sistema (20),

$$u(P_s) = -\frac{1}{k_m} \sum_0^\infty {}_r (F(M, P_s), v'_r) \int_\sigma v'_r B\, d\sigma = 0$$

e quindi, essendo la $u(P)$ funzione continua nell'interno di τ e la successione $\{P_s\}$ ovunque densa in $\tau - \sigma$, risulta

$$u(P) \equiv 0$$

da cui, per la seconda delle (13),

$$B(M) \equiv 0$$

cioè non esistono autosoluzioni.

La condizione è sufficiente. Infatti se vale la (21), per la (5) la funzione B'_1 è autosoluzione del sistema (20) e quindi, per la seconda delle (13), la funzione

$$u'_1(P) = -\frac{1}{k_m}\int_\sigma B'_1(M)\,F(M,P)\,d\sigma$$

è un'autosoluzione del problema di Dirichlet.

Osserviamo inoltre che nel punto P_{s_1} risulta, per la (22),

$$(23)\quad u'_1(P_{s_1}) = -\frac{1}{k_m}\int_\sigma F(M,P_{s_1})\left\{F(M,P_{s_1}) - \sum_0^\infty{}_r\,(F(M,P_{s_1}),v'_r)\,v'_r\right\}d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{k_m}\left\{(F(M,P_{s_1}),F(M,P_{s_1})) - \sum_0^\infty{}_r\,(F(M,P_{s_1}),v'_r)^2\right\} = 0.$$

Trovata, se esiste, una prima autosoluzione B'_1, per trovarne un'eventuale seconda, B'_2, linearmente indipendente da B'_1, si procederà nel modo seguente.

Poniamo

$$(24)\qquad B_1 = B'_1\,(B'_1,B'_1)^{-\frac{1}{2}},$$

in modo che B_1 risulti un'autosoluzione normale del sistema (20), e consideriamo il sistema

$$(25)\qquad \begin{cases}(B'_2,v'_r) = 0\\ (B'_2,B_1) = 0\end{cases}\qquad (r = 0,1,\cdots).$$

Ripetendo il ragionamento precedente, si ha che *condizione necessaria e sufficiente perchè esista un'autosoluzione* B'_2 *del sistema* (25) *è che esista un indice* s_2 *tale che risulti*

$$(26)\quad (F(M,P_{s_2}),F(M,P_{s_2})) > (F(M,P_{s_2}),B_1)^2 + \sum_0^\infty{}_r\,(F(M,P_{s_2}),v'_r)^2.$$

In tal caso si può porre

$$(27)\quad B'_2 \sim F(M,P_{s_2}) - (F(M,P_{s_2}),B_1)\,B_1 - \sum_0^\infty{}_r\,(F(M,P_{s_2}),v'_r)\,v'_r.$$

Come indice s_2 sceglieremo il *primo* intero positivo (necessariamente $> s_1$) per cui valga la (26).

Se poniamo poi

$$B_2 = B_2' (B_2', B_2')^{-\frac{1}{2}}, \tag{28}$$

B_2 risulta un'autosoluzione del sistema (20), normale e ortogonale a B_1.

Perciò le autosoluzioni del problema di Dirichlet

$$u_1(P) = -\frac{1}{k_m}\int_\sigma B_1(M)\,F(M,P)\,d\sigma,$$

$$u_2(P) = -\frac{1}{k_m}\int_\sigma B_2(M)\,F(M,P)\,d\sigma,$$

risultano linearmente indipendenti.

Così proseguendo si ottiene una successione $B_1, \cdots, B_p, \cdots$ di autosoluzioni del sistema (20), ortogonali e normali, cui corrispondono, per la (18), le autosoluzioni $u_1(P), \cdots, u_p(P), \cdots$ linearmente indipendenti.

Risulta poi, per $h > 1$,

$$B_h = B_h' (B_h', B_h')^{-\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

dove si è posto

$$B_h' \sim F(M,P_{s_h}) - \sum_1^{h-1}{}_i (F(M,P_{s_h}), B_i)\,B_i - \sum_0^\infty{}_r (F(M,P_{s_h}), v_r')\,v_r'. \tag{30}$$

Dimostriamo che *in tal modo si ottengono tutte le autosoluzioni del sistema* (20), *provando che, se* B *è una autosoluzione qualsiasi,* B *risulta necessariamente una combinazione lineare delle* B_h.

Infatti, supponiamo che esista un'autosoluzione B ortogonale a tutte le funzioni B_h.

Sarà

$$\begin{cases} (B, v_r') = 0 \\ (B, B_h) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Osserviamo ora che, per il modo stesso con cui si sono ottenute le funzioni B_h, ogni funzione $F(M,P_t)$ si può sviluppare in una serie del tipo

$$F(M,P_t) \sim \sum_1^{k_t}{}_i (F(M,P_t), B_i)\,B_i + \sum_0^\infty{}_r (F(M,P_t), v_r')\,v_r', \tag{32}$$

essendo k_t un intero positivo dipendente dal punto P_t.

Dalle (31), (32) segue allora

$$u(P_t) = -\frac{1}{k_m}\int_\sigma B(M)\,F(M,P_t)\,d\sigma = 0$$

e quindi, essendo la successione $\{P_i\}$ ovunque densa in $\tau - \sigma$,

$$u(P) \equiv 0$$

da cui, per la seconda delle (13),

$$B(M) \equiv 0.$$

Il sistema (31) non ammette perciò autosoluzioni, cioè la successione $\{B_h ; v'_r\}$ risulta chiusa.

Se B (M) è una autosoluzione del sistema (20) si ha allora necessariamente

$$B(M) \sim \sum (B, B_h) B_h$$

che dimostra la tesi.

Matematica. — *Sulla struttura delle funzioni bi-iperarmoniche* [1] *in tre variabili indipendenti* [2]. Nota [3] di C. Tolotti, presentata dal Socio M. Picone.

1. Sia u (P) una generica funzione bi-iperarmonica in un dominio D [4] – a tre dimensioni – regolare ed internamente connesso.

Si suole dare il nome di *decomposizioni di Almansi* alle seguenti rappresentazioni della u (P) mediante due convenienti funzioni u_k (P) ($k = 0, 1$) armoniche in D:

1ª)

$$u = u_0 + x\, u_1 , \tag{1}$$

con x distanza di P da un prefissato arbitrario piano π, presa con segno opposto da bande opposte di π;

2ª)

$$u = u_0 + \rho^2 u_1 , \tag{2}$$

con ρ distanza di P da un prefissato arbitrario punto O.

(1) Per l'uso della locuzione «funzioni bi-iperarmoniche» in luogo di quella classica «funzioni biarmoniche» cfr. M. Picone, *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica-Matematica.* «Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa», ser. II, vol. V, 1936, nota (4).

(2) Lavoro del Laboratorio di Analisi Superiore della R. Università di Roma, eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(3) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(4) Cioè, il cui campo di regolarità contenga D.

(5) Cfr. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. «Annali di Matematica», ser. III, to. II, 1899.

In merito a tali decomposizioni l'Almansi ha dimostrato [5] che la prima vale se il dominio D è *normale* [6] rispetto a π, mentre la seconda vale se D è *polarmente normale* [7] rispetto ad O e contiene O.

Non era stato però sinora stabilito quale sia la *più ampia* classe di domini D in cui valgono le decomposizioni (1) o (2), problema che è di massimo interesse per la conoscenza della struttura delle funzioni iperarmoniche.

Per l'analoga questione nel piano, tale classe è notoriamente [8] la classe dei domini semplicemente connessi. Profondamente diverso è invece il caso dello spazio. Precisamente, come mostro nella presente Nota, detta classe è, per la decomposizione (1), proprio la classe dei domini normali rispetto a π e, per la decomposizione (2), quella dei domini polarmente normali rispetto ad O (ma non necessariamente contenenti O).

Accanto alle decomposizioni d'Almansi (1) e (2), considero anche la seguente rappresentazione della $u(P)$ mediante quattro convenienti funzioni $u_k(P)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ armoniche in D:

$$u = u_0 + \rho_1^2 u_1 + \rho_2^2 u_2 + \rho_3^2 u_3 , \tag{3}$$

con ρ_1, ρ_2, ρ_3 distanze di P da tre prefissati arbitrari punti indipendenti O_1, O_2, O_3.

L'interesse della decomposizione (3) sta nel fatto che, a differenza delle (1), (2), essa vale *qualunque* sia D.

Mi riservo di riprendere, in una prossima Memoria, l'argomento di questa Nota trattandolo più completamente con riferimento a funzioni iperarmoniche di qualsivoglia ordine e in quante si vogliano variabili indipendenti.

2. Supposto il dominio D *non* normale rispetto a π, deve esistere una conveniente retta normale a π che abbia in comune con D almeno due segmenti separati da un intervallo costituito da punti tutti esterni a D.

Indicherò con P_0 un punto di questo intervallo, con x_0 la sua distanza da π, con r la distanza $|P_0 P|$, con Q_0 e Q le proiezioni ortogonali di di P_0 e P su π, con δ la distanza $|Q_0 Q|$, con a' la semiretta di origine

(6) Per *dominio normale* rispetto a π intendo, con il Picone (cfr. M. Picone, *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, ediz. litog., Roma, 1942, p. 306), ogni dominio definito da una limitazione del tipo $f_1(Q) \leq x \leq f_2(Q)$, con Q proiezione ortogonale di P su π ed $f_1(Q)$, $f_2(Q)$ funzioni regolari di Q soddisfacenti alla condizione $f_1(Q) < f_2(Q)$ in ogni punto interno al campo di variabilità di Q.

(7) Per *dominio polarmente normale* rispetto ad O intendo, con il Picone (cfr. loc. cit. (6), p. 310), ogni dominio definito da una limitazione del tipo $0 \leq f_1(Q) \leq \rho \leq f_2(Q)$, con Q proiezione di P da O sull'ipersuperficie sferica $\omega(O)$ di centro O e raggio uno ed $f_1(Q), f_2(Q)$ funzioni regolari di Q soddisfacenti alla condizione $f_1(Q) < f_2(Q)$ in ogni punto interno al campo di variabilità di Q.

(8) Cfr. T. Boggio, *Sulla deformazione delle piastre elastiche soggette al calore*. « Atti R. Acc. Scienze Torino », vol. XL, 1904-905, nota a pie' di p. 231.

P_0 che è ortogonale a π ed ha il verso delle x crescenti, con a'' la semiretta opposta.

Detto Δ l'operatore di Laplace, si ha da (1)

$$\Delta u = 2\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

che, ove si identifichi u colla funzione bi-iperarmonica r, diviene

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{r}. \tag{4}$$

Mi propongo qui di dimostrare che la (4) non ammette alcuna soluzione armonica nel dominio D considerato.

In proposito, osserverò anzitutto che, come è immediato verificare tenendo presente che $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + \delta^2}$, la funzione $\log(x - x_0 + r)$ è una soluzione di (4) analitica e regolare nell'insieme aperto A ottenuto privando D dei punti della semiretta a'': in tali punti, essendo $x - x_0 < 0$, $\delta = 0$, la funzione stessa diviene infinita.

Si provi ora a supporre che esista una soluzione $\bar{u}_1(P)$ di (4) armonica in D. La differenza $\bar{u}_1(P) - \log(x - x_0 + r)$ verrebbe allora ad essere una soluzione analitica e regolare in A dell'equazione (4) resa omogenea e, come tale, dovrebbe [9] risultare funzione della sola Q. Il che è in contrasto con il fatto che il limite per $Q \to Q_0$ di detta differenza è finito od infinito a seconda che, in corrispondenza, P tenda ad un punto di D appartenente alla semiretta a' o alla semiretta a''.

Quindi effettivamente la (4) non ammette alcuna soluzione armonica in D, cioè la funzione r è un esempio di funzione bi-iperarmonica che, pur essendo regolare nel dominio D non normale considerato, non è ivi suscettibile di una decomposizione del tipo (1).

Associando tale risultato a quello dell'Almansi riportato al n. 1, si può concludere che *condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni funzione bi-iperarmonica in* D *sia ivi suscettibile di una decomposizione del tipo* (1), *è che* D *sia normale rispetto a* π.

3. Si supponga ora che il dominio D *non* sia polarmente normale rispetto ad O. Deve esistere allora un conveniente raggio uscente da O che abbia in comune con D almeno due segmenti separati da un intervallo costituito da punti tutti esterni a D.

Indicherò con P_0 un punto di questo intervallo, con $\rho_0 \neq 0$ la sua distanza da O, con r la distanza $|P_0 P|$, con Q_0 e Q le proiezioni di P_0 e P da O sull'ipersuperficie sferica $\omega(O)$ di centro O e raggio uno, con γ l'angolo

(9) Si tenga presente che, essendo per ipotesi il dominio D internamente connesso, tale risulta anche l'insieme A.

(compreso tra o e π) formato dai vettori OP_0 ed OP, con a la semiretta di origine P_0 che ha la direzione ed il verso del vettore OP_0.

Si ha da (2)

$$\Delta u = \frac{4}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{\rho^3}\, u_1),$$

che, ove si identifichi u colla funzione bi-iperarmonica r, diviene

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{\rho^3}\, u_1) = \frac{\sqrt{\rho}}{2r}. \tag{5}$$

Per dimostrare che la (5) non ammette alcuna soluzione armonica in D, comincerò coll'osservare che, essendo $r = \sqrt{\rho^2 - 2\rho_0 \rho \cos\gamma + \rho_0^2}$, l'integrale

$$I(\rho, \gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\rho^3}} \int_0^{\rho} \sqrt{\frac{\tau}{\tau^2 - 2\rho_0 \tau \cos\gamma + \rho_0^2}}\, d\tau$$

è manifestamente una soluzione di (5) analitica e regolare nell'insieme aperto A ottenuto privando D dei punti della semiretta a.

Eseguendo la sostituzione $\tau = \rho_0 (\xi \operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma)$, l'integrale stesso si scrive

$$I(\rho, \gamma) = \frac{\sqrt{\rho_0}}{2\sqrt{\rho^3}} \int_{-\operatorname{cotg}\gamma}^{\frac{\rho - \rho_0 \cos\gamma}{\rho_0 \operatorname{sen}\gamma}} \sqrt{\frac{\xi \operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma}{\xi^2 + 1}}\, d\xi,$$

donde appare che nei punti di a, essendo $\gamma = 0$ e $\rho \geqq \rho_0$, $I(\rho, \gamma)$ diviene infinito.

Si provi ora a supporre che esista una soluzione $\bar{u}_1(P)$ di (5) armonica in D. La differenza $\bar{u}_1(P) - I(\rho, \gamma)$ verrebbe allora ad essere una soluzione analitica e regolare in A dell'equazione (5) resa omogenea e, pertanto, il prodotto $\sqrt{\rho^3}\,[\bar{u}_1(P) - I(\rho, \gamma)]$ dovrebbe [10] risultare funzione della sola Q. Il che è in contrasto con il fatto che il limite per $Q \to Q_0$ di detto prodotto è finito od infinito a seconda che, in corrispondenza, P tenda ad un punto di D appartenente al segmento OP_0 o alla semiretta a.

Quindi, effettivamente la (5) non ammette alcuna soluzione armonica in D, cioè la funzione bi-iperarmonica r, pur essendo regolare nel dominio D considerato, non è ivi suscettibile di una decomposizione del tipo (2).

Si può così affermare che *condizione necessaria affinchè ogni funzione bi-iperarmonica in* D *sia ivi suscettibile di una decomposizione del tipo* (2), *è che* D *sia polarmente normale rispetto ad* O.

Ho già ricordato al n. 1 esser stato dimostrato dall'Almansi che la condizione stessa diviene sufficiente se la si completa con quella che D

(10) Cfr. la nota (9).

contenga O. Ma, come mostrerò nella Memoria che ho già preannunciato, la detta condizione è sufficiente anche senza tale completamento.

4. Passerò qui, infine, ad occuparmi della decomposizione (3).

Intendendo che P_0 sia ora un punto arbitrariamente prefissato nello spazio, continuerò, come nei numeri precedenti, ad indicare con r la distanza $|P_0P|$, mentre indicherò con r_h la distanza $|P_0O_h|$ $(h = 1, 2, 3)$.

Introdurrò inoltre una terna cartesiana trirettangola $P_0\xi_1\xi_2\xi_3$ il cui asse ξ_1 sia ortogonale al piano $O_1O_2O_3$ e, rispetto a tale terna, dirò $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(h)}, \xi_3^{(h)}$ $(h = 1, 2, 3)$ le coordinate di O_h $(h = 1, 2, 3)$.

Con tali notazioni si ha

$$\rho_h^2 = r_h^2 + r^2 - 2(\xi_1^{(0)}\xi_1 + \xi_2^{(h)}\xi_2 + \xi_3^{(h)}\xi_3) \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{6}$$

È facile verificare, in base a (6), che è identicamente

$$r = v_0 + \rho_1^2 v_1 + \rho_2^2 v_2 + \rho_3^2 v_3, \tag{7}$$

colle $v_h(P, P_0)$ $(h = 0, 1, 2, 3)$ funzioni armoniche di P definite dal sistema

$$\begin{cases} v_0 + r_1^2 v_1 + r_2^2 v_2 + r_3^2 v_3 = \dfrac{4}{r}\xi_1^{(0)2} \\ v_1 + v_2 + v_3 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{2}{r^3}\xi_1^{(0)}\xi_1 \\ \xi_2^{(1)} v_1 + \xi_2^{(2)} v_2 + \xi_2^{(3)} v_3 = \dfrac{2}{r^3}\xi_1^{(0)2}\xi_2 \\ \xi_3^{(1)} v_1 + \xi_3^{(2)} v_2 + \xi_3^{(3)} v_3 = \dfrac{2}{r^3}\xi_1^{(0)2}\xi_3, \end{cases} \tag{8}$$

la cui risolubilità è assicurata dalla supposta indipendenza dei punti O_1, O_2, O_3.

Ricorderò d'altra parte la nota formola di Boggio [11]

$$u(P) = \frac{1}{8\pi}\sum_{k=0}^{1}\int_{FD}\left[\Delta^k u(P_0)\frac{d\Delta^{1-k}r}{d\nu} - \Delta^k r\frac{d\Delta^{1-k}u(P_0)}{d\nu}\right] d\,FD, \tag{9}$$

ove ν denota la normale interna alla frontiera FD di D e P_0 il punto corrente su FD.

Da (7), (9) segue immediatamente che, *qualunque sia il dominio* D *considerato, la* $u(P)$ *è suscettibile in* D *di una decomposizione del tipo* (3).

(11) Cfr. T. Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine n.* « Rend. Circ. Mat. Palermo », to. XX, 1905, p. 102.

Meccanica. — *Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità per i quali esiste la funzione lagrangiana.* Nota II di C. AGOSTINELLI, presentata [1] dal Socio U. AMALDI.

4. Facendo seguito alla Nota precedente, sé supponiamo ora che i vincoli siano indipendenti dal tempo, sussiste, come si sa, l'integrale della energia H = cost., ove la funzione caratteristica H è data dalla (3). Si sa pure che nel calcolo di H non influiscono i termini di L lineari nelle $\dot{q}$, che cioè risulta H = T — U, e pertanto nella (5) i termini della sommatoria $\sum_1^k{}_s U_s \dot{q}_s$, che derivano dalle componenti lagrangiane delle forze, lineari nelle velocità, hanno carattere *girostatico* [2].

Supponiamo inoltre che la funzione L, definita dalla (5) ammetta un certo numero di coordinate ignorabili e siano esse $q_1, q_2, \cdots, q_m$, $(m < k)$. È noto come in questo caso esistono gli *m integrali dei momenti*, che del resto seguono subito dalle (2),

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + U_i = \alpha_i \text{ (cost.)}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{12}$$

e che per mezzo delle (12) l'integrazione del sistema (2) è riducibile alla integrazione di un nuovo sistema lagrangiano con le $k - m$ incognite $q_{m+1}, q_{m+2}, \cdots, q_k$, di funzione lagrangiana ridotta

$$L^* = L - \sum_1^m{}_i \alpha_i \dot{q}_i,$$

ove nel secondo membro alle $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ si intendono sostituite le espressioni che si ricavano dalle (12) in termini delle q_h e $\dot{q}_h$, $(h = m + 1, \cdots, k)$ [3].

Il nuovo sistema ridotto di funzione lagrangiana L* è equivalente dunque a un sistema olonomo con $k - m$ gradi di libertà; ma in esso, in generale, i termini equivalenti alle forze non derivano da un potenziale.

Vogliamo ora mettere in luce la circostanza notevole che *nel caso in cui nell'espressione della forza viva* $T = \frac{1}{2} \sum_1^k{}_{ih} a_{ih} \dot{q}_i \dot{q}_h$, *mancano i termini bilineari nelle* $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, *e* $\dot{q}_h$ $(h = m + 1, \cdots, k)$, *che cioè siano nulli i coefficienti* a_{ih} *per* $i = 1, 2, \cdots, m$, *ed* $h = m + 1, \cdots, k$, *e che le*

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, p. 370 (Zanichelli, Bologna, 1926).

(3) Idem, p. 374.

funzioni U_h *siano nulle per* $h = m+1, \cdots, k$, *allora il sistema ridotto è equivalente a un sistema olonomo con* $k - m$ *gradi di libertà, con vincoli indipendenti dal tempo e soggetto a forze conservative.*

Per vedere ciò, osserviamo intanto che nel caso generale in cui sia $T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{k}{}_{rs} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$, dalle (12) si ricava

$$\dot{q}_i = \sum_{1}^{m}{}_j \varphi^{ij}(\alpha_j - U_j - \lambda_j), \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{12'}$$

ove $\varphi^{ij} = \varphi^{ji}$ è l'elemento reciproco di $a_{ij} = a_{ji}$ nel determinante minore $\Phi = \|a_{ij}\|$, $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$, (cioè il valore del complemento algebrico di a_{ij}, diviso per Φ), mentre si è posto

$$\lambda_j = \sum_{m+1}^{n}{}_h a_{jh}\dot{q}_h, \qquad (j = 1, 2, \cdots, m). \tag{14}$$

Separando nella T i termini quadratici nelle $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, i termini bilineari nelle $\dot{q}_i, \dot{q}_h$ $(i = 1, 2, \cdots, m\ ;\ h = m+1, \cdots, k)$, e i termini quadratici nelle $\dot{q}_h$ $(h = m+1, \cdots, k)$, possiamo scrivere:

$$T = T' + B + T^*, \quad \text{con} \quad T' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j; \tag{15}$$

$$B = \sum_{1}^{m}{}_i \sum_{m+1}^{k}{}_h a_{ih}\dot{q}_i\dot{q}_h \quad , \quad T^* = \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{k}{}_{rs} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s.$$

In virtù delle (12') e (14) risulta

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_{\mu\nu}(\alpha_\mu - U_\mu - \lambda_\mu)(\alpha_\nu - U_\nu - \lambda_\nu)\sum_{1}^{m}{}_i \varphi^{i\mu}\sum_{1}^{m}{}_j a_{ij}\varphi^{j\nu}$$

ma

$$\sum_{1}^{m}{}_j a_{ij}\varphi^{j\nu} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq \nu, \\ 1 & \text{»} \quad i = \nu, \end{cases}$$

ne segue

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_{ij}\varphi^{ij}(\alpha_i - U_i - \lambda_i)(\alpha_j - U_j - \lambda_j),$$

e posto

$$\left.\begin{aligned} T'_0 &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_{ij}\varphi^{ij}(\alpha_i - U_i)(\alpha_j - U_j), \\ T'_1 &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_{ij}\varphi^{ij}[\lambda_i(\alpha_j - U_j) + \lambda_j(\alpha_i - U_i)] = \sum_{1}^{m}{}_{ij}\varphi^{ij}\lambda_i(\alpha_j - U_j), \\ T'_2 &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_{ij}\varphi^{ij}\lambda_i\lambda_j, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

si ha

$$T' = T'_0 - T'_1 + T'_2. \tag{17}$$

Analogamente risulta

$$B = \sum_{1}^{m}{}_{i} \lambda_i \dot{q}_i = \sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} \lambda_i (\alpha_j - U_j - \lambda_j) = T_1' - 2 T_2',$$

e così pure

$$\sum_{1}^{m}{}_{i} \alpha_i \dot{q}_i = \sum_{1}^{m}{}_{ij} \alpha_i \varphi^{ij} (\alpha_j - U_j - \lambda_j).$$

Segue allora, ricordando la (15) e la (5),

$$(18) \quad T = (T_0' - T_1' + T_2') + (T_1' - 2 T_2) + T^* = T_0' - T_2' + T^*,$$

$$L = T + \sum_{1}^{m}{}_{i} U_i \dot{q}_i + \sum_{m+1}^{k}{}_{h} U_h \dot{q}_h + U =$$

$$= T + \sum_{1}^{m}{}_{ij} U_i \varphi^{ij} (\alpha_j - U_j - \lambda_j) + \sum_{m+1}^{k}{}_{h} U_h \dot{q}_h + U$$

ed

$$L^* = L - \sum_{1}^{m}{}_{i} \alpha_i \dot{q}_i = T - \sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} (\alpha_i - U_i)(\alpha_j - U_j - \lambda_j) +$$

$$+ \sum_{m+1}^{k}{}_{h} U_h \dot{q}_h + U = T - 2 T_0' + T_1' + \sum_{m+1}^{n}{}_{h} U_h \dot{q}_h + U,$$

cioè

$$(19) \qquad L^* = T^* + T_1' - T_0' - T_2' + \sum_{m+1}^{n}{}_{h} U_h \dot{q}_h + U.$$

Di qui, osservando che T^* e T_2' sono funzioni omogenee di 2° grado nelle $\dot{q}_h$ ($h = m+1, \cdots, k$), mentre T_1' è funzione omogenea di 1° grado nelle stesse $\dot{q}_h$, e T_0 è di grado zero, si deduce in ogni caso

$$\sum_{m+1}^{k}{}_{h} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h = 2 T^* + T_1' - 2 T_2' + \sum_{m+1}^{k}{}_{h} U_h \dot{q}_h,$$

e pertanto la funzione caratteristica H^* del sistema lagrangiano ridotto risulta:

$$H^* \equiv \sum_{m+1}^{k}{}_{h} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L^* = T^* + T_0' - T_2' - U,$$

cioè

$$(20) \quad H^* = T^* + \frac{1}{2} \sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} (\alpha_i - U_i)(\alpha_j - U_j) - \frac{1}{2} \sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} \lambda_i \lambda_j - U.$$

Ciò premesso, affinchè il sistema ridotto, di funzione caratteristica L^*, sia equivalente ad un sistema olonomo con $k - m$ gradi di libertà con vincoli indipendenti dal tempo e soggetto a forze derivanti da un potenziale, devono intanto annullarsi nella (19) i termini lineari nelle velocità, cioè

$$T_1' + \sum_{m+1}^{n}{}_{h} U_h \dot{q}_h = 0,$$

ovvero, ricordando la (14),

$$\sum_{m+1}^{n}{}_h \left[\sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} (\alpha_j - U_j) a_{jh} + U_h \right] \dot{q}_h = 0 ,$$

e quindi

$$\sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} (\alpha_j - U_j) a_{ih} + U_h = 0 , \qquad (h = m+1, \cdots, k).$$

Poichè le α_j sono costanti arbitrarie, e le φ^{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$ non possono essere tutte nulle, affinchè queste ultime relazioni siano identicamente soddisfatte occorre che sia

$$a_{ih} = 0 , \quad (i = 1, 2, \cdots, m \; ; \; h = m+1, \cdots, k).$$

$$U_h = 0 , \qquad (h = m+1, \cdots, k).$$

Dopo ciò, per la (14), sono nulle le λ_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$, e per la terza delle (16) è nullo anche T_2'. La (19) si riduce allora alla

$$L^* = T^* + U - T_0' = T^* + U - \frac{1}{2} \sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} (\alpha_i - U_i) (\alpha_j - U_j) ,$$

che è la funzione lagrangiana di un sistema olonomo con $k - m$ gradi di libertà, con vincoli indipendenti dal tempo, di energia cinetica

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_{m+1}^{k}{}_{rs} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s ,$$

e le cui forze derivano dal potenziale

$$U^* = U - \frac{1}{2} \sum_{1}^{m}{}_{ij} \varphi^{ij} (\alpha_i - U_i) (\alpha_j - U_j) .$$

Resta così provato quanto abbiamo affermato al principio di questo numero.

5. Nel caso particolare di un punto libero, soggetto a forza funzione lineare della velocità, e che ammette la funzione lagrangiana, abbiamo già visto che l'equazione del moto è della forma (11), e per la (5) risulta

$$L = T + \sum_{1}^{3}{}_s U_s \dot{q}_s + U ,$$

ove in coordinate lagrangiane generiche q_1, q_2, q_3 è

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j .$$

Se di più la L non contiene esplicitamente il tempo e supponiamo che ci sia una coordinata ignorata, e questa sia q_1, si ha l'integrale

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_1^3{}_i a_{1i}\dot{q}_i + U_1 = c \text{ (cost.)}. \tag{21}$$

Supposto inoltre che sia $a_{12} = a_{13} = 0$, ed $U_2 = U_3 = 0$, per quanto si è dimostrato nel numero precedente, il moto del punto, in virtù dell'integrale (21), si riduce al moto di un sistema con due gradi di libertà di funzione lagrangiana ridotta

$$L^* = T^* + U - \frac{1}{2}\frac{(c - U_1)^2}{a_{11}},$$

con

$$T^* = \frac{1}{2}(a_{22}\dot{q}_2^2 + 2a_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + a_{33}\dot{q}_3^2),$$

e soggetto a forze derivanti dal potenziale

$$U^* = U - \frac{1}{2}\frac{(c - U_1)^2}{a_{11}}.$$

Questi risultati contengono in particolare quelli da me stabiliti in diversi lavori relativi al moto di un corpuscolo elettrizzato nel campo di un dipolo magnetico e che interessa il problema delle aurore boreali, nei quali lavori stabilii per il primo, e direttamente, l'integrale analogo all'integrale (21), che chiamai, per il suo significato meccanico, integrale delle aree, e per mezzo del quale ridussi il problema di moto accennato a un problema piano conservativo (1).

(1) Vedi C. Agostinelli, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 73, 1937–38; Idem, *Integrazione dell'equazione di Jacobi alla quale dà luogo il problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico.* « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei », vol. XXVIII, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 7–8, 1938; Idem, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo magnetico simmetrico rispetto a un asse e integrazione del problema in un caso particolare.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 74, 1938–39; Idem, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico e in prossimità del piano equatoriale.* « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXII, fasc. II, 1938–39; Idem, *Sulla risoluzione analitica del problema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico.* « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », ser. 2ª, to. 69, parte I, 1938–39).

Meccanica. — *Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite* [1]. Nota I di C. Tolotti, presentata [2] dal Corrisp. A. Signorini.

1. L'ordinaria approssimata trattazione della Statica delle verghe elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite si fonda notoriamente sull'associazione delle equazioni d'equilibrio del generico elemento di verga a certe espressioni dei momenti flettenti e torcente che generalizzano la nota legge di proporzionalità tra curvatura e momento flettente enunciata da Bernoulli ed Eulero per le verghe semplicemente inflesse.

Lo studio delle equazioni che derivano da tale associazione è classico [3]: citerò qui soltanto l'elegante teorema di Kirchhoff secondo cui, per una verga cilindrica sollecitata alle estremità, dette equazioni si identificano con quelle del moto di un corpo rigido attorno ad un punto fisso.

Non mi consta invece che siano state studiate le equazioni che derivano analogamente - per una generica lastra elastica sottile - dall'associare le equazioni d'equilibrio del generico elemento di questa alle espressioni dei momenti flettenti e torcenti che si sogliono assumere [4] nelle lastre elastiche, per deformazioni pseudofinite, in parallelo alla citata legge di Bernoulli ed Eulero.

Nella presente Nota [5] io mostro che l'eliminazione, in base alle suddette espressioni, dei momenti flettenti e torcenti dalle equazioni d'equilibrio delle lastre - eliminazione che a priori sembrerebbe dover portare ad equazioni complicate - porta invece, ove si sfruttino accortamente le equazioni di Gauss e Codazzi della teoria delle superficie, ad equazioni di forma semplice.

Precisamente, le equazioni a cui in definitiva così pervengo sono quattro negli sforzi normali e di taglio tangenti alla lastra. Di esse, tre non sono altro che le classiche equazioni di Beltrami della Statica delle superficie flessibili ed inestendibili *con dei termini correttivi che tengono conto della elasticità di flessione della lastra stessa.* La quarta è l'equazione che viene a sostituire per le lastre elastiche la relazione di simmetria degli sforzi di taglio notoriamente sussistente nelle lastre perfettamente flessibili.

(1) Per « deformazioni pseudofinite » di un generico sistema continuo intendo, come ormai è d'uso, quelle deformazioni in cui risulta infinitesima la deformazione pura e finita la rotazione rigida locale. Notoriamente deformazioni siffatte possono realizzarsi soltanto nei sistemi sottili.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) Cfr., ad esempio, A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Cambridge Univ. Press, 1927, cap. XIX.

(4) Cfr. loc. cit. (3), p. 530.

(5) Che sarà prossimamente completata da una Nota successiva.

Segnalerò il risultato che tale relazione di simmetria degli sforzi di taglio continua a sussistere anche nelle lastre elastiche soggette a deformazioni pseudofinite *quando e solo quando la deformazione della superficie media della lastra può confondersi con una flessione che conservi le linee di curvatura*: in particolare, ciò accade certamente se la lastra, nello stato naturale, è piana o sferica.

Per raggiungere il pareggiamento tra numero di equazioni e numero di incognite, alle sopradette quattro equazioni vanno aggiunte le tre equazioni di Gauss e Codazzi: si hanno così sette equazioni alle derivate parziali nei quattro sforzi normali e di taglio tangenti alla lastra e nelle tre componenti dello spostamento del generico punto della superficie media di questa.

Trattasi di equazioni lineari negli sforzi, ma non negli spostamenti. Ciononostante esse, almeno in casi speciali, sono affrontabili. Particolarmente interessante è il caso delle lastre a superficie media sviluppabile: dei risultati che sono riuscito a stabilire per queste lastre riferirò in un prossimo lavoro.

2. Sia S_* la superficie media della lastra in uno stato naturale alla temperatura uniforme considerata.

Stabilito su S_* un arbitrario sistema di coordinate curvilinee, dirò q_1, q_2 le coordinate del generico punto Q_* di S_*. Inoltre, fissata in uno spazio euclideo rappresentativo un'arbitraria terna cartesiana trirettangola $O\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$, indicherò con $Q' = O + q_1\boldsymbol{c}_1 + q_2\boldsymbol{c}_2$ il punto del piano $O\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2$ che corrisponde a Q_*, con S' la regione di tale piano che corrisponde ad S_*, con c' il suo contorno, con $\boldsymbol{n}'$ il versore della relativa normale interna.

Penserò associato ad ogni punto Q_* di S_* un triedro trirettangolo $\mathcal{T}_* \equiv Q_*\,\boldsymbol{i}_1^*\,\boldsymbol{i}_2^*\,\boldsymbol{i}_3^*$ con $\boldsymbol{i}_3^*$ normale ad S_* ed $\boldsymbol{i}_1^*$ formante un angolo ψ (funzione regolare di Q_*) colla linea coordinata q_1 che passa per Q_*. Indicherò con ξ_*, ω_* (rispettivamente *omografia delle traslazioni* ed *omografia delle rotazioni*) le omografie definite dall'essere $\xi_*\,\boldsymbol{c}_3 = \omega_*\,\boldsymbol{c}_3 = 0$ mentre $\xi_*\,\boldsymbol{c}_s$ e $\omega_*\,\boldsymbol{c}_s$ $(s = 1, 2)$ dànno i vettori caratteristici, rispetto al polo Q_*, del moto a cui resta soggetto il triedro $\mathcal{T}_*$ quando si interpreti q_s come variabile temporale.

Per la supposta pseudofinitezza delle deformazioni della lastra, la configurazione attuale di S_* può, a meno di uno spostamento infinitesimo, confondersi con una superficie S applicabile su S_*.

Al corrispondente Q di Q_* su S penserò associato il triedro trirettangolo $\mathcal{T} \equiv Q\,\boldsymbol{i}_1\,\boldsymbol{i}_2\,\boldsymbol{i}_3$ con $\boldsymbol{i}_3$ normale ad S ed $\boldsymbol{i}_1$ formante ancora l'angolo ψ colla linea coordinata q_1 che passa per Q. Denoterò con ξ, ω rispettivamente l'omografia delle traslazioni e l'omografia delle rotazioni relative a $\mathcal{T}$.

Assumerò come prima forma fondamentale comune ad S ed S_*:

$$dQ^2 = dQ_*^2 = A_1^2\,dq_1^2 + A_2^2\,dq_2^2 + 2\,A_1\,A_2\cos\varphi\,dq_1\,dq_2\,.$$

Porrò inoltre per $r, s = 1, 2, 3$

$$\xi_{rs} = \boldsymbol{i}_r^* \times \xi_* \boldsymbol{c}_s = \boldsymbol{i}_r \times \xi \boldsymbol{c}_s \quad , \quad p_{rs}^* = \boldsymbol{i}_r^* \times \omega_* \boldsymbol{c}_s \quad ; \quad p_{rs} = \boldsymbol{i}_r \times \omega \boldsymbol{c}_s ,$$

osservando che, per ipotesi, è

$$\xi_{r3} = p_{r3}^* = p_{r3} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{1}$$

nonchè, stante l'ortogonalità di $\boldsymbol{i}_3^*$ ed $\boldsymbol{i}_3$ rispettivamente ad S_* ed S,

$$\xi_{31} = \xi_{32} = 0 . \tag{2}$$

Indicherò infine con λ, μ le omografie definite dall'essere $\lambda \boldsymbol{c}_3 = \mu \boldsymbol{c}_3 = 0$ mentre $\lambda \boldsymbol{c}_1 \, dq_2$ ($\lambda \boldsymbol{c}_2 \, dq_1$) e $\mu \boldsymbol{c}_1 \, dq_2$ ($\mu \boldsymbol{c}_2 \, dq_1$) dànno il risultante ed il momento risultante, rispetto a Q, degli sforzi agenti attualmente – dalla parte ove le q_1 (q_2) sono minori – sulla sezione della lastra colla rigata delle normali ad S condotte lungo l'elemento $A_2 \, dq_2$ ($A_1 \, dq_1$) di linea coordinata passante per Q.

Porrò per $r, s = 1, 2, 3$

$$\lambda_{rs} = \boldsymbol{i}_r \times \lambda \boldsymbol{c}_s \quad , \quad \mu_{rs} = \boldsymbol{i}_r \times \mu \boldsymbol{c}_s ,$$

con che, per ipotesi, è

$$\lambda_{r3} = \mu_{r3} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{3}$$

e, stante l'ortogonalità di $\boldsymbol{i}_3$ ad S,

$$\mu_{31} = \mu_{32} = 0 . \tag{4}$$

È bene osservare che, nel caso $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, $\frac{1}{A_2} \lambda_{11}$ e $\frac{1}{A_1} \lambda_{22}$ assumono il significato di sforzi normali, $\frac{1}{A_2} \lambda_{21}$ e $\frac{1}{A_1} \lambda_{12}$ quello di sforzi di taglio (tangenti ad S), $\frac{1}{A_2} \lambda_{31}$ e $\frac{1}{A_1} \lambda_{32}$ quello di sforzi di taglio (normali ad S), $\frac{1}{A_2} \mu_{21}$ e $\frac{1}{A_1} \mu_{12}$ quello di momenti flettenti ed infinè $\frac{1}{A_2} \mu_{11}$ e $\frac{1}{A_1} \mu_{22}$ quello di momenti torcenti.

Ricorderò ora che, nell'ipotesi che le linee coordinate siano linee di curvatura di S_* e che sia inoltre $\psi = 0$, il Love assume[6] come espressione di $\mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{12}, \mu_{22}$, per deformazioni pseudofinite,

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_{11} &= (1 - \varkappa) B p_{22} \\ \mu_{21} &= B A_2 \left[- \left(\frac{p_{21}}{A_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_1^*} \right) + \varkappa \left(\frac{p_{12}}{A_2} - \frac{1}{\mathfrak{R}_2^*} \right) \right] \\ \mu_{12} &= B A_1 \left[- \left(\frac{p_{12}}{A_2} - \frac{1}{\mathfrak{R}_2^*} \right) + \varkappa \left(\frac{p_{21}}{A_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_1^*} \right) \right] \\ \mu_{22} &= (1 - \varkappa) B p_{11} , \end{aligned} \right. \tag{5}$$

(6) Cfr. loc. cit. (3), p. 530.

ove $\mathcal{R}_1^*$, $\mathcal{R}_2^*$ denotano i raggi principali di curvatura di S_* [7], B è la rigidità flessionale della lastra (che supporrò costante) e $\varkappa$ è il rapporto di Poisson.

Come subito verificherò, le (3_2), (4), (5) corrispondono alla seguente formola omografica [8]

$$\mu = B\,[\mathcal{H}\xi - (1-\varkappa)\,i_3 \wedge \omega]\,c_3 \wedge - \\ - B\eta\eta_*^{-1}\,[\mathcal{H}_*\xi_* - (1-\varkappa)\,i_3^* \wedge \omega_*]\,c_3 \wedge , \tag{6}$$

con $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{H}_*$ rispettivamente curvature medie di S ed S_* ed η, η_* omografie definite da

$$\eta = \xi + H(c_3, i_3) \quad , \quad \eta_* = \xi_* + H(c_3, i_3^*) . \tag{7}$$

Difatti la (6) equivale alle (3_2), (4) e alle seguenti relazioni (che nulla presuppongono nè sulla scelta delle linee coordinate, nè su quella di ψ)

$$\begin{cases} \mu_{11} = B\,[(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)\,\xi_{12} + (1-\varkappa)\,(p_{22} - p_{22}^*)] \\ \mu_{21} = B\,[(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)\,\xi_{22} - (1-\varkappa)\,(p_{12} - p_{12}^*)] \\ \mu_{12} = B\,[-(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)\,\xi_{11} - (1-\varkappa)\,(p_{21} - p_{21}^*)] \\ \mu_{22} = B\,[-(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)\,\xi_{21} + (1-\varkappa)\,(p_{11} - p_{11}^*)] . \end{cases} \tag{8}$$

E d'altra parte, tenendo presente che [9]

$$\begin{cases} \mathcal{H} = \dfrac{1}{I_2\,\xi}\,(\xi_{11}\,p_{12} + \xi_{21}\,p_{22} - \xi_{12}\,p_{11} - \xi_{22}\,p_{21}) \\ \mathcal{H}_* = \dfrac{1}{I_2\,\xi}\,(\xi_{11}\,p_{12}^* + \xi_{21}\,p_{22}^* - \xi_{12}\,p_{11}^* - \xi_{22}\,p_{21}^*) , \end{cases} \tag{9}$$

è immediato verificare che, nel caso considerato dal Love, essendo [10]

$$\begin{cases} \xi_{11} = A_1 \quad , \quad \xi_{22} = A_2 \quad , \quad \xi_{21} = \xi_{12} = 0 , \\ p_{11}^* = p_{22}^* = 0 \quad , \quad p_{21}^* = -\dfrac{A_1}{\mathcal{R}_1^*} \quad , \quad p_{12}^* = \dfrac{A_2}{\mathcal{R}_2^*} , \end{cases} \tag{10}$$

le (8) si riducono alle (5).

3. Dirò $\mathbf{M}\,dS'$ il momento risultante, rispetto a Q, delle forze esterne alla lastra agenti sulla fibra delimitata dalle normali ad S condotte lungo il contorno dell'areola dS circondante Q (ed avente per corrispondente, su S', dS').

(7) Ciascun raggio principale di curvatura va inteso positivo o negativo a seconda che il relativo centro di curvatura si trova sulla semiretta $Q_* i_3^*$ o sulla semiretta opposta.

(8) Qui e nel seguito mi valgo delle notazioni introdotte in C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Trasformazioni lineari*. Bologna, Zanichelli, 1929.

(9) Cfr. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Paris, Gauthier-Villars, 1915, parte II, p. 394.

(10) Cfr. loc. cit. (9), p. 398.

Stante l'ortogonalità di $\mathbf{M}$ ad S, è possibile porre

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{i}_3 \wedge \mathbf{N}, \tag{11}$$

con $\mathbf{N}$ conveniente vettore normale ad $\boldsymbol{i}_3$.

La seconda equazione cardinale della Statica applicata alla suddetta fibra si scrive [11]

$$\operatorname{grad}_{Q'} \mu + 2\mathbf{V}(\lambda \mathrm{K} \xi) = \mathbf{M}. \tag{12}$$

Mi propongo qui di esplicitare, tenendo conto di (6), l'equazione che si ottiene moltiplicando la (12) vettorialmente per $\boldsymbol{i}_3$.

A tale scopo comincerò col dimostrare che si ha da (6)

$$\boldsymbol{i}_3 \wedge \operatorname{grad}_{Q'} \mu = -\mathrm{B}\mathrm{R}\eta \operatorname{grad}_{Q'} (\mathcal{H} - \mathcal{H}_*). \tag{13}$$

Ricorderò in proposito le note equazioni di Gauss e Codazzi della teoria delle superficie [12]:

$$\frac{\partial p_{r1}}{\partial q_2} - \frac{\partial p_{r2}}{\partial q_1} = p_{r+1,1} p_{r+2,2} - p_{r+2,1} p_{r+1,2} \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{14}$$

$$\xi_{11} p_{22} - \xi_{21} p_{12} - \xi_{12} p_{21} + \xi_{22} p_{11} = 0, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_{11}}{\partial q_2} - \dfrac{\partial \xi_{12}}{\partial q_1} = \xi_{21} p_{32} - \xi_{22} p_{31} \\ \dfrac{\partial \xi_{21}}{\partial q_2} - \dfrac{\partial \xi_{22}}{\partial q_1} + \xi_{12} p_{31} - \xi_{11} p_{32}, \end{cases} \tag{16}$$

formole del tutto analoghe valendo per le p^*.

È inoltre, stante (4), [13]

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_1 \times \operatorname{grad}_{Q'} \mu = \displaystyle\sum_1^2{}_s \left(\frac{\partial \mu_{1s}}{\partial q_s} - p_{3s} \mu_{2s} \right) \\ \boldsymbol{i}_2 \times \operatorname{grad}_{Q'} \mu = \displaystyle\sum_1^2{}_s \left(\frac{\partial \mu_{2s}}{\partial q_s} + p_{3s} \mu_{1s} \right). \end{cases} \tag{17}$$

(11) Cfr. C. Tolotti, *Proprietà di media dello stress nelle lastre curve comunque spesse in equilibrio*. Questi «Rendiconti», questo volume, p. 187.

(12) Cfr. loc. cit. (9), p. 394.

(13) Si tenga presente che, qualunque sia l'omografia γ funzione regolare di Q', è [cfr. loc. cit. (8), pp. 176 e 226] per $r = 1, 2, 3$

$$\boldsymbol{i}_r \times \operatorname{grad}_{Q'} \gamma = \operatorname{div}_{Q'} (\mathrm{K}\gamma \boldsymbol{i}_r) - \mathrm{I}_1 \left(\frac{d\boldsymbol{i}_r}{dQ'} \cdot \mathrm{K}\gamma \right),$$

donde, essendo per le note formule di Poisson della cinematica dei sistemi rigidi

$$\frac{d\boldsymbol{i}_r}{dQ'} = -\boldsymbol{i}_r \wedge \omega,$$

traesi poi

$$\boldsymbol{i}_r \times \operatorname{grad}_{Q'} \gamma = \operatorname{div}_{Q'} (\mathrm{K}\gamma \boldsymbol{i}_r) + \mathrm{I}_1 (\boldsymbol{i}_r \wedge \omega \mathrm{K}\gamma) =$$
$$= \operatorname{div}_{Q'} (\mathrm{K}\gamma \boldsymbol{i}_r) + \mathrm{K}\omega \boldsymbol{i}_{r+1} \times \mathrm{K}\gamma \boldsymbol{i}_{r+2} - \mathrm{K}\omega \boldsymbol{i}_{r+2} \times \mathrm{K}\gamma \boldsymbol{i}_{r+1}.$$

Mediante sostituzione di (8) in (17), si ha poi, in virtù delle sopra riportate equazioni di Gauss e Codazzi:

$$(18)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{i}_1 \times \operatorname{grad}_{Q'} \mu = B\left(\xi_{12}\dfrac{\partial}{\partial q_1} - \xi_{11}\dfrac{\partial}{\partial q_2}\right)(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*) \\ \boldsymbol{i}_2 \times \operatorname{grad}_{Q'} \mu = B\left(\xi_{22}\dfrac{\partial}{\partial q_1} - \xi_{21}\dfrac{\partial}{\partial q_2}\right)(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*), \end{cases}$$

relazioni che, come è immediato constatare, non differiscono dalla (13), che resta pertanto dimostrata.

Accanto alla (13) segnalerò la formola di facile verifica [14]

$$(19)\qquad 2\,\boldsymbol{i}_3 \wedge \mathbf{V}(\lambda K \xi) = \xi K \lambda \boldsymbol{i}_3 .$$

Moltiplicando la (12) vettorialmente per $\boldsymbol{i}_3$, si ottiene quindi, tenendo conto di (11), (13), (19),

$$\xi K \lambda \boldsymbol{i}_3 = BR\eta \operatorname{grad}_{Q'}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*) - \mathbf{N},$$

ossia, stante (3_1), (7_1),

$$(20)\qquad K\lambda \boldsymbol{i}_3 = \eta^{-1}[BR\eta \operatorname{grad}_{Q'}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*) - \mathbf{N}].$$

La (20) esprime gli sforzi di taglio normali ad S. Notevole è la circostanza che in essa le omografie ω ed ω_* compaiono solo pel tramite della variazione $\mathcal{H} - \mathcal{H}_*$ di curvatura media.

Astronomia (Astrofisica). — *Righe proibite del Sodio nello spettro solare*[1]. Nota di G. Righini e M. L. Catani, presentata[2] dal Socio G. Abetti.

Fra le righe del Sodio identificate nello spettro solare, la *Rowland Revision* (R. R.)[3] elenca anche il doppietto proibito $3\,^2P - 4\,^2F$. Poichè tali righe appaiono facilmente in campo elettrico, è interessante vedere se la loro identificazione può essere convalidata per via indiretta dato che si conosce almeno l'ordine di grandezza della pressione elettronica nella atmosfera solare.

Si è proceduto anzitutto ad una nuova misura delle lunghezze d'onda impiegando il secondo ordine dello spettrografo della torre solare di

(14) Basta tener presente che [cfr. loc. cit. (8), pp. 71 e 72]

$$2\,\mathbf{V}(\lambda K \xi) = -2\,\mathbf{V}(\xi K \lambda) = \sum_1^3{}_r\, \xi K \lambda \boldsymbol{i}_r \wedge \boldsymbol{i}_r .$$

(1) Lavoro eseguito presso l'Osservatorio Astrofisico di Arcetri.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) *Revision of Rowland's preliminary tables...* Carnegie Institution. Washington, 1928.

Arcetri che dà una dispersione di 1.26 A/mm. Quale sorgente abbiamo usato un arco fra carboni in aria, l'elettrodo negativo veniva forato e riempito di cloruro di sodio finemente polverizzato e compresso. Gli spettrogrammi sono stati presi su Agfa Fotomeccaniche con pose da 3 a 6 minuti alimentando l'arco con correnti diverse da 6 a 10 amp. Lo spettro di confronto era dato da un arco *standard* di Pfund fra elettrodi di Fe e veniva fotografato prima e dopo aver preso ciascun spettro del Na per controllare eventuali spostamenti avvenuti durante la posa. Le misure eseguite con lo spettrocomparatore Mioni prendendo come riferimento le normali secondarie dello spettro del Fe e riducendo a condizioni standard 15° C. e 760 mm. di pressione [4], hanno dato i seguenti risultati:

$\lambda_\odot$	Transizione	Intensità disco	Intensità macchie	λ_{arco}	$\odot$ — Arco
5675.733	$3\,^2P_{3/2} - 4\,^2F$	— 2 *d*	—	5675.674 ± 0.036	+ 0.059
5670.152	$3\,^2P_{1/2} - 4\,^2F$	— 3	— 2	5670.062 0.009	0.090.

Si è trovato qualche difficoltà nel puntare le righe causa il loro aspetto diffuso. Le intensità della terza colonna sono tolte dalla R. R. e dalle tavole della Moore [5] per le macchie solari. Da notare il fatto che la 5675 manca fra le righe dello spettro delle macchie e che la 5670 non viene attribuita al sodio nelle tabelle della Moore.

Le coincidenze fortuite di righe nell'ambito ± 0.09 A. per la zona spettrale che interessa ammontano in media al 40 % [6]. D'altronde, poichè il doppietto in questione è il più intenso della serie $^2P - {}^2F$ non si può sperare una conferma dell'identificazione dalle coincidenze di altre righe della serie con righe solari.

La prova più forte contro la correttezza della identificazione è quella data dalle intensità [7]. Una misura della larghezza equivalente per queste righe non è possibile causa la vicinanza di altre righe più intense; si può invece rilevare assai bene la loro intensità centrale e per mezzo di questa avere un valore sufficientemente esatto della larghezza equivalente. A questo scopo abbiamo rilevato dall'atlante fotometrico dello spettro solare [8] larghezze equivalenti e intensità centrali di una dozzina di righe ben isolate, per mezzo delle quali si è costruito un grafico che è servito per la interpolazione delle larghezze equivalenti A_λ delle due righe in questione. Dallo stesso atlante abbiamo determinato le larghezze equivalenti delle due righe

(4) «Transactions of the International Astronomical Union.», vol. V e VI, 1935–1938.

(5) Ch. E. Moore, *Atomic lines in the sun-spot spectrum*. Princeton, 1933.

(6) Russell e Bowen, «Ap. J.», *69*, 196 (1929).

(7) Intensità e profili di alcune righe proibite del Na sono stati misurati da Rosa, «N. C.», XI, 380; Carrelli e Battista, id., 685, 1934.

(8) Minnaert, Houtgast e Mulders, *Photometric Atlas of the solar spectrum*.

$3\,^2P - 4\,^2D$; $\lambda = 5682$ e 5688 A. I risultati espressi in *milliangström* sono dati nella tabella seguente:

λ		A_λ (in m. A)	$\log \frac{A_\lambda}{2\,\Delta\lambda_D}$	$\log \frac{NHf}{\Delta\omega_D}$
5688.220	$3\,^2P_{3/2} - 4\,^2D_{3/2\,5/2}$	143	+ 0.26	+ 2.60
5682.630	$3\,^2P_{1/2} - 4\,^2D_{3/2\,5/2}$	134	+ 0.19	+ 2.20
5675.733	$3\,^2P_{3/2} - 4\,^2F$	46	— 0.22	+ 1.05
5670.152	$3\,^2P_{1/2} - 4\,^2F$	22	— 0.57	+ 0.60

$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c}\sqrt{2\,RT/\mu}$ è la larghezza della riga per effetto Doppler atomico; μ il peso atomico del sodio, R la costante dei gas e $T = 5700°$ K è la temperatura del sole.

Nella curva di crescenza [9] i valori delle righe $^2P - {}^2D$ giacciono all'inizio del tratto intermedio, mentre quelli del doppietto $^2P - {}^2F$ si trovano nel tratto inferiore rettilineo. Poichè la costante di smorzamento non influisce sensibilmente sulla formazione delle righe $^2P - {}^2D$, possiamo determinare $\log NHf/\Delta\omega_D$ per i due doppietti riferendoci alla curva con $a = 10^{-3}$; i risultati sono contenuti nella colonna quinta della tabella precedente.

Il rapporto fra il terzo e il primo e fra il quarto e il secondo valore ci dà il rapporto degli f essendo il valore di NH lo stesso per le due righe della coppia e $\Delta\omega_D$, che è la larghezza termica espressa in unità di frequenza circolare, sensibilmente la stessa per tutte le righe. Si ottiene così:

$$f_{3P-4F} = 0.027\, f_{3P-4D}$$

e poichè $f_{3P-4D} = 0.108$ si ha:

$$f_{3P-4F} = 0.0029\,.$$

Ma si ha pure:

$$(a) \qquad f_{mn} = \frac{2}{3}\,\frac{g_n}{g_m}\,\frac{\pi^2\, m\nu}{he^2}\,P^2_{nm}$$

dove g sono i pesi statistici e P il momento elettrico del dipolo relativo alla transizione. Poichè in questo caso non si tratta di radiazione di quadripolo, ma di radiazione indotta di dipolo (*Erzwungene Dipolstrahlung*), abbiamo anche [10]:

$$P^{\sigma}_{\sigma_1} = \frac{1}{2\,hc}\sum\left\{\frac{a^{\sigma'}_{\sigma}\,a^{\sigma'}_{\sigma_1}}{\nu^{\sigma'}_{\sigma_1}} + \frac{a^{\sigma_1}_{\sigma'}\,a^{\sigma'}_{\sigma}}{\nu^{\sigma'}_{\sigma}}\right\} E\,e^{2\pi i\nu^{\sigma}_{\sigma_1}t}$$

(9) Unsöld, *Physik der Sternatmosphäeren*. Springer, Berlin, 1938, p. 268.

(10) Rubinowicz e Blaton, *Ergebnisse der exacten Naturwissenschaften*. B. XI, 1932.

dove σ' è un livello generico che si combina per dipolo con σ e σ_1 le a sono le ampiezze del momento di dipolo relativo alle transizioni segnate, ν il numero d'onda ed E il campo elettrico in u. e. s.

Per i due livelli $3\,^2P$ e $4\,^2F$ abbiamo come livelli intermedi tutti i livelli ^2D; però, la transizione che porta il massimo contributo alla sommatoria in confronto al quale tutti gli altri sono trascurabili, è la $4\,^2D - 4\,^2F$. L'unico termine della sommatoria che ci interessa calcolare è quindi

$$a^{4D}_{3P}\, a^{4F}_{4D} / \nu^{4D}_{4F}.$$

Dalla (a) abbiamo

$$P^2_{nm} = a^2_{nm} = 8 \times 10^{-30} f_{mn}\, g_m / \nu^m_n\, g_n$$

con ν in cm^{-1}, ed essendo:

$f_{3P-4F} = 0.0029$ $\quad f_{3P-4D} = 0.108$ $\quad f_{4D-4F} = 0.015$

$\nu_{3P-4F} = 17623$ $\quad \nu_{3P-4D} = 17583$ $\quad \nu_{4D-4F} = 40$

si ottiene:

$$E = 47 \text{ u. e. s.} = 14 \text{ kV/cm.}$$

Dalla teoria di Holtsmark abbiamo pure che essendo il campo elettrico proporzionale al (numero di cariche per cmc)$^{2/3}$, la pressione elettronica P_e risulta:

$$P_e = 1.56 \times 10^{-3}\, TE^{\frac{3}{2}} = \approx 3 \times 10^3 \text{ barie.}$$

Per quanto si sa attualmente, questo valore è almeno cento volte quello della pressione elettronica dell'atmosfera solare, per cui si deve concludere che è estremamente improbabile che le due righe 5675.733 e 5670.152 siano da identificarsi come il doppietto $3\,^2P - 4\,^2F$ del sodio.

Astronomia. — *La pioggia a Roma negli ultimi cento anni.* Nota di GABRIELLA ARMELLINI CONTI, presentata[1] dal Socio G. ARMELLINI.

1. La grande siccità avvenuta nel passato anno 1945 e che, come ora vedremo, è fortunatamente *unica* in tutto il secolo qui considerato, mi ha indotta ad esaminare la distribuzione delle pioggie a Roma negli ultimi cento anni e cioè dal 1° gennaio 1846 al 31 dicembre 1945. Fonti delle mie ricerche sono stati i registri del R. Osservatorio del Campidoglio, i Bollettini Meteorologici del P. A. Secchi ed infine, dal 1937 in poi, i registri delle osservazioni del R. Osservatorio di Monte Mario, dove appunto in quell'anno venne trasferita la nostra specola, dopo centodieci anni (1827-1937) di permanenza al Campidoglio.

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Cfr. «R. Osservatorio del Campidoglio», *La pioggia ed altre meteore a Roma nel periodo 1873-1912*. Roma, Tip. Unione Editrice, 1914.

Eseguendo la sommatoria di tutte le pioggie, ho trovato che *in tutto il secolo* (1846-1945) *la quantità di pioggia caduta a Roma equivale a metri ottantadue e millimetri trecentonovantaquattro.* Ho ottenuto, cioè, una *pioggia media di 824 mm. all'anno.*

Osserviamo anzitutto che questo mio risultato differisce notevolmente da quello ottenuto dai prof.ri A. Di Legge e F. Giacomelli, che ebbero [2] come media annuale della pioggia a Roma mm. 875. Ma ciò si deve al fatto che i suddetti astronomi esaminarono soltanto un quarantennio (1873-1912), il quale inoltre risultò grandemente influenzato dall'eccessiva precipitazione che, come ora diremo, si verificò nei primi anni del secolo presente.

Dai registri delle osservazioni sopra accennati, e che generalmente dànno le pioggie quotidiane, dopo compite le opportune sommatorie, ho poi avuto i risultati che riporto nella Tabella I, dove la prima colonna indica l'anno, la seconda la quantità *totale* di pioggia in mm. caduta nell'anno stesso a Roma, mentre la terza dà lo *scarto s* e cioè la differenza (in valore e segno) tra la pioggia caduta e la pioggia media di 824 mm.

2. Dall'esame della Tabella I, possiamo trarre alcune conseguenze interessanti e cioè:

a) La *media* della pioggia annuale a Roma, è di mm. 824 come già avevamo detto.

b) L'*oscillazione massima* della pioggia annuale, verificatasi nel centennio esaminato, è stata di 945 mm., differenza tra la pioggia caduta nel 1900, che fu l'anno più piovoso, ed il 1945, che fu l'anno più asciutto.

c) L'*anno più piovoso* del centennio è stato il 1900, con una pioggia di 1357 mm. Ad esso seguono: il 1915 con una pioggia di 1243 mm.; il 1875 con 1164 mm.; il 1889 con 1141 mm.; il 1872 con 1048 mm. ecc.

d) L'*anno più asciutto* del centennio è stato il 1945, in cui la pioggia si è ridotta a 413 mm. e cioè alla *metà* del normale. Ad esso seguono: il 1912 con 476 mm.; il 1849 con 512 mm.; il 1866 con 522 mm., ecc.

3. Vale la pena di esaminare se gli scarti della pioggia annua dal valore medio seguano, o no, le regole degli scarti normali dei fenomeni casuali, che vengono date dalla teoria delle probabilità.

Per studiare questo problema, ho fatto anzitutto la somma dei quadrati dei cento scarti dati dalla Tabella I, ottenendo

$$(1) \qquad \sum s^2 = 2587329 .$$

Dividendo quindi per 100 ed estraendo la radice quadrata, ho avuto per lo scarto quadratico medio: $S = 161$ mm. e da questo ho ottenuto per lo scarto probabile: $S' = 0{,}476 \cdot S\sqrt{2} = 107$ mm. In conseguenza, se gli scarti delle pioggie annue a Roma seguissero la legge normale, noi dovremmo trovare, nel centennio esaminato, circa *cinquanta* anni in cui lo scarto (preso in valore assoluto) è inferiore a 107 mm.

TABELLA I.

Anno	Pioggia	s	Anno	Pioggia	s	Anno	Pioggia	s
1846	966	142	1872	1048	324	1897	859	35
47	799	— 25	73	803	— 21	98	812	— 12
48	638	— 186	74	880	56	99	868	46
49	512	— 312	75	1164	340	1900	1357	533
50	742	— 82				1	958	134
51	801	— 23	1876	772	— 52	2	876	52
52	554	— 270	77	727	— 97	3	962	38
53	962	138	78	1015	191	4	818	— 6
54	754	— 70	79	833	9	5	994	170
55	881	57	80	561	— 263			
			81	951	127	1906	1048	224
1856	801	— 23	82	717	— 107	7	1081	257
57	768	— 56	83	843	19	8	769	— 55
58	860	36	84	945	121	9	939	115
59	717	— 107	85	937	113	10	806	— 18
60	970	146				11	787	— 37
61	661	— 163	1886	845	21	12	476	— 348
62	949	125	87	1044	220	13	723	— 101
63	911	87	88	765	— 59	14	813	— 11
64	830	6	89	1141	317	15	1243	419
65	688	— 136	90	847	23			
			91	754	— 70	1916	859	35
1866	522	— 302	92	927	103	17	829	5
67	738	— 86	93	662	— 162	18	747	— 77
68	913	89	94	600	— 224	19	633	— 191
69	721	— 103	95	863	39	20	592	— 232
70	813	— 11				21	811	— 13
71	660	— 164	1896	992	168	22	817	— 7

Segue: TABELLA I.

Anno	Pioggia	s	Anno	Pioggia	s	Anno	Pioggia	s
1923	.798	— 26	1931	733	— 91	1938	653	— 171
24	743	— 81	32	690	— 134	39	805	— 19
25	725	— 99	33	1019	195	1940	773	— 51
			34	728	— 96	41	1056	232
1926	618	— 206	35	838	14	42	781	— 43
27	935	111				43	890	66
28	905	81	1936	690	— 134	44	697	— 127
29	731	— 93	37	1091	267	45	413	— 411
30	831	7						

Ora, esaminando la Tabella I, vediamo invece che il numero degli anni in cui lo scarto è inferiore a 107 mm. è di *cinquantanove*. Sembrerebbe quindi che la distribuzione sia *ipernormale*; e cioè che gli scarti si mantengano alquanto inferiori ai valori che essi avrebbero se il fenomeno fosse puramente casuale.

Ma ad un'opposta conclusione sono arrivata esaminando la frequenza dei grandi scarti.

Poniamo, per brevità,

$$(2) \qquad k = \frac{1}{S\sqrt{2}} = 0{,}00439 .$$

Si ha allora, dal Calcolo delle Probabilità, che in un fenomeno casuale, la probabilità P affinchè lo scarto (preso sempre in valore assoluto) superi α è dato dalla formola

$$(3) \qquad P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\alpha} e^{-t^2} dt = 1 - \vartheta(k\alpha)$$

dove ϑ è l'integrale geodetico esteso da 0 a $k\alpha$.

Con questa formola, essendo $k = 0{,}00439$, ho trovato che la probabilità affinchè lo scarto superi rispettivamente 200 mm., 300 mm., 400 mm. e 500 mm. sono date da

$$P_{200} = 1 - \vartheta(0{,}88) = 0{,}213$$
$$P_{300} = 1 - \vartheta(1{,}32) = 0{,}062$$
$$P_{400} = 1 - \vartheta(1{,}76) = 0{,}013$$
$$P_{500} = 1 - \vartheta(2{,}20) = 0{,}002.$$

In conseguenza, su *cento anni*, dovremmo averne *ventuno* in cui lo scarto supera i 200 mm.; *sei* in cui lo scarto supera 300 mm.; *uno* in cui lo scarto supera 400 mm. e *nessuno* in cui lo scarto supera 500 mm. Invece la tabella ora riportata ci mostra che, nel centennio considerato avemmo *diciannove* anni in cui lo scarto (sempre considerato in valore assoluto) superò 200 mm.; *nove* anni in cui superò 300 mm.; *tre* anni in cui superò 400 mm. ed *un anno* (il 1900) in cui superò 500 mm.

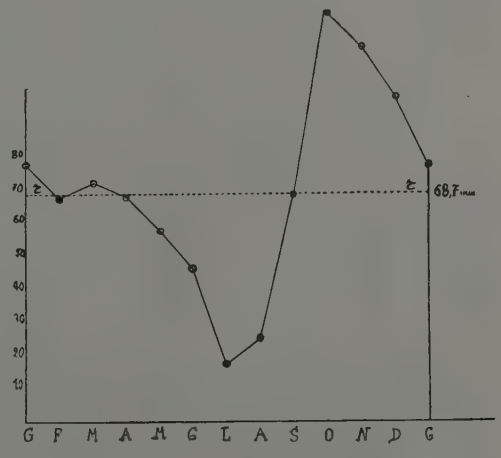
Come si vede, i grandi scarti sono *più frequenti* di quel che comporterebbe la teoria delle probabilità per un fenomeno puramente casuale, ciò che indica evidentemente la presenza di cause perturbatrici. Da questo lato potrebbe dirsi che la distribuzione delle pioggie intorno alla media è una distribuzione *iponormale*.

4. Ma ad altre conseguenze, che mi sembrano non prive d'interesse, sono pervenuta esaminando la quantità totale di pioggia caduta nei dieci decenni che formano il centennio studiato.

Tenendo presente la Tabella I ed eseguendo le somme abbiamo il seguente prospetto

	Decennio	Pioggia totale		Decennio	Pioggia totale
I	(1846-1855)	7609 mm.	VI	(1896–1905)	9496 mm.
II	(1856–1865)	8155 »	VII	(1906–1915)	8685 »
III	(1866–1875)	8262 »	VIII	(1916–1925)	7554 »
IV	(1876–1885)	8301 »	IX	(1926–1935)	8028 »
V	(1886–1895)	8448 »	X	(1936–1945)	7849 »

Come risulta da questo specchietto, *la quantità totale di pioggia presenta un continuo aumento nei primi sei decenni e quindi – dopo aver toccato un massimo di 9496 mm. nel VI° decennio* (1896–1905) *– torna nuovamente a decrescere sebbene con qualche oscillazione.*



Sarebbe difficile ammettere che il fenomeno sia puramente casuale: e cioè che, per puro caso, il II° decennio abbia avuto una quantità di pioggia maggiore del I°, il III° decennio maggiore del II° e così di seguito fino al VI°, per poi cominciare la discesa. Sembra quindi più logico ritenere che ci troviamo in presenza di una *vera oscillazione a lungo periodo* (dovuta a cause che ancora ci sfug-

gono) che probabilmente continua a ripetersi anche in connessione con altri fenomeni meteorologici (temperatura, venti, ecc.). Per studiare l'interessante fenomeno, che non era stato fin qui messo in luce da altri, mi sono proposta di esaminare documenti più antichi e tra gli altri le osservazioni della Specola Caetani di Piazza S. Maria Maggiore che fu, per così dire, la madre dell'Osservatorio del Campidoglio, e di cui abbiamo i registri (sebbene con qualche lacuna) a partire dal 1780.

Tabella II.

Mese	Massimo	Anno	Minimo	Anno
Gennaio	210,5 mm.	1915	2,7 mm.	1932
Febbraio	193,1	1853	0,0	1863-1891
Marzo	174,6	1939	0,5	1893
Aprile	205,5	1879	2,2	1865-1893
Maggio.	152,6	1879	0,0	1869
Giugno.	139,0	1850	0,0	1931-1945
Luglio	112,9	1893	0,0	1846-55-62-63-64-71-73-79-80-81-84-94-95 - 1912-20-22-29-31-39-41
Agosto.	104,7	1867	0,0	1849-64-94 - 1907-23-1927
Settembre	202,9	1901	2,2	1934
Ottobre	334,9	1896	20,0	1923
Novembre. . . .	344,8	1878	13,1	1924
Dicembre	258,8	1903	4,9	1851

5. Passando ora ad esaminare la distribuzione della pioggia nei dodici mesi, abbiamo il seguente specchietto che ci dà la quantità totale di pioggia caduta nei cento mesi di gennaio, nei cento mesi di febbraio, ecc.

Gennaio	7704 mm.	Maggio	5711 mm.	Settembre	6822 mm.
Febbraio	6608 »	Giugno	4059 »	Ottobre	12257 »
Marzo	7162 »	Luglio	1732 »	Novembre	11215 »
Aprile	6746 »	Agosto	2522 »	Dicembre	9835 »

Dividendo per 100 e riportando le pioggie come ordinate ed i mesi come ascisse, abbiamo il diagramma qui riprodotto che ci dà *la distribuzione della pioggia annua a Roma*, quale risulta dalle osservazioni degli ultimi cento anni; la media mensile è ovviamente eguale ad 824 : 12 = 68,7 mm., come è indicato dalla retta *rr*.

Vediamo subito che *il mese più piovoso è l'ottobre*, a cui segue a poca distanza novembre e quindi dicembre. Il *mese più asciutto è luglio*, seguito

immediatamente dall'agosto; ed anzi la quantità di pioggia che cade in ottobre risulta in media oltre *sette volte maggiore* di quella che cade in luglio, ciò che dimostra quanto irregolarmente sia ripartita la pioggia durante il corso dell'anno.

Ovviamente, nei vari anni la distribuzione delle pioggie differirà più o meno dalla distribuzione normale, che abbiamo ora trovato eseguendo le medie del centennio. Per brevità, noi ci limiteremo a riportare i massimi ed i minimi di pioggia di ciascun mese, con l'indicazione dell'anno a cui si riferiscono, nella Tabella II.

Come vediamo dalla Tabella II, nel centennio considerato, il mese di *luglio* è stato *venti volte completamente asciutto*; il mese di *agosto, sei volte*; il mese di *giugno, due volte*; il mese di *febbraio, due volte*; il mese di *maggio, una volta*. Il *mese più piovoso del secolo* è stato invece il *novembre 1878*, con una precipitazione totale di mm. 344,8.

Astronomia. — *Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, eseguita in primo verticale.* Nota II di M. Cimino, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

Nella presente Nota II dò i particolari di una mia determinazione di latitudine eseguita all'Osservatorio di Monte Mario, facendo seguito ad una Nota precedente [2] dallo stesso titolo.

Nella Tabella III riporto i dati essenziali della determinazione. Accanto al numero che contraddistingue la stella figurano nell'ordine: la data di osservazione, la posizione dell'oculare all'inizio del passaggio ad Est, le differenze $t_4 - t_1$ e $t_3 - t_2$ per ciascun filo su cui ho osservato il passaggio (non corrette dello stato del pendolo), la declinazione apparente δ secondo il sistema dell'*F. K. 3* (quella secondo il *N. G. C.* si ottiene subito aggiungendo la correzione Δ_δ della Tabella II della Nota precedente), la correzione i del livello, e infine le latitudini osservate φ_F e φ_N, rispettivamente secondo il sistema di declinazioni dell'*F. K. 3* o del *N. G. C.*

Nella Tabella IV dò inoltre, accanto al numero che contraddistingue la stella e alla data: il numero dei fili su cui ciascun passaggio è stato osservato, le medie φ_F e φ_N per ogni passaggio, e le medie $\bar{\varphi}_F$ e $\bar{\varphi}_N$ di tutte le determinazioni riguardanti ciascuna stella, coi rispettivi *errori probabili* (di tali medie).

Facendo invece la media di tutti i valori φ_F e φ_N della Tabella III ho ottenuto le *medie generali di tutte le osservazioni*, già riportate nel § 1 della Nota precedente assieme ai rispettivi *errori probabili* (di tali medie).

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », vol. I, fasc. I, p. 72.

TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1943				+		**41°55′**	**41°55′**
1	6 II	N	$1^h54^m55^s.98$	$1^h35^m35^s.06$	41° 09′ 33″.12	+ 0″.18	19″.57	19″.34
			1 53 57 .49	1 36 44 .42			19 .55	19 .32
			1 52 54 .47	1 37 57 .91			19 .66	19 .43
			1 51 56 .83	1 39 02 .41			19 .19	18 .96
			1 50 57 .14	1 40 09 .37			19 .31	19 .08
1	20–II	N	1 54 50 .36	1 35 41 .81	41 09 33 .76	— 0 .11	19 .85	19 .64
			1 53 51 .92	1 36 51 .98			20 .25	20 .05
			1 52 48 .24	1 38 04 .29			19 .63	19 .43
			1 51 51 .40	1 39 09 .53			19 .89	19 .69
			1 50 51 .12	1 40 15 .97			19 .59	19 .38
			1 48 24 .95	1 42 53 .52			19 .59	19 .38
			1 47 14 .57	1 44 07 .75			19. 99	19 .78
1	22–II	S	1 54 00. .59	1 36 38 .33	41 09 33 .84	+ 0 .74	20 .00	19 .80
			1 52 54 .81	1 37 54 .56			19 .65	19 .44
			1 51 46 .76	1 39 11 .76			19 .58	19 .37
			1 50 50 .24	1 40 15 .82			20 .05	19 .84
			1 49 56 .79	1 41 14 .10			19 .93	19 .73
1	24–II	N	1 54 50 .21	1 35 42 .12	41 09 33 .87	— 0 .03	20 .07	19 .86
			1 53 50 .54	1 36 52 .96			20 .16	19. 96
			1 52 48 .17	1 38 05 .15			20 .12	19 .91
			1 51 51 .27	1 39 08 .88			19 .74	19 .53
			1 50 51 .83	1 40 16 .21			20 .19	19 .98
			1 48 24 .68	1 42 54 .65			20 .12	19 .91
			1 47 13 .30	1 44 08 .44			19 .90	19 .70

Segue: TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1943				+		**41°55′**	**41°55′**
2	6–II	S	$2^h50^m05^s.91$	$2^h39^m09^s.50$	40° 02′ 59″.96	+ 0″.43	19″.91	20″.05
			2 49 21 .48	2 39 55 .29			18 .95	19 .08
			2 48 36 .75	2 40 42 .97			19 .37	19 .51
			2 47 59 .08	2 41 22 .49			19 .54	19. 67
			2 47 23 .78	2 41 58 .92			19 .47	19 .60
2	20–II	S	2 48 02 .97	2 41 18 .17	40 03 00 .69	+ 0 .10	19 .70	19 .86
			2 47 27 .88	2 41 54 .16			19 .42	19 .58
			2 45 51 .97	2 43 32 .96			19 .89	20 .05
2	22–II	N	2 50 41 .27	2 38 29 .12	40 03 00 .80	+ 0 .36	18 .83	18 .94
			2 50 01 .88	2 39 11 .93			19 .30	19 .44
			2 49 20 .50	2 39 56 .11			19 .54	19 .67
			2 48 42 .53	2 40 35 .51			19 .14	19 .27
			2 48 02 .71	2 41 17 .39			19 .35	19 .48
			2 46 27 .40	2 42 55 .38			19 .19	19 .32
3	23–II	S	3 11 57. 47	3 06 05 .71	39 26 32 .28	+ 0 .19	19 .37	19 .40
			3 11 26 .86	3 06 37 .49			19. 63	19 .66
3	24–II	S	3 13 47 .99	3 04 11 .14	39 26 32 .36	+ 0 .13	19 .62	19. 65
			3 13 10 .24	3 04 50 .34			19 .38	19 .41
			3 12 30 .94	3 05 31 .45			19 .62	19 .65
			3 11 57 .59	3 06 06 .09			19 .78	19 .81
			3 11 27 .56	3 06 36 .84			19 .71	19 .74
3	25–II	N	3 14 17 .07	3 03 41 .18	39 26 32 .43	— 0 .23	19 .81	19 .85
			3 13 42 .06	3 04 17 .34			19 .29	19 .33
			3 13 05 .63	3 04 55 .84			19 .65	19 .68
			3 12 32 .70	3 05 29 .36			19 .10	19 .14
			3 11 58 .10	3 06 05 .30			19 .27	19 .30

Segue: TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1943				+		**41°55′**	**41°55**
3	1-III	N	$3^h14^m16^s.49$	$3^h03^m40^s.42$	39° 26′ 32″.62	+ 0″.48	19″.57	19″.60
			3 13 41 .96	3 04 17 .12			19 .94	19 .98
			3 13 05 .17	3 04 54 .95			19 .47	19 .50
			3 12 32 .30	3 05 29 .59			19 .85	19 .88
			3 11 57 .90	3 06 04 .97			19 .73	19 .76
4	3-III	S	3 14 48 .56	3 05 14 .44	39 24 52 .69	+ 0 .16	19 .92	20 .06
			3 14 10 .76	3 05 53 .51			19 .54	19 .69
			3 13 32 .20	3 06 34 .20			20 .04	20 .18
			3 12 59 .22	3 07 08 .00			19 .87	20 .02
			3 12 28 .34	3 07 39 .64			19 .80	19 .95
4	4-III	N	3 15 16 .74	3 04 44 .56	39 24 52 .80	— 0 .02	19 .69	19 .84
			3 14 42 .46	3 05 19 .94			19. 19	19 .34
			3 14 06 .14	3 05 58 .68			19 .83	19 .98
			3 13 32 .45	3 06 32 .52			18 .94	19 .08
			3 12 58 .39	3 07 08. 71			19 .76	19 .91
5	5-III	S	2 04 34 .85	1 48 54 .94	40 59 09 .28	— 0 .19	20 .12	20 .05
			2 03 34 .50	1 50 02 .09			19 .93	19 .86
			2 02 32 .51	1 51 10 .50			19 .46	19 .39
			2 01 40 .51	1 52 08 .71			20 .14	20 .07
			2 00 51 .52	1 52 59 .87			19 .44	19 .37
			1 58 37 .53	1 55 21 .30			19 .93	19 .86
6	26-III	N	1 43 38 .64	1 21 55 .25	41 19 38 .36	— 0 .15	19 .64	19 .48
			1 42 33 .96	1 23 16 .50			19 .85	19 .69
			1 41 22 .85	1 24 41 .57			19 .54	19 .39
			1 40 19 .65	1 25 56 .44			19 .64	19 .48

Segue: TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_P	φ_N
	1943				+		**41°55′**	**41°55**
6	26-III	N	$1^h39^m11^s.17$	$1^h27^m13^s.69$	41° 19′ 38″.36	−0″.15	19″.12	18″.96
			1 36 28 .80	1 30 14 .34			19 .80	19 .65
			1 35 09 .51	1 31 37 .29			19 .57	19 .41
6	7-IV	S	1 42 42 .28	1 22 59 .34	41 19 40 .31	+0 .14	19 .74	19 .58
			1 41 29 .25	1 24 28 .03			19 .74	19 .58
			1 40 14 .12	1 25 56 .26			19 .55	19 .39
			1 39 09 .99	1 27 11 .15			19 .95	19 .80
			1 38 10 .46	1 28 18 .03			19 .97	19 .82
			1 35 22 .71	1 31 18 .54			19 .95	19 .80
6	10-IV	N	1 43 36 .13	1 21 52 .10	41 19 40 .69	+0 .05	20 .03	19 .87
			1 42 31 .70	1 23 12 .81			20 .22	20 .06
			1 41 20 .88	1 24 38 .71			20 .24	20 .08
			1 40 17 .83	1 25 53 .80			20 .50	20 .34
			1 39 08 .98	1 27 10 .73			19 .67	19 .52
			1 36 26 .59	1 30 10 .97			20 .19	20. 04
			1 35 06 .91	1 31 34 .78			20 .14	19. 99
6	13 IV	S	1 42 41 .59	1 22 57 .77	41 19 41 .10	+0 .17	19 .77	19 .61
			1 41 28 .64	1 24 26 .19			19 .65	19 .50
			1 40 13 .79	1 25 55 .02			19 .79	19 .64
			1 39 09 .76	1 27 08 .99			19 .93	19 .78
			1 38 09 .41	1 28 16 .78			19 .93	19 .78
			1 35 22 .41	1 31 15 .83			19 .65	19 .50
			1 34 05 .66	1 32 35 .70			19 .96	19 .80

Segue: TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1943				+		**41°55′**	**41°55′**
6	16-IV	N	$1^h43^m35^s.28$	$1^h21^m50^s.40$	41° 19′ 41″.58	−0″.03	19″.90	19″.74
			1 42 30. 57	1 23 10 .76			19 .80	19 .65
			1 41 19 .57	1 24 36 .64			19 .78	19 .63
			1 40 16 .06	1 25 51 .68			19 .80	19 .65
			1 39 08 .76	1 27 08 .81			19 .71	19 .56
			1 36 25 .42	1 30 09 .51			19 .99	19 .84
			1 35 05 .02	1 31 33 .12			19 .62	19 .46
6	17-IV	S	1 42 40 .92	1 22 57 .25	41 19 41 .75	+ 0 .29	20 .08	19 .95
			1 41 28 .48	1 24 25 .41			20 .08	19 .95
			1 40 12 .90	1 25 54 .95			20 .15	20 .02
			1 39 08 .96	1 27 08 .41			20 .15	20 .02
			1 38 09 .36	1 28 16 .26			20 .48	20 .35
			1 35 21 .71	1 31 15 .59			20 .03	19 .90
			1 34 05 .05	1 32 34 .18			19 .89	19 .76
6	19-IV	N	1 43 34 .11	1 21 49 .15	41 19 42 .06	+ 0. 37	19 .87	19 .74
			1 42 29 .02	1 23 10 .03			19 .80	19 .67
			1 41 18 .52	1 24 35 .61			19 .87	19 .74
			1 40 14 .52	1 25 50 .04			19 .47	19 .34
			1 39 07 .57	1 27 08 .60			20 .02	19 .88
			1 36 23 .51	1 30 08 .84			19 .87	19 .74
			1 35 03 .96	1 31 32 .63			19 .87	19 .74
7	26-IV	N	1 01 25 .22	0 13 43 .95	41 47 15 .09	+ 1 .28	19 .96	19 .75
			0 59 27 .22	0 20 45 .22			20 .60	20 .40
			0 57 37 .04	0 25 21 .99			20 .38	20 .15
			0 55 38 .29	0 29 24 .92			20 .15	19 .94
			0 48 00 .53	0 40 41 .30			20 .20	19 .99

(*Il seguito ad una prossima Nota*).

Geodesia. — *Su talune relazioni ricorrenti fra le matrici normali angolari.* Nota di G. Boaga, presentata [1] dal Socio G. Cassinis.

Nei moderni metodi di compensazione rigorosa delle reti geodetiche un ruolo di grande importanza assumono la matrici (quadrate) normali angolari costituite da $(n-1)^2$ elementi, definiti dalle [2]:

$$(1)\qquad N_n = \begin{Vmatrix} +3 & -1 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +3 & -1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +3 & -1 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +3 & -1\cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & -1 & +3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 & +3 \end{Vmatrix}.$$

Per mezzo di esse riesce possibile esprimere i valori dei correlativi e conseguentemente quelli delle correzioni direzionali osservate, necessarie per ridurre a forma geometrica le reti.

Sviluppando secondo gli elementi della prima riga il particolare determinante continuante di ordine $n-1$ corrispondente alla (1) si trova la relazione ricorrente:

$$(2)\qquad N_n = 3\,N_{n-1} - N_{n-2}$$

ed ancora, sviluppando il determinante con la « regola di Laplace » secondo i minori delle prime m righe:

$$(3)\qquad N_n = N_m\,N_{n-m+1} - N_{n-m}.$$

Dalla (1) in particolare scendono le:

$$N_2 = 3\quad,\quad N_3 = 8\quad,\quad N_4 = 21$$

e dalla (2) successivamente:

$N_5 = 55$	$N_8 = 987$	$N_{11} = 17711$
$N_6 = 144$	$N_9 = 2584$	$N_{12} = 46368$
$N_7 = 377$	$N_{10} = 6765$	ecc.

Onde rendere valida la (2) anche per $n = 2$ si devono fare le posizioni:

$$N_0 = 0\qquad N_1 = 1.$$

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Cfr. A. Marcantoni, *Fondamenti di moderni metodi di calcolo per la compensazione rigorosa delle reti geodetiche.* « Rivista l'Universo » dell'I. G. M., anno 1944.

I termini della serie divergente:

$$N_0 N_1 N_2 N_3 \cdots N_n \cdots$$

sono utilizzati dai geodeti, come si disse, nella Teoria della compensazione rigorosa delle reti trigonometriche; come vedremo, esse non sono legate soltanto dalle relazioni ricorrenti (2) e (3), sussistendo altre relazioni – molto suggestive – che hanno particolare interesse in vista della larga applicazione che oggi vanno assumendo i moderni metodi di compensazione.

Riducendo il secondo membro della (2) a zero si ha:

$$N_n - 3\,N_{n-1} + N_{n-2} = 0 \tag{4}$$

ed i coefficienti che accompagnano gli N sono ordinatamente: $+1$, -3, $+1$. In relazione a ciò, posto:

$$f(x) = N_1 x + N_2 x^2 + N_3 x^3 + \cdots + N_n x^n \tag{5}$$

moltiplicando i due membri per il trinomio $x^2 - 3x + 1$, tenendo conto della (4) e dei valori numerici di N_1 e N_2, si trova:

$$(x^2 - 3x + 1) f(x) = x - N_{n+1} x^{n+1} + N_n x^{n+2} \tag{6}$$

onde eliminando dalle ultime due la funzione $f(x)$ si deduce la:

$$\sum_1^n{}_r N_r x^r = \frac{x - N_{n+1} x^{n+1} + N_n x^{n+2}}{x^2 - 3x + 1}$$

valevole per qualunque valore di x non radice del trinomio a denominatore. In particolare, ponendo in questa dapprima $x = +1$, poi $x = -1$, si traggono le seguenti relazioni:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n = N_{n+1} - N_n - 1 \tag{8}$$

$$N_1 - N_2 + N_3 - \cdots + (-1)^{n+1} N_n = \frac{1}{5}(-1)^{n+1}\{N_{n+1} + N_n + (-1)^{n+1}\}. \tag{9}$$

La (8) permette dunque il calcolo del termine N_{n+1} per mezzo della somma di tutti i precedenti e del primo e del precedente mediante la

$$N_{n+1} = N_1 + N_n + \sum_1^n{}_r N_r. \tag{10}$$

Nelle (8) e (9) considerando nei primi membri un numero dispari di addendi $(2n+1)$ e addizionando membro a membro le due relazioni, si trova facilmente la

$$N_1 + N_3 + \cdots + N_{2n+1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}(N_{2n+2} + N_{2n+1} + 1) + N_{2n+2} - N_{2n+1} - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\{N_{2n+3} - N_{2n+1} - 2\} \tag{11}$$

atti ad esprimere la somma dei primi $n+1$ termini dispari consecutivi della serie $N_1 N_2 N_3 \cdots$.

Similmente, arrestando i primi membri delle (8) e (9) ad un numero pari di addendi $(2n)$ e sottraendo membro a membro le due relazioni, si giunge alla

$$(12) \qquad N_2 + N_4 + \cdots + N_{2n} = \frac{1}{5}\{N_{2n+2} - N_{2n} - 3\}$$

che fornisce la possibilità di trovare per mezzo dei termini N_{2n} e N_{2n+2} la somma dei primi n termini pari della serie degli N.

Combinando opportunamente le relazioni precedenti si trovano le seguenti somme di termini con indici dispari e con indici pari a segni alternati

$$(13) \qquad N_1 - N_3 + N_5 - \cdots + (-1)^n N_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{3} N_{2n+2}$$

$$(14) \qquad N_2 - N_4 + N_6 - \cdots + (-1)^{n+1} N_{2n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-1)^{n+1} N_{2n+1}.$$

La (13) ci dice, poichè tutti gli N sono rappresentati da numeri interi, che tutti i termini di indice pari sono multipli di 3.

È facile poi verificare la

$$(15) \qquad \sum_1^n r \cdot N_r = \begin{vmatrix} n & N_n \\ n+1 & N_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Dal determinante

$$\begin{vmatrix} N_m & N_n \\ N_{m-1} & N_{n-1} \end{vmatrix}$$

con $m < n$, togliendo alla prima linea il triplo della seconda, tenendo conto della relazione (2) si trova il determinante equivalente

$$\begin{vmatrix} N_{m-1} & N_{n-1} \\ N_{m-2} & N_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Svolgendo i due determinanti ed eguagliando i risultati:

$$(16) \qquad N_{n-1} N_m - N_n N_{m-1} = N_{n-2} N_{m-1} - N_{n-1} N_{m-2}$$

relazione questa, che lega due gruppi di tre termini ciascuno e consecutivi della serie $N_1 N_2 \cdots$.

Posto nella (16) per n ed m successivamente le coppie:

$$n-1 \,,\, m-1 \quad ; \quad n-2 \,,\, m-2 \,; \cdots \quad \text{fino a} \quad n-m \,,\, 0$$

addizionando membro a membro le relazioni che così si trovano si arriva alla

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} N_m & N_n \\ N_{m-1} & N_{n-1} \end{vmatrix} = N_{n-m}$$

onde svolgendo il determinante e dividendo i due membri per $N_n N_m$:

$$\frac{N_{n-1}}{N_n} - \frac{N_{m-1}}{N_m} = \frac{N_{n-m}}{N_n N_m}. \tag{18}$$

Ponendo adesso nella (18) al posto di $n - m$ successivamente:

$$n - m_1 , m_1 - m_2 , \cdots , m_{i-1} - m_i , m_i - m$$

con $n > m_1 > m_2 > \cdots > m_i > m$ ed addizionando membro a membro, dopo facili riduzioni, si perviene alla:

$$\frac{N_{n-m_1}}{N_n N_{m_1}} + \frac{N_{m_1-m_2}}{N_{m_1} N_{m_2}} + \cdots + \frac{N_{m_{i-1}-m_i}}{N_{m_{i-1}} N_{m_i}} + \frac{N_{m_i-m}}{N_{m_i} N_m} = \frac{N_{n-m}}{N_n N_m} \tag{19}$$

e procedendo di unità in unità

$$\sum_{m+1}^{n} \frac{1}{N_r N_{r+1}} = \frac{N_{n-m}}{N_n N_m} \tag{20}$$

la quale per $m = 1$ si trasforma nella:

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{1}{N_r N_{r+1}} = \frac{N_{n-m}}{N_n N_m}. \tag{21}$$

Attribuendo significato anche agli indici negativi mediante la posizione:

$$N_{-n} = -N_n \tag{22}$$

dalla (3) si deduce facilmente la seguente relazione fra tre indici qualunque n , m , p, con $n > m > p$:

$$N_{n-m} N_p + N_{m-p} N_n + N_{p-n} N_m = 0 \tag{23}$$

e da questa ulteriormente particolarizzando in modo opportuno i tre indici n , m , p si ottengono le:

a) posto $n , -n , +1$ in luogo di n , m , p:

$$N_{2n} = N_{n+1} N_n - N_n N_{n-1} = N_n (N_{n+1} - N_{n-1}) \tag{24}$$

b) posto $n + 1 , -n , +1$ in luogo di n , m , p:

$$N_{2n+1} = N_{n+1}^2 - N_n^2 \tag{25}$$

c) posto $n , m , n + m$ in luogo di n , m , p:

$$N_{n+m} N_{n-m} = N_n^2 - N_m^2 \tag{26}$$

e da quest'ultima per $m = 1$:

$$N_{n+1} N_{n-1} = N_n^2 - 1 . \tag{26}$$

Queste ultime ci permettono di scrivere le:

$$N_1 + N_3 + \cdots + N_{2n+1} = N_{n+1}^2 \tag{27}$$

$$N_2 + N_4 + \cdots + N_{2n} = N_n N_{n+1} . \tag{28}$$

Con le (27) e (28) rimane possibile esprimere il quadrato del termine di indice $n + 1$ per mezzo della somma dei primi $n + 1$ termini di indici dispari, ed il prodotto di due termini consecutivi di indici n ed $n + 1$ mediante la somma dei primi n termini di indici pari della serie $N_1 N_2 N_3 \cdots$.

Tenendo conto dei secondi membri delle (11) e (12), potremo scrivere anche:

$$N_{n+1}^2 = \frac{1}{5} \{ N_{2n+3} - N_{2n+1} - 2 \} \tag{29}$$

$$N_n N_{n+1} = \frac{1}{5} \{ N_{2n+2} - N_{2n} - 3 \} . \tag{30}$$

Si osservi ora il fatto, molto caratteristico, che sostituendo al coefficiente 3 messo in evidenza nella (2) il simbolo N_2 equivalente, ed effettuando sugli indici le operazioni aritmetiche indicate sugli N, si trova una identità. Lo stesso fatto si riscontra nelle formule ricavate contraddistinte dai numeri: (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26), (27), (28).

Invece per le (8), (11), (12), operando nel modo anzidetto si trova che i secondi membri dànno contributi nulli.

Indicando ora, in ultima analisi con α e β le radici del trinomio messo in evidenza nel primo membro della (6), varranno le:

$$\alpha + \beta = 3 \qquad \alpha \cdot \beta = 1 \tag{31}$$

ed il primo membro della (6) essendo nullo per $x = \alpha$ e per $x = \beta$, nullo risulterà anche il secondo, sicchè avremo:

$$\begin{cases} \alpha - N_{n+1} \alpha^{n+1} + N_n \alpha^{n+2} = 0 \\ \beta - N_{n+1} \beta^{n+1} + N_n \beta^{n+2} = 0 \end{cases}$$

ed eliminando da queste due N_{n+1} si trae

$$\alpha\beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \beta + N_n \alpha^{n+2} \beta^{n+1} - N_n \alpha^{n+1} \beta^{n+2} = 0$$

ed anche, tenendo conto della (31):

$$N_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \sum_0^{n-1} \alpha^{n-1-r} \beta^r$$

che può essere utilizzata per il calcolo diretto di N_n senza per questo conoscere preventivamente i due termini precedenti, come richiede invece la formula ricorrente (2).

Se n è pari, la sommatoria messa in evidenza nel secondo membro è costituita da un numero pari di addendi ed i due addendi centrali sono

$$\alpha^{\frac{n}{2}} \beta^{\frac{n}{2}-1} \quad , \quad \alpha^{\frac{n}{2}-1} \beta^{\frac{n}{2}}$$

e raccogliendo a fattore comune $\alpha^{\frac{n}{2}-1} \beta^{\frac{n}{2}-1}$ e tenendo conto della (31) si ha il contributo

$$\alpha^{\frac{n}{2}-1} \beta^{\frac{n}{2}-1} (\alpha + \beta) = 1.3 = 3$$

se invece n è dispari, la sommatoria è formata da un numero dispari di addendi, l'addendo centrale è del valore:

$$\alpha^{\frac{n-1}{2}} \beta^{\frac{n-1}{2}} = 1 .$$

In un caso e nell'altro, rimarranno un numero pari di addendi e potremo a due a due mettere in evidenza $\alpha^s \beta^s$ (considerando successivamente gli estremi e gli equidistanti) e con le formule di Waring potremo il tutto esprimere per mezzo della somma $\alpha + \beta$ e del prodotto $\alpha \cdot \beta$, ossia per mezzo dei valori 3 e 1 rispettivamente.

Non volendo procedere in questo modo per il calcolo di N_n, si potrà nella (32) ad α e β sostituire direttamente valori che si trovano risolvendo il trinomio di secondo grado $x^2 - 3x + 1$ posto eguale a zero. In questo caso si ha

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} .$$

Da questa espressione si vede che per $n = 100$, l'N_{100} è un numero di 42 cifre. Utilizzando questa ultima è ovvio che si possano ottenere direttamente le varie operazioni che si vogliano eseguire sugli N, ad esempio: N_n^2, oppure $N_n N_{n+1}$ ecc., che intervengono nei calcoli relativi alle compensazioni rigorose delle reti geodetiche. È questo, ci sembra, un risultato della massima importanza in tali questioni.

Fisica (Fisica-matematica). — *Massa di radiazione di un diaframma rigido munito di schermo acustico chiuso* [1]. Nota di P. G. Bordoni e W. Gross, presentata [2] dal Socio M. Picone.

1. Premessa.

Una sorgente sonora costituita da un diaframma oscillante rigidamente e collegato ad uno schermo acustico possiede una massa meccanica di radiazione definita come rapporto tra la componente immaginaria della forza esercitata dall'aria sul diaframma e l'accelerazione di quest'ultimo. Nelle sorgenti sonore piane e sferiche sinora studiate, quando le loro dimensioni sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda del suono emesso, la massa di radiazione varia entro limiti assai ristretti al variare della frequenza [3], e può quindi essere sostituita con buona approssimazione dal valore limite al quale essa tende al diminuire della frequenza. Il calcolo di questo limite ha quindi una notevole importanza, specialmente per lo studio dei tubi risonanti e dei risuonatori acustici, la cui frequenza naturale è notevolmente abbassata dalla massa di radiazione. Per un tubo risonante, nel caso analiticamente semplice in cui la velocità di vibrazione si mantenga uniforme su tutta la bocca, e quest'ultima sia inserita in una flangia piana infinita, Rayleigh ha trovato [4] $\mathfrak{M}_0 = 8/3\, a_1^3 \rho_0 = 2{,}667\, a_1^3 \rho_0$, essendo a_1 il raggio della bocca del tubo e ρ_0 la densità dell'aria. Non si conosce invece alcun valore attendibile della massa di radiazione relativa al caso, assai più frequente nella tecnica, di un tubo sprovvisto di flangia. Lo stesso Rayleigh ha proposto empiricamente di prendere un valore di $\mathfrak{M}_0$ alquanto più piccolo del precedente, e precisamente $\mathfrak{M} = 1{,}94\, a_1^3 \rho_0$, senza però spiegare le ragioni di tale scelta.

Il calcolo esatto di $\mathfrak{M}_0$ per un tubo senza flangia richiede la risoluzione di un problema di Neumann su di un cilindro, relativo alla equazione delle onde elastiche: $(\Delta^2 + k^2)\,\Phi = 0$. Un metodo approssimato per risolvere questo problema è stato indicato in un precedente lavoro [5]; un altro metodo è stato recentemente studiato presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, e ne è attualmente in corso una applicazione proprio al caso di una sorgente cilindrica. Entrambi i procedimenti numerici suac-

(1) Lavoro eseguito presso gl'Istituti Nazionali di Elettroacustica e per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) Vedi ad esempio N. W. Mc Lachlan, *Loudspeakers*. Clarendon Press Ed., Oxford, 1934.

(4) Rayleigh, *The Theory of Sound*. Macmillan Ed., London, 1929, 2ª ediz., vol. II, p. 196.

(5) P. G. Bordoni, *Metodi approssimati per lo studio delle sorgenti sonore*. « Acta Pont. Ac. Scient. », vol. 8, 1944, p. 61.

cennati sono però alquanto laboriosi, ed il loro uso è giustificato soltanto quando si voglia ottenere una soluzione generale del problema, in modo da determinare il valore del campo acustico in ogni punto dello spazio. Quando invece si richiede soltanto il valore limite della massa di radiazione alla frequenza zero, conviene ricorrere a procedimenti di calcolo più diretti e più semplici.

Seguendo tale criterio nella prima parte di questo lavoro uno degli A. [6] ha ricavato una espressione di $\mathfrak{M}_0$ valida esattamente nel caso di una sfera rigida munita di una calotta oscillante; in base a considerazioni di equivalenza fisica questa espressione si può ritenere valida approssimatamente nel caso più generale di un diaframma piano o curvo, applicato su uno schermo acustico chiuso di forma qualsiasi. La determinazione di $\mathfrak{M}_0$ mediante l'espressione trovata richiede però il calcolo di una serie che converge molto lentamente nel caso fisicamente interessante in cui le dimensioni della calotta siano piccole rispetto a quelle dello schermo. Tale difficoltà è stata superata per opera dell'altro A. [7], sommando in termini finiti la serie stessa con un procedimento analitico indicato nella seconda parte di questo lavoro, ed ottenendo così un'espressione finita ed abbastanza semplice di $\mathfrak{M}_0$.

2. – Massa di radiazione di una sfera con calotta oscillante.

In un lavoro precedente [8] si è trovato per la impedenza meccanica di radiazione di una sfera rigida munita di calotta oscillante l'espressione seguente:

$$(1) \qquad \mathfrak{Z} = 2\pi a^2 \rho_0 c \sum_{n=0}^{\infty} jka\,\zeta_n(jka)\,\frac{A_n}{U}\,Q_n(\cos\vartheta)$$

dove: a = raggio della sfera; ρ_0 = densità del fluido; c = velocità del suono; $k = 2\pi f/c$ = costante di fase della propagazione; ζ_n = funzione di Stokes di 3ª specie di ordine n; A_n = coefficienti dello sviluppo in serie di Legendre della velocità di vibrazione $u = e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\vartheta)$; $Q_n(\cos\vartheta) = \int_0^{\vartheta} P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta$; $P_n(\cos\vartheta)$ = polinomio di Legendre di ordine n; ϑ = semiangolo piano al centro sotteso della calotta oscillante.

Si vede facilmente che al tendere a zero di ka, cioè della frequenza, la $\mathfrak{Z}$ tende ad un valore immaginario puro positivo. Mettendo in evidenza ω si ha: $\lim_{ka \to 0} : \mathfrak{Z} = j\omega \mathfrak{M}_0$. Dalle espressioni di definizione delle funzioni di

(6) P. G. Bordoni.

(7) W. Gross.

(8) P. G. Bordoni, *Caratteristiche di radiazione di una sfera rigida munita di calotta oscillante.* « Comm. Pont. Ac. Scient. », vol. 8, 1944, p. 505.

Stokes di 3ª specie [9], si trova inoltre che: $\lim_{ka \to 0} : \zeta_n(jka) = \frac{1}{n+1}$, ed essendo inoltre: $A_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) Q_n(\cos\vartheta)$, sostituendo al posto del raggio della sfera la semicorda a_1 della calotta legata ad esso dalla relazione $a_1 = a \sin\vartheta = a\sqrt{1 - \cos^2\vartheta}$, e ponendo per brevità: $x = \cos\vartheta$, si ottiene in definitiva per $\mathfrak{M}_0$:

$$\mathfrak{M}_0 = a_1^3 \rho_0 \frac{2\pi}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2} Q_n^2(x). \tag{2}$$

La (2) dà il valore esatto della massa di radiazione a frequenza zero di una calotta oscillante dotata di uno schermo acustico in forma di sfera rigida. Se si tiene costante la semicorda della calotta, e si fa tendere all'infinito il raggio della sfera, tutto il sistema tende ad un disco rigido inserito in uno schermo piano infinito. Anche $\mathfrak{M}_0$ deve quindi tendere al valore calcolato da Rayleigh in questo caso particolare, che è stato precedentemente citato.

Si può a questo punto osservare che il campo acustico irradiato da una sorgente sonora dipende dalla forma di quest'ultima in misura tanto minore quanto più piccolo è *ka*. In altri termini alle basse frequenze la portata acustica della sorgente ed il volume racchiuso dallo schermo hanno un'importanza molto maggiore della forma esterna [10]. Si può quindi ritenere che la (2) dia ancora con buona approssimazione il valore limite della massa di radiazione di una calotta di forma qualsiasi, inserita in uno schermo chiuso, anch'esso di forma arbitraria, purchè l'area della prima sia: πa_1^2, ed il volume racchiuso dal secondo sia: $4/3\,\pi a^3$.

3. – Calcolo in termini finiti della $\mathfrak{M}_0$.

Un semplice esame della (2) mostra che essa non si presta bene a calcoli numerici quando x è prossimo ad uno, cioè quando la calotta è piccola rispetto alle dimensioni dello schermo, perchè allora la convergenza della serie è molto lenta [11]. Si è quindi cercato di sommare in termini finiti la (2) per poter calcolare rapidamente $\mathfrak{M}_0$ per qualsiasi valore di x.

(9) P. G. Bordoni, *Sulle funzioni di Stokes.* «Comm. Pont. Ac. Scient.», vol. 9, 1945, p. 87.

(10) Non sembra tuttavia lecito affermare senz'altro che al limite per f tendente a zero il campo sonoro è del tutto indipendente dalla forma della sorgente, anche nel caso che le dimensioni di quest'ultima siano finite. Su questo importante argomento ci si riserva di ritornare in un successivo lavoro.

(11) Si dimostra facilmente che la serie converge assolutamente in tutto l'intervallo $-1 \mid\!-\!\mid +1$, maggiorandola mediante la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n^2(x)$, e servendosi della relazione di Parseval.

A tale scopo si è posto:

$$(3)\qquad \begin{cases} \chi(x) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2} Q_n^2(x), \\ \chi_1(x) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2(x), \\ \chi_2(x) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n^2(x)}{n+1}, \end{cases}$$

con che si ha:

$$(4)\qquad \mathfrak{M}_0 = a_1^3 \rho_0 \frac{\chi(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = a_1^3 \rho_0 \frac{\chi_1(x) - \chi_2(x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Introducendo la funzione: $g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$ della variabile complessa $u = \rho e^{i\varphi}$, e sviluppando $g(x,u)$ in una serie di potenze di u, i cui coefficienti sono dati dai polinomi di Legendre in x, si vede che riesce, per $\rho < 1$:

$$(5)\qquad F(x,u) \equiv \int_x^1 \xi\, g(\xi,u)\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)\, u^n,$$

$$(6)\qquad \Phi(x,u) \equiv \frac{1}{u} \int_0^u F(x,v)\, dv = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) \frac{u^n}{n+1},$$

onde segue:

$$(7)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \rho e^{i\varphi})\, F(x, \rho e^{-i\varphi})\, d\varphi =$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} Q_h(x)\, Q_k(x)\, \rho^{h+k} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(h-k)\varphi}\, d\varphi = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2(x)\, \rho^{2n},$$

$$(8)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \rho e^{i\varphi})\, \Phi(x, \rho e^{-i\varphi})\, d\varphi =$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_h(x)\, Q_k(x)}{k+1} \rho^{h+k} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(h-k)\varphi}\, d\varphi = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n^2(x)}{n+1} \rho^{2n}.$$

Passando al limite nelle (7) e (8), per ρ tendente ad uno, si perviene alla seguente espressione delle χ_1, χ_2, sotto forma integrale:

$$9)\qquad \chi_1(x) = 2 \int_0^{\pi} |F(x, e^{i\varphi})|^2\, d\varphi,$$

$$(10)\qquad \chi_2(x) = \int_0^{\pi} \Re\left[F(x, e^{i\varphi})\, \Phi(x, e^{-i\varphi})\right] d\varphi,$$

Le (9) e (10), insieme alle (5) e (6) permettono di determinare le funzioni χ_1 e χ_2; i calcoli necessari sono però alquanto delicati, attesa la polidromia della $g(x, u)$. In definitiva si perviene alle espressioni seguenti:

$$(11) \qquad \chi_1(x) = \frac{8}{9}(\sin\vartheta + \frac{5}{3}\sin^3\vartheta - \vartheta\cos^3\vartheta),$$

$$(12) \qquad \chi_2(x) = -\frac{1}{9}\sin\vartheta - \frac{19}{54}\sin^3\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta\cos\vartheta - \frac{7}{18}\vartheta\cos^3\vartheta +$$

$$\frac{\pi}{12}(1-\cos\vartheta)^2(2+\cos\vartheta) - \frac{\pi}{4}\sin^4\vartheta\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2}\sin^4\vartheta\int_0^{\vartheta}\frac{\varphi}{\sin\varphi}d\varphi.$$

Ricordando la (4) si ottiene quindi la relazione cercata, che esprime in termini finiti la massa di radiazione $\mathfrak{M}_0$:

$$(13) \qquad \mathfrak{M}_0 = a_1^3\rho_0\left[\frac{7}{3} + \frac{(1+\cos^2\vartheta)(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta)}{2\sin^3\vartheta} - \right.$$

$$\left.\frac{\pi}{12}\frac{(1-\cos\vartheta)^2(2+\cos\vartheta)}{\sin^3\vartheta} + \frac{\pi}{4}\sin\vartheta\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\sin\vartheta\int_0^{\vartheta}\frac{\varphi}{\sin\varphi}d\varphi\right].$$

Per l'applicazione numerica della (13) occorre ancora dare un metodo di calcolo dell'integrale: $f(\vartheta) = \int_0^{\vartheta}\frac{\varphi}{\sin\varphi}d\varphi$. Il procedimento cercato può essere ottenuto ricordando il noto sviluppo in serie[12], convergente per $|\varphi| < \pi$:

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n} = 1 + \frac{1}{6}\varphi^2 + \frac{7}{360}\varphi^4 + \frac{31}{15.120}\varphi^6 + \cdots$$

I B_{2n} sono i numeri di Bernouilli, per i quali si ha [13]:

$$(14) \qquad B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}S_{2n} \quad ; \quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

Integrando termine a termine si ottengono le seguenti espressioni della serie $f(\vartheta)$ e del suo resto R_n:

$$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n+1)!}\vartheta^{2n+1};$$

$$(15) \qquad R_n = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2^{2k}-2)B_{2n}}{(2k+1)!}\vartheta^{2k+1};$$

(12) Vedi ad esempio: K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* 3ª ediz., p. 209.

(13) Vedi loc. cit. nota precedente, p. 245.

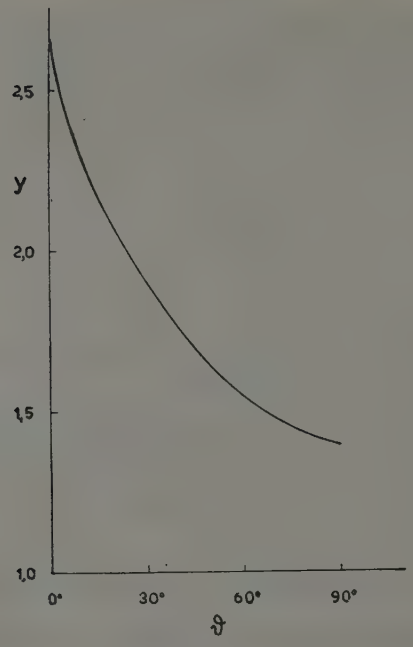


Fig. 1.

Di quest'ultimo è facile dare una maggiorazione, osservando che dalla (14) segue:

$$S_{2n} < 1 + \frac{2}{2^{2n}} + \frac{4}{2^{2n}} + \frac{8}{8^{2n}} + \cdots = 1 + \frac{1}{2^{2n-1}} + \left(\frac{1}{2^{2n-1}}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{2n-1}}}$$

$$|B_{2n}| < \frac{(2n)!}{\pi^{2n}\left(2^{2n-1} - 1\right)},$$

onde risulta dalla (15):

$$|R_n| < 2\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|\vartheta|^{2k+1}}{(2k+1)\pi^{2k}} < \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{|\vartheta|}{\pi}\right)^{2k+1} = \frac{2\pi}{2n+1}\,\frac{\left(\frac{|\vartheta|}{\pi}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{|\vartheta|}{\pi}\right)^2}.$$

Le precedenti espressioni consentono un immediato calcolo numerico della (13), dal quale si ricava la seguente tabella, relativa ai valori della funzione: $y = \frac{\mathfrak{M}_0}{a_1^3 \rho_0}$.

TABELLA I.

Valori della funzione: $y = \frac{\mathfrak{M}_0}{a_1^3 \rho_0}$.

ϑ	0°	5°	15°	30°	45°	60°	90°
y	2,667	2,431	2,166	1,901	1,706	1,554	1,394

I valori della y in funzione di ϑ sono inoltre indicati nel grafico della figura 1.

4. – CONCLUSIONI.

La massa di radiazione a frequenza zero di una calotta sferica, di semicorda a_1 costante, ed oscillante rigidamente, cresce secondo la legge indicata dalla figura 1, al crescere del raggio della sfera $a = a_1/\sin\vartheta$, in cui la calotta stessa è inserita. Per diaframmi e per schermi acustici di forma alquanto diversa da quella sferica vale, con buona approssimazione, lo stesso risultato, purchè il diaframma abbia un'area eguale a πa_1^2 e lo schermo racchiuda un volume eguale $4/3\,\pi a^3$.

Al limite, quando il raggio della sfera tende all'infinito si ritrova per $\mathfrak{M}_0$ il valore calcolato da Rayleigh e da altri per un disco piano in schermo infinito. Viene così nuovamente confermata l'attendibilità delle ipotesi poste a base dello studio delle sorgenti piane, sulle quali in passato [14] era stato elevato qualche dubbio.

Chimica (Chimica Fisica). — *Sulla compressibilità adiabatica degli isomeri etilenici determinata mediante gli ultrasuoni* [1]. Nota di M. BACCAREDDA e A. GIACOMINI, presentata [2] dal Socio U. BORDONI.

SCOPO DELLA RICERCA. – In una precedente comunicazione [3] è stata data notizia dei primi risultati ottenuti nello studio degli 1,2–dicloroetileni cis e trans, attuato mediante misure della velocità di propagazione degli ultrasuoni, le quali, come è noto, permettono di risalire alla compressi-

(14) S. BALLANTINE, *Operational proof of the wave potential theorem with applications to electromagnetic and acoustic systems.* « Journ. Frank. Inst. », vol. 221, 1936, p. 467; N. W. Mc LACHLAN, A. T. Mc KAY, *Rayleigh formulae for velocity potential.* « Journ. Frank. Inst. », vol. 223, 1937, p. 501.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di Elettro acustica « O. M. Corbino » e nel Centro di Chimica Generale del C. N. R., Roma.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) BACCAREDDA M., GIACOMINI A., « Ric. Scient. », *15*, 161 (1945).

bilità adiabatica. Tali misure si riferivano a prodotti commerciali dei quali uno, come si è fatto notare a suo tempo, presentava, per il suo deficiente grado di purezza, costanti caratteristiche sensibilmente diverse da quelle indicate nella letteratura.

Si rendono ora noti i risultati ottenuti operando su dicloroetileni preparati in laboratorio e adeguatamente purificati.

Verrà altresì riferito sulle determinazioni eseguite per altre coppie di isomeri etilenici, e precisamente sul maleato e sul fumarato dietilici, sugli acidi oleico ed elaidinico e sugli 1,2–dibromoetileni.

Di tutti i composti sopra elencati, risulta che è stato sottoposto all'esame con gli ultrasuoni solamente il dicloroetilene cis per il quale S. Parthasarathy [4] ebbe a trovare una velocità di propagazione di 1025 $m \cdot s^{-1}$ (a 25,5 °C) e corrispondentemente un coefficiente di compressibilità di $75{,}4 \times 10^{-12}$ $cm \cdot g^{-1} \cdot s^2$. È però da notare che la densità del prodotto indicata da tale Autore ($\rho = 1{,}263$) non corrisponde ai valori della densità del prodotto puro che si trovano nella letteratura [5].

Metodo di misura. – La tecnica sperimentale adottata per le misure è sostanzialmente derivata da quella di A. C. Bachem, E. Hiedemann e H. R. Asbach [6]. Il metodo di misura originariamente proposto da questi Autori consiste notoriamente nel dedurre la velocità di propagazione da una misura di frequenza e da una misura di lunghezza d'onda. Quest'ultima si compie spostando, nella direzione in cui muovono gli ultrasuoni, la vaschetta contenente il liquido, ove sono stabilite onde stazionarie, e misurando la lunghezza di cui viene traslata la vaschetta dopo che si è osservato, al micrometro oculare di un microscopio, il passaggio di un numero intero di mezze lunghezze d'onda.

A tale metodo abbiamo portato due modificazioni:

a) invece di osservare le onde ultrasonore al microscopio se ne è eseguita una proiezione, a forte ingrandimento, sopra un vetro smerigliato, munito di opportune linee di traguardo [7];

b) al sistema di onde stazionarie create nel liquido mediante un riflettore mobile posto davanti al quarzo emittente, si è sostituita una coppia di fasci di onde progressive emesse da due distinte sorgenti ultrasonore. Le onde dei due fasci muovono in direzioni parallele, ma in verso opposto, e sono attraversate *successivamente* dalla luce. Alla generazione dei fasci provvedono due piastrine di quarzo – la cui posizione reciproca è fissata una volta per tutte – alimentate da un medesimo generatore di alta frequenza.

(4) Parthasarathy S., «Proc. Ind. Acad. Sci.», Sect. A, *3*, 519 (1936); «Proc. Ind. Acad. Sci.», Sect. A, *4*, 17 (1936).

(5) Herz W., Rathmann W., «Chem. Zeit.», *37*, 622 (1913).

(6) Bachem C. H., Hiedemann E., Asbach H. R., «Z. Phys.», *87*, 734 (1934).

(7) Giacomini A., Pesce B., «Ric. Scient.», *11*, 605 (1940).

Tale modo di procedere permette di abolire il riflettore mobile, eliminando gli inconvenienti che questo organo comporta: tra essi la necessità di procedere ad una regolazione della sua posizione ad ogni mutamento di temperatura, e la necessità di dare alla vaschetta di misura dimensioni e forma vincolate a quelle del riflettore e dei relativi sistemi di comando [8].

La precisione conseguibile nelle misure è manifestamente quella stessa del metodo di Hiedemann e collaboratori e, come per essa, dipende dal numero totale di semi–lunghezze d'onda che possono venire osservate.

Nelle misure sulle quali riferiamo non è stato possibile traguardare più di 80 semi–lunghezze d'onda, perchè le quantità di liquido disponibile erano relativamente esigue. Per tale ragione la precisione con cui sono stati assicurati i valori della lunghezza d'onda è di $\pm$ 0,7 °/₀₀.

Per quanto riguarda la conoscenza della frequenza f degli ultrasuoni essa è stata assicurata nel seguente modo.

Un quarzo pilota, in termostato, costituisce il campione a 100 kHz dal quale, per successive moltiplicazioni, si ottiene una tensione a 2000 kHz. Quest'ultima, previa amplificazione, comanda uno stadio duplicatore di frequenze il quale alimenta i quarzi generatori di ultrasuoni alla frequenza di 4000 kHz. La potenza che è consentito fornire ai quarzi è di 15 watt, ma solo una piccola parte di essa, circa 1 watt, viene utilizzata onde evitare un sensibile riscaldamento del liquido.

La frequenza di 4000 kHz, nominali, inviata al generatore di ultrasuoni è ovviamente conosciuta con la medesima precisione relativa di quella del quarzo pilota a 100 kHz. Questo è un campione secondario la cui frequenza – stabile entro alcune parti su un milione – differisce di otto parti su centomila dal valore nominale di 100 kHz, come risulta da un recente confronto con le frequenze campione del National Bureau of Standards [9]. Per tali ragioni la frequenza da noi usata è di 4.000.320 Hz $\pm$ 20 Hz, di modo che, anche adottando il valore arrotondato $f = 4$ MHz, l'errore che si commette è inferiore a otto parti su centomila e quindi esso non concorre in modo apprezzabile nel computo dell'errore da cui sono affetti i valori della velocità (come si è infatti visto l'errore nella misura della lunghezza d'onda è cento volte più grande).

La temperatura del liquido studiato è stata mantenuta costante al valore prescelto entro $\pm$ 0,05 °C mediante circolazione di acqua proveniente da un termostato. L'incertezza inerente alla determinazione della

(8) Su altri particolari inerenti al nuovo metodo di misura verrà riferito diffusamente in altra sede.

(9) Il campione di frequenza e gli stadi moltiplicatori sino alla frequenza di 2 MHz fanno parte di una complessa apparecchiatura costruita, nell'Istituto Nazionale di Elettroacustica, su progetto del dott. A. Barone che qui si ringrazia per la sua intelligente collaborazione.

temperatura coinvolge, nella valutazione della velocità, ad un errore dell'ordine di $\pm$ 0,1 °/$_{00}$.

Metodi di preparazione.

a) Miscele di dicloroetileni cis e trans vennero da noi preparate trattando del 1 , 1 , 2 , 2–tetracloroetano, debitamente purificato per rettifica, con zinco in polvere in presenza di acqua [10]. Le miscele ottenute vennero separate mediante tre colonne di Widmer, ciascuna della lunghezza di 80 cm, disposte in serie. La frazione che dopo varie distillazioni passava da 59,8 °C a 60,4 °C, presentò una densità (determinata mediante picnometro in termostato) $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}2829$ e un indice di rifrazione $n_D^{15} = 1{,}45163$, in sufficiente concordanza con i rispettivi dati del prodotto cis di Herz e Rathmann [11] (per interpolazione $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}2820$) e di Chavanne [12] ($n_D^{15} = 1{,}45189$).

Per quanto riguarda il composto trans venne ritenuto di purezza sufficiente agli scopi del presente lavoro quello già ottenuto precedentemente per frazionamento del prodotto Schering-Kahlbaum per il quale $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}2552$; $n_D^{18} = 1{,}44739$ (letteratura $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}2569$ interpolato dai dati di Herz e Rathmann, loc. cit.; $n_D^{18} = 1{,}44662$ – Boeseken e Bastett [13]).

b) Il maleato dietilico è stato preparato per lunga digestione di anidride maleica [14] con alcool etilico in eccesso, in presenza di acido solforico concentrato [15]. Il maleato così preparato presentò $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}0686$ e $n_D^{20} = 1{,}44176$ valori sufficientemente vicini a quelli della letteratura ($\rho_{(17{,}6\,°C)} = 1{,}07155$; $\rho_{(21{,}8\,°C)} = 1{,}06740$ $n_D^{19{,}9} = 1{,}44146$ [16]; $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}0676$ dedotto dai dati di Perkin [17], trasformati per riferirli alla densità C. G. S.).

Il fumarato dietilico è stato preparato con il metodo indicato da Corson, Adams e Scott [18] per esterificazione dell'acido fumarico con alcool etilico assoluto in presenza di acido solforico concentrato a 115–120 °C, attraverso eliminazione continua dell'acqua formatasi. Le caratteristiche del prodotto risultarono $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}0577$ e $n_D^{20} = 1{,}44123$ rispetto a $\rho_{(20{,}6\,°C)} = 1{,}05189$ [19]; $\rho_{(20\,°C)} = 1{,}0516$ (calcolato come sopra dai dati di Perkin), $n_D^{20{,}1} = 1{,}44102$ [20].

(10) « Kons. elektrochem. Ind. », D. R. P. 217554.

(11) Herz W., Rathmann W., « Chem. Zeit. », *37*, 622 (1913).

(12) Chavanne G., « Compt. rend. », *154*, 776 (1912).

(13) Boessken J., Bastet M. C., « Rec. Trav. Chim. Pays-Bas », *32*, 198 (1913).

(14) L'anidride maleica è stata gentilmente fornita dal prof. A. Quilico.

(15) Walden P., « ZS. phys. Chem. », Abt. A, *20*, 379 (1896).

(16) Knops C., « Liebig's Annalen », *248*, 192 (1888).

(17) Perkin W. H., « J. chem. Soc. », *53*, 573 (1888).

(18) Corson B. B., Adams E., Scott R. W., « Org. Synth. », *10*, 48 (1930); *11*, 102 (1931).

(19) Patterson T. S., Henderson A., Fairlie F. W., « J. Chem. Soc. », *91*, 1839 (1907).

(20) Knops C., « Liebig's Annalen », *248*, 192 (1888).

Entrambi i prodotti erano stati purificati per lavaggio con soluzione diluita di carbonato sodico, essicamento con solfato sodico anidro e rettificazione a pressione ridotta con una piccola colonna Widmer.

L'acido fumarico venne preparato dall'acido maleico per azione dei vapori nitrosi sulla soluzione raffreddata, secondo il metodo indicato da Schmidt [21].

c) L'acido oleico, costituito da un prodotto Schering–Kahlbaum, è stato purificato per distillazione a pressione ridotta, in corrente di anidride carbonica; per esso risultò $\rho_{(20\,°C)} = 0{,}8929$ $n_D^{20} = 1{,}45959$, rispetto a $\rho_{(25\,°C)} = 0{,}8896$ [22] e $\rho_{(11{,}8\,°C)} = 0{,}8998$ [23] ed a $n_D^{20} = 1{,}45975$ (per interpolazione dai dati di Schaffers [24]).

L'acido elaidinico venne preparato dall'acido oleico con vapori nitrosi ottenuti da acido nitrico ed anidride arseniosa, a 10–20 °C secondo le indicazioni di Griffits e Hilditch [25]; il prodotto venne purificato per ripetute cristallizzazioni dall'alcool e infine dall'etere e presentò un punto di fusione di 44,2 °C.

d) I due dibromoetileni cis e trans furono preparati dal 1,1,2,2-tetrabromoetano (ottenuto a sua volta per addizione del bromo all'acetilene) e quindi separati l'uno dall'altro col metodo di van de Walle [26]: azione dello zinco in presenza di alcool, distillazione in corrente di vapore, separazione per distillazione frazionata delle due miscele azeotropiche alcool–composto trans e alcool–composto cis, e infine separazione da queste ultime dei prodotti puri per azione dell'acqua. La distillazione frazionata venne eseguita poche ore prima delle determinazioni – dato che in assenza di alcool i due prodotti si trasformano tendendo ad un equilibrio fra i due isomeri – con tre colonne di Widmer in serie, prelevando le frazioni 75,1 ÷ 76,0 °C e 77,6 ÷ 78,0 °C ed essicando successivamente i liquidi ottenuti con cloruro di calcio.

I dati delle densità dei due prodotti risultanti dalle nostre determinazioni presentano un certo divario rispetto ai dati di van de Walle, gli unici riportati dalla letteratura [27], della densità a 17,5 °C Per quanto riguarda gli indici di rifrazione i dati della letteratura dovuti allo stesso Autore, attribuirebbero al trans un indice maggiore che non al cis, mentre l'opposto si verifica per i prodotti da noi preparati.

Risultati sperimentali. – I risultati delle varie determinazioni sono raccolti, per le varie coppie di isomeri, nelle tabelle I, II, III e IV.

(21) Schmidt J., «Berichte», *33*, 3243 (1900).
(22) Tromp S. T. J., «Rec. Trav. Chim. Pays-Bas», *41*, 297 (1922).
(23) Eiykman J. F., «Rec. Trav. Chim. Pays-Bas», *12*, 162 (1893).
(24) Schaffers H. W., «Rec. Trav. Chim. Pays-Bas», *46*, 295 (1927).
(25) Griffits H. N., Hilditch T. P., «J. Chem. Soc.», 1932, p. 2315.
(26) Van de Walle H., «Bull. Soc. Chim. Belg.», *27*, 209 (1913).
(27) Van de Walle H., «Bull. Soc. Chim. Belg.», *27*, 209 (1913).

In esse sono riportati, oltre ai valori della velocità u per le tre temperature di 15 °C, 20 °C e 25 °C, anche le densità ρ e i valori della compressibilità adiabatica β calcolati dalla nota relazione $\beta = \frac{1}{\rho u^2}$. Nell'ultima colonna viene dato infine il valore medio del coefficiente di temperatura della velocità $du/d\theta$ calcolato ammettendo che la funzione $u = f(\theta)$ sia lineare.

TABELLA I.

DICLOROETILENI

	θ °C	$u \times 10^{-5}$ (cm · s⁻¹)	ρ (g · cm⁻³)		$\beta \times 10^{12}$ (cm · g⁻¹ · s²)	$du/d\theta$ (m · s⁻¹/grado)
CIS	15	1,108 ± 0,001	1,2896 (1)		63,1 ± 0,1	
	20	1,090 ± 0,001	1,2820 (2)	1,2829 ± 0,0002	65,7 ± 0,1	— 3,7 ± 0,1
	25	1,071 ± 0,001	1,2743 (1)		68,4 ± 0,1	
TRANS	15	1,050 ± 0,001	1,2650 (1)		71,8 ± 0,2	
	20	1,031 ± 0,001	1,2569 (2)	1,2552 ± 0,0002	74,8 ± 0,2	— 3,7 ± 0,1
	25	1,013 ± 0,001	1,2489 (1)		78,1 ± 0,2	

(1) Valori sperimentali di W. Herz e W. Rathmann: « Chem. Zeit. », 37, 622 (1913).
(2) Valori calcolati per interpolazione dai valori forniti id. c. s.

TABELLA II.

MALEATO DIETILICO E FUMARATO DIETILICO

	θ C°	$u \times 10^{-5}$ (cm · s⁻¹)	ρ (g · cm⁻³)		$\beta \times 10^{12}$ (cm · g⁻¹ · s²)	$du/d\theta$ (m · s⁻¹/grado)
CIS	15	1,372 ± 0,001	1,0725 (1)		49,2 ± 0,2	
	20	1,352 ± 0,001	1,0676 (1)	1,0686 ± 0,0002	51,2 ± 0,2	— 3,8 ± 0,1
	25	1,334 ± 0,001	1,0626 (1)		52,9 ± 0,2	
TRANS	15	1,321 ± 0,001	1,0568 (1)		54,2 ± 0,3	
	20	1,303 ± 0,001	1,0516 (1)	1,0577 ± 0,0002	56,0 ± 0,3	— 3,5 ± 0,1
	25	1,286 ± 0,001	1,0465 (1)		57,8 ± 0,3	

(1) Valori sperimentali di Perkin: « J. Chem. Soc. », 53, 573 (1888) modificati per riferirsi alla densità C. G. S.

Tabella III.

ACIDO OLEICO ED ACIDO ELAIDINICO

	θ °C	$u \times 10^{-5}$ (cm · s^{-1})	ρ ($g \cdot cm^{-3}$)		$\beta \times 10^{12}$ (cm·$g^{-1} \cdot s^2$)	$du/d\theta$ (m·s^{-1}/grado)
CIS	45	1,350 ± 0,001	—	0,8759 ± 0,0002	62,7 ± 0,1	
	50	1,333 ± 0,001	—	0,8726 ± 0,0002	64,5 ± 0,1	— 3,4 ± 0,1
TRANS	45	1,346 ± 0,001	—	0,8734 ± 0,0002	63,2 ± 0,1	
	50	1,329 ± 0,001	—	0,8701 ± 0,0002	65,1 ± 0,1	— 3,4 ± 0,1

Tabella IV.

DIBROMOETILENI

	θ °C	$u \times 10^{-5}$ (cm · s^{-1})	ρ ($g \cdot cm^{-3}$)		$\beta \times 10^{12}$ (cm·$g^{-1} \cdot s^2$)	$du/d\theta$ (m·s^{-1}/grado)
CIS	15	0,969 ± 0,001	—	2,2575 ± 0,0002	47,2 ± 0,6	
	20	0,957 ± 0,001	—	2,2464 ± 0,0002	48,6 ± 0,6	— 2,4 ± 0,1
	25	0,945 ± 0,001	—	2,2351 ± 0,0002	50,1 ± 0,6	
TRANS	15	0,949 ± 0,001	—	2,2421 ± 0,0002	49,5 ± 0,6	
	20	0,936 ± 0,001	—	2,2308 ± 0,0002	51,2 ± 0,6	— 2,2 ± 0,1
	25	0,927 ± 0,001	—	2,2193 ± 0,0002	52,4 ± 0,6	

Con riferimento agli errori probabili da cui sono affetti i valori riportati, si osserva quanto segue.

Le velocità sono assicurate con errore di ± 1 m · s^{-1}, per le ragioni cui si è accennato precedentemente.

valori di ρ sono riportati in due colonne: la prima si riferisce ai valori dei quali è data notizia nella letteratura (o che sono stati calcolati per interpolazione da tali valori); la seconda colonna si riferisce invece alle determinazioni sperimentali da noi eseguite. Queste ultime vennero assicurate con approssimazione di ± 0,0002 g · cm^{-3}.

Nel calcolo della compressibilità β, e dell'errore da cui sono affetti tali valori, si è tenuto conto della incertezza derivante dal divario manifestatosi talvolta tra i valori della densità indicati nella letteratura e quelli ottenuti da noi sperimentalmente. Si è quindi, in ciascun caso, attribuito un errore probabile notevolmente superiore a quello risultante da un computo basato unicamente sugli errori inerenti alle nostre determinazioni della densità.

Conclusioni. – L'esame delle quattro tabelle permette di affermare quanto segue.

1) *In tutti i casi studiati la velocità di propagazione ha valore maggiore nei composti cis che nei composti trans.*

2) Tenuto conto anche del fatto che le densità hanno valore maggiore nei composti cis che in quelli trans, si osserva che *i coefficienti di compressibilità sono notevolmente più piccoli per i composti cis rispetto a quelli trans.*

3) *I coefficienti di temperatura della velocità di propagazione risultano sensibilmente eguali per gli isomeri di una stessa coppia.*

Mentre ci riserviamo l'eventuale esame in altra sede delle possibili interpretazioni di carattere strutturistico cui attribuire i fatti osservati, vogliamo indicare sin da ora talune possibili applicazioni d'ordine generale che discendono dal notevole divario riscontrato tra i valori delle velocità nei due isomeri di una stessa coppia.

La misura della velocità di propagazione degli ultrasuoni può evidentemente sostituire gli altri metodi sinora usati per stabilire quale è in una mescolanza il rapporto dei due isomeri.

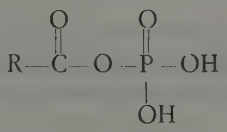
Il nuovo metodo non sembra peraltro presentare, nel caso più generale, sensibili vantaggi rispetto a quello che si attua attraverso determinazioni di densità. Appare invece logico prenderlo in considerazione quando ci si proponga di *seguire con continuità* le trasformazioni di un isomero nell'altro. In tal caso le misure di costante dielettrica, o di indice di rifrazione, già da taluni prescelte per tale scopo, potranno essere utilmente sostituite da misure di velocità ultrasonora: tipico il caso degli isomeri maleato e fumarato dietilici per i quali il divario fra gli indici di rifrazione è molto piccolo e male si presta allo scopo.

Chimica (Chimica biologica). — *Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno* [1]. Nota I di A. Ruffo e C. Cennamo, presentata [2] dal Socio G. Quagliariello.

Le ricerche di questi ultimi anni, specialmente quelle eseguite da F. Lipmann e dalla sua scuola, sono riuscite a chiarire alcuni punti importanti del complesso problema riguardante l'utilizzazione ed il destino dei fosfati inorganici durante le ossidazioni biologiche.

Merito fondamentale di tali ricerche è quello di avere identificato, fra i prodotti intermedi del metabolismo ossidativo, dei nuovi composti fosforici di elevato contenuto energetico, chiamati acilfosfati, e di aver stabilito i rapporti che esistono fra queste sostanze ed il sistema degli adenilpolifosfati.

Gli acilfosfati sono delle anidridi organiche, corrispondenti alla formula:



che si ottengono per reazione dell'acido fosforico con i gruppi funzionali di vari substrati ossidabili, e chimicamente si distinguono in carbossilfosfati, quando l'acido fosforico reagisce con i gruppi carbossilici o aldeidici di detti substrati, ed in enolfosfati quando esso reagisce con particolari gruppi enolici, o addirittura con l'atomo d'idrogeno di un carbonio insaturo. Tali reazioni sono in genere di natura ossidativa, ma in alcune condizioni particolari (ossidazione degli α-chetoacidi) si accompagnano anche alla decarbossilazione del substrato. Gli acilfosfati sono composti molto instabili: in ambiente leggermente acido spontaneamente si decompongono, ed a pH fisiologico nelle comuni ossidazioni si scindono enzimaticamente con estrema facilità, liberando una notevole quantità di energia (circa 15.000 cal. per mol.). Carattere distintivo di queste sostanze è quello di reagire rapidamente con l'adenosindifosfato (ADP), trasformandolo in adenosintrifosfato (ATP). Siccome gli acilfosfati utilizzano per la loro formazione i fosfati inorganici, ne consegue un fatto nuovo nel metabolismo fosforico, e di notevole importanza dal punto di vista energetico, cioè risulta possibile trasferire al sistema adenilico, per mezzo di questi composti, una certa quantità di energia che si origina dall'ossidazione dei più svariati substrati.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

Il sistema adenilico in tal modo viene ad assumere una nuova funzione, quella di utilizzare e quindi di risparmiare una parte dell'energia che si libera durante le ossidazioni.

Come già abbiamo accennato, il primo ad accorgersi dell'esistenza degli acilfosfati è stato Lipmann, il quale dopo aver dimostrato che nell'ossidazione dell'acido piruvico [3], operata da un estratto dializzato di *bacterium Delbrüchi* in presenza di fosfati, di un catione bivalente (Mn o Mg), di flavina, di adenindinucleotide e di carbossilasi, insieme a CO_2 non si forma acido acetico, ma acetilfosfato, è riuscito dopo alcuni anni di lavoro ad isolare e purificare [4] questo composto, che poi recentemente ha ottenuto per sintesi [5].

L'acetilfosfato è un carbossilfosfato corrispondente alla formula:

$$CH_3 \cdot CO \cdot O \cdot PO(OH)_2$$

che reagisce rapidamente con l'ADP trasformandosi in acido acetico secondo l'equazione:

$$CH_3 \cdot CO \cdot O \cdot PO(OH)_2 + ADP \rightleftarrows CH_3 \cdot COOH + ATP$$

Tale reazione è di fondamentale importanza, perchè dimostra che gli acilfosfati sono donatori di radicali fosforici all'ADP, e che il carbossile degli acidi grassi può venire fosforilizzato dall'ATP nel corso dell'ossidazione.

Le numerose ricerche che sono seguite hanno messo in evidenza che non solo l'acido piruvico reagisce con i fosfati inorganici nel modo anzidetto, ma anche molti altri composti intermedi del metabolismo ossidativo.

Così, Meyerhoff [6] ritieneche finora non è possibile isolare l'aldeide 1,3–difosfoglicerica che, com'è noto, si forma durante l'ossidazione dell'aldeide 3–fosfoglicerica ad acido 1,3-difosfoglicerico, perchè il secondo radicale fosforico (quello in posizione 1) si viene a fissare all'aldeide 3–fosfoglicerica sotto forma di carbossilfosfato, che, appena formatosi, rapidamente si scinde trasferendo il radicale fosforico al sistema adenilico. Anche Ochoa, partendo dall'osservazione che durante l'ossidazione dell'α–chetoglutarato [7] si fissa la stessa quantità di fosfati che durante l'ossidazione del piruvato, afferma [8] che il primo prodotto della decarbossilazione ossidativa del chetoglutarato è il succinilfosfato il quale reagisce rapidamente con l'adenosindifosfato trasformandosi in acido succinico. A tale proposito è interessante notare che la grande velocità con cui si compiono le due reazioni, di deidrogenazione e di trasporto dei fosfati, ha indotto Ochoa a ritenere che tali reazioni

(3) F. Lipmann, « Nature », *143*, 281 (1939).
(4) F. Lipmann, « Journ. Biol. Chem. », *155*, 55 (1944).
(5) F. Lipmann e L. Tuttle, « Journ. Biol. Chem. », *153*, 571 (1944).
(6) Meyerhoff e coll., « Journ. Biol. Chem. », *149*, 71 (1943).
(7) Ochoa, Ibidem, *149*, 577 (1943); *151*, 493 (1943).
(8) Ochoa, Ibidem, *155*, 87 (1944).

vengano catalizzate da un enzima, il cui carattere particolare è quello di essere costituito da un'unica proteina capace di riunirsi a vari gruppi prostetici formando complessi di elevata specificità enzimatica.

Utilizzazione di fosfati inorganici è stata inoltre messa in evidenza da Cori [9] e coll. durante l'ossidazione del succinato a fumarato, ma non è stato possibile finora riconoscere il composto intermedio di questa reazione. Ugualmente difficile è stabilire quale composto si forma durante l'ossidazione dell'acido malico ad ossalacetico [10]. Secondo Lipmann [11], questa reazione si svolgerebbe in più tempi, e cioè si inizierebbe con l'addizione dei fosfati al fumarato (sempre presente accanto all'acido malico), che poi si ossiderebbe a fosfoenolossalacetato.

Anche nel corso dell'ossidazione degli acidi grassi superiori si ha forse formazione di carbossilfosfati: secondo Shapiro e Wertheimer [12] se si dializza il tessuto adiposo, il bleu di metilene viene ridotto dagli acidi grassi solo in presenza di acido adenilico e fosfati inorganici; secondo Lehniger [13], invece, non l'acido adenilico, ma gli adenilpolifosfati o dei sistemi capaci di sintetizzarli (quali gli acilfosfati) sono indispensabili per la normale ossidazione degli acidi grassi superiori.

Come appare da questa rapida e certamente incompleta esposizione, il capitolo del metabolismo fosforico si è arricchito di una nuova reazione di ordine generale molto importante per il trasporto dell'energia durante le ossidazioni.

Nella Tabella I ci è sembrato utile riassumere i vari tipi di queste reazioni ed i substrati che finora sono stati impiegati (secondo Green e Colowick, loc. cit. in [11]).

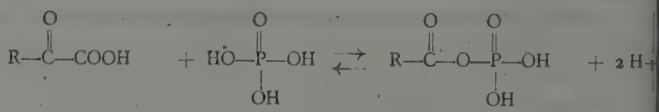
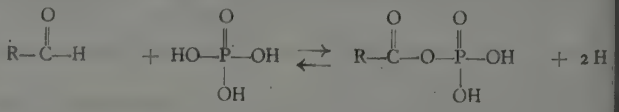
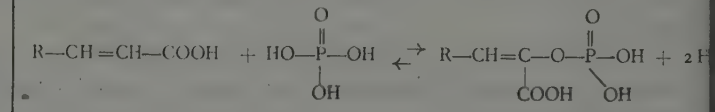
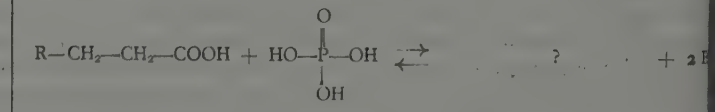
Si vede in tal modo come quasi tutti quei substrati ossidabili che posseggono almeno un atomo di carbonio con doppio legame possono reagire con l'acido fosforico formando acilfosfati. Teoricamente quindi ci è sembrato possibile ammettere che anche nel corso di altre ossidazioni biologiche associate con l'utilizzazione di fosfati, si possano sintetizzare acilfosfati.

Siccome più di una ricerca (Dickens [14], Barker [15], Breusch [16]), ha in questi ultimi anni dimostrato che il glicoso rappresenta un substrato direttamente e facilmente ossidabile per vari organi e tessuti, e siccome è ben noto sin dalle prime ricerche di Kalkar [17] in seguito ampiamente confer-

(9) Colowick, Cori, Kalkar, « Journ. Biol. Chem. », *137*, 343 (1941).
(10) Kalkar, « Biol. Rev. Cambridge Phil. Soc. », *17*, 28 (1942).
(11) F. Lipmann, cit. da Green e Colowick, « Ann. Rev. Bioch. », *13*, 155 (1944).
(12) Shapiro e Wertheimer, « Bioch. Journ. », *37*, 102 (1943).
(13) Lehniger, « Journ. Biol. Chem. », *157*, 363 (1945).
(14) Dickens, « Bioch. Journ. », *32*, 1626 (1938).
(15) Barker, Malam e coll., « Journ. Biol. Chem. », *129*, 33 (1939).
(16) Breusch, « Enzymol. », *10*, 165 (1942).
(17) Kalkar, Ibidem, *2*, 47 (1937).

mate [18], che durante l'ossidazione del glicoso esiste uno stretto rapporto fra ossigeno consumato e fosfati scomparsi, ci è sembrato probabile che anche nel corso di tale ossidazione i fosfati vengono utilizzati per formare acilfosfati.

Tabella I.

Tipo di reazione	substrato	prodotti di reazione
1° decarbossilazione ossidativa	 α-chetoacido	carbossilfosfato
2° ossidazione	 aldeide	carbossilfosfato
3° ossidazione	 acido insaturo	enolfosfato
4° ossidazione	 acido saturo	legame ricco in energia

Infatti, dopo le recenti ricerche di Ruffo e Imperato [19] si può ritenere che il glicoso venga ossidato nel fegato e nel rene prima a gluconato, poi a 2-chetogluconato, che questo subisca la decarbossilazione ossidativa a pentoso, e che, con un meccanismo perfettamente analogo, il pentoso si trasformi prima in tetroso e questo infine in trioso. Per questa ragione, è verosimile che nella decarbossilazione ossidativa del 2-chetogluconato e dei suoi due omologhi inferiori, rispettivamente a 5 ed a 4 atomi di carbonio,

(18) Kalkar, « Enzymol. », *6*, 209 (1939).
(19) Ruffo e Imperato, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *20*, 239 (1945).

si formino carbossilfosfati e che questi reagiscano rapidamente con il sistema adenilico al quale trasferiscono buona parte dell'energia originatasi dalle ossidazioni.

Se si riesce quindi a dimostrare sintesi di adenilpolifosfati durante l'ossidazione del glicoso, del gliconato, e del 2-chetogliconato, vuol dire che le reazioni suddette effettivamente si verificano. Tale dimostrazione noi crediamo di dare con le ricerche che verranno riferite in una Nota successiva.

Chimica (Chimica biologica). — *Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno* [1]. Nota II di A. Ruffo e C. Cennamo, presentata [2] dal Socio G. Quagliariello.

Le ricerche che riferiamo in questa Nota (v. Nota precedente) hanno lo scopo prima di tutto di dimostrare che durante l'ossidazione del glicoso, del gliconato e del 2-chetogliconato si verifica sintesi di adenilpolifosfati, ed in secondo luogo, essendo ormai ben noto dalle classiche ricerche di Ostern [3] e di Cori [4] che il glicogeno nel fegato viene per la maggior parte trasformato in glicoso, indagare se anche in questo caso, cioè durante l'ossidazione del glicogeno, si sintetizzano adenilpolifosfati.

Parte sperimentale.

Allo scopo di mettere in evidenza la sintesi degli adenilpolifosfati in poltiglie di fegato di ratto durante l'incubazione con glicoso, gluconato e 2-chetogluconato (che rappresentano i primi due termini nell'ossidazione diretta nel glicoso stesso), ovvero con glicogeno, abbiamo utilizzato il recente metodo di Kaplan e Greenberg (5), basato sulla diversa solubilità dei fosfati di bario che si ottengono quando si aggiunge al filtrato tricloracetico $Ba(OH)_2$ fino a raggiungere pH 8 circa. Con tale metodo, è possibile separare ed analizzare le varie frazioni fosforiche acido-solubili.

Ed ecco come abbiamo proceduto: circa 2 gr. di poltiglia di fegato di ratto (Latapie) pochi minuti dopo la morte dell'animale vengono incubati con x cc. di una soluzione di d-glicoso, di d-gliconato e di 2-chetogluconato in modo da raggiungere nella miscela di reazione la concentrazione finale di 0,02 mol. (volume finale 5 cc.).

Nel caso del glicogeno, questo viene aggiunto in varie concentrazioni (6 e 3 %) alla poltiglia epatica in paragone ad una prova in bianco. Per seguire la sua ossidazione durante l'incubazione, esso viene dosato (col metodo di Pflüger) in tutte le prove prima e dopo l'incubazione.

Si agitano le prove per 1 h e 1/2 a 37°, si deproteinizzano con acido tricloroacetico (conc. finale = 4 %) a 0°, si filtra rapidamente, e sempre a freddo si divide in due aliquote il filtrato tricloroacetico. Su di una prima aliquota si esegue la determinazione del

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica biologica della R. Università di Napoli.
(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.
(3) Ostern e coll., « Bioch. Journ. », *33*, 1858 (1939).
(4) Cori e coll., « Journ. Biol. Chem. », *129*, 629 (1939).
(5) Kaplan e Greenberg, « Journ. Biol. Chem. », *156*, 511 (1944).

P totale acido-solubile dopo digestione con H_2SO_4 N ; su di una seconda aliquota, trasferita in un tubo da centrifuga, si aggiungono alcuni grammi di $Ba(OH)_2$ cristallino in presenza di poche goccie di fenolftaleina fino a viraggio a rosa pallido. Per mezzo della centrifugazione si separa il precipitato dal liquido soprastante. Il precipitato si ridiscioglie nella minor quantità possibile di acido tricloroacetico e su questa soluzione si ripete il procedimento con $Ba(OH)_2$. Si contrifuga di nuovo ed il liquido soprastante si aggiunge a quello di prima.

Il precipitato si scioglie questa volta in pochi cc. di HCl N/2 e si porta a volume con acqua in un palloncino da 25 cc. Questa frazione è costituita dai fosfati di Ba insolubili. Il liquido soprastante (cioè, quello ottenuto dalle due centrifugazioni), portato in un grosso tubo da centrifuga, viene precipitato con tre volumi di alcool a 96°. Si lascia per 24 h in ghiacciaia, si centrifuga, si allontana il liquido soprastante, l'abbondante precipitato che si ottiene si scioglie in acido tricloroacetico. Si allontana l'eccesso di Ba con H_2SO_4, si filtra ed il filtrato si porta a 25 cc. con acqua. Questa frazione è costituita dal precipitato alcolico e rappresenta la maggior parte dei fosfati di Ba solubili.

I fosfati di Ba insolubili sono costituiti da fosfati inorganici, dai fosfati (labili e non) dell'acido adenildifosforico e da quelli dell'acido fosfoglicerico. Questi vari fosfati si separano tra di loro nella seguente maniera: su di una prima aliquota si dosa il P inorganico direttamente, su di un'altra si determina dopo 7 minuti di idrolisi in HCl N il P dei radicali labili dell'acido adenosintrifosforico: questo valore, moltiplicato per 3/2 esprime il contenuto totale di P dell'ATP. Una terza aliquota, quella del P fosfoglicerico, viene calcolata per differenza, cioè sottraendo al valore dei fosfati insolubili totali il P inorganico + quello dell'acido adenosintrifosforico.

I fosfati di Ba solubili, non tenendo conto del precipitato di Hg (nucleotidi diversi dell'acido adenosintrifosforico) e del precipitato di Pb (fosfati non bene identificati) che sfuggono alla precipitazione con $Ba(OH)_2$ [6] sono costituiti essenzialmente dagli esteri esoso e triosofosforici, che si possono separare con il procedimento di Kursanov [7] secondo cui il glicoso-6-fosfato è più facilmente idrolizzabile in NaOH N del triosofosfato.

Il P viene sempre determinato al fotometro di Pulfrich con l'usuale tecnica di Briggs.

I risultati ottenuti in questa maniera sono riassunti nelle tabelle II e III.

Dall'esame della Tabella II risulta:

1° che durante l'ossidazione del glicoso operata da poltiglie di fegato di ratto la frazione dei fosfati inorganici diminuisce circa di quanto aumenta quella dell'ATP.

2° Che lo stesso si verifica se al glicoso si sostituiscono rispettivamente quantità equimolecolari di gluconato e di 2-chetogluconato.

3° Che durante lo stesso periodo di ossidazione, la frazione degli esteri esoso e triosofosforici non subisce alcuna variazione degna di nota.

Se eseguiamo un bilancio tra fosfati scomparsi ed ATP sintetizzato, vediamo che per ogni molecola di fosfati che scompare se ne sintetizza una di ATP. Questo fatto, messo in relazione con alcuni risultati precedenti [8] da cui appare che per ogni molecola di glicoso ossidata si consumano 3 mole-

(6) Queste frazioni rappresentano circa il 10 % del P totale acido solubile e noi non le consideriamo perchè non hanno alcuna importanza nei nostri esperimenti.

(7) Kursanov, « Biochimia », *3*, 467 (1938).

(8) Ruffo e Imperato, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *20*, 239 (1945).

cole di O_2 e se ne producono altrettante di CO_2, lascia pensare che per ossidare una molecola di glicoso si svolge in totale la seguente reazione:

$$\text{glicoso} + 3\ O_2 + 3\ H_3PO_4 + 3\ \text{ADP} \longrightarrow \text{trioso} + 3\ CO_2 + 3\ \text{ATP}$$

TABELLA II.

Distribuzione dei fosfati acido solubili nel fegato di ratto durante l'ossidazione del glicoso, del gliconato e del 2–chetogliconato.

	P totale acido–solubile mg %	Frazione dei fosfati di Ba insolubili			Frazione dei fosfati di Ba solubili. (P degli esoso- e triosofosfati)
		P inorganico	P dell'ATP	P residuo	
All'inizio	79.1	56.6	5.8	6,2	10.7
Dopo 1 ½ h di ossidazione	80.0	45.4	18.5	6.0	12.1
id. id. + glicoso . . .	81.6	40.5	25.2	5.2	11.4
id. id. + gluconato . .	78.5	36.2	26.1	5.7	10.5
id. id. + 2–chetogluconato	76.4	34.1	26.5	6.1	11.0

In questa reazione, i composti intermedi che utilizzano l'energia occorrente per la sintesi dell'ATP sarebbero rappresentati dai carbossilfosfati che si potrebbero formare durante la decarbossilazione ossidativa del 2–chetogluconato, e dei due chetoacidi inferiori rispettivamente a 5 ed a 4 atomi di carbonio (9).

Nella Tabella III sono riportati gli esperimenti eseguiti col glicogeno.

I dati riportati nella Tabella III mostrano che il glicogeno viene rapidamente ossidato nella poltiglia di fegato e che durante tale ossidazione si accumula ATP analogamente a quanto appare durante l'ossidazione del glicogeno. Questo dato va bene d'accordo con i precedenti di Ostern e di Cori che mostrano la formazione del glicoso dal glicogeno nel fegato e si presta ad alcune considerazioni per quanto riguarda il metabolismo dell'ATP nel fegato stesso. Infatti, si vede chiaramente che l'ATP si sintetizza nella stessa quantità sia in presenza di poco glicogeno sia in presenza di un eccesso di questa sostanza. Questo fatto si spiega bene con l'azione esercitata sugli adenilpolifosfati dall'adenilpolifosfatasi epatica. La reazione:

$$\text{adenosintrifosfato} \xrightarrow{\text{enzima}} \text{acido adenilico} + 2\ H_3PO_4$$

(9) Che si formino carbossilfosfati in poltiglie di fegato incubate con d–glucoso, d–gluconato e 2–chetogluconato in presenza di NaF, risulta da recenti ricerche di RUFFO e CENNAMO («Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», in corso di stampa).

è una reazione di equilibrio, per cui evidentemente quando la concentrazione dell'ATP supera i valori fisiologici (Kaplan e Greenberg [10]) questo viene di nuovo scisso in acido adenilico e fosfati inorganici.

TABELLA III.

Distribuzione dei fosfati acido solubili nel fegato di ratto durante l'ossidazione del glicogeno.

	Glicogeno gr % di poltiglia	P totale acido solubile mg %	Frazione dei fosfati di Ba insolubili			Frazione dei fosfa di Ba solubili (P degli esoso triosofosfati)
			P inorganico	P dell'ATP	P residuo	
All'inizio:						
a) senza glicogeno .	1.40	76.5	51.5	5.4	4.2	11.5
b) + glicogeno . . .	3.60	75.4	50 1	5.2	4.8	12.4
c) + glicogeno . . .	6.00	77.5	51.4	5.8	5.1	11.7
Dopo 1 ½ h di ossidazione:						
a) senza glicogeno .	0.07	78.1	34.6	27.5	4.1	12.1
b) + glicogeno . . .	0.65	76.5	34.8	28.1	3.8	13.4
c) + glicogeno . . .	1.67	77.1	35.2	29.1	4.1	12.0

I bassi valori di ATP riportati nella prova non incubata (all'inizio) sono dovuti alla grande instabilità degli adenilpolifosfati [11] durante la preparazione della poltiglia.

DISCUSSIONE.

I risultati ottenuti riguardanti la formazione dell'ATP durante l'ossidazione del glicoso, del gluconato e del 2–chetogluconato, portano, a nostro parere, un contributo affermativo alla teoria della ossidazione diretta del glicoso.

Infatti, se per un momento si ammette che il glicoso subisca nel fegato la glicolisi fosforica, essendo ben noto che per la formazione degli esteri di Robison e di Harden e Young si utilizzano i fosfati dell'ATP, che a sua volta appena scisso viene di nuovo sintetizzato dai fosfati provenienti

(10) KAPLAN e GREENBERG, « Journ. Biol. Chem. », *156*, 520 (1944).
(11) LEHNIGER, « Journ. Biol. Chem. », *157*, 363 (1945).

dall'acido 1, 3–difosfoglicerico e del 2–fosfopiruvico, non si sarebbe dovuto trovare alcun aumento nella frazione dei fosfati dell'ATP.

D'altra parte la glicolisi fosforica è indiscutibilmente esclusa dai dati che mostrano che la frazione degli esteri esoso e trioso–fosforici non subisce alcun aumento durante l'incubazione.

L'aver trovato nelle nostre esperienze un notevole aumento dell'ATP (composto ad alto contenuto energetico) dimostra che parte dell'energia originatosi dall'ossidazione diretta del glicoso si è trasferita all'ATP. Tale trasferimento avverrebbe, come si è visto, attraverso la formazione dei carbossilfosfati.

Ammettendo, infatti, l'ossidazione diretta del glicoso, questo verrebbe prima a trasformarsi in gluconato, il quale si ossiderebbe ulteriormente a 2–chetogluconato. Nella decarbossilazione ossidativa di questo composto, analogamente a quanto si verifica per il piruvato e per il chetoglutarato si formerebbe il carbossilfosfato. Siccome tale processo di demolizione si ripete ancora due volte (una volta cioè per l'ossidazione del pentoso, ed un'altra per l'ossidazione del tetroso) si verrebbero a formare altri 2 carbossilfosfati.

Il bilancio tra fosfati scomparsi ed ATP sintetizzato quadra perfettamente con questo modo di vedere e nello stesso tempo vengono chiariti i recenti risultati di Kaplan e Greenberg [12] che iniettando a ratti fosfati radioattivi e glicoso hanno trovato dopo 120^h spiccato aumento di ATP radioattivo nel fegato.

I dati relativi all'ossidazione del glicogeno messi in relazione con quelli ora esposti riguardanti l'ossidazione del glicoso, ci permettono di considerare un nuovo aspetto del metabolismo dei fosfati durante la demolizione del glicogeno epatico *in vitro*.

È noto, infatti, che questa sostanza inizia la sua demolizione addizionando fosfati inorganici e trasformandosi prima in estere di Cori, e poi in estere di Robison. Tali trasformazioni avvengono ugualmente nel muscolo e nel fegato, ma mentre nel primo l'estere di Robison viene trasformato in estere di Neuberg ad opera della isomerasi, nel secondo sia l'estere di Cori, sia quello di Robison vengono idrolizzati a glucoso e ad acido fosforico da una fosfatasi. L'acido fosforico ritorna a fosforilizzare altro glicogeno, mentre la maggior parte del glicoso *in vivo* passa rapidamente in circolo per mantenere costante la sua concentrazione nel sangue.

Dalle attuali ricerche appare che anche il glicoso originatosi dal glicogeno viene prontamente ossidato *in vitro* nella poltiglia epatica. E siccome durante tale ossidazione si sintetizzano adenilpolifosfati, mentre gli esteri trioso ed esoso–fosforici non subiscono alcuna variazione, è evidente che esso viene ossidato con il meccanismo illustrato in precedenza, cioè per demolizione

(12) Kaplan e Greenberg, « Journ. Biol. Chem. », *156*, 511, (1944).

graduale della molecola carboniosa passando dall'esoso al pentoso, da questi al tetroso, ed infine al trioso. In tale caso nella decarbossilazione ossidativa del 2–chetogluconato si formerà il primo carbossilfosfato a 5 atomi di carbonio (lo possiamo indicare con il nome generico di pentonilfosfato) che trasporterà il suo radicale fosforico al sistema adenilico. Come già abbiamo accennato, questo processo si ripete ancora due volte, con conseguente accumulo di adenilpolifosfati. Questi, raggiunto il livello fisiologico, vengono scissi in acido adenilico ed H_3PO_4. L'acido fosforico che così risulta può venire di nuovo impiegato dal glicogeno, mentre si libera una notevole quantità di energia (12.000 calorie), che può essere utilizzata per le più diverse attività cellulari, quali, ad esempio, le sintesi chimiche ed il lavoro osmotico.

La via seguita dai fosfati durante l'ossidazione diretta del glicogeno epatico (aerobiosi), dunque, è sostanzialmente diversa da quella seguita nel corso della glicogenolisi muscolare (anaerobiosi). Dai nostri esperimenti risulta, infatti, che nell'ossidazione diretta da una molecola di glicoso si formano 3 molecole di ATP, (rispettivamente dal pentonil–, tetronil– e trionilfosfato), mentre se teniamo presente lo schema classico della glicolisi fosforica notiamo che in questo caso gli adenilpolifosfati non si accumulano affatto.

Conclusioni.

In ricerche aventi lo scopo di studiare il metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione del glicoso e del glicogeno nel fegato di ratto è stato dimostrato:

1° che durante l'ossidazione del glicoso, del gluconato e del 2–chetogluconato (che rappresentano i primi due termini della demolizione diretta del glicoso stesso) la frazione dei fosfati inorganici diminuisce circa di quanto aumenta la frazione degli adenilpolifosfati;

2° che parallelamente la frazione degli esteri esoso e triosofosforici non subisce alcuna variazione;

3° che il glicogeno viene rapidamente trasformato in glicoso, e che questo viene ossidato accumulando ugualmente adenilpolifosfati.

Questi risultati, mentre permettono di indicare un nuovo schema del metabolismo dei fosfati inorganici durante l'ossidazione diretta del glicoso e del glicogeno epatico *in vitro*, mostrano che non tutta l'energia originatasi dalla demolizione di questa sostanza viene trasformata in calore, ma che una parte di essa viene trasformata in altra forma di energia chimica legata ai polifosfati.

Paleontologia (Botanica). — *Le corallinacee fossili delle isole Dahlac* (*A. O.*). Nota II di S. Conti, presentata [1] dal Corrisp. G. Rovereto.

Lithphyllum racemus (Lmk.) Foslie (figg. 9-12).

1881	Lithophyllum	racemus	Lmk.,	Solms-Lauback, *Die Corallineen-Algen des Golfs von Neapel*, IV, p. 62; 1881.
? 1894	»	»	Lmk.,	Trabucco, *Sulla vera posiz.*..., « Atti (Mem.) Soc. Tosc. Sc. Nat. », to. XIII, pp. 181-227; 1894.
? 1900	»	»	Lmk.,	Trabucco, *Fossili, stratigr. ed età*..., « Boll. Soc. Geol. It. », to. XIX, p. 716; 1900.
? 1908	»	»	Lmk.,	Trabucco, *Fossili, stratigr. ed età*..., « Boll. Soc. Geol. It. », to. XXVII, p. 398; 1908.
1919	»	»	Lmk., (Foslie);	Lemoine, *Les Corallinacees du Plioc.*..., « Bull. Soc. Geol. de Fr. », p. 105; 1920.
1925	»	»	Lmk., (Foslie);	Lemoine, *Revision des Mélobésiées.*..., « C. R. Cong. S. Sav. », p. 256; 1925.
1935	»	»	Lmk.,	Pfender, *Observation sur les algues.*..., « Bull. Soc. Geol. de Fr. », p. 573; 1935.

Riferisco a questa specie alcuni talli crostoso-mammellonati che appaiono costantemente sovrapposti ed aderenti a talli di specie diverse (*Arch. aliacense, Lithoph. aroterense, Lithoph.* (*D.*) *papillosum*), per il chè, tenuto conto anche della struttura dell'ipotallo, mi pare possa considerarsi una specie epifita.

Nonostante le numerose segnalazioni sino ad ora date dai vari autori sia di forme fossili che viventi, la specie in esame è ancora mal nota, e pertanto ritengo opportuno di darne una dettagliata descrizione.

Le croste, che avvolgono anche per intero noduletti di melobesie, presentano alcuni bassi e larghi mammelloni in corrispondenza con le zone maggiormente fruttifere. Le croste misurano 200-600 μ e sono rappresentate esclusivamente dal peritallo.

L'ipotallo presenta i caratteri anomali già noti per alcune specie del *gen. Lithophyllum*, nelle quali essendo la maggior parte della loro superficie basale priva di questo tessuto, si può tuttavia talora constatarne la presenza sia per la differenziazione della prima o delle prime serie basali, sia per il locale sviluppo abnorme di strutture atipiche.

Nel caso particolare, la specie in esame si presenta per lo più, almeno apparentemente, assolutamente priva di ipotallo (fig. 9), specialmente quando suo immediato substrato, a cui direttamente aderisce, è il tallo di altra specie. L'aderenza dei due talli è per certi tratti così perfetta che se la

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946. (V. Nota I, a p. 218).

differenza strutturale dei due tessuti a contatto non è ben evidente, riesce difficoltosissimo stabilire dove il sottostante termini e il soprastante inizi.

Cito ad esempio il caso per cui l'Airoldi, che pur fu un esperto conoscitore di melobesie, considerò nelle sue note manoscritte, come una specie affine a *Litholh. Kaiserii* Heydrich, un complesso crostoso costituito dalla perfetta sovrapposizione di due talli diversi, di cui il sottostante che è in realtà un tallo giovanile di *Arch. aliacense*, sembrava costituire l'ipotallo e il peritallo primario, e il sovrastante, che è sicuramente una crosta fruttifera di *L. racemus*, pareva rappresentare il peritallo secondario.

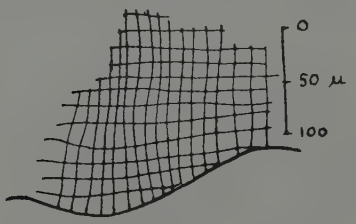


Fig. 9.

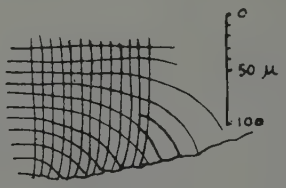


Fig. 10.

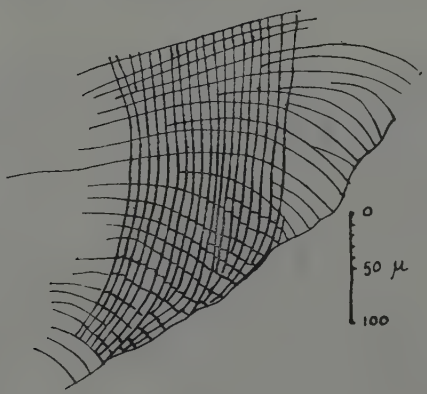


Fig. 11.

In parecchi casi, peraltro, esiste una differenziazione dell'ipotallo, che si riconosce dall'obliquità della prima o delle prime due o tre serie di cellule (fig. 10), o dalla dimensione un poco maggiore delle medesime. Infine, ogni qualvolta la parte basale del tallo non sia a contatto diretto con un tessuto di melobesia, ed è questo un caso poco frequente, nella nostra collezione, si osserva una evidente differenziazione delle serie e delle file basali, quasicchè la specie, epifita facoltativa preferente, possa provvedersi di un tessuto ipotallico ogni qualvolta essa si trovi a contatto con un substrato roccioso anzichè organico. Pertanto in tali condizioni si può rico-

noscere come le file cellulari lievemente incurvate o rampanti alla base, vengano intersecate dalle serie cellulari che da orizzontali si incurvano a un certo punto verso il basso dove, dopo essersi parzialmente sdoppiate, rapidamente si interrompono (fig. 11). Ne risulta una struttura atipica e particolare, intermedia tra il tipo *Lithothamnium* e *Lithophyllum*.

Le cellule della serie basale, ove si presentano poco o punto differenziate, hanno forma quadrata o rettangolare tozza, misurando 12–18 × 10–16 (18) μ; quando invece sono costituite dalla curvatura delle file e delle serie si presentano, come quelle del peritallo, più alte e più sottili misurando 14–20 × 8–10 μ.

Il peritallo (figg. 9, 10, 11) presenta una organizzazione in serie orizzontale generalmente sin dalla sua parte basale, dove peraltro talvolta per breve tratto si nota una non perfetta continuità dei setti orizzontali.

La parte mediana e prevalente del tessuto peritallico è costituito da un regolare reticolo a maglie rettangolari in cui però la marcatura delle serie orizzontali si presenta un poco più evidente delle file verticali. Fa

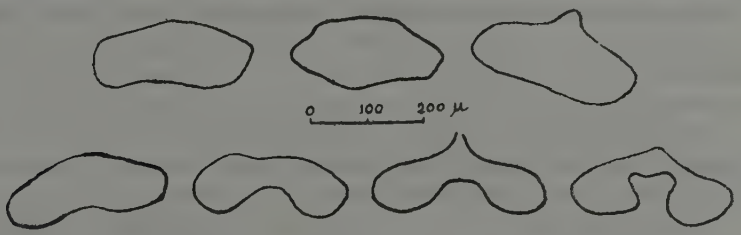


Fig. 12.

eccezione a tale regola qualche ristretta zona di tessuto che, probabilmente per crescita anomala, presenta solo file verticali un poco sinuose ed a cellule quadrate a spigoli arrotondati.

La parte più alta del peritallo, sovente fruttifera, è costituita da un regolarissimo tessuto a cellette quadrate di taglia un poco più ridotta.

Le misure più frequenti sono: 12–14 × 12–14 μ nella parte basale; 14–18 (20) × 7–10 μ nella parte mediana che costituisce la maggior parte del peritallo; 10–12 × 10–12 μ nella zona superiore o corticale.

Manca zonatura del tallo.

Organi riproduttori. - Sono stati osservati numerosissimi concettacoli ellittici o con traccia di ostiolo e fondo più o meno marcatamente prominente. Alcune misure sono: 159 × 61 μ; 164 × 75 μ; 188 × 106 μ; 235 × 80 μ; 294 × 119 μ; 300 × 117 μ; tali organi appaiono sempre assai appiattiti e infatti le misure date superanti i 100 μ includono l'altezza del collo recante l'orifizio sul tetto.

In qualche tallo molti concettacoli (ma non tutti), presentano una forma curiosa dovuta ad una eccessiva convessità del fondo la cui proeminenza giunge sino quasi a congiungersi al tetto (fig. 12); questi ultimi misurano 305 × 77 μ; 305 × 65 μ; 294 × 109; 403 × 130 μ.

Osservazioni e confronti. – Le specie tutt'ora viventi *Lithoph. Kaiserii* Heydrick e *Lithoph.Pallascens* Foslie [2] presentano alcune analogie ed appartengono alla stessa categoria della specie in esame per l'assenza pressochè totale dell'ipotallo; presentano inoltre corrispondenza di misure cellulari e dei concettacoli. Tuttavia le due specie citate si differenziano sia per l'aspetto esterno (presenza di marcati tubercoli talora ramificati e passanti a tozzi rami), sia strutturalmente per la presenza di un peritallo primario ben distinto dal soprastante secondario; tale carattere manca affatto alla nostra specie.

Lithoph. racemus Lmk. (Foslie) sia nelle forme fossili che viventi, presenta tutti i caratteri corripondenti a quelli descritti per la nostra specie delle Dahlac. Le misure delle cellule di 18 × 10 μ date come più frequenti dalla Lemoine per le specie Greche ed Egee, sono incluse nei limiti di variabilità, invero assai notevoli, date dalla stessa autrice per le specie fossili quaternarie Italiane. La struttura figurata e descritta ancora dalla Lemoine per queste ultime corrisponde a quella da noi osservata, come pure l'assenza, o per meglio dire, la riduzione ipotallica, corrispondono esattamente. Anche la disposizione locale in cui le cellule appaiono in qualche tratto organizzate solo in filari è presente nella nostra e nelle specie descritte dalla Lemoine.

Il cosiddetto peritallo primario, che la Lemoine afferma di aver sporadicamente osservato, può ben corrispondere a quei tratti di tessuto basale che noi distinguiamo come ipotallo abnorme per struttura e sviluppo.

Anche i concettacoli presentano in buon numero forme e misure assolutamente corrispondenti, sì che non ritengo dubbia l'assegnazione della specie qui descritta a *Lithophyllum racemus* Lmk. (Foslie).

Ricordo che *Lithoph. racemus* Lmk. (Foslie) deve tenersi distinto da *Litholh. racemus* (Aresc) Roth. [3] (che sarà bene d'ora innanzi distinguere come *Litholh. racemus* Roth.), il quale presenta un ipotallo ben distinto e assai sviluppato del tipo *Lithothamnium,* oltrechè una evidente zonatura del peritallo.

Da tener presente ancora che secondo Foslie il *Lithoph. racemus* Lmk. dovrebbe identificarsi con il *Litholh. pliocenum* Gumb. [4].

Lithoph. racemus Lmk. (Fosl.) è tutt'ora vivente in numerose località del Mediterraneo: Marsiglia, Corsica, Napoli, Sicilia, Algeri, Tripolitania, Mar Adriatico, Genova, Is. Tenedos. Il *L. Audrussowi* di cui il Foslie ha notato la stretta parentela con il *L. racemus* Lmk., è presente anche nei Dardanelli e nel Mar di Marmara.

Fuori dal Mediterraneo è ancora noto nel Golfo del Siam.

(2) Lemoine M.me P., 1911, loc. cit. p. 150 e 156.

(3) Rothpletz A., *Fossile Kalkalgen aus den Familien des Codiaceen und Corallinaceen.* « Zeitschr. d. d. geol. Ges. », XLIII, 2, 1893, p. 320, tav. XV, fig. 15.

(4) Gümbel C. W., *Die Sogenannten Nulliporen (Lithothamnium und Dactilopora).* « Abhand d. K. bayer. Akad. d. Wiss. », classe II, vol. XI, Erster Teil, p. 29, tav. I, fig. 4 *a–b.*

Fossile oltre alla nostra presente segnalazione, è noto nel pliocene di Fiumara Scopo presso Messina, e di Girgenti; nel Calabrense di Gravitelli presso Messina e Monosterace presso Reggio Cal.; nel Siciliense di Acqua Santa e Vergine Maria presso Palermo; nel quaternario di Antibo.

LITHOPHYLLUM AROTERENSE n. sp. (figg. 13-16).

I talli che attribuisco a questa nuova specie sono costituiti da croste piuttosto uniformi a superficie ondulata o debolmente mammellonata; il loro spessore è di 600-850 μ, e sono costituiti in grande prevalenza dal peritallo.

L'ipotallo non presenta caratteri sempre conformi ad una struttura tipica. Nella grande maggioranza dei casi ha uno spessore modesto (40–60 μ, raramente più), ed è costituito da sole 3/5 file di grosse cellule rampanti che passano assai bruscamente a verticali.

Qualche volta dalle file basali orizzontali o debolmente rampanti prendono bruscamente origine dorsalmente le file verticali che poi passano a costituire il peritallo.

A queste strutture che parrebbero tipiche del *gen. Lithothamnium* fa riscontro in qualche caso un ordinamento delle cellule anche in serie concentriche in qualche breve tratto degli ipotalli sia basali che secondari i quali presentano spessori anche più ridotti dei precedenti.

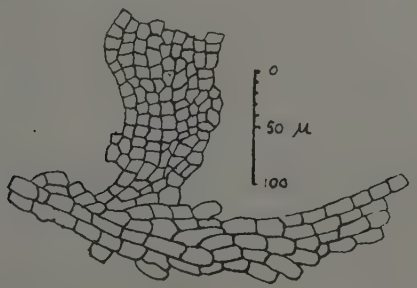


Fig. 13.

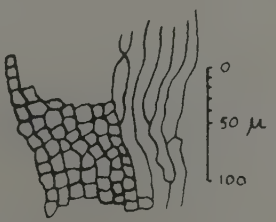


Fig. 14.

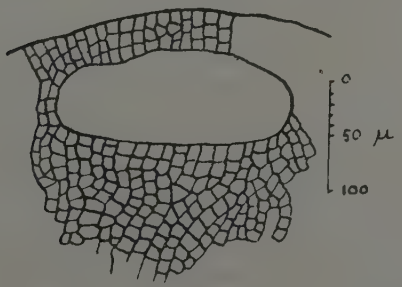


Fig. 15.

Non è neppure infrequente una assenza pressochè totale di ipotallo, nel senso che le file verticali, originandosi direttamente dal substrato (che in questi casi è dato per lo più da talli di altra specie), non mostrano le cellule basali differenziate da quelle sovrastanti.

Nei primi due casi le cellule si presentano subrettangolari, sino ad ovoidi misuranti 18–37 (freq. 23–28) × 14 μ.

Il peritallo in nessun caso presenta organizzazione delle cellule in serie orizzontali e, in genere, neppure distintamente in file verticali; queste ultime, se individuabili, sono sempre ondulate, frequentemente interrotte, e comunque assai irregolari. Nel complesso, prevale ovunque una disposizione molto disordinata (figg. 13, 14, 15).

Le cellule di questo tessuto sono subquadrate o di varia forma, ma sempre tozze, e misurano 9-14 μ di lato (eccezionalmente 18 μ) o 12–14 × 9–10 μ.

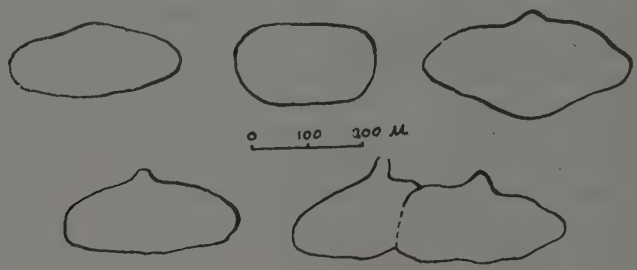


Fig. 16.

Organi riproduttori. – Assai numerosi i concettacoli; molti di essi presentano sezione ellittica tendente talora alla forma di losanga con angoli arrotondati, taluni mostranti un ostiolo all'apice di un tozzo collo (figg. 15–16). Misure più frequenti sono: 320 × 150–160 μ, ed uno tra i maggiori misura 390 × 200 μ.

Osservazioni e confronti. – *Litholh. disarmonicum* Conti (5) del miocene di Ponzone (Acqui) presenta dimensioni cellulari e struttura del peritallo assolutamente analoghi, ma ne fanno una specie separata i tubercoli più pronunciati, la struttura dell'ipotallo e le dimensioni delle cellule di questo tessuto, oltrechè la forma dei concettacoli.

Lithoph. anguineum Conti, specie inedita, descritta in un lavoro in corso di stampa, pure miocenica, proveniente dal Leithakalk di Vienna, presenta caratteri conformi nel peritallo e assai prossimi nell'ipotallo, sebbene in quest'ultimo si riconosca una anche maggior variabilità strutturale e dimensionale delle cellule; è assai diversa peraltro la forma dei concettacoli.

(5) S. Conti, *Corallinacee del miocene Ligure-Piemontese.* « Palaeontografia Italica », vol. XLI, p. 49, tav. VI, fig. 2; 1942–43.

Maggior corrispondenza sembra tuttavia presentare il tallo figurato e descritto dall'Airoldi con il nome di *Litholh. sp.* [6] proveniente dalla panchina pleistacenica di Obbia in Somalia, ma la insufficiente descrizione e qualche differenza strutturale (maggior sviluppo dell'ipotallo, unitamente ad una disposizione più disordinata delle cellule di questo tessuto), consigliano di tener distinte le due specie.

Come alcune specie note, tra cui le due mioceniche sopracitate, i talli qui in esame delle Dahlac, presentano alcuni importanti caratteri strutturali riferibili al *gen. Lithothamnium*; d'altro canto l'assenza di zonatura, la tendenza localmente osservata nell'ipotallo a dar luogo a serie rudimentalmente disposte in serie concentriche, oltrechè la presenza di concettacoli solamente monoporici, consigliano di assegnarla senz'altro al *gen. Lithophyllum*; in altro lavoro in istampa ho appunto distinto una sezione di questo *gen.* comprendente le forme che presentano questi peculiari caratteri.

Nelle sue note manoscritte l'Airoldi, aveva osservato l'affinità di questi talli delle Dahlac con la specie sopracitata di Obbia, e li aveva provvisoriamente assegnati al *gen. Lithothamnium* distinguendoli col nome di *aroterense*; conservandone l'aggettivo, la specie assume il nome di *Lithoph. aroterense.*

Lithophyllum (Dermatolithon) papillosum (Zan.) Foslie [7]

Questa specie figura in tutti i preparati della collezione anche con bellissimi esemplari.

Si tratta di talli costituiti da alcune serie sovrapposte di cellule disposte a cartucciera. La prima fila basale non sempre appare costituita da cellule differenziate o inclinate; le serie sovrastanti, in numero vario (da 2 o 3 sino a 23), sono strutturalmente assai uniformi per quanto variabili in altezza.

Sono state osservate le seguenti misure: in un tallo di 6 serie, $60 \times 5\ \mu$; $45 \times 5\ \mu$; $28 \times 8\ \mu$; $60 \times 23\ \mu$. In altro tallo di 13 serie, $23–28 \times 14\ \mu$; $70 \times 10\ \mu$, e tutte le misure intermedie.

Parecchi concettacoli sono compresi in questi talli ed alcune misure sono: $169 \times 47\ \mu$; $217 \times 45\ \mu$; $376 \times 103\ \mu$.

Lithoph. (*D.*) *papillosum* è noto vivente in mólte località del Mediterraneo e nel golfo del Siam. Fossile è stato riconosciuto in parecchie località del pliocene e del quaternario dell'Italia meridionale e nel miocene dell'Italia settentrionale. Inoltre probabilmente miocenico è il *Lithoph.* (*D.*) *Dublanqui* Lem. [8] della Martinica, estremamente affine, se non identico a *L.* (*D.*) *papillosum.*

(6) M. Airoldi, 1933, op. cit. p. 87, tav. VII, fig. 6.

(7) Per la bibliografia cfr. Conti, *Contributo allo studio* .... « Palaeontographia Italica », vol. XLI, p. 57, 1942–43.

(8) Lemoine M.me P., *Contribution a l'étude des corallinacées fossiles.* III *Corallinacées fossiles de la Martinica*, « Bull. Soc. Geol. de France », 4ª serie, to. XVII, p. 274, fig. 22; 1917.

Zoologia. — *Contributi alla conoscenza morfo-biologica e sistematica dell'ortotterofauna dell'Eritrea.* – IV. *Notizie preliminari sull'evoluzione biologica durante l'anno della « Symbella biplagiata » Bolivar (« Orthop., Eumastacidae ») vivente nelle regioni di Altopiano.* Nota di G. Jannone, presentata [1] dal Socio F. Silvestri.

I. – Premessa.

Nelle catture di Ortotteri a scopo sistematico da me effettuate in Eritrea durante il 1944, fissai l'attenzione su un piccolo Acridide attero, arboricolo e solitario, vivente quasi sempre in scarso o scarsissimo numero soltanto nelle regioni di alta montagna e facente parte delle associazioni silvane.

Interessandomi in modo particolare il comportamento bio-ecologico di questo Ortottero e alcuni caratteri morfologici delle femmine e dei maschi adulti, in data 4 dicembre del predetto anno inviai al dott. B. P. Uvarov, Direttore dell'*Anti-Locust Research Centre* di Londra, alcuni esemplari di esso, chiedendo una cortese determinazione della specie.

In data 7 febbraio 1945, l'Uvarov mi rispose che si trattava della *Symbella biplagiata*, Ortottero Eumastacide già descritto dal Bolivar per Asmara, aggiungendo che *la biologia delle specie di questa famiglia era molto poco conosciuta e che tutte le osservazioni che potevo fare su di esse sarebbero riuscite interessanti.*

Nel 1945 ho avuto la possibilità materiale di mettere a punto uno studio morfo-biologico abbastanza dettagliato sulla *Symbella biplagiata*, estendendo le ricerche a molte località dell'Altopiano Eritreo dai 2000 ai 2400 m. s. m. e arrivando con qualche puntata alle quote più alte della Colonia, e specialmente al massiccio di Rora Bagla a SW di Nacfa, che nella vetta dello Sciamotat raggiunge i 2700 m. circa.

In attesa di pubblicare tale studio in tutti i suoi particolari, non appena le possibilità editoriali lo permetteranno, ho ritenuto cosa utile per la scienza stralciare da esso alcune osservazioni riguardanti l'evoluzione biologica dell'insetto durante l'anno, in rapporto all'andamento termo-udometrico delle regioni in cui vive, le diversità di comportamento rispetto ad altri Ortotteri dell'Altopiano e il suo trofismo e relazioni con l'agricoltura. Ho redatto così la presente Nota, che costituisce il quarto contributo di una serie di lavori sugli Ortotteri dell'Eritrea da me iniziata a pubblicare qualche anno addietro [2].

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) I primi tre lavori della serie *Contributi alla conoscenza morfo-biologica e sistematica dell'Ortotterofauna dell'Eritrea* sono stati pubblicati nel 1944 e 1945 e corrispondono ai seguenti dati bibliografici:

I. – Caso di pervertimento sessuale notato in Eritrea tra individui dei generi *Phymateus* e *Schistocerca (Orthop., Acrid.)* e considerazioni comparate del fenomeno in altre

Sento il dovere di ringraziare il dott. B. P. Uvarov per tutti i suggerimenti disinteressati fornitimi e il mio indimenticabile Maestro prof. F. Silvestri, che allo studio sugli Ortotteri mi avviò e guidò con la sua illuminata perizia e che si è interessato, oggi, per la pubblicazione della presente Nota. Un pensiero riconoscente rivolgo anche al mio assistente G. De Lotto, da me incaricato di raccogliere materiale e compiere delle osservazioni in natura.

II. – Evoluzione biologica della « Symbella biplagiata » durante l'anno in rapporto all'andamento termo–udometrico.

In base agli stadi di *Symbella biplagiata* da me notati in natura durante il 1944 e 1945, agli individui catturati e a tutte le osservazioni compiute nei vari ambienti naturali e in laboratorio durante lo stesso periodo sull'ovodeposizione, sviluppo embrionale, sviluppo postembrionale, accoppiamento, maturazione sessuale, durata della vita degli adulti, ecc., ho potuto constatare che sull'Altopiano Eritreo, ad un'altitudine media di 2300–2360 m. s. m., la specie svolge due generazioni complete nel periodo di 12 mesi circa; gli esemplari della seconda generazione, però, continuano a vivere anche nei primi mesi dell'anno successivo. Le due generazioni si susseguono con continuità ritmica e durate pressochè costanti dei vari momenti biologici. Detto comportamento mostra che la *Symbella* non risente in maniera visibile delle influenze favorevoli o sfavorevoli esercitate sul suo sviluppo, come su quello degli altri Ortotteri, da tutti gli elementi climatici che determinano il ritmo e la successione delle stagioni, accomunando ad essi tutte le fasi di attività e di diapausa o quiescenza.

Considerando un periodo di 12 mesi corrispondenti al 1944 o al 1945, le due generazioni dell'insetto si sono succedute come appresso:

a) *Parte di gennaio–febbraio–marzo–aprile e parte di maggio* (*o parte di giugno*): in questo periodo si compie lo sviluppo embrionale delle ova della *prima generazione annuale*, sviluppo che occupa dai 3 mesi e mezzo ai 4 mesi circa. La discrepanza notevole tra il periodo indicato, che va da poco più di 4 mesi a quasi 5 e mezzo, e la durata effettiva dello sviluppo embrionale di mesi 3,5–4, deriva dalla discreta lunghezza della vita degli adulti della generazione precedente, che comporta un lungo periodo di ovodeposizione, durante il quale le femmine maturano, si accoppiano e depongono parecchie volte.

b) *Maggio–giugno–luglio–agosto–settembre e parte di ottobre:* in questo periodo ha luogo la nascita, lo sviluppo postembrionale, la maturazione sessuale degli adulti, l'accoppiamento, la deposizione delle ova e la morte

specie animali « Boll. Soc. Ital. Medicina e Igiene Trop. (Sez Eritrea) », vol. IV, n. 4, pp. 626-640, Asmara, 1944.

II. – Deviazioni dell'istinto materno in *Schistocerca gregaria* (Forsk.) ph. *gregaria (Orthop., Acrid.)* notate in Eritrea nel 1944. « Ibidem. », vol. V, nn. 1-2-3, pp. 41–54, Asmara, 1945.

III – Nota preventiva sugli *Hetrodinae (Orthop., Tettig.)* con particolare riguardo alla loro biologia. « Ibidem. », vol. V, nn. 1–2–3, pp. 99–122, Asmara, 1945.

naturale degli individui della *prima generazione annuale*. Considerando il mese di maggio come inizio delle nascite massive, si ha che verso la fine del mese di giugno si hanno già i primi adulti, i quali incominciano a deporre nella prima metà di luglio. In tal modo, alla fine di ottobre circa incomincia a completarsi lo sviluppo embrionale delle ova della generazione successiva e ad aversi, quindi, le prime nascite degli individui di quest'ultima. Le nascite massime degli individui della prima generazione si possono protrarre fino al 20–25 giugno o un po' più tardi, per cui tutte le date delle successive fasi vanno spostate di circa 2 mesi ; e infatti sono state constatate le ultime nascite di individui della seconda generazione sino alla fine di dicembre circa.

c) *Parte di luglio–agosto–settembre–ottobre e parte di novembre* (*o gran parte di dicembre*): in questo periodo si compie lo sviluppo embrionale delle ova della *seconda generazione annuale*, sviluppo che anche in questo caso occupa da 3 mesi e mezzo a 4 mesi circa. Pure in tal caso si nota una grande discrepanza tra il periodo indicato, che va da poco più di 4 mesi a 6 mesi circa o poco meno, e la durata effettiva dello sviluppo embrionale. I motivi di questo fatto sono gli stessi di quelli indicati alla lettera *a*).

d) *Novembre–dicembre–gennaio–febbraio–marzo:* in questo periodo ha luogo la nascita, lo sviluppo postembrionale, la maturazione sessuale degli adulti, l'accoppiamento, la deposizione delle ova e la morte naturale degli individui della *seconda generazione annuale*. Considerando il mese di novembre come inizio delle nascite massive, si ha che verso la fine di dicembre o al massimo nella prima metà di gennaio si hanno i primi adulti, i quali incominciano a deporre in quest'ultimo mese, dando luogo ai germi dai quali deriverà la prima generazione dell'anno in corso. Confusionismi solo apparenti possono sorgere tenendo presente tutti i mesi anzi riportati in cui si svolgono le varie fasi della vita postembrionale e adulta degli individui della seconda generazione. È facile eliminare tali confusionismi se si tien conto del lasso di tempo in cui le varie fasi biologiche si svolgono e del fatto che per nessuna specie di insetto si nota un perfetto sincronismo evolutivo da parte di tutti gli individui. Ne consegue che per i primi individui delle due generazioni lo sviluppo si completa più o meno esattamente nei 12 mesi corrispondenti all'anno solare (6 mesi per generazione, dei quali 3, 5–4 occupati dallo sviluppo embrionale e 2, 5–2 richiesti in linea di massima da tutti gli altri momenti dello sviluppo postembrionale e della vita adulta, la quale, per conto proprio, fuoriesce dai predetti limiti senza coinvolgere lo svolgimento della generazione successiva). Per gli individui che nascono successivamente, lo sviluppo si completa pure più o meno esattamente in 12 mesi, ma questi non corrispondono più all'anno solare, risultando a cavallo di due anni successivi.

Da quanto detto in precedenza, che in linea di massima rappresenta lo schema di successione durante l'anno delle due generazioni della *Symbella biplagiata* sull'Altopiano Eritreo, ad un'altitudine di 2300–2360 m. circa s. m., si nota che non si verifica nessuna sosta o diapausa in uno

stadio qualunque dell'insetto da novembre a marzo o da maggio a settembre, che per le regioni temperate boreali e australi rappresentano rispettivamente il periodo freddo, in cui il ritmo dello sviluppo o della vita entomatica in genere si rallenta moltissimo.

Considerando per l'Altopiano Eritreo un periodo di 12 mesi corrispondente all'anno solare, vediamo che esso include sempre una stagione di grandi pioggie della durata di circa 3 mesi (luglio–agosto-settembre o parte di giugno–luglio–agosto e parte di settembre o parte di luglio–agosto-settembre e parte di ottobre), una stagione di piccole pioggie molto limitata e incostante nel tempo e nello spazio, di circa 1 mese o 1 mese e mezzo (a cavallo fra parte di marzo e parte di maggio) e una stagione asciutta divisa in due sottoperiodi: uno lungo, che va da ottobre alla fine di marzo circa dell'anno successivo, al quale corrispondono i minimi termici e le maggiori escursioni, e uno breve, che abbraccia parte di maggio e tutto giugno o anche i primi di luglio, al quale corrispondono i massimi termici. Le temperature delle stagioni delle grandi e delle piccole pioggie sono, in genere, abbastanza miti, mantenendosi comprese tra i minimi e i massimi degli altri periodi dell'annata.

Sovrapponendo, ora, lo schema di successione delle due generazioni di *Symbella* durante l'anno a quello dell'andamento stagionale e più precisamente allo schema dell'andamento termo–udometrico anzi tracciato, e trascurando gli altri elementi climatici i quali hanno un ruolo riflesso rispetto alle temperature e alle precipitazioni, vediamo che ambedue le generazioni, o almeno un certo numero di individui di esse, usufruiscono delle stagioni piovose e discretamente calde, che sono quelle maggiormente favorenti lo sviluppo degli Ortotteri. Della prima generazione, usufruiscono delle pioggie le ova a sviluppo più ritardato per ritardo di ovodeposizione, e tutti gli stadi postembrionali, compreso quello di adulto; della seconda generazione ne usufruiscono le ova a sviluppo più anticipato per anticipo di ovodeposizione oltre a quelle a sviluppo medio. Gli individui che non usufruiscono assolutamente del periodo delle pioggie e che si sviluppano soltanto durante la stagione asciutta, a cui corrispondono i minimi di temperatura e le maggiori escursioni, sono le larve, le ninfe e gli adulti della seconda generazione annuale, i quali, anche se a sviluppo tardivo, arrivano al massimo fino a marzo o in qualche caso ad aprile, usufruendo di qualche pioggia solo verso la fine della loro vita adulta. Alle volte si hanno delle pioggie eccezionali in dicembre, gennaio o febbraio, in conseguenza di avanzamento verso occidente dei piovaschi che si verificano nel Versante Orientale o nel Bassopiano omonimo, così come si hanno dei densi e temporanei nebbioni, specialmente nelle ore serali o durante la notte o anche nelle prime ore del mattino; ma questi fenomeni meteorologici eccezionali o di scarsa portata non sono tali da conferire una profonda modificazione al clima dell'Altopiano Eritreo da ottobre a marzo e da esercitare, quindi, una netta influenza in qualche senso sullo sviluppo della *Symbella*.

Tracciato così l'assetto dei rapporti tra evoluzione biologica dell'Eumastacide e andamento termo-udometrico del clima dell'Altopiano Eritreo, possiamo definire la prima generazione *igrofitica* e la seconda *xerofitica*, prescindendo in tal caso dallo sviluppo embrionale e limitando la definizione soltanto alla vita postembrionale e adulta. Tutte le influenze sullo sviluppo generale che possono esercitare le variazioni termiche e i periodi di pioggia e di aridità sembra che non inducano nessuna profonda e visibile modificazione nelle durate dei vari momenti biologici degli individui delle due generazioni durante i mesi già specificati in precedenza. Piccole differenze non si possono negare, verificantisi anche da zona a zona col variare dell'altitudine e della latitudine e col variare dei microclimi, ma esse non sono tali da imprimere una profonda alterazione nel ritmo di evoluzione ontogenetica degli individui, tanto che in due anni di osservazione i rilievi in natura sono stati generalmente abbastanza corrispondenti.

Utilizzando i dati di piovosità e temperature registrati dall'Ufficio Meteorologico di Asmara durante il 1945 e i rilievi biologici da me effettuati in natura, è stato possibile costruire il *bioclimogramma* e i *quadrangoli delle condizioni di sviluppo* rappresentati nella fig. 1. Da questi grafici si rileva facilmente l'estrema plasticità della *Symbella* in rapporto al clima, plasticità che non si nota con pari evidenza negli Ortotteri di altre famiglie e che si deve forse attribuire ad una caratteristica intrinseca dei rappresentanti della famiglia degli Eumastacidi, oppure ad una caratteristica singolare della *Symbella*, le di cui abitudini arboricole e silvane portano le larve, le ninfe e gli adulti a trovare alimento in qualsiasi periodo dell'anno.

III. – Diversità di comportamento biologico tra la « Symbella biplagiata » ed altri Ortotteri endemici dell'Altopiano Eritreo.

Il comportamento biologico degli Ortotteri Acrididi e Tettigonidi endemici del tavolato Eritreo, sviluppantesi tra i 2000 e 2400 m. circa s. m., è molto diverso da gruppo a gruppo e frequentemente da specie a specie dello stesso gruppo, non ostante siano pressochè costanti i valori climatici ed ecologici in genere degli ambienti in cui le varie entità vivono e si riproducono. Ed infatti, troviamo delle entità che hanno una sola generazione in un anno e che passano il periodo asciutto da ottobre a quasi tutto marzo o parte di aprile e alle volte fino a giugno (tenendo presente che la stagione delle piccole pioggie, come è stato già detto, è così incostante che esercita quasi sempre pochissima o nessuna influenza sullo stato fisiologico di molte specie di Ortotteri) allo stato di adulto sessualmente immaturo. In tal caso, lo sviluppo embrionale e quello postembrionale non subiscono allungamenti di sorta, mantenendosi sempre entro la durata media rispettiva di 25–40 e 40–50 giorni, alle condizioni climatiche dell'Altopiano (esempio *Phymateus* sp. ed altri: cfr. primo lavoro della serie dei « Contributi » specificati nella nota alla premessa).

Vi sono altre entità che vanno incontro ad uno sviluppo postembrionale lentissimo, il quale occupa diversi mesi a cavallo tra due anni successivi ed uno sviluppo embrionale relativamente breve, come si verifica per il Tettigonide Hetrodino *Eugaster aereus* Sjöst.?, su cui ho riferito nel terzo lavoro della serie dei « Contributi » anzi accennati.

La *Symbella*, invece, va incontro ad un'evoluzione biologica alquanto più regolare, se così si potesse dire, nei riguardi delle altre specie, evoluzione che comprende due generazioni all'anno in un periodo di 12 mesi corrispondente all'anno solare. Essa mostra con ciò di non risentire che minimamente o nulla delle variazioni climatiche determinanti i caratteristici periodi stagionali. Col suo comportamento biologico la *Symbella biplagiata* aderisce più intimamente alle condizioni climatiche dell'Altopiano Eritreo di quanto non si verifichi per altre specie a biologia già conosciuta. E infatti, le condizioni climatiche generali del predetto Altopiano sono tali da conferire alla regione – correttamente o no – l'appellativo di « Paese ad eterna primavera ». Del resto, parecchi alberi fruttiferi delle regioni temperate qui introdotti e acclimatatisi, come il Pesco, il Mandorlo, il Melo, la Vite, ecc., fioriscono ininterrottamente durante quasi tutto l'anno e in molti mesi presentano sia fiori, sia frutti in tutte le dimensioni. Per cui anche il determinismo del comportamento biologico della *Symbella* – specie strettamente localizzata alle quote già viste, e cioè dai 2000 m. circa in sopra – deve essere forse ricercato nell'andamento termico abbastanza mite e oscillante, durante i vari mesi dell'anno, tra valori estremi non molto lontani.

Ad una conclusione logica dei fatti in questo senso si opporrebbe, a prima vista, la scarsa umidità del terreno durante i mesi siccitosi, in linea di massima da ottobre a quasi tutto marzo o parte di aprile, nei quali troviamo interrate sia le ova della prima, sia quelle della seconda generazione; il che porterebbe a pensare ad un'eventuale disidratazione del vitello e quindi ad una morte dell'embrione. Non bisogna dimenticare, però, che in luglio, agosto e settembre viene a concentrarsi nel terreno una discreta riserva di umidità, che se non è sufficiente a conservare a lungo il turgore vegetativo della flora erbacea e impone qualche irrigazione alle piante arboree con radici superficiali, è capace di non far perdere alle ova il loro normale turgore, anche fino a novembre-dicembre, nei quali mesi sopperiscono alle eventuali deficienze di umidità le fitte nebbie provenienti dal Versante Orientale. Per i mesi di marzo-aprile-maggio sono le piccole pioggie che provvedono a integrare quella riserva idrica del terreno, ormai ridotta quasi a zero in superficie, e che arrivano assai opportune per evitare la morte delle ova della prima generazione in via di sviluppo.

IV. – Trofismo della « Symbella biplagiata » e relazioni della specie con l'agricoltura.

Come è stato già accennato nella premessa, la *Symbella biplagiata* è un piccolo Ortottero attero, tipicamente arboricolo, pur deponendo le ova nel

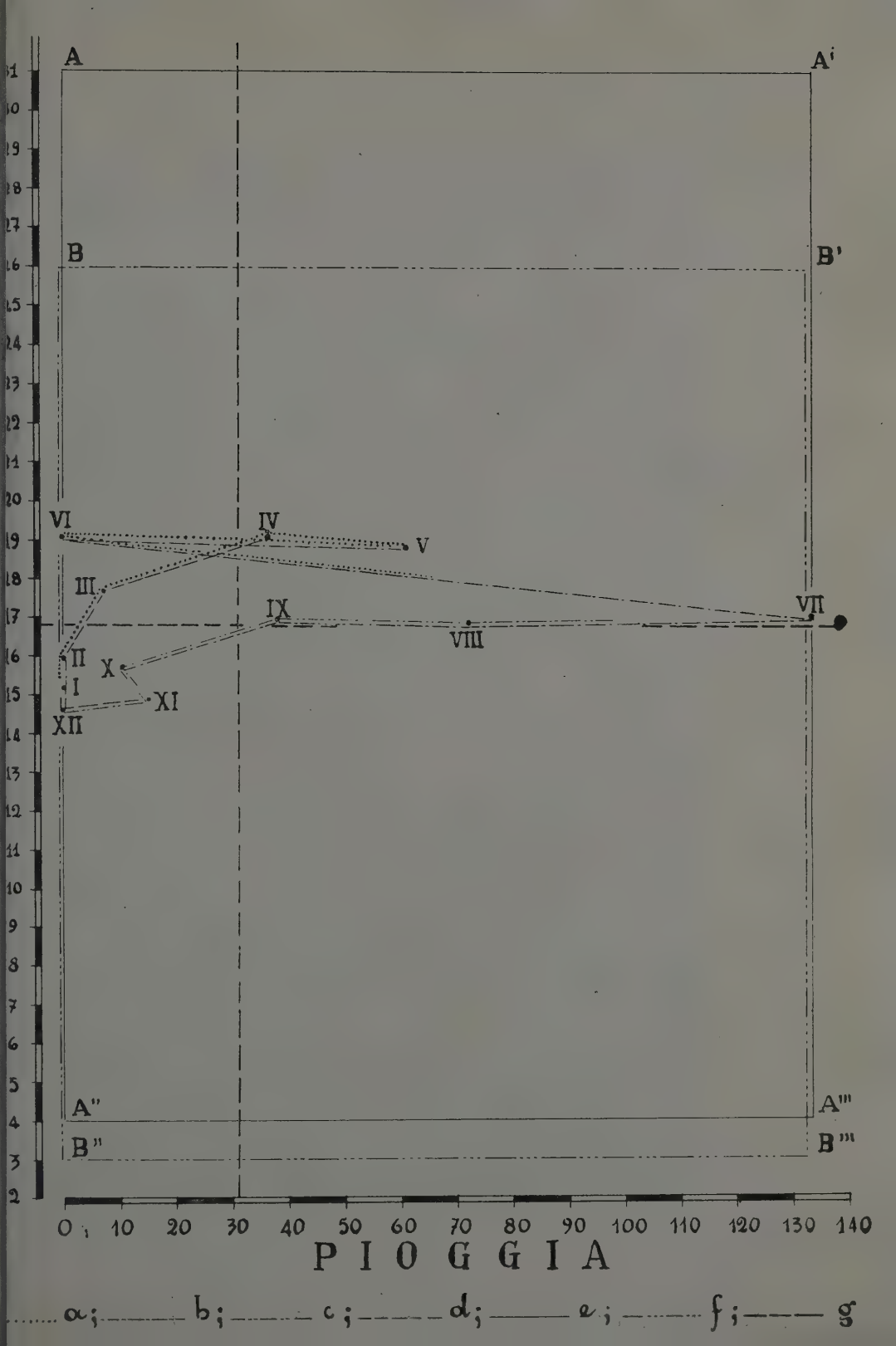
terreno e in maniera del tutto singolare. È infatti, larve, ninfe e adulti sono stati sempre notati in atto di nutrirsi, in accoppiamento, in riposo, ecc. sugli arbusti o sui cespugli di *Acacia etbaica* Schwf., *A. abyssinica* Hochst., *Salvia officinalis* L., *Rumex nervosus* Vahl., *Euclea Kellau* Hochst. e di qualche altra specie che non mi è stato possibile far determinare. Il suo nutrimento è diretto in modo particolare verso le foglie delle prime 4 piante, mentre sull'*Euclea*, a foglie più coriacee, gli individui si trovavano forse per caso.

Dal punto di vista agrario, la *Symbella* si può considerare assolutamente innocua, sia per la scarsità numerica degli individui, sia per la loro mole limitata, il che li porta ad essere poco o pochissimo voraci, sia infine per la loro stretta localizzazione in ambienti sterili o poco coltivati, su piante arbustive o cespugliose della flora spontanea ricche di fogliame persistente. Pur avendo costumi permanentemente solitari, essa non rientra in quella categoria di Ortotteri « solitari » a taglia piccola, media o grande, che dai Tigrini, Beni-Hamer, Arabi, ecc. dell'Eritrea vengono in complesso indicati con le parole « Godobè » o « Godovè », « Atal-Addelemariam », « Ziin », « Umdibello », ecc. Gli Ortotteri indicati con la parola « Godobè » o « Godovè » appartengono generalmente ai generi *Aeolopus* o *Epacromia*, *Oedaleus*, *Acrotylus*, *Sphingonotus*, *Pyrgomorpha*, *Pyrgomorphella*, *Asmara*, *Parasphena*, *Catantops*, *Acrida*, *Acridella*, *Truxalis*, *Acanthacris*, ecc., quelli indicati con la parola « Atal-Addelemariam » appartengono al solo genere *Phymateus*, mentre gli altri indicati con le parole « Ziin » e « Umdibello » appartengono soltanto agli Hetrodini e cioè ai generi *Eugaster* e *Gymnoproctus*.

Tutti questi Ortotteri a costumi permanentemente solitari, arrecano danni alle volte gravi alle coltivazioni di cereali o alle piante da orto, specialmente quando gli individui si concentrano nelle aree scerbate con molta accuratezza, dove non restano per parecchi giorni che soltanto le piantine coltivate. La *Symbella* non ha affatto la capacità riproduttiva e le abitudini delle specie predette e di altre a costumi simili, e i suoi individui, quasi sempre in scarso o scarsissimo numero, si mantengono concentrati sulle piante arbustive o cespugliose della flora spontanea già citate in precedenza, e probabilmente anche su altre.

SPIEGAZIONE DELLA FIGURA

Bioclimogramma della *Symbella biplagiata* sull'Altopiano Eritreo riferito al 1945 secondo i dati delle temperature medie e delle precipitazioni mensili registrati dall'Osservatorio Meteorologico di Asmara: *a*) periodo di sviluppo embrionale della prima generazione; *b*) periodo di sviluppo postembrionale della prima generazione; *c*) periodo di sviluppo embrionale della seconda generazione; *d*) periodo di sviluppo postembrionale della seconda generazione; *e*) quadrangolo delle condizioni termo-udometriche sotto l'influenza delle quali si è sviluppata, nel 1945, la prima generazione annuale (A-A'-A''-A'''); *f*) quadrangolo delle condizioni termo-udometriche sotto l'influenza delle quali si è sviluppata, nel 1945, la seconda generazione annuale (B-B'-B''-B'''); g) limiti delle condizioni termo-udrometriche medie del 1945 (temperatura media assoluta annuale: 16,8; media quantità mensile delle precipitazioni: mm. 31). (Originale).


A
A'
B
B'
A''
A'''
B''
B'''
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140
PIOGGIA
a; b; c; d; e; f; g

Zoologia (Biologia). — *Striatura trasversale della fibra muscolare e precipitazione ritmica* [1]. Nota [2] di F. Loreti, presentata dal Corrisp. A. Pensa.

Le precipitazioni saline ad andamento ritmico che si ottengono nei mezzi colloidali, sottoposte ad indagine sopratutto per merito del Buscalioni [3] (1892) e del Liesegang [4] (1896-'97-'98), hanno attirato l'interesse degli istologi in quanto da parte di alcuni di essi è stato a quelle ricondotta la determinazione di strutture e di organizzazioni proprie della sostanza vivente.

In proposito, correlazioni genetiche ed analogie sono state ventilate, od ammesse, per la striatura trasversale delle fibre dei muscoli volontari, dal Bechhold [5] (1919) e recentemente dal Carey [6] (1940). In base ai concetti esposti da questi Autori ed in particolare dal Carey, alle bande ed alle strie che si alternano negli inocomi sarebbe da assegnare il significato di zone analoghe alle lamine di precipitazione salina che si ottengono in tubi capillari. La fibra muscolare striata viene interpretata (Carey [7], 1936-'37), alla luce di tali concetti, quale un tubo microcapillare la cui parete è rappresentata dal sarcolemma; e le bande (e le strie) chiare ed oscure quali zone, per lo più alterne, di condensazione e di rarefazione dei componenti delle miofibrille, e riconducibili allo stabilirsi di condizioni, o stati ondulatori, propagantesi lungo la fibra durante l'attività contrattile.

È palese l'interesse di tale interpretazione che ricondurrebbe la genesi della striatura trasversale della fibra muscolare all'intervento di meccanismi chimici e fisico-chimici.

Io ho istituito una serie di ricerche e di esperienze allo scopo di accertare l'esistenza o meno di eventuali correlazioni ed analogie tra le lamine di precipitazione ritmica nei mezzi colloidali e la striatura trasversale della fibra muscolare striata.

Sulla base di tali indagini, condotte secondo le metodologie dettate dal Buscalioni, dal Liesegang e dallo stesso Carey, io pervengo a queste conclusioni: che nessuna correlazione genetica può intercorrere tra i due ordini di fatti; che soltanto apparenti sono le analogie, d'ordine topografico e spaziale, che risultano tra le lamine zonali che si determinano nei tubi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia umana normale dell'Università di Pavia.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 marzo 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) L. Buscalioni, cit. in L. Buscalioni e G. La Rosa, «Malpighia», 1915-'16.

(4) E. Liesegang, «Natur. Wochenschr.», 1896-'97-'98.

(5) H. Bechhold, «Die Kolloide in Biologie und Medizin.», Verl., T. Steinkopff, Leipzig 1919.

(6) E. J. Carey, «The journ. of the americ. Med. Assoc.», vol. 114, n. 9, 1940.

(7) E. J. Carey, «The americ. journ. of Anat.», vol. 54, 1936; vol. 61, 1937.

capillari e la striatura trasversale della fibra muscolare; che la distribuzione « ritmica » e precisamente l'accentramento e la rarefazione di sostanze di diversa natura nella compagine della miofibrilla, in parte responsabili della determinazione delle bande e delle strie nonchè dei loro caratteri strutturali e fisici (ottici) e delle loro attitudini funzionali, è da ricondurre a meccanismi più complessi di quelli invocati nella determinazione del fenomeno del Buscalioni–Liesegang.

Infatti, la genesi della striatura trasversale, la quale si delinea nella cellula muscolare non già all'atto dell'insorgere dell'attività contrattile, come ritiene il Carey, ma solo in prosieguo ed a condizione del suo perdurare, nonchè successivamente alla striatura longitudinale (miofibrillare), è con tutta verosimiglianza da ricondurre ad un'azione orientatrice sui costituenti miofibrillari, primitivamente distribuiti in modo uniforme nella stessa miofibrilla, e promossa dai peculiari caratteri sotto i quali si estrinseca la contrazione; caratteri che essenzialmente sono: la ritmicità e la rapidità. È a questo proposito da rilevare che condizioni cinetiche di tale natura, od equivalenti, sono del tutto assenti nei mezzi colloidali impiegati nella determinazione delle lamine zonali. Inoltre, le ricerche sperimentali offrono un complesso di reperti il quale infirma qualsiasi sostanziale correlazione, genetica o costitutiva, tra cotali lamine ritmiche e la striatura trasversale della fibra muscolare.

Sulla guida dei risultati ai quali sono pervenuto, io annoto in proposito che:

a) vi ha un intervallo progressivamente crescente tra le singole e successive lamine zonali che si formano nel mezzo colloidale, a partire dalla superficie di contatto tra le soluzioni saline acquosa e colloidale; al contrario nelle fibre muscolari striate che abbiano raggiunto la definitiva organizzazione, le bande e le strie dei singoli incommi si alternano a distanze rigorosamente uguali, a prescindere naturalmente da quelle differenze che sono in rapporto a condizioni funzionali, patologiche, rigenerative o d'altra natura;

b) una struttura plurilamellare, e cioè determinata da più lamelle finissime, sovrapposte, quale si ottiene nelle lamine zonali in alcune condizioni di esperimento, non è reperibile nelle bande e nelle strie trasversali della fibra muscolare;

c) data la complessa struttura del telofragma, riesce molto arduo ammetterne analogie costitutive, o genetiche, con le lamine di precipitazione. È noto infatti che il telofragma, aderente al sarcolemma alla periferia della fibra, risulta dall'associazione di due componenti, l'uno ritenuto di natura sarcoplasmatica, la membrana di Amici; l'altro di natura miofibrillare, il granulo Z di ogni singola miofibrilla. Con il fenomeno del Buscalioni–Liesegang non risulta possibile allineare nei tubi capillari, in una stessa lamina, precipitazioni di diversa natura chimica qualora si promuovano

nello stesso mezzo reazioni tra sali diversi, anche variamente associati. In tal caso le precipitazioni saline che ne risultano si addensano a formare lamine tra loro alternate, ma ciascuna delle quali ha una determinata ed esclusiva costituzione.

Tale comportamento viene attribuito (Hatschek [8], 1911) alla diversa velocità di diffusione dei sali nel mezzo colloidale;

d) vi ha identicità di assetto colloidale, e quindi di struttura, nelle aree limite tra le singole strie trasversali della fibra muscolare, mentre in corrispondenza delle due superfici limitanti ciascuna lamina di precipitazione diversi sono l'assetto e l'accentramento delle particelle del precipitato;

e) la correlazione è solo apparente e del tutto grossolana qualora si vogliano comparare i sarcosomi ai precipitati granulari che si ottengono interposti alle singole lamine in talune preparazioni effettuate nei tubi capillari. È da rilevare che questi granuli sono della stessa natura chimica delle lamine; e che invece i sarcosomi, anche per la ricchezza in lipidi e glucidi, si discostano nella loro costituzione da quella che è propria del miocolloide.

Qualora si voglia attribuire la determinazione della striatura trasversale della fibra muscolare all'intervento ed al perdurare di condizioni, o stati, ondulatori aventi per sede la sostanza contrattile ed estrinseci alla specifica attività da questa esplicata, il meccanismo od i meccanismi che promuovono l'accentramento e la rarefazione lungo la miofibrilla di determinati costituenti (Vlés, Langelaan, Bottazzi, ecc.) non risultano sovrapponibili a quelli che effettuano la distribuzione ritmica di sostanze inerti in ambienti percorsi da onde, come ad esempio nelle condizioni del tubo di Kundt. Perciò a me non pare giustificato ammettere una correlazione sostanziale tra questo ultimo fenomeno fisico, la precipitazione ritmica secondo i procedimenti del Buscalioni-Liesegang, nonchè i meccanismi genetici che promuovono la determinazione della striatura trasversale nella fibra muscolare, come è stato ventilato dal Carey. E ciò risulta anche dal fatto che nelle condizioni sperimentali ora ricordate (tubo di Kundt) le zone cineticamente attive corrispondono, come è noto, agli internodi (o ventri) nei quali si ha rarefazione, od assenza, di sostanza; mentre zone di quiete sono i nodi nei quali questa appare accentrata. Orbene: nella fibra muscolare striata, è proprio nelle zone cineticamente attive, come nella banda anisotropa Q, ove vi ha un cospicuo accentramento di determinati costituenti miofibrillari (miosina, Bottazzi; lipoidi, Langelaan, ecc.), come dimostrano diverse condizioni di osservazione e di ricerca, non esclusa la spodografia (Loreti, Barigozzi, ecc.), l'istospettrografia (Vlés, ecc.). Insomma, nella fibra muscolare striata noi constatiamo l'esistenza di condizioni

(8) E. Hatschek, «Zeitsch. f. Chem. u. Ind. d. Kolloide» (Kolloid Zeitsch.). Bd. 8, H. 1, 1911.

strutturali del tutto opposte a quelle che si promuovono mediante alcuni procedimenti d'ordine prettamente fisico.

È perciò lecito inferire che: se nella genesi delle bande e delle strie trasversali della fibra muscolare hanno parte fenomeni di diffusione jonica, come nelle precipitazioni zonali, nonchè di natura ondulatoria, legati allo estrinsecarsi della contrazione, tali fenomeni si svolgono però secondo leggi e secondo meccanismi non identici a quelli che regolano sia la precipitazione zonale sia la distribuzione di sostanze inerti in ambiente percorso da onde. L'organizzazione strutturale definitiva e completa della miofibrilla, e perciò della fibra muscolare, deve essere con ogni verosimiglianza ricondotta all'interazione di fattori più complessi, non solo di natura chimica e fisico-chimica, ma anche funzionale, tra loro variamente coordinati ed agenti in un mezzo colloidale dotato di vita ed eminentemente plastico.

È evidente che il fenomeno della precipitazione ritmica del Buscalioni-Liesegang è, al confronto, del tutto grossolano ed elementare.

Esso può ritenersi responsabile della genesi di formazioni a struttura zonato-concentrica riscontrabili nella organizzazione, quali alcune cuticole, corazze, gusci calcarei, otoliti, calcoli, amido, ecc., e fors'anche di alcune strutture endocellulari (ergatoplasmatiche, chinoplasmatiche); ma non già, per se stesso almeno, della determinazione della striatura caratteristica della fibra muscolare striata.

Patologia Vegetale. — *Un caso di svernamento allo stato conidico di Mycosphaerella sentina (Fuck.) Schroet. su foglie morte di pero*[1]. Nota[2] di G. Florenzano, presentata dal Corrisp. G. Negri.

Le prime osservazioni dirette, compiute dallo scrivente[3] negli anni 1943-45, sullo stadio ascoforo della *M. sentina*, agente del seccume fogliare del pero, hanno condotto alla determinazione delle principali fasi della evoluzione periteciale del fungo nelle nostre condizioni di ambiente e della data di emissione delle ascopore, che assicurano le infezioni primarie della stagione.

I rilievi epidemiologici di 3 anni hanno mostrato che il rapporto di interdipendenza esistente tra fase saprofitaria e fase parassitaria del ciclo fungino merita di essere ulteriormente definito sopratutto in funzione del

(1) Lavoro eseguito dal Laboratorio di Patologia Vegetale dell'Osservatorio Fitopatologico annesso alla R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 aprile 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946

(3) G. Florenzano, *Mycosphaerella sentina (Funk.) Schroet.: signalisation de la forme périthéciale en Italie et observations relatives à sa biologie.* « Moniteur international de la Protection des Plantes », Rome, 1946, XX^e année, n^os 3-4, pp. 17-26.

complesso variare dei fattori ecologici, che condizionano la prima infezione dell'annata. È risultato inoltre che esiste, già a partire dal mese di maggio, la probabilità di contaminazioni ai peri da parte dell'inoculum ascosporico, differenziatosi nei periteci maturi, ove si realizzino le date condizioni, e che vi è la possibilità di frequente associazione, sia sulle foglie che sui frutti della pianta ospite, della *Septoria piricola* Desm., forma conidica di *M. sentina*, con il *Fusicladium pirinum* (Lib.) Fuck., forma conidica di *Venturia pirina* Aderh.

Fig. 1 – Picnidio di *S. piricola* (× 240) in fase di espulsione dei conidi, da foglia di pero svernata. Collezione del 18-3-1946.
(Microfot. originale).

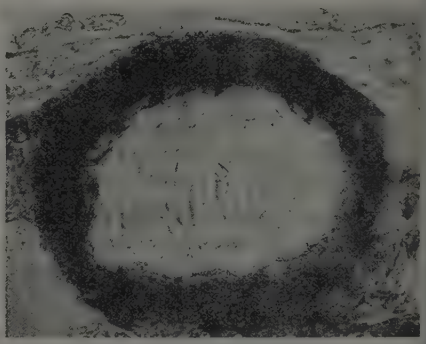


Fig. 2 – Peritecio di *M. sentina* (× 450) in fase di asco, da foglia di pero prelevata nella medesima data, di cui alla Fig. 1.
(Originale).

Non sembra quindi giustificato conservare alla malattia la designazione empirica di « seccume fogliare estivo », adottata dal *Ferraris*, quando più appropriato sarebbe denominarla *maculatura bianca* o *septoriosi* del pero.

Veniva infine suggerito nel mio lavoro un metodo di predeterminazione dell'epoca delle prime scariche ascosporiche allo scopo di avere, da una tale conoscenza, gli elementi concreti per la data di esecuzione dei trattamenti *di estinzione* e preventivi, sicuramente efficaci.

Nel raccogliere, anche quest'anno, i dati relativi alla maturazione dei periteci di *M. sentina* nelle foglie svernate al suolo, ho trovato, in alcuni casi, completamente differenziati picnidi di *S. piricola*, capaci di liberare prontamente, in camera umida, i conidi maturi in essi contenuti (fig. 1).

Il reperto è avvenuto sul materiale raccolto il 18 marzo nel pomario dell'Azienda Orticola del R. Istituto Tecnico Agrario di Firenze, dove lo scorso anno la malattia delle tacche bianche si è intensamente manifestata

con infezioni ripetute e largamente favorite dall'andamento stagionale, eccezionalmente siccitoso.

Alla stessa data e nel materiale della medesima provenienza, i periteci di *M. sentina* osservati erano per lo più nella fase, che ho denominato di asco (fig. 2) e solo in piccola parte presentavano un principio di delimitazione delle ascospore.

Il fatto dimostra, senza alcun dubbio, che i picnidi hanno potuto conservarsi durante l'inverno, come provano anche la loro perfetta vitalità e capacità di svuotarsi dei picnoconidi. Pertanto la possibilità constatata nel presente caso per *M. sentina* di conservarsi in vita latente allo stato picnidico deve probabilmente rappresentare il risultato di anomalie indotte nel suo ciclo vitale dai fattori bio–ambientali, che hanno regolato le infezioni tardive dell'annata precedente ed il decorso successivo dello svernamento.

È da tener presente tuttavia che, in condizioni di precoce ripresa vegetativa del pero e quando le prime pioggie consentano la disseminazione, può aversi una sorgente d'infezione primaverile dall'inoculum conidico ancor prima che da quello ascosporico.

Appare necessario, dopo quanto premesso, continuare le indagini ed estenderle al fine di accertare le condizioni in cui si può verificare il caso segnalato, e valutarne così la reale importanza pratica.

Biologia. — *Ricerche sperimentali sull'origine dei neuroni del ganglio ciliare nel pollo* [1]. Nota di R. Levi Montalcini e R. Amprino, *presentata* [2] dal Socio G. Levi.

Le presenti ricerche furono rivolte allo studio della derivazione nell'embrione di pollo delle cellule nervose che costituiscono il ganglio ciliare. Il problema della sorgente delle cellule dei gangli del parasimpatico rombo-mesencefalico si connette a quello più generale della provenienza delle cellule dei gangli di tutto il sistema viscerale; tuttavia, mentre un'estesa serie di ricerche sperimentali è stata dedicata allo studio dell'origine dei neuroni del simpatico del tronco (negli anfibi e negli uccelli), non ci risulta che alcuna indagine sia stata tentata con questo indirizzo per il parasimpatico encefalico.

Come è noto, non è stato sino ad oggi obbiettivamente dimostrato quale sia la provenienza dei neuroni del sistema viscerale; per quanto si riferisce al ganglio ciliare tre sono le supposte fonti di origine delle sue cellule: *a*) il mesencefalo, dal quale le cellule migrerebbero precocemente per portarsi alla loro sede definitiva, lungo i cilindrassi dell'oculomotore;

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto Anatomico dell'Università di Torino e nel Centro di studi sull'accrescimento e la senescenza del C. N. R.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

b) l'abbozzo del ganglio semilunare, da cui si separerebbero dei neuroblasti accompagnando il ramo periferico dell'oftalmico per un certo tratto, oppure, secondo altri AA., migrando prima ancora che sia iniziata la differenziazione delle cellule sensitive del V. Altri AA. ancora, conciliando i risultati dell'uno e dell'altro gruppo di ricerche, ammettono una doppia origine, contemporaneamente da cellule del mesencefalo e dall'abbozzo del ganglio del V. *c*) Del tutto diverso, infine, è il punto di vista di Tello; egli, analogamente a quanto sostiene per i gangli del sistema autonomo del tronco, suppone che i neuroni ciliari si differenzino in loco da elementi di tipo mesenchimale, direttamente, oppure, come Terni propone, per un eventuale influsso esercitato dai cilindrassi del III (fibre prepangliari).

Abbiamo scelto come materiale di studio l'embrione di pollo, in stadi compresi fra la 28ª e la 40ª ora d'incubazione (da 3 a 14 somiti); le operazioni consistettero nell'asportazione chirurgica di una sola o contemporaneamente di ambedue le supposte sorgenti di provenienza dei neuroni ciliari: mesencefalo oppure rombencefalo e placode oftalmico di un lato (è noto, infatti, che nei sauropsidi, una parte, forse cospicua, dei neuroni della porzione oftalmica del trigemino deriva dal materiale che si separa dal placode oftalmico). Gli embrioni furono fissati a distanza varia dall'operazione, e cioè a partire dal 4° sino al 12° giorno d'incubazione.

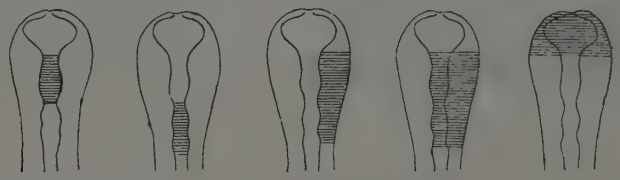


Fig. 1.

1. Dopo ablazione dell'abbozzo del mesencefalo (fig. 1 *a*) praticata verso la 32ª ora, e cioè molto prima che si facciano emergenti le fibre dell'oculomotore, il ganglio ciliare si sviluppa in modo qualitativamente e quantitativamente uguale ai gangli di embrioni di controllo non operati. I gangli dei due lati si presentano spesso un po' spostati rispetto alla loro normale sede, fusi in corrispondenza della linea mediana; al ganglio giunge, come di norma, un fascio di fibre dal ramo oftalmico del V. La fusione tra i gangli ciliari dei due lati, che d'altra parte non sempre si verifica, è probabilmente un fatto contingente, determinato da spostamenti meccanici che si manifestano durante l'organogenesi del bulbo oculare in assenza del mesencefalo, il quale è normalmente interposto fra i due gangli.

2. L'asportazione della porzione rostrale del rombencefalo (fig. 1 *b*), praticata a vari stadi di sviluppo fra i 3 e i 14 somiti, fu seguita da

assenza della porzione maxillo-mandibolare del ganglio del V soltanto negli embrioni operati in stadi più precoci dei 7 somiti. In embrioni operati fra i 7 e i 14 somiti il ganglio del V è invece presente, se pure ridotto in confronto al normale, perchè l'emigrazione degli elementi gangliari era già in atto al momento dell'ablazione del rombencefalo. In tutti gli embrioni, sia i quelli operati precocemente che tardivamente, si rinvenne costantemente nella porzione postero-laterale dell'orbita un ganglietto di neuroni sensitivi, il quale corrisponde evidentemente a quella parte della porzione oftalmica del V. che trae origine dal placode; da questo raggruppamento di cellule gangliari si dipartono fascetti di neuriti che si connettono con il ganglio ciliare, il quale si presenta, in tutti questi casi, sviluppato in modo perfettamente normale, in sede e coi rapporti consueti con le fibre pregangliari del III paio. L'esame di questi casi e particolarmente di quelli nei quali è completamente assente la porzione maxillo-mandibolare del ganglio del V, permette di escludere l'origine del ganglio ciliare da elementi migrati dal rombencefalo.

3. Si procedette quindi all'asportazione del presunto placode oftalmico e del sottostante mesenchima con un intervento molto esteso, data la difficoltà di precisare nettamente in un periodo precoce dello sviluppo embrionale (tra i 3 e i 12 somiti) i limiti del placode (fig. 1 *c*). In embrioni così operati, e studiati a distanza di 4–10 giorni dall'operazione, si è sempre osservato la formazione di un ganglio ciliare del tutto uguale a quello del lato opposto normale. In questi embrioni, mentre la porzione maxillo-mandibolare del ganglio del V è presente in misura molto differente nei vari casi (a seconda, cioè, che al momento dell'intervento le cellule gangliari erano già migrate dal rombencefalo e quindi erano asportate con l'abbozzo del placode, oppure non erano ancora migrate), la porzione oftalmica del ganglio del V manca del tutto, oppure è rappresentata soltanto da pochissimi neuroni, i cui neuriti decorrono lungo la parete mediale dell'orbita per portarsi verso le fosse nasali, dopo aver stabilito rapporto con il ganglio ciliare.

La presenza di questo esiguo numero di neuroni, malgrado la sicura e totale asportazione del placode oftalmico (controllata con la fissazione di embrioni appena operati), è attribuita da noi ad una rigenerazione del placode, intervenuta nei giorni successivi all'intervento. Rigenerazione incompleta, tuttavia, come risulta dal confronto di questo esiguo raggruppamento di cellule sensitive della componente oftalmica del ganglio del V con quello più cospicuo che si forma in embrioni operati di asportazione del solo rombencefalo senza demolizione del placode. Questo ganglietto non confluisce con la porzione maxillo-mandibolare del ganglio del V, ma rimane isolato nel connettivo dell'orbita, sempre a breve distanza dal ganglio ciliare. Nonostante questa parziale ricostituzione della porzione

oftalmica del V dopo asportazione del placode, noi crediamo di poter escludere che il ganglio ciliare possa derivare dal materiale placodico rigenerato; e questo in base al fatto che il ganglio ciliare si presenta quantitativamente e qualitativamente normale, mentre, come si è detto, estremamente ridotta risulta la porzione oftalmica del ganglio del V.

4. Integrando quest'intervento con la contemporanea ablazione del mesencefalo e della porzione rostrale del rombencefalo (fig. 1 *d*) si è ugualmente ottenuto la formazione di un ganglio ciliare normale. Ci sembra particolarmente interessante un caso nel quale il ganglio ciliare, formatosi nella assenza totale del ganglio del V dello stesso lato, si trova in connessione con fibre derivate dal ramo oftalmico del lato opposto.

5. Infine, per escludere la derivazione del ganglio ciliare dall'ectomesoderma prosencefalico fu praticata la sezione dell'encefalo e dei tessuti circostanti in embrioni di 9 somiti a un livello posto fra diencefalo e mesencefalo (fig. 1 *e*). In assenza dei bulbi oculari, del diencefalo e del telencefalo, il ganglio ciliare si formò anche in questi casi come di norma.

In base ai risultati sperimentali qui riassunti si può escludere con certezza: 1) che i neuroni ciliari traggano origine dai tessuti ectomesodermici situati rostralmente al mesencefalo; 2) che originino dal mesencefalo per migrazione lungo i neuriti dell'oculomotore, e 3) che provengano dalla parte rostrale del rombencefalo, matrice della porzione maxillo-mandibolare del ganglio del V. Per quanto non sicuramente dimostrata crediamo di poter escludere anche l'origine dei neuroni ciliari dal placode oftalmico, il quale invece, come è noto e come è confermato da queste ricerche, è la sorgente di neuroni della componente oftalmica del ganglio del V.

Rimane da considerare l'origine, prospettata da Tello e da altri AA., dal mesenchima. A favore di questa ipotesi parla la costante presenza del ganglio ciliare riscontrata da noi nei più vari interventi estesamente demolitivi. Esperienze in corso diranno se la sua formazione è condizionata dall'arrivo fra le cellule mesenchimali di fibre nervose, siano esse di provenienza del V o, in assenza di questo, del III paio.

Biologia. — *Ricerche sperimentali sulla determinazione del placode otico nell'embrione di pollo* [1]. Nota di R. Levi-Montalcini presentata [2] dal Socio G. Levi.

Mi sono proposta con queste ricerche:

1° di studiare nell'embrione di pollo come si produce lo sviluppo dell'organo dell'udito dopo asportazione precoce del placode otico presuntivo.

2° di stabilire a quale epoca la determinazione del placode si produca in modo irreversibile.

3° verificare se nell'introflessione del placode in fossetta acustica e nello sviluppo ulteriore dell'organo dell'udito, il rombencefalo eserciti un'influenza organizzatrice.

La questione fu già molto studiata sulle larve di Anfibi (Speman, Kaan, Roehlich, Choi, Dalcq, Guareschi, Holtftreter, Schmidt, Chester-Yntema, Ginsburg, Schmalhausen e molti altri); meno numerose sono le ricerche sperimentali sugli embrioni di pollo, che in questa specie vertono in prevalenza sullo sviluppo del placode esciso a varî stadi, e trapiantato col metodo degli innesti corio-allantoidei (Hoadley, Stcherbatov, Willier e Rawles, Waterman) oppure in colture in vitro (Fell). Soltanto Waddington (1937) dimostrò la capacità rigenerativa dell'organo dell'udito in embrioni di pollo in seguito alla precoce asportazione del placode otico, e seguì lo sviluppo del frammento placodico esciso in trapianti corio-allantoidei.

In questa ricerca, furono operati circa un centinaio di embrioni di pollo a stadî varî tra i 7 e i 16 somiti. Le operazioni furono di due ordini:

1° asportazione dell'epiblasto e del mesoblasto sottostante, per una estensione sempre molto superiore a quella corrispondente al presunto placode otico, e cioè in senso rostro-caudale dal solco tra la prima e la seconda vescicola encefalica, al primo somite cervicale compreso, e in senso medio-laterale, dalla parete del rombencefalo al solco limitante laterale, ove l'epitelio placodico trapassa senza limiti netti nell'epiblasto extra-embrionario delle future pieghe amniotiche;

2° asportazione del rombencefalo in toto o di una delle due metà, nei limiti corrispondenti alla presuntiva area otoformativa, rispettando l'area corrispondente al placode stesso.

Dall'esame degli embrioni fissati appena operati, risulta che l'asportazione del presuntivo placode, riesce tanto più completa quanto più precoce l'intervento, e questo si spiega tenendo conto dei rapporti tra epitelio pla-

(1) Ricerca eseguita nel Centro di studi sull'accrescimento e la senescenza alle dipendenze del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso l'Istituto Anatomico di Torino.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

codico e parete rombencefalica. Infatti, ad uno stadio anteriore a quello dell'embrione a 9 somiti, la placca otica non è in contatto diretto con la vescicola rombencefalica; un breve tratto di epitelio cubico basso unisce i labbri ancora disgiunti della doccia midollare ai due placodi (v. fig. 1). Invece, ad uno stadio un po' più tardivo (9–12 somiti), quando il placode è già riconoscibile per la maggiore altezza del suo epitelio in confronto a quello dell'epiblasto contiguo, e inizia una lieve inflessione del segmento medio, l'aderenza del tratto mediale del placode alla parete del rombencefalo è così intima, che non è possibile asportare il placode in toto, senza ledere profondamente il nevrasse (v. fig. 2). Gli interventi, praticati in gran numero in questo periodo, non ebbero perciò per risultato l'asportazione totale del placode, ma di una parte di esso, che può essere valutata ai

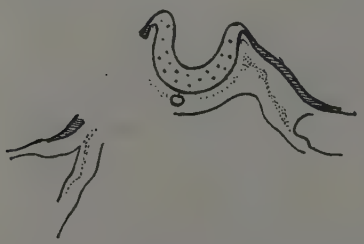


Fig. 1 – Embrione di pollo allo stadio di 7 somiti operato di asportazione del placode otico sinistro, e fissato appena operato. Ingr. 86 ×.

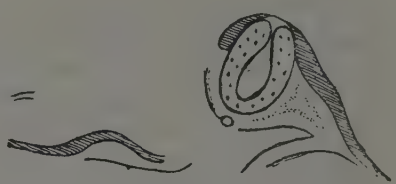


Fig. 2. – Embrione operato allo stadio di 11 somiti e fissato appena operato. Ingr. 86 ×.

4/5 o ai 3/4 del placode stesso, il 5° o il 4° mediale rimanendo in sito aderente alla parete del rombencefalo.

A brevissima distanza dall'intervento, e cioè tre o quattro ore dopo, si nota un comportamento differente a seconda che l'operazione è stata eseguita allo stadio più precoce o più tardivo di placca otica. Negli embrioni operati allo stadio a 7 somiti, il frammento di epitelio rimasto in sito è minimo, di non più di 4–5 cellule per sezione, data la facilità di asportarlo « in toto » senza ledere il rombencefalo, per i rapporti piuttosto lassi esistenti fra segmento mediale del placode e parete del rombencefalo ai quali si è accennato. A questo stadio, il placode è costituito da un epitelio ad un unico strato di cellule cilindriche, a decorso rettilineo dal margine laterale del nevrasse al solco limitante laterale. Dal lato operato, a 3–4 ore di distanza dall'operazione, il frammento placodico appare costituito da un tratto già meno esiguo di epitelio di quello osservato negli embrioni fissati appena operati, e sporge liberamente sull'ampia perdita di sostanza, procedendo rettilineo verso il solco limitante, dal quale lo separa un'estesa lacuna non colmata ancora dalle cellule mesenchimali; è dunque iniziata la rigenerazione del placode otico.

Se invece l'operazione fu eseguita allo stadio di 9–12 somiti, quando il placode normale giá si presenta a decorso lievemente arcuato e ispessito, si osserva, a 3 ore di distanza dall'operazione, il breve tratto di placode otico intimamente aderente al rombencefalo, terminare con l'estremità libera sollevata sul mesenchina sottostante (fig. 3). Negli embrioni esaminati dopo 8 ore, e cioè allo stadio di 12–18 somiti, il segmento mediale del placode, sempre molto ridotto, presenta un inarcamento ancora più accentuato, e il suo estremo distale si incurva nettamente ad uncino a concavità dorsale (fig. 4).

Ad uno stadio corrispondente, e cioè in embrioni normali di 15–18 somiti, l'organo dell'udito si presenta in forma di coppa largamente aperta,

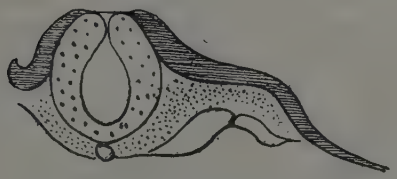


Fig. 3. – Embrione operato allo stadio di 11 somiti e fissato tre ore dopo. A sinistra il frammento più mediale del placode otico rimasto in sito. Ingr. 86 ×.

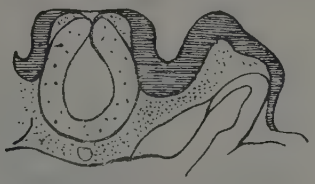


Fig. 4. – Embrione operato allo stadio di 10 somiti e fissato 8 ore dopo. Più evidente che alla fig. 3 l'incurvamento a concavità dorsale del breve tratto di epitelio placodico aderente al rombencefalo, che non è ancora ricongiunto all'epiblasto laterale. Ingr. 86 ×.

e tale si osserva infatti l'otocisti negli embrioni in esperimento, dal lato non operato.

Risulta dunque che a questo stadio il breve tratto di epitelio placodico presenta una tendenza a introflettersi, ma non è in grado di costituire una fossetta acustica, per la mancata connessione con l'epiblasto contiguo.

A distanza di 10–12 ore dall'operazione (gli embrioni presentano notevoli differenze individuali nella rapidità della riparazione), la perdita di sostanza è per lo più colmata, e il segmento placodico ricongiunto all'epiblasto laterale. Mentre dal lato integro la coppa è ancora largamente aperta dorsalmente, ma a cercini già ben evidenti, dal lato operato, la coppa, a raggio di curvatura assai più breve, è della metà o di un terzo più piccola di quella del lato opposto. Queste differenze persistono negli stadî immediatamente successivi, e vanno gradatamente attenuandosi con il procedere dello sviluppo. Si assiste così alla trasformazione della fossetta in vescicola, e questa è dal lato operato notevolmente più piccola di quella normale. Va notato che a questo stadio, anche se la coppa acustica è, dal lato operato, molto più piccola che dal lato normale, i suoi labbri si congiungono determinando la trasformazione della coppa in vescicola ad uno stadio più pre-

coce di quello in cui avviene la trasformazione dal lato integro, dimodochè dal confronto dei due lati si osserva una piccola vescicola già separata dall'epiblasto sottostante dal lato operato, e una coppa ancora aperta dal lato opposto (fig. 5).

Malgrado le differenze notevoli osservate in questi stadi precoci tra i vari embrioni, il processo di riparazione, che prosegue attivamente nei giorni successivi, determina una graduale regolazione del placode operato, tanto che al terzo, quarto giorno, in tutti gli embrioni operati allo stadio tra i 7 e gli 11 somiti, la vescicola acustica dal lato in esperimento ha quasi raggiunto le dimensioni di quella normale. Negli embrioni di 6-7 giorni d'incubazione, e cioè quattro giorni e mezzo, o rispettivamente cinque giorni e mezzo, dopo l'operazione, non è più possibile distinguere, tanto perfetta è la regolazione, da quale lato è avvenuta la demolizione.

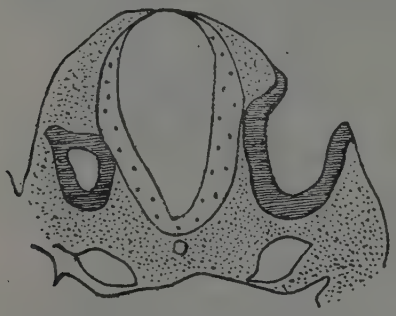


Fig. 5 – Embrione operato allo stadio di 12 somiti e fissato 14 ore dopo. A sinistra, dal lato operato, una piccola vescicola acustica costituitasi a spese del breve frammento mediale del placode acustico non asportato. Si noti che l'otocisti normale è ancora in forma di fossetta a labbri ravvicinati ma non congiunti. Ingr. 86 ×.

Se l'intervento è invece stato eseguito allo stadio di fossetta acustica (12-18 somiti) il processo di riparazione è incompleto. La regolazione è parziale, e l'organo dell'udito si sviluppa più piccolo del normale. Se veramente, come affermano la Kaan per l'Amblystoma e Waddington per l'embrione di pollo, il placode otico, il quale dapprima rappresentava sicuramente un sistema armonico equipotenziale, si trasformi in un sistema a mosaico allo stadio di coppa otica, è probabile, ma non sicuramente dimostrato dalle mie ricerche. È comunque da escludere che, nell'embrione di pollo, l'organo dell'udito sia, allo stadio di placca otica, un sistema a mosaico.

Qual'è l'intimo meccanismo mediante il quale l'otocisti si ricostituisce dopo la demolizione del placode? Si tratta di aumentata attività proliferativa in seno al piccolo frammento di epitelio rimasto in sito a contatto della parete del rombencefalo, o di scorrimento attivo di cellule dell'epiblasto posto rostralmente e caudalmente al placode, e che normalmente non avrebbero partecipato alla sua costituzione? Contro la prima ipotesi sta il fatto che il numero delle cariocinesi nel breve segmento placodico esaminato nelle ore successive all'intervento non è aumentato. Mi sembra dunque più verosimile la seconda ipotesi.

2. Asportazione del rombencefalo totale o emilaterale. Questo intervento fu praticato su di un piccolo numero di embrioni allo stadio fra i

7 e i 12 somiti. Sia negli embrioni operati di asportazione totale del rombencefalo che in quelli nei quali l'intervento fu limitato a metà della terza vescicola encefalica, le otocisti si svilupparono normalmente. L'esteso tratto di epitelio placodico rimasto in sito dopo l'intervento (soltanto il segmento più mediale, intimamente aderente alla parete del rombencefalo, fu asportato con il rombencefalo stesso) si introflette come di norma, dando origine ad una fossetta e successivamente ad una vescicola di grandezza proporzionale alla quantità di epitelio placodico rimasto in sito. Anche in questo

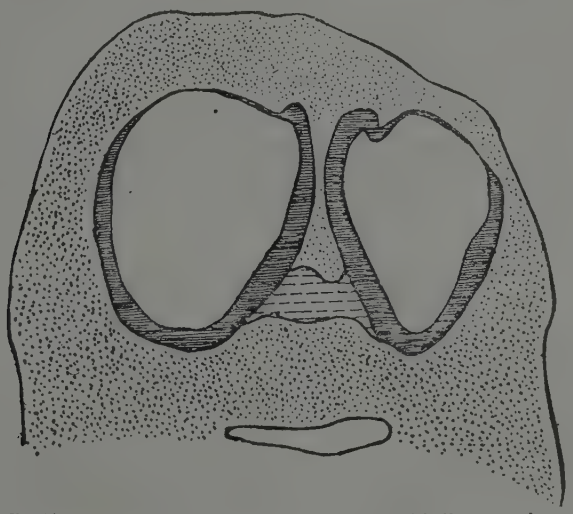


Fig. 6 – Embrione operato, allo stadio di 11 somiti, di asportazione totale del rombencefalo e fissato 48 ore dopo l'intervento. In assenza del rombencefalo, si sono costituite due vescicole acustiche normali dai placodi otici già presenti al momento dell'intervento. Il frammento più mediale dei placodi venne tuttavia asportato insieme al rombencefalo. Tra le due vescicole, i due gangli acustici fusi in una massa unica sulla linea mediana. Ingr. 86 ×.

tipo di operazione la lacuna viene colmata successivamente alla neoformazione della fossetta, e il processo di regolazione che si attua nei giorni successivi all'intervento, porta rapidamente l'otocisti a eguagliare il volume di quella normale.

Particolarmente interessante è il caso di un embrione operato a 9 somiti di asportazione totale del rombencefalo, e fissato in ottime condizioni di sviluppo a tre giorni e dodici ore. In questo embrione, si osserva la formazione di due vescicole acustiche, una per lato, normali, le quali in assenza del rombencefalo vengono a trovarsi quasi a contatto reciproco con la loro parete mediale. Da queste pareti stesse si staccano due cumuli di cellule abbastanza cospicui, ancora uniti lateralmente all'epitelio del placode,

dal quale sono manifestamente proliferati, fusi l'uno con l'altro con le loro estremità mediali sulla linea mediana (v. fig. 6). Si tratta degli abbozzi dei due gangli acustici, che come Tokara, Choi, e Knouff negli Anfibî, e Van Campenhout negli Uccelli e nei Mammiferi rilevarono, si costituiscono a spese del segmento mediale del placode acustico. Questa osservazione dimostra come dal segmento laterale del placode, e da parte di quello mediale (un segmento di questo essendo stato asportato con il rombencefalo), si origini un organo dell'udito completo, e conferma l'equipotenzialità dell'epitelio placodico a questo stadio.

Questa seconda serie di esperienze, in accordo con i risultati di Waddington nell'embrione di pollo, di Schmalhausen, Trampusch e altri Autori negli Anfibî, porta alla conclusione che nella formazione dell'organo dell'udito non sia sino ad oggi dimostrata un'influenza induttrice da parte del nevrasse, dato che l'organo si forma in modo completo in assenza del rombencefalo. All'obbiezione che la sua azione organizzatrice possa essersi svolta in un periodo precedente a quello nel quale l'intervento fu praticato, si può rispondere che in un periodo antecedente allo stadio di 7 somiti, il placode otico presuntivo, ancora costituito da un epitelio non differenziabile citologicamente da quello dell'epiblasto contiguo, non aderisce in alcun punto alla parete rombencefalica, ed è generalmente ammesso che i centri organizzatori non agiscono che per contatto diretto dei tessuti.

Ugualmente si può negare, al ganglio acustico stesso, la funzione organizzatrice attribuitagli da Szepsenvol nel suo interessante studio sugli onfalocefali. L'Autore infatti partiva dal presupposto, dimostrato erroneo, che il ganglio acustico origini dalla cresta gangliare insieme al ganglio del VII nervo. Essendo dimostrata la sua origine dalla parete mediale del placode acustico, l'ipotesi di una sua azione organizzatrice, sul placode stesso, va senz'altro scartata. Rimane da considerare il mesoblasto o, come altri Autori vogliono, il mesectoderma, ma gli esperimenti descritti non portano alcun elemento nuovo, atto ad orientare verso l'una o l'altra ipotesi.

Da queste ricerche emerge che nella normale morfogenesi, la trasformazione del placode in fossetta, non è, come è stato prospettato da vari Autori, conseguenza delle vivaci moltiplicazioni cellulari che si attuano in seno all'epitelio placodico costretto meccanicamente a introflettersi perchè fissato ai due estremi, ma è proprietà insita all'epitelio stesso, caratteristica di questo stadio del suo sviluppo. Va infine notato che la vescicola che si forma è di volume direttamente proporzionale alla quantità di epitelio placodico non asportato, ma questo non incide sui processi regolativi che intervengono nei giorni successivi all'operazione. Infatti, tanto le vescicole di grandezza quasi normale, che quelle estremamente ridotte per un intervento più demolitivo, vanno incontro alla stessa regolazione, che nello spazio di pochi giorni le porta ad uguagliare quelle del lato opposto normale.

Biologia. — « *Peyronellaea* », *nuovo genere di deuteromiceti* (Nota preliminare). Nota di G. Goidànich, presentata [1] dal Corrisp. L. Petri.

I deuteromiceti, che raccolgono un sì gran numero di forme interessanti dal lato micologico e patologico, sono ben lungi dall'avere un inquadramento tassonomico soddisfacente. Esistono fra di essi generi, come *Phoma* Sacc. – cui si fa particolare riferimento nella presente Nota – assolutamente collettizi, in cui cioè sono raccolte entità accomunate sì dalla corrispondenza di certi caratteri fondamentali con le vaghe descrizioni generiche ma che in effetto possono, anzi devono, trovare in base ai criteri che regolano la distribuzione sistematica dei deuteromiceti, una posizione fra di loro anche assai distante. Questo stato di cose si rileva in modo particolare quando per tali microrganismi si proceda all'esame culturale che ha il vantaggio, rispetto al tradizionale esame sugli « exiccata » dei vecchi micologi, di mettere in rilievo le particolarità dell'intero ciclo di sviluppo dell'apparato vegetativo e riproduttivo da cui si traggono gli elementi per le differenziazioni generiche e di ordine superiore [2]. Basti ricordare uno dei fenomeni più rilevanti; la mancanza negli stadi giovanili della settazione e del colore negli organi di fruttificazione che può provocare l'attribuzione del micete a sezioni, a famiglie diverse da quello che gli spetti (*Sphaeropsis–Diplodia, Ascochyta–Diplodina*).

A determinare la situazione caotica esistente nella sistematica di molti gruppi di deuteromiceti contribuisce l'abitudine, d'altronde giustificata dallo stato attuale delle nostre conoscenze, di classificare le specie su basi puramente matricali sì che un medesimo organismo a seconda che viva sulle foglie, sui rami o sul tronco può essere, ad esempio, un *Phoma*, una

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Vi è un esempio molto recente degli inconvenienti cui si può andare incontro, anche da parte di valenti micologi, con lo studio dei micromiceti senza l'ausilio dell'esame culturale e in modo particolare quando trattisi di quei tipi che posseggono diverse forme di fruttificazione. Petrak ha studiato (*Stilbophoma nov. gen.*, eine neue Gattung der Sphaeropsideen mit Konidienbilduug auf typischen Koremien. « Bot. Arch. », 43, 1941, pp. 93–95) un micete osservato su foglie di Palma provenienti da Bombay e su di esso oltre che una specie ed un genere nuovo (*St. microspora*) fonda addirittura una famiglia nuova di *Sphaeropsidaceae* in quanto tale fungo è costituito da fruttificazioni, apparentemente picnidiche, isolate, rotondeggianti, dalla cui base si dipartono formazioni coremiali demaziacee con porzione fertile mucosa. Senza venir meno alla stima che ho per un micologo di vaglia quale è Petrak credo di poter affermare che egli sia caduto in un grossolano errore di interpretazione essendo con ogni verosimiglianza il supposto picnidio in effetto un peritecio di ascomiceti inferiori – *Plectascales* – ad aschi deliquescenti cui sono notoriamente connessi metageneticamente le fruttificazioni coremiali di stilbacee tipo *Sporocybe* quale egli ha osservato (*Petriella* Curzi). Se per una determinazione di tale importanza il Petrak avesse avuto a disposizione materiale vivo avrebbe di certo rilevato i vari tipi ed i vari stadi di sporificazione che lo avrebbero portato a conclusioni ben diverse.

Phyllosticta, una *Aposphaeria* e, pur conservando una identità morfologica, varia denominazione specifica a seconda dell'ospite che l'alberga. Ed è del pari pregiudizievole per la chiarezza della sistematica dei deuteromiceti la continua creazione di generi nuovi, di nuove famiglie fondate su una o poche specie in cui si siano rilevati caratteri differenziali dalle diagnosi classiche senza che si sia compiuto un confronto con le specie più tipiche dei gruppi da cui le nuove si vogliono isolare, creando così una farraginosa situazione sinonimica, quale è in effetto quella odierna dei funghi imperfetti.

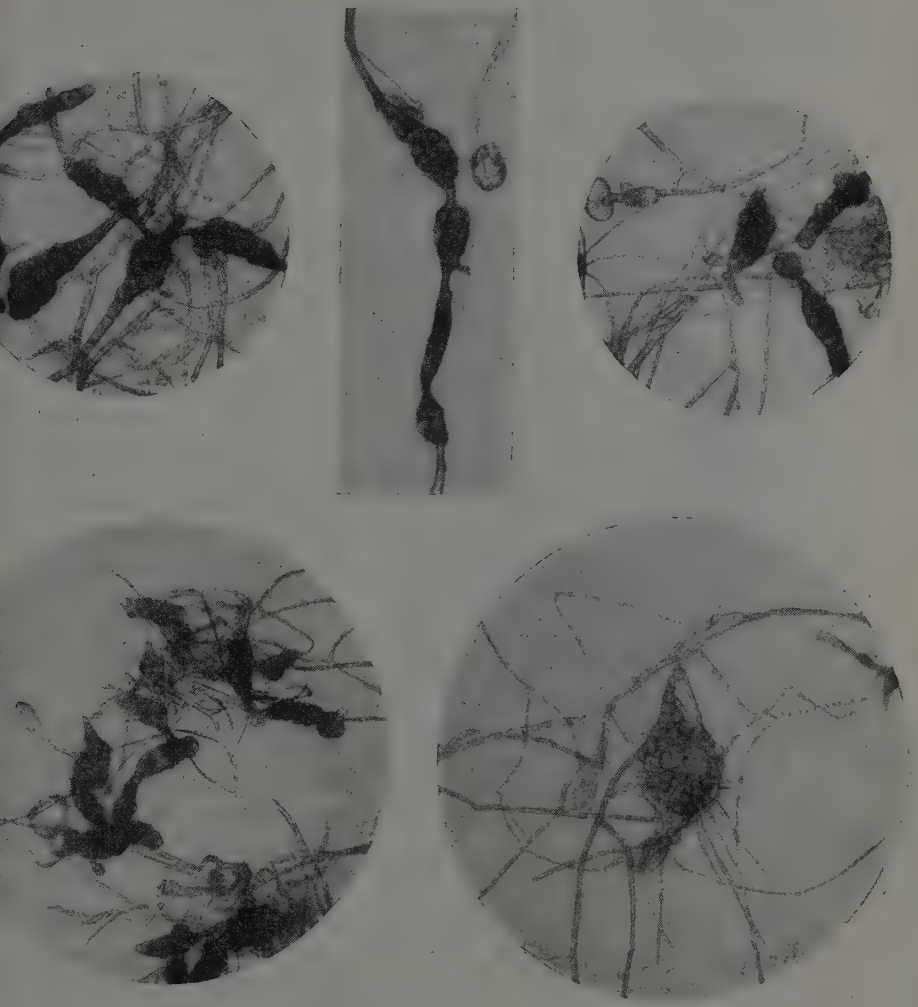
D'altro canto è utile che allorchè fra i tanti rappresentanti di aggruppamenti sistematici che sono notoriamente eterogenei – come *Phoma*, *Phyllosticta*, *Alternaria* – si riesca ad individuare un numero di forme accumunate da un complesso di caratteri morfologici e biologici (naturalmente distinti da quelli delle specie tipiche) che siano talmente costanti da permettere – in armonia agli accennati criteri che regolano la distribuzione sistematica dei deuteromiceti – di individuarli differenzialmente dagli altri, è utile in tali casi che si addivenga alla costituzione di raggruppamenti generici o di ordine superiore a sè stanti.

Questa è la considerazione che mi ha spinto a fondare il nuovo genere di sferossidali *Peyronellaea* [3]. In esso includo un certo numero di specie finora ascritte al genere *Phoma* perchè dotate di fruttificazioni picnidiche caratteristiche per tali sferossidali, ma che sono provviste costantemente di particolarità morfologiche molto appariscenti: innanzitutto di strutture clamidosporiali pluricellulari ricordanti nell'aspetto e nella forma le dictiospore note in ifali demaziacei tipo *Alternaria*, *Coniothecium*, *Sporodesmium*, ecc. (v. fig. 1). A tali particolarità morfologiche sono connesse altre di natura biologica, fisiologica, culturale e fors'anche matricale che fanno del gruppo di queste specie un tutto unico ben individuabile, omogeneo, e distinto. Il nuovo genere *Peyronellaea* è insomma fondato partendo dal criterio [4] di individuare i micromiceti in base al complesso delle diverse strutture, sessuali e agamiche, che compaiono nell'intero ciclo di sviluppo e non soltanto in base ad una od alcune solo di esse, siano pure più delle altre caratteristiche, a cui possono aggiungersi elementi complementari ricavati dagli aspetti biologici, fisiologici, culturali dei microrganismi stessi; criterio che ritengo fondamentale per giungere ad una naturale sistemazione di tutti i micromiceti, organismi squisitamente polimorfici, ma specialmente dei funghi imperfetti in cui mancano organi di fruttificazione di origine sessuale dai quali si traggono preziosi elementi di giudizio al fine di stabilire rapporti di parentela e derivazioni filogene-

(3) Il genere è dedicato deferentemente al prof. Beniamino Peyronel, Direttore del R. Istituto di Patologia Vegetale della Università di Torino, sotto la cui guida mossi i primi passi nelle ricerche micologiche e che seppe infondere, in me giovinetto, la passione per tali studi.

(4) Cfr. G. Goidànich, *Il genere di ascomiceti «Grosmannia»*. «Boll. R. Staz. Pat. Veg.», n. s. *16*, 1936, pp. 26-60.

tiche; e sono su quest'ultimi che notoriamente si costruiscono le sistemazioni tassonomiche che hanno maggiore fondamento naturale.



– Aspetti dell'apparato vegetativo e riproduttivo di *Peyronellaea veronensis* G. Goid. In alto a sinistra: clamidospore alternarioidi differenziatesi isolatamente. In alto al centro: clamidospore catenulate. o a destra: clamidospore che ànno emesso la masserella di protoplasma da cui trarrà origine il). In basso a sinistra: vari tipi di clamidospore ed ife avvolte in forma di anello. In basso a destra: picnidi in uno stadio avanzato di differenziazione. (Originale).

Le *Peyronellaea* sono microrganismi che hanno rigoglioso sviluppo su quasi tutti i substrati artificiali. Formano delle colonie dapprima biancastre

o rosate poi intensamente brune, caratteristiche per la grande abbondanza dei picnidi che si formano frammisti agli accumuli di clamidospore aeree od anche in posizioni distinte da queste. In certi substrati, specialmente nei primi stadi di sviluppo, hanno un aspetto blastomicetico dovuto alla rapida moltiplicazione per gemmazione di elementi cellulari vegetativi.

Fig. 2. – Clamidospore alternarioidi di *Peyronellaea fumaginoides* (Peyr.) G. Goid. disposte in catena. L'elemento inferiore à dato luogo alla differenziazione di un picnidio che, maturo, à liberato le picnospore. (Da Filipopulus, 1927).

La differenziazione del picnidio procede molto rapidamente – in meno di 64 ore si hanno picnidi maturi – e si svolge secondo i due classici processi, simfiogeno e meristogeno [5]; secondo Schnegg [6] invece si avrebbe, almeno per *P. conidiogena*, un tipo intermedio tra l'uno e l'altro processo (cfr. fig. 3). I primordi [7] del picnidio si originano sul micelio derivante direttamente dalla germinazione dei conidi (picnidi conidiali) o su micelio vegetativo (picnidi micelici); in alcune specie infine in corrispondenza di cellule ialine fuoriuscenti, di solito, dall'apice degli elementi clamidosporici (vedi fig. 1); in *P. fumaginoides*, e forse in diverse altre specie, picnidi si originano per un continuo accrescersi delle clamidospore stesse (v. fig. 2).

(5) Cfr. H. Banke, *Beiträge zur Kenntnis der Pycnidien*. « Nova Acta K. Leop. Carol. Akad. Naturf. », *38*, 1878, pp. 443–512; F. Tafel, von; *Beiträge zur Entwiklungsgeschichte der Pyrenomyceten*. « Bot. Ztg. », 1886. F. E. Kempton, *Origin and development of pycnidium*. « Bot. Gaz. », *68*, 1919, pp. 233–261.

(6) H. Schnegg, *Zur Entwiklungsgeschichte und Biologie der Pycnidien, sowie der Schlingenmycelien und Hyphenknäuel. Studien an einem häufigen Brauerei-Saprophyten*. « Centrbl. f. Bakt. Paras. usw. », *43*, 1915, pp. 326–364. Cfr. anche: W. B. Mercer, *On the morphology and development of « Phoma Richardiae » n. sp.* « Myc. Ztbl. », *2*, 1913, pp. 244–253.

(7) Con primordio s'intende quel gruppo di cellule che sono diventate così differenziate che è chiaramente evidente che da esse prenderà origine un picnidio (Kempton, op. cit.).

I picnidi a maturità sono corpi rotondeggianti, isodiametrici, ma spesso anche irregolari se derivano dalla confluenza di diversi corpi fruttiferi. Tipicamente sono ostiolati; la loro parete nella fase finale dello sviluppo è piuttosto sottile e fragile essendo costituita di pochi strati di cellule. I picnoconidi, elementi unicellulari, ialini, regolarmente elissoidali, solitamente biguttati, non sono portati da conidiofori, ma derivano da gemmazione di cellule tappezzanti l'interno della parete [8]; sono accompagnati da una sostanza mucillaginosa assieme alla quale riempiono la cavità picnidiale, prodottasi per processo lisigenico, e fuoriescono formando delle masserelle color giallo–rossastro attorno all'ostiolo.

Contemporanea alla differenziazione dei picnidi è quella delle clamidospore: [9] sono questi uni–paucicellulari (gemme) o, più spesso, multicellulari di tinta molto oscura, opachi, di forma irregolare [10] ma tendenzialmente claviformi, isolati o riuniti in catene semplici e ramificate (v. fig. 1). Traggono origine da ife tipicamente indifferenziate anche se talvolta sembri che siano portati da brevi ramificazioni conidiofore. Nonostante la grande similitudine che esse hanno con i conidi di ifali demaziacei e pur esercitando una funzione a questi evidentemente analoga – per la facile disarticolazione dalle ife e tra di loro stessi, se concatenati – sono tali elementi delle vere clamidospore [11]; sono cioè frammenti, trasformati, del tallo vegetativo di cui sono parte integrante.

Altra caratteristica dell'apparato vegetativo è la tendenza che mostrano di tanto in tanto le ife di ravvolgersi su se stesse a forma di spirale o di gomitolo. (v. fig. 1).

La comparsa costante nel ciclo vegetativo e il legame indissolubile fra le due forme di moltiplicazione, la picnidica e la clamidosporica, osservabile microscopicamente e confermabile con colonie di origine monoconidica, rende del tutto superfluo che a quest'ultima venga attribuita una posizione sistematica a sè stante, anche perchè difficilmente potrebbe stabilirsi in

(8) R. W. Benham, « *Phoma conidiogena* », *an excitant of asthma: some observations on the development and cultural characteristics.* « Bull. Torrey bot. Cl. », *55*, 1931, pp. 203-214.

(9) Queste formazioni miceliali, agamiche dovrebbero – a rigore – indicarsi col termine di « clamido–conidi » spettando l'attributo di « spora » agli elementi di diffusione di origine sessuale. Ciononostante ò conservato nella presente Nota, per contraddistinguere i corpi alternarioidi di *Peyronellaea*, il termine di « clamidospore » che è quello che trova il più comune impiego nella nomenclatura micologica.

(10) L'estrema variabilità di queste formazioni è illustrata in modo particolare nel lavoro di Planchon, *Influence des divers milieux chimiques sur quelques Champignons du groupe des Dematieés.* « Ann. sc. nat », sér. 9, *8*, 1900, pp. 1–65.

(11) È noto comunque che la distinzione fra conidi e clamidospore è molto incerta e vi è tutta una gamma di forme che tendono verso l'uno o l'altro tipo di moltiplicazione agamica; e ciò specialmente nel gruppo delle demaziacee dictiosporee. L'accezione più comune per conidio è quella di un elemento portato da un conidioforo differenziato cosa che, nelle *Peyronellaea*, risulta, ad una osservazione accurata, insussistente.

Fig. 3. – Aspetti dell'apparato vegetativo e riproduttivo in *Peyronellaea Richardiae* (Mercer) G. Goid. 1. Micelio su agar–susine; 2-3. Fusione di ife; 4. Ife vecchie con inclusioni oleose; 5-6. Porzioni isolate di ife viventi del micelio vecchio; 7. Micelio su argar–salep; 8. Micelio su gelatina alla lecitina; 9. Micelio su patata; 10. Picnidio sviluppatosi sulla superficie di foglia di *Calla* sterilizzata; 11. Sezione del medesimo; 12-14. Differenziazione del picnidio secondo il processo sinfiogeno; 15-21. Differenziazione del picnidio secondo il processo meristogeno; 22–26. Picnidi sviluppantisi da picnospore; 27-29. Picnidi sviluppantisi secondo il processo intermedio (Da Mercer, 1913).

quale genere delle demaziacee *Phaeodictyae* vada collocata. La collocazione nel genere *Alternaria* oltre a tutto urterebbe contro il fatto che è oramai dimostrato che i tipici rappresentanti di questi ifali non posseggono sferossidali nel loro ciclo di sviluppo [12]; la collocazione in altri generi affini verrebbe a complicare ancor più la già non chiara situazione tassonomica di essi.

(12) P. C. Bolle, *Die durch Schwärzpilze « Phaeodictyae » erzeugten Pflanzenkrankheiten.* « Meded. u. h. Phyt. Lab. " W. C. S. " », Baarn, 1924, 77 pp.; J. Westerdijk und A. Van Luijk, *Die Kultur der « Phoma » – Arten.* « Ibidem », 1920, 26 pp.

Abbastanza numerose sono le specie di sferossidali che rientrano nel genere *Peyronellaea*. Molte di esse sono tuttavia sinonime, come risulta dai risultati delle osservazioni di studiosi che le hanno sottoposte ad un esame comparativo [13]. In attesa di aver completato uno studio monografico riporto senza tener conto delle sinonimie già proposte [14] le specie che appartengono attualmente al genere *Peyronellaea: P. polymorpha* (Planchon), *P. Richardiae* (Mercer), *P. conidiogena* (Schnegg), *P. fumaginoides* (Peyr.), *P. alternariacea* (Br. et S.), *P. hominis* (Ag. et Tr.), *P. scabra* (McAlpine) pp., *P. pirina* (Sacc.), *P. prunicola* (Opiz), *P. pruni-avium* (All.), *P. pruni-japonica* (Syd.), *P. glomerata* (Cda), *P. fictilis* (Del.), *P. fibricola* (Berk.), *P. cincta* (Berk. et Curt.), *P. destructiva* (Desm.), *P. asteris* (Bres.), *P. glomerata* (B. et Br.), *P. consors* (Sch. et Sacc.), *P. herbarum crysanthemi corymbosi* (All.), *P. cromatospora* (Corda) [15], *P. veronensis* G. Goid [16, 19].

Soppresse vanno invece, per le ragioni sovra esposte, le denominazioni specifiche della forma clamidosporiale quali: *Alternaria hominis* Ag. et Tr., *A. Richardiae* Mercer, *A. polymorpha* Planchon, *Coniothecium scabrum* McAlp.

Le *Peyronellaea* sono micromiceti molto frequenti in natura [17] e che hanno una notevole distribuzione geografica essendo stati riscontrati in America e in diverse parti dell'Europa settentrionale e meridionale. Il loro comportamento è saprofitario e parassitario a seconda dei casi; l'*habitat* non è specifico sebbene dimostrino una predilezione per i fruttiferi ed in particolare per le frutta – mele: Wollenweber e Hochapfel [18], Goidànich [19]; agrumi: Wiltshire [20]. In più alcune vivono sull'uomo [21] causandovi o, forse

(13) H. W. Wollenweber und H. Hochapfel, *Beiträge zur Kenntnis parasitärer und saprophytischer Pilze.* I. « *Phomopsis* », « *Dendrophoma* », « *Phoma* » *und* « *Ascochyta* », *und ihre Beziehung zur Fruchtfäule.* « Ztschr. f. Paras. », 8, 1936, pp. 561-605.

(14) Al fine di definire con esattezza la questione sinonimica di questo genere ed il suo inquadramento tassonomico sarà necessario rivedere criticamente la produzione micologica di vecchia data sul polimorfismo delle Pleospore (G. Gibelli e L. Griffini, *Sul polimorfismo della* « *Pleospora herbarum* » *Tul.* « Arch. Trienn. Lab. bot. critt. Pavia », 1874, pp. 53-102 ; O. Mattirolo, *Sul polimorfismo della* « *Pleospora herbarum* » ecc. « Malpighia », 2, 1888, pp. 357-358 ; F. G. Kohl, *Ueber den Polymorphismus von* « *Pleospora herbarum* » *Tul.* « Bot. Ztbl. », *16*, 1883, pp. 26-84) e sulla morfologia di certi gruppi, tuttora indefiniti di demaziacee *(Dematium-Pullularia, Fumago).*

(15) H. Jarvis, *Fruits fly investigations.* « Queensland Agr. Journ. », *18*, 1922, pp. 269-271.

(16) Una *Peyronellaea* è pure il micete studiato da Kohl (loc. cit.).

(17) Ciò era già stato osservato da Planchon (loc. cit.) fin dal 1900.

(18) H. W. Wollenweber, und H. Hochapfel, (loc. cit.).

(19) G. Goidànich, *Un interessante tipo di butteratura parassitaria delle mele.* « Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Cl. sc. fis. mat. e nat. », 1946 (in corso di st.).

(20) In E. W. Mason, *Annotated account of fungi received at the imperial mycological Institute, List II, fasc. 2.* « The imp. myc. Inst. », Kew, 1933, 67 pp.

(21) La *P. alternariacea* è stata trovata anche nel burro (T. R. Vernon, *Studies on the mycological problems of dairying.* I. *The surface moulding of butter.* II. *The internal and subsurface discoloration of butter.* « Journ. Dairy Res. », *6*, 1935, pp. 154-174).

meglio accentuandovi vari disturbi: dermatomicosi, rinite, otomicosi [22], asma [23]. La *P. conidiogena*, secondo la segnalazione di Lindner (1913) e Schnegg (1935, loc. cit.) è un comune saprofita del materiale usato per la fabbricazione della birra. Planchon isolò la *P. polymorpha* da liquidi provenienti dall'ospedale Laenner e dalla Scuola superiore di Farmacia di Parigi e da altri substrati; la *P. alternariacea* produce un marciume dei pomodori [24]; altre specie, come risulta dalle osservazioni di Wollenweber e Hochapfel (1934, loc. cit.), si trovano indifferentemente su materiali vegetali morti e vivi, affatto dissimili.

Per ciò che concerne l'Italia è chiaro che le *Peyronellaea* sono un gruppo di miceti piuttosto comuni. Filippopulos [25] trovò la *P. fumaginoides* fra i componenti della fumaggine dell'olivo nel Tarantino. Il prof. Peyronel ne ha isolato diverse antecedentemente al 1938 da materiale vegetale vario nei dintorni di Firenze [26]. Io stesso fra il 1935-40 ne ho isolate più volte da germogli di pero e da cortecce di melo provenienti dall'Alta Italia e nel 1938 da frutti di melo nel Veronese su cui causa una butteratura parassitaria [27]; ed una *Peyronellaea* è il micete che Petri ha brevemente illustrato nel 1936 dopo averlo isolato da gemme di peri e di meli affetti da degenerazione del cambio [28].

La *P. hominis* venne riscontrata nel 1934 a Bari in un granuloma ad un piede e a Milano in una dermatomicosi della mano [29], nel 1925 in una micosi dell'apparato genitale di donna a Siena [30], nel 1929 in tre casi di oto-

(22) G. Pollacci, *Sopra una nuova specie di micete commensale (« Phoma hominis » Ag. et Tr.) isolate da forme cliniche del derma.* « Atti R. Ist. Bot. Univ. Pavia », ser. IV, 6, 1935, pp. 153-155.

(23) J. G. Hopkins, R. W. Benham, B. M. Kesten, *Asthma due to a fungus: « Alternaria ».* « Journ. am. med. ass. », 94, 1919, pp. 6-10.

(24) F. T. Brooks, and G. O. Searle, *An investigation of some tomato diseases.* « Trans. brit. myc. soc. », 7, 1921, pp. 173-197. Il medesimo ceppo venne successivamente studiato da Chodat; « L'organisme, qui a servi de souche, pour l'étude sur le *Phoma*, a été decrit par F. T. Brooks et G. O. Searle, dans un mémoire sur les maladies des tomates. Parmi différents saprophytes et parasites du fruit de tomate, les deux auteurs ont reconnu *P. alternariacearum* comme espèce nouvelle; le nom specifique provient du fait, que les auteurs ont considéré les hypnocystes en forme de massues, comme des spores aériennes du type *Alternaria...* » (in *Recherches experimentales sur la mutation chez les champignons.* « Bull. soc. bot. Geneve », 11, 1926, pp. 68).

(25) G. K. Filippopulos, *Azione di alcuni composti venefici sopra la fumaggine dell'olivo.* « Boll. R. Staz. Pat. Veg. », n. s., 7, 1927, pp. 330-346.

(26) Per comunicazione epistolare.

(27) G. Goidànich, 1946, loc. cit.

(28) L. Petri, *Degenerazione e necrosi del cambio dei peri e dei meli nel Trentino e in Alto Adige.* « Boll. R. Staz. Pat. Veg. », n. s., 14, 1934, pp. 281-326.

(29) A. Agostini, e V. Tredici, *Su di un « Phoma » isolato da due casi clinici.* « Atti R. Ist. Bot. Univ. Pavia », ser. IV, 9, 1937, pp. 179-189.

(30) G. Pollacci, loc. cit.

micosi a Roma, in un caso di rinite subacuta e in uno di rinite vasomotrice [31].

Una *Peyronellaea* è stata isolata da Nannizzi a Siena fra i componenti della flora di carie dentaria [32].

Da quanto sopra è chiaro che merita che su questo nuovo genere di sferossidali converga l'attenzione dei micologi, che trovano nelle singolari caratteristiche morfologiche dei suoi rappresentanti elementi di interessanti considerazioni di ordine sistematico generale, e dei patologi, specialmente se si tiene presente che la schiera dei suoi componenti aumenterà quando si sottoporranno all'osservazione culturale altri ceppi del genere *Phoma*, finora studiati solo nell'ambiente naturale ove la produzione delle strutture clamidosporiche su cui si basa la differenziazione generica è limitata, o di cui in ogni caso, seppure manifesta, non è possibile stabilire con esattezza i rapporti intercorrenti con le fruttificazioni conidiche picnidiali.

NOTE PRESENTATE NELLA SEDUTA DEL 18 APRILE 1946 E CHE SARANNO PUBBLICATE NEL PROSSIMO FASCICOLO

Note di Soci.

Crocco G. A., «Considerazioni sulla " Barriera del suono " in Aviazione ».

Fano G., «Sulla forma cubica generale dello spazio a quattro dimensioni ».

Silva G., «Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso ». Nota I.

Silva G., «Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso ». Nota II.

Note presentate da Soci.

Alibrandi A., «Comportamento di un riflesso condizionale motorio sotto l'azione dell'acetilcolina » pres. dal Corrisp. C. Ciaccio.

Amerio L., «Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali ». Nota II, pres. dal Socio M. Picone.

(31) R. Motta, *I miceti delle cavità nasali e della gola negli ozenatosi*. « Il Valsalva », 1929, 35 pp.

(32) Da comunicazione epistolare del prof. Peyronel.

AMPRINO R. e GODINA G., « Ricerche comparative sulla struttura delle ossa dei vertebrati », pres. dal Socio G. LEVI.

AQUARO G., « Su un problema riducibile di integrazione di una particolare equazione a derivate parziali », pres. dal Socio M. PICONE.

CALIGO D., « Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato », pres. dal Socio M. PICONE.

CATTANEO C., « Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità ». Nota II, pres. dal Corrisp. A. SIGNORINI.

CESARI L., « Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue », pres. dal Socio M. PICONE.

CIMINO M., « Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di M. Mario, eseguita in primo verticale ». Nota III, pres. dal Socio G. ARMELLINI.

CIMINO M., « Una conferma del ciclo solare ventiduennale dedotta dalle oscillazioni dei diametri solari », pres. dal Socio G. ARMELLINI.

CINQUINI S., « Sopra l'esistenza dell'estremo nei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore », pres. dal Socio U. AMALDI.

COLACEVICH A., « Un nuovo tipo di telescopio astronomico », pres. dal Socio G. ABETTI.

FICHERA G., « Sull'integrabilità in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado », pres. dal Socio M. PICONE.

FRACASTORO M. G., « Sul meccanismo di formazione dell'immagine latente negli strati fotografici », pres. dal Socio G. ABETTI.

GIALANELLA L., « Fotometria visuale e indice del colore della Nova Aquilae 1945 », pres. dal Socio G. ARMELLINI.

GOIDÀNICH G., « Un interessante tipo di butteratura parassitaria delle mele », pres. dal Corrisp. L. PETRI.

GRIOLI G., « Relazioni quantitative per gli autovalori di un'equazione integrale omogenea di seconda specie », pres. dal Socio M. PICONE.

GRIOLI G., « Vibrazioni e pressioni critiche delle piastre anulari soggette a pressione radiale », pres. dal Socio M. PICONE.

KRALL G., « Di una allarmante associazione dei tre casi di instabilità di Eulero, di Michell-Prandtl e di Reissner », pres. dal Socio C. SOMIGLIANA.

LEONARDI P., « I mososauri del Veneto », pres. dal Socio G. DAL PIAZ.

POMPILJ G., « Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti ». Nota I, pres. dal Socio F. ENRIQUES.

POMPILJ G., « Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremonianza tra piani sovrapposti ». Nota II, pres. dal Socio F. ENRIQUES.

POMPILJ G., « Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli », pres. dal Socio F. ENRIQUES.

RUFFO A. e CENNAMO G., « Il meccanismo dell'inibizione da florizina sul sistema enzimatico di riduzione dell'acido ossalacetico », pres. dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

SALINI U., « Determinazione unitaria di enti proiettivi legati ad un punto di una superficie », pres. dal Corrisp. E. BOMPIANI.

SEBASTIÃO e SILVA J., « Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche » Nota II, pres. dal Socio M. PICONE.

SEGRE B., « Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche ». Nota II, pres. dal Socio G. CASTELNUOVO.

SEGRE B., « Sui sistemi continui di ipersuperficie algebriche », pres. dal Socio G. CASTELNUOVO.

SOBRERO L., « Sulla elaborazione dei dati della fotoelasticità per la ricerca degli sforzi principali », pres. dal Socio M. PICONE.

SOBRERO L., « I " segmenti " e le loro applicazioni alla fotoelasticità », pres. dal Socio M. PICONE.

TORTORICI P., « Sulla risoluzione numerica delle equazioni in generale e in particolare di talune notevoli che si presentano in matematica finanziaria », pres. dal Socio M. PICONE.

VIOLA T., « Per la storia del teorema di Desargues sui triangoli omologici », pres. dal Socio F. ENRIQUES.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 18 aprile 1946.

AMALDI Ugo. — *Introduzione alla teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni.* Roma, Libreria dell'Università di Roma, 1944. Voll. 2 litografati, in 8° (Corsi del R. Istituto Nazionale di alta matematica).

— Vedi: LEVI-CIVITA Tullio.

CAROSELLA Federico. — *L'o di Giotto.* Campobasso, 1946. Pp. 19, in 8°.

COLOSI Giuseppe. — *La dottrina dell'evoluzione e le teorie evoluzionistiche.* Firenze, Le Monnier, 1945. Pp. VIII-219, in 8°, con figg.

EULERUS Leonhardus. — *Commentationes arithmeticae.* Vol. IV edidit Rudolf Fueter. Genevae, 1944. Pp. XLVII-374, in 4°. (Leonhardi Euleri Opera Omnia sub auspiciis Soc. Scientiarum Naturalium Helveticae, s. I, opera mathematica, vol. V).

LEVI Giuseppe. — *Accrescimento e senescenza.* Firenze, « La Nuova Italia », 1946. Pp. XII-217, in 8°, con figg. e tavv. (Problemi di Scienza, 3).

LEVI Mario Giacomo. — *L'industria chimica italiana e le possibilità del suo avvenire.* Estr. dalla Rivista « La chimica e l'industria », a. XXVII, novembre-dicembre, 1945.

LEVI-CIVITA Tullio e AMALDI Ugo. — *Compendio di meccanica razionale.* 2ª ed. Bologna, Zanichelli, 1946. Voll. 2, in 8°, con figg.

LORIA Gino. — *Guida allo studio della storia delle matematiche. Generalità - Didattica - Bibliografia.* 2ª ed. Milano, Hoepli, 1946. Pp. XIX-385, in 16°.

MACCHI Francesco M. — *Pavimentazioni per aeroporti.* Estr. da « L'ingegnere », n. 11-12, 1945.

NEGRI Giovanni. — *A proposito di alcune nuove località di Loranthus Europaeus L. in Italia.* Estr. dal « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. L, n. 1-2, 1943.

PUCCI Renzo. — *Infiltrazioni illiriche nella flora di un bosco meso-igrofilo della valle di Oropa (Monte Rosa).* Estr. da « Boissiera VII », marzo 1943.

— *Nuovi dati sull'invasione delle morene galleggianti dei ghiacciai alpini da parte della vegetazione.* Estr. da « Nuovo Giornale botanico italiano », n. s., vol. XLIX, 1942.

— *Per uno schema cartografico della vegetazione dell'Africa Orientale Italiana.* Estr. dalla « Rivista Geografica italiana », a. XLVII, 1940.

— *Residui di una abetina originaria a Monte Amiata. Il Pigelleto di Pian Castagnaio.* Estr. da « Studi Etruschi », vol. XVII, 1943.

— *Serta Albertina in honorem caelestis patroni a Summo Pontifice Pio PP. XII rerum naturalium indagatoribus recens dati.* Estr. da « Angelicum », vol. XXI, 1944.

— *Stratificazione delle biocenosi; caratteri e nomenclatura.* Estr. dal « Nuovo giornale botanico italiano », n. s., vol. L, 1943.

— *Sul paesaggio vegetale dell'Anatolia.* Estr. dal « Bollettino della R. Società Geografica Italiana » s. 7ª, vol. VI, fasc. 6-7, 1941.

— *Sul significato fitogeografico di « Laserpitium Gaudini » Moretti (L. Krapfii Crantz. subsp. Gaudini (Moretti) Thellung,* 1925). Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », n. s., vol. I., 1943.

PICCARD Sophie. — *Sur les bases du groupe symétrique et les couples de substitutions qui engendrent un groupe ré-*

gulier. Paris, Lib. Vuibert, 1946. Pp. 223, in 8°. (Mémoires de l'Université de Neuchâtel, tome XIX).

PUCCI Renzo. — I. (Nucleo e protoplasmi). *Antagonismo cancro-sarcoma. Nuova classificazione delle proteine e dei coloranti istologici.* – II. *Tentativi di determinare il peso molecolare dei cromosomi. Composizione dei granuli neutrofili, acidofili, basofili, ossidasici.* Pisa, 1946 Pp. 20, in 8°.

SACCO Federico. — *Il quaternario nel gruppo del Monte Rosa*. Estr. dalle «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», 2ª s., tomo LXX, p. I, 1940-42.

— *Il quaternario nelle alti valli di Lanzo*. Estr. dalle «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», s. 2ª, tomo LXXI, p. I, 1943.

SILVESTRI Filippo. — *Contribuzioni alla conoscenza dei Mirmecofili*. III-IV. Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici», vol. VI, 1946.

— *Identità dei generi di Mengenillidae [Strepsiptera] Austrostylops Lea e Mengenilla Hofeneder*. Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici», vol. VI, 1945.

— *Nuovo concetto di fasi corrispondenti all'età della colonia negli individui di una stessa specie componenti una colonia di Termiti e descrizione di due specie nuove di Syntermes*. Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici», vol. VI, 1945.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 18 maggio 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni.* Nota [1] del Corrisp. G. Fano.

La questione della razionalità o meno della forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni, cioè della varietà algebrica a 3 dimensioni del 3° ordine di questo spazio priva di punti doppi, si è presentata in geometria da oltre 50 anni, suscitando viva curiosità [2], senza essere stata finora risolta. Come è noto, non è razionale la curva piana generale del 3° ordine, mentre invece è razionale ogni superficie cubica dello spazio ordinario, all'infuori del cono ellittico; per le forme cubiche generali degli spazi di dimensione ≥ 4 la questione rimaneva incerta, con presunzione piuttosto negativa. Per gli spazi di dimensione dispari è noto tuttavia da tempo che esistono forme cubiche razionali, anche se prive di punto doppio; esse sono però tutte (per quanto è noto finora) forme particolari: per esempio, nello spazio a 5 dimensioni, le forme cubiche contenenti una superficie appartenente pure a questo spazio e il cui sistema delle ∞^4 corde è del 1° ordine (coppia di piani indipendenti, rigata razionale normale del 4° ordine).

Per la forma cubica generale dello spazio S_4 ho potuto stabilire nel 1930, in occasione di altra ricerca, un risultato interessante [3]. L'esame di

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Tanto più, come si è rilevato in seguito, trattandosi di varietà avente tutti i generi nulli. Mentre per le curve algebriche la razionalità equivale all'annullarsi del genere, e per le superficie all'annullarsi del genere numerico e del bigenere (Castelnuovo, « Mem. Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL) », 1896), e per conseguenza di tutti gli altri generi, per le varietà algebriche a tre dimensioni le condizioni di razionalità sono tuttora sconosciute.

(3) Ved. le mie Note nei « Rendiconti » di questa Accademia (6), vol. XI, 1° sem. 1930, pp. 227, 329.

un lavoro di F. Palatini sulla geometria della retta dello spazio a 5 dimensioni [4] mi aveva indotto a approfondire alcune questioni sui sistemi lineari di complessi lineari di questo spazio. Nello spazio a tre dimensioni, una rete generica di complessi lineari contiene ∞^1 complessi speciali, le cui direttrici, o rette singolari, costituiscono un regolo; mentre le rette basi della rete costituiscono l'altro regolo della stessa quadrica. Nello spazio a 5 dimensioni [5] un generico sistema lineare ∞^4 di complessi lineari (Λ) contiene ∞^3 complessi singolari di 1ª specie, ciascuno con una retta centro a, e d'altra parte tale sistema ha ∞^3 rette basi b; questi due sistemi ∞^3 di rette a, b ricoprono semplicemente una stessa varietà M_4^4, a 4 dimensioni e del 4° ordine, per un punto generico della quale passa pertanto *una* retta di ciascuno dei due sistemi. Questi due sistemi ∞^3 sono perciò birazionalmente equivalenti [6], potendosi far corrispondere le rette a, b uscenti da uno stesso punto di una sezione iperpiana arbitraria di M_4^4. Ora un fascio generico di complessi lineari di S_5 contiene 3 complessi lineari singolari di 1ª specie; perciò il sistema ∞^3 dei complessi singolari contenuti in Λ, e quindi il sistema ∞^3 delle loro rette–centri a, è riferibile birazionalmente a una forma cubica dello spazio S_4, che si riconosce facilmente essere priva di punto doppio e affatto generale. D'altra parte, il sistema delle rette b è, proiettivamente, la sezione della Grassmanniana delle rette di uno spazio S_5 (M_8^{14} di S_{14}) [7] con un generico S_9. Si ha così una corrispondenza birazionale tra la forma cubica generale V^3 di S_4 e questa generica M_3^{14} di S_9, tale che su ciascuna di queste due varietà i soli punti fondamentali sono quelli di una curva ellittica normale del 5° ordine γ_1^5, δ_1^5. In particolare a quest'ultima curva corrisponde su V^3 la superficie φ^{15} segata dalla varietà delle corde di γ_1^5 (superficie e varietà aventi γ_1^5 come curva tripla [8]).

Questa M_3^{14} appartiene alla categoria delle M_3^{2p-2} di S_{p+1}, a curve-sezioni canoniche di genere p. Di queste varietà, aventi pure tutti i generi nulli, e particolarmente di quelle contenenti, come la M_3^{14}, soltanto superficie loro intersezioni complete con forme, io mi ero occupato fino dal 1908 pei primi casi $p = 3$ e $p = 4$ [9], accertandone la irrazionalità in base alla

(4) « Atti R. Istit. Veneto », vol. 40 (parte 2ª), 1900-01, p. 371.

(5) Che è lo spazio dispari successivo. È noto che alcune proprietà di geometria della retta e in particolare dei complessi lineari variano secondo la parità dello spazio ambiente, perchè dipendono da un determinante emisimmetrico, che è identicamente nullo, oppure in generale diverso da zero, secondo che di ordine dispari o pari.

(6) La relazione fra essi non è però reciproca, come per i due regoli di una quadrica di S_3. Ad esempio, lo spazio S_3 congiungente due a generiche non contiene nessuna b, mentre lo spazio congiungente due b generiche contiene una a.

(7) F. Severi, *Sulle varietà che rappresentano gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare.* « Annali di Matem. » (3) vol. 24, 1915, p. 89.

(8) La φ^{15} è l'aggiunta delle superficie di V^3 corrispondenti alle sezioni iperpiane di M_3^{14}.

(9) « Atti R. Accad. di Torino », vol. 43, 1907–08, p. 973. Ved. anche la Nota posteriore negli stessi « Atti », vol. 50, 1914–15, p. 1067.

proprietà di contenere sistemi lineari completi di superficie di generi 1 soltanto della dimensione $p+1$: quello delle sezioni iperpiane, o riducibili birazionalmente a questo. Avevo pure avviate più tardi ricerche sui casi successivi, facendone nel 1928 una comunicazione al Congresso internazionale di Bologna [10], e nel 1936 oggetto di una Memoria compresa nel volume offerto al nostro Socio Luigi Berzolari in occasione del suo collocamento a riposo per età [11]. La M_3^{14} di S_9 di cui sopra, birazionalmente equivalente alla forma cubica generale di S_4, si inseriva appunto in questa serie per $p=8$; e a questa serie appartiene pure, per $p=13$, la M_3^{24} di S_{14} rappresentante il sistema lineare delle superficie intersezioni della detta forma cubica con quadriche. Era pertanto a presumere che una via per risolvere possibilmente la vexata quaestio della razionalità o meno della forma cubica generale di S_4 fosse lo studio più approfondito delle M_3^{2p-2} di S_{p+1} a curve-sezioni canoniche di genere p, e dei sistemi lineari completi (semplici) di superficie di generi 1 ivi contenuti, accertandone in particolare per $p=8$ la diversità da quelli dello spazio ordinario.

Questo studio ulteriore è stato fatto da me in una Memoria del 1936 inserta nella raccolta della cessata Accademia d'Italia [12]; in una Nota del 1941 pubblicata in Svizzera [13]; e infine in una lunga Memoria presentata nel febbraio 1943 all'Accademia delle Scienze Pontificia [14], e a cagione degli avvenimenti bellici non ancora pubblicata, ma della quale l'Introduzione, o breve riassunto, è apparsa recentemente negli « Acta » della stessa Accademia [15].

Da questi lavori risulta che la M_3^8 di S_6 della successione indicata (intersezione generale di tre quadriche) e la M_3^{10} di S_7, corrispondenti ai valori $p=5$ e $p=6$, contengono solo sistemi lineari completi semplici di superficie di generi 1 riducibili birazionalmente al sistema delle sezioni iperpiane della stessa varietà o di altra del medesimo tipo, e non sono perciò razionali; che sono invece razionali le M_3^{2p-2} di S_{p+1} della successione per $p=7$ e per $p \geqq 9$, con esclusione tuttavia del caso $p=13$, varietà sulla quale il sistema delle sezioni iperpiane anzichè essere base minima del sistema delle superficie è doppio della base stessa; che infine su quest'ultima varietà e su quella $p=8$, equivalenti entrambe alla forma cubica generale di S_4, i sistemi lineari completi di superficie di generi 1 sono riducibili al sistema delle sezioni iperpiane di una M_3^{14} di S_9 oppure a quello

(10) « Atti del detto Congresso », vol. V, 1931, p. 115.

(11) *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni...* Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia, Tip. Rossetti, 1936, p. 329.

(12) Vol. VIII, Mem. n. 2, 1937.

(13) *Su alcune varietà a tre dimensioni razionali e a curve sezioni canoniche.* « Commentarii Mathem. Helvetici », vol. 14, 1941-42, p. 203.

(14) *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.*

(15) *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a curve-sezioni canoniche.* « Acta dell'Accademia Pontificia », vol. IX, n. 13, p. 135.

delle intersezioni di una forma cubica di S_4 con quadriche, di dimensioni rispettivamente 9 e 14; essenzialmente diversi perciò da quelli dello spazio ordinario, dove ad esempio, il sistema di tutte le superficie di 4° ordine è di dimensione 34. La forma cubica generale di S_4 non è perciò razionale [16].

Matematica (Geometria). — *Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso.* Nota I [1] del Socio G. Silva.

1. Ho dato in una precedente Nota [2] la definizione di curvatura relativa a una data direzione o relativa a un punto dato di una linea qualsiasi e, conservando in questa le medesime notazioni usate in quella e proseguendo per comodità di richiamo la numerazione delle formole là dimostrate, mi propongo qui di studiare le linee la cui curvatura relativa a una direzione fissa $\boldsymbol{M}$, o a un punto fisso O a distanza finita, rimane invariata per tutti i loro punti P.

Lo studio può essere limitato alle sole linee piane l', assumendo il piano che le deve contenere o pararallelo alla direzione $\boldsymbol{M}$ o passante per il punto O; infatti, per quanto è stato detto nella Nota sopra citata, le linee l dello spazio, che hanno costante la curvatura relativa ad $\boldsymbol{M}$ o ad O, si ottengono poi dalle l' con il semplice avvolgimento del piano su una qualunque superficie cilindrica a generatrici parallele ad $\boldsymbol{M}$ o su una superficie conica, pure qualunque, di vertice O.

2. Incominciamo dal caso in cui il punto O è all'infinito ed è quindi data la direzione $\boldsymbol{M}$ da esso definita; assumiamo secondo tale direzione l'asse y di un sistema cartesiano piano x, y e consideriamo l'equazione (4) con K_y costante.

Per $K_y = 0$, risulta $dy/ds = a$, $dx/ds = b$, con a costante arbitraria, ma in valore assoluto minore di 1, e $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$. Ne segue $y = as + \alpha$, $x = bs + \beta$, con α e β pure costanti, sicchè una qualsiasi retta del piano

$$ax - by + c = 0, \qquad (c = a\beta - b\alpha)$$

come del resto è evidente per definizione, soddisfa alla condizione di avere curvatura nulla anche rispetto a una direzione fissa comunque scelta.

Per $K_y \neq 0$, poniamo

$$1/K_y = 4a.$$

(16) In una mia Memoria del 1915 (« Annali di Matem. » (3), vol. 24, p. 49) è dimostrato che se la forma cubica generale di S_4 non è razionale – come ora è accertato –, i sistemi lineari semplici completi di superficie razionali in essa contenuti sono tutti, come quello delle sezioni iperpiane, di grado 3.

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946

(2) G. Silva, *Curvatura relativa a una data direzione o a un punto dato di una linea qualsiasi.* Questi « Rendiconti », vol. I, p. 251, 1946.

Osserviamo poi che l'angolo φ, introdotto al n. 6 della Nota citata, è ora l'angolo tra la direzione negativa dell'asse y e la direzione della tangente, orientata nel verso in cui cresce s. Pertanto $dy/ds = -\cos\varphi$, e una prima integrazione della (4) dà

$$\frac{s}{4a} + C = \frac{dy}{ds} = -\cos\varphi .$$

Differenziamo ora rispetto a φ; ricaviamo dy mediante l'espressione così ottenuta per ds, indi dx dalla relazione $dx^2 + dy^2 = ds^2$; conveniamo inoltre che x sia crescente al crescere di φ quando $a > 0$ e al decrescere di φ quando $a < 0$, e otteniamo

$$\begin{aligned} ds &= \quad 4a \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \\ dy &= -4a \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = -2a \operatorname{sen} 2\varphi \, d\varphi \\ dx &= \quad 4a \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = 2a(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi . \end{aligned}$$

A seconda che a è positivo o negativo, scegliamo le costanti di integrazione in maniera che in un punto iniziale P_0 sia contemporaneamente $\varphi = 0$ o $\varphi = \pi$, $x = \pm 2k\pi a$, $y = 0$, $s = \pm 8ka$; si hanno allora nei due casi le equazioni

$$(10)\quad \begin{cases} x = a[2(k\pi + \varphi) - \operatorname{sen} 2\varphi] \qquad y = a(\cos 2\varphi - 1) \\ \qquad\qquad s = 4a[2k + 1 - \cos\varphi] \\ x = -a[2(k\pi + \pi - \varphi) + \operatorname{sen} 2\varphi] \qquad y = -a(1 - \cos 2\varphi) \\ \qquad\qquad s = -4a[2k + 1 + \cos\varphi]. \end{cases}$$

Esse corrispondono alla cicloide generata da un punto P di una circonferenza di raggio $|a|$, che rotola senza strisciare lungo l'asse delle ascisse, restando dalla parte delle y negative, e volgendo quindi la concavità alla direzione positiva dell'asse y, se $a > 0$, e restando invece dalla parte delle y positive se $a < 0$ (fig. 1). Quando φ varia rispettivamente da zero a π o da π

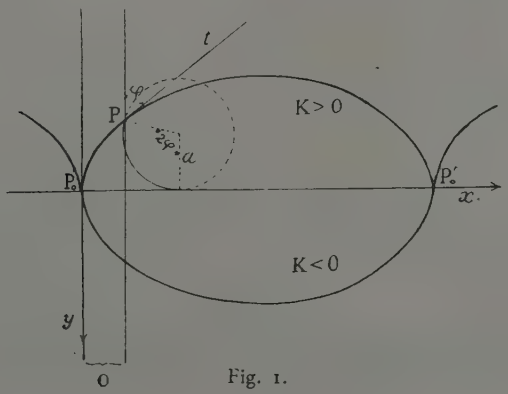


Fig. 1.

a zero, il punto P descrive una sola arcata di cicloide che, per $k = 0$, è compresa tra P_0 e P'_0, ma è chiaro che questa arcata è susseguita e preceduta da altre ad essa eguali che si ottengono dalla (10) facendo variare φ sempre fra zero e π, come la sua definizione esige, e aumentando o diminuendo k di una unità ad ogni passaggio da un'arcata all'altra e precisamente ogni volta che φ, giunto al valore π scatta al valore zero, o viceversa.

Più archi di cicloide derivati dalla stessa circonferenza che rotola su una medesima retta, riuniti fra loro, soddisfanno sempre alla condizione di avere costante la curvatura K relativa alla direzione normale a detta retta.

Se il piano si avvolge su un qualunque cilindro, ogni retta del piano dà origine a un'elica, la cui curvatura relativa alla direzione delle generatrici del cilindro è nulla.

Se le generatrici del cilindro hanno per comune direzione quella dell'asse y del piano, le cicloidi (10) o l'insieme di più archi di una di esse, collegati fra loro, quando si avvolgono con il piano sul cilindro, diventano le linee sghembe che hanno costante la curvatura K relativa alla detta direzione.

3. Supponiamo ora K costante nell'equazione (6) e nella (7), e determiniamo da esse i vari tipi di linee che hanno costante la curvatura relativa a un punto fisso, e cioè la curvatura relativa ai singoli raggi vettori che, partendo dai punti della linea che si considerano, convergono in quel punto fisso.

Per $K = 0$, le due equazioni differenziali (6) e (7) diventano

$$\frac{d^2(r^2)}{ds^2} = 2 \quad , \quad \frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0 ,$$

e conducono facilmente agli integrali generali

$$(11) \qquad r^2 - r_0^2 = (s - s_0)^2 \quad , \quad r_0 = r\cos(\theta - \theta_0) ,$$

nei quali le costanti di integrazione r_0 , s_0 , θ_0 sono i valori di r , s , θ corrispondenti al valore minimo di r, cioè al valore di r per il quale $dr/ds = dr/d\theta = 0$.

Da queste equazioni, valevoli anche nello spazio, possiamo ricavare, a mezzo delle (8), $\cos\varphi$ e $\operatorname{tang}\varphi$ rispettivamente, e risulta

$$\cos\varphi = \frac{s - s_0}{r} \quad , \quad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{cotg}(\theta - \theta_0) .$$

Dall'una o dall'altra di queste espressioni ricaviamo poi, usufruendo delle stesse (11), l'espressione di $\operatorname{sen}\varphi$, e giungiamo, da entrambe le vie, alla stessa relazione

$$(11') \qquad r_0 = r\operatorname{sen}\varphi ,$$

come deve necessariamente avvenire, rappresentando le equazioni (11) uno stesso tipo di linee, e avendo la costante r_0 lo stesso significato in entrambe.

Se le (11) rappresentano una linea che appartiene, con il punto O, ad un piano, le (11) stesse e la (11′), dimostrano che essa è una retta distante r_0 dal punto fisso O. E poichè r_0 è una costante arbitraria e il raggio vettore OP_0, di lunghezza r_0, può essere comunque orientato, ogni retta dello spazio, come è evidente *a priori*, soddisfa alla condizione di avere nulla anche la curvatura relativa ad un punto O fissato ad arbitrio.

Avvolgendo il piano che contiene la retta e il punto O attorno ad un qualsiasi cono Γ di vertice O, la retta diviene una geodetica del cono, e continua a soddisfare alle equazioni (11) e (11′).

Le linee determinate da queste equazioni, cioè le linee del piano e dello spazio che hanno nulla la curvatura relativa ad un punto fisso O, sono dunque le rette e le linee che godono la proprietà di essere geodetiche della superficie conica Γ che le proietta dal punto O.

4. Per K costante, ma diverso da zero, poniamo nella (6) $r^2 = u$; essa assume la forma

$$\frac{d^2u}{ds^2} = 2\,(1 - K\sqrt{u}),$$

che permette una prima integrazione, il cui risultato è

$$\frac{du}{ds} = \sqrt{2\int 2\,(1 - K\sqrt{u})\,du + C_1} = \sqrt{4u - \frac{8}{3}Ku^{3/2} + C_1},$$

ossia, ritornando alla variabile r,

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - \frac{2}{3}Kr^3 + C_1}, \tag{12}$$

dove è sottinteso, davanti al radicale, il doppio segno.

La (7), con una prima posizione $1/r = z$, assume la forma

$$z + z'' - K\left[\frac{z^2 + z'^2}{z^2}\right]^2 = 0;$$

poi, con l'altra posizione $z^2 + z'^2 = z^4\,t\,(z)$, che permette di eliminare z', z'' e di dare a z il ruolo di variabile indipendente, diviene un'equazione di Bernoulli, e precisamente

$$\frac{dt}{dz} + \frac{4t}{z} = 2Kt^2.$$

L'integrazione di questa equazione dà

$$\frac{1}{t} = -e^{\int \frac{4}{z}\,dz}\left[2K\int e^{-\int \frac{4}{z}\,dz}\,dz + C\right] = \frac{2}{3}Kz - Cz^4,$$

e da questa, ritornando, attraverso le posizioni fatte, dalle variabili t e z alle variabili r e θ, abbiamo

$$(13) \qquad \frac{rd\theta}{dr} = \sqrt{\frac{2Kr^3 - 3C}{3r^2 - 2Kr^3 + 3C}}$$

dove pure è sottinteso, davanti al radicale, il doppio segno.

A norma delle (8), la (12) esprime $\cos\varphi$ e la (13) $\operatorname{tang}\varphi$ nel punto di coordinata r di una fra le linee che hanno costante la curvatura K relativa al punto O; quindi i secondi membri della (12) e della (13) devono potersi ottenere l'uno dall'altro con la relazione che lega fra loro $\cos\varphi$ e $\operatorname{tang}\varphi$, equivalente alla relazione già usata $dr^2 + r^2 d\theta^2 = ds^2$. Ciò avviene effettivamente quando si faccia $C = C_1$.

Per $K = 0$ si ritorna alle equazioni (11) soddisfatte dalle linee rette e dalle geodetiche di un qualunque cono Γ di vertice O, ed è questo un primo caso particolare.

Per $K \neq 0$, poniamo

$$K = \frac{1}{4a} \quad , \quad 6aC = 6aC_1 = b^3 ,$$

e concludiamo che, per le linee aventi K costante, deve essere

$$(14) \qquad \frac{dr}{ds} = \cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{6ar^2 - r^3 + b^3}{6ar^2}}$$

$$(15) \qquad \frac{rd\theta}{dr} = \operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{\frac{r^3 - b^3}{6ar^2 - r^3 + b^3}}$$

$$(16) \qquad \frac{rd\theta}{ds} = \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{\frac{r^3 - b^3}{6ar^2}} .$$

L'ulteriore integrazione di queste equazioni è possibile in un secondo caso particolare, nel quale $b = 0$, $a > 0$. Esse danno allora rispettivamente, quando si supponga nel punto iniziale $r = s = \theta = 0$,

$$(17) \quad s^2 = 24a(s - r) \;\; ; \;\; r = 3a(1 - \cos\theta) \;\; ; \;\; s = 12a\left(1 - \cos\frac{1}{2}\theta\right)$$

che, nel caso del piano, sono le equazioni di una cardioide descritta da un punto di una circonferenza di diametro $3a$, che rotola senza strisciare su un'eguale circonferenza (fig. 2). Dette equazioni sono riferite ad un sistema di coordinate che ha il polo O nel punto cuspidale e l'asse polare x diretto secondo la tangente alla cuspide verso l'esterno. L'angolo θ coincide in tal caso con 2φ, e la seconda delle (17) è la diretta conseguenza dell'eguaglianza fra il secondo e il terzo membro della (16), o della (14), o della (15).

Un terzo caso particolare si ha quando a è positivo e $b = -2a\sqrt[3]{4}$. Si noti infatti che, per la (16), il minimo valore di $\operatorname{sen}^2\varphi$, al variare

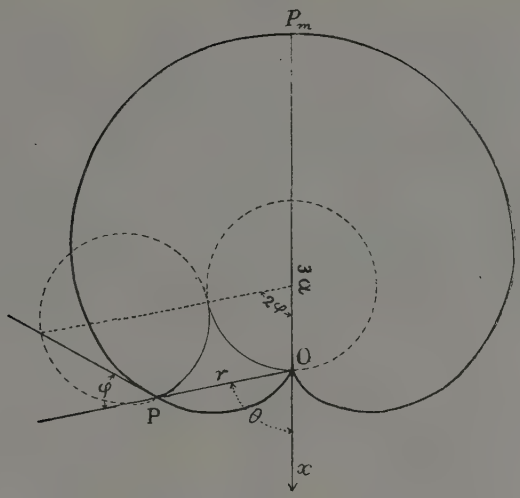


Fig. 2.

di r, si ha per $r = -b\sqrt[3]{2}$ ed è $-b/2a\sqrt[3]{4}$. Poichè sono possibili soltanto valori di $\operatorname{sen}^2\varphi$ minori od eguali ad uno, deve sempre essere $b \geqq -2a\sqrt[3]{4}$. Per

$$(18) \qquad b = -2a\sqrt[3]{4} \quad , \quad r = -b\sqrt[3]{2} = 4a = \frac{1}{K},$$

$\operatorname{sen}\varphi$ rimane sempre eguale all'unità. Nel caso del piano, la linea è una circonferenza, ed è questo il caso più semplice, nel quale la curvatura k propriamente detta della linea e la curvatura K relativa al punto fisso coincidono. Nel caso dello spazio, la seconda delle (18), sta a rappresentare una qualunque linea tracciata sulla sfera di centro O e di raggio eguale a $4a$. Ed effettivamente, se si proietta una linea di tal genere dal centro della sfera e poi si svolge su di un piano la superficie conica così generata, quella linea dà luogo ad un arco di circonferenza.

Nel caso generale le (14), (15), (16) permettono di considerare linee di tre tipi diversi, a seconda che è: I) $a > 0$, $b > 0$; II) $a > 0 > b > -2a\sqrt[3]{4}$; III) $b > 0 > a$. Il caso $a < 0$, $b < 0$ non può sussistere, dando origine a valori immaginari di $\operatorname{sen}\varphi$.

Per quanto si è precedentemente detto, ci limiteremo a considerare, in una seconda Nota, le linee piane che corrispondono ai tre casi suddetti. Quando si avvolgano queste linee piane su un qualunque cono di vertice O, si avranno le corrispondenti linee dello spazio a curvatura costante rispetto ad O.

Matematica (Geometria). — *Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso.* Nota II [1] del Socio G. Silva.

5. Facendo seguito a quanto è stato detto alla fine del n. 4 della Nota I, nel caso in cui è $a > 0, b > 0$, è pure $K > 0$, e quindi la linea è concava verso il polo O. Affinchè sen φ sia reale, deve essere $r \geqq b$. Nel punto P_0, corrispondente al minimo valore b di r, risulta $\varphi_0 = 0$, e perciò OP_0 è tangente alla linea (fig. 3 e 4) e il vettore $k\boldsymbol{n}$ in P_0 è normale a P_0O;

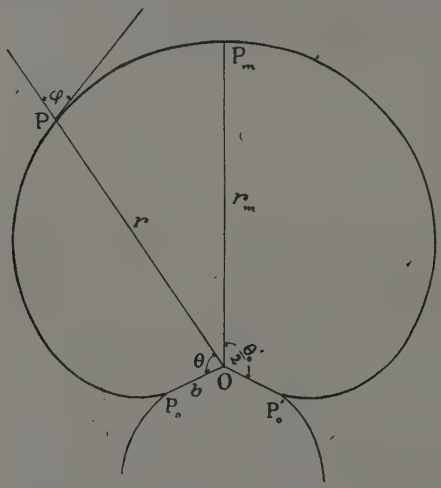


Fig. 3.

ne consegue che la curvatura k della linea in P_0 deve essere infinitamente grande, affinchè la componente di $k\boldsymbol{n}$ secondo il raggio vettore PO abbia. anche al limite per P coincidente con P_0, il valore costante e finito K, In detto punto iniziale P_0 assumeremo $s_0 = \theta_0 = 0$. A partire da P_0, φ cresce con r, con s e con θ, sicchè nelle (14), (15) il radicale va assunto con segno positivo; contemporaneamente diminuisce la curvatura k della linea, poichè nel caso del piano, per una linea concava verso O, essa è legata alla curvatura K relativa ad O dalla relazione $k = K \operatorname{cosec} \varphi$. Ciò continua fino al massimo valore 1 che può assumere sen φ, e quindi fino a quel massimo valore r_m di r che annulla il trinomio

$$v = 6ar^2 - r^3 + b^3. \tag{19}$$

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

Questo decresce da $+\infty$ al valore minimo b^3, per i valori negativi di r crescenti da $-\infty$ a 0; sale poi al massimo, eguale a $32a^3 + b^3$, quando r cresce da 0 a $4a$; infine decresce fino a $-\infty$ per i valori di r successivi a $4a$. Il trinomio si annulla dunque per un solo valore reale $r_m > 4a$ del raggio vettore, ed è anzi $r_m > 6a$, poichè per $r = 6a$, v è ancora positivo e eguale a b^3.

Nel punto P_m, in cui $r = r_m$, $\varphi = \varphi_m = \pi/2$, la curvatura K relativa all'origine O coincide con la curvatura k_m della linea, che acquista in tal punto il suo valore minimo, mentre il raggio di curvatura assume il suo valore massimo $4a$.

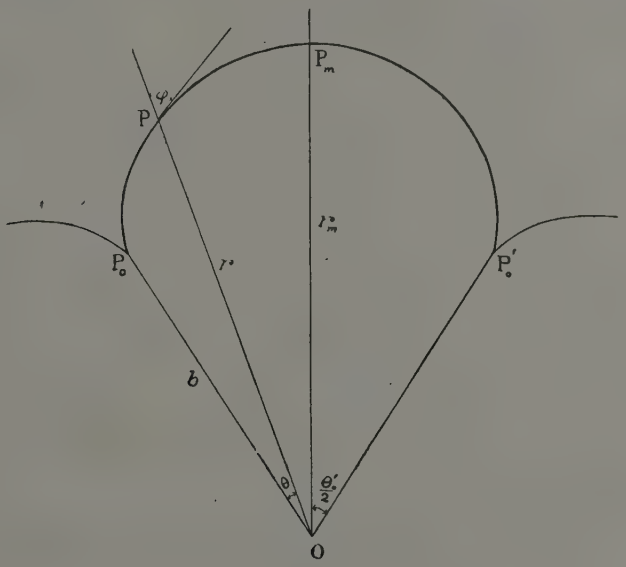


Fig. 4.

Dopo P_m, r e sen φ diminuiscono e la linea si incurva sempre più, presentando una forma esattamente simmetrica alla metà già descritta, rispetto alla retta OP_m, e raggiunge il punto finale P'_0, quando r ritorna eguale a b; in questa seconda metà della linea φ varia da $\pi/2$ a π, e nelle (14), (15) il radicale va preso con il segno negativo.

S'intende che la linea continua a svolgersi intorno al punto O, poichè nei punti iniziale P_0 e finale P'_0 del ramo di essa, ora illustrato, rispettivamente finisce l'eguale ramo che precede e si inizia quello che segue, sicchè i predetti punti sono cuspidi di prima specie.

Posto $r = b + ka$, l'espressione (19) del trinomio v diviene

$$(19') \qquad v = a\left[3(2-k)b^2 + 3k(4-k)ab + k^2(6-k)a^2\right].$$

È evidente che, per a e b positivi, è sempre $v > 0$ quando $k < 2$, e $v < 0$ quando $k > 6$; quindi r_m, valore di r che annulla l'espressione (19) di v, deve essere compreso fra $b + 2a$ e $b + 6a$. Ricavando b dall'espressione (19) di v eguagliata a zero, si riconosce che il primo estremo ($k = 2$) corrisponde al valore infinito di b e cioè a una distanza infinita del polo O, e quindi alla cicloide definita dalle equazioni (10); il secondo estremo ($k = 6$) corrisponde al valore zero di b e perciò alla cardioide definita dalle equazioni (17).

È poi facile persuadersi, almeno con esempi numerici, che al decrescere di b da $+\infty$ a zero e al contemporaneo crescere di $r_m - b$ da $2a$ a $6a$, l'anomalia θ'_0, compresa fra i due raggi vettori estremi OP_0, OP'_0 di ogni ramo della curva, aumenta da 0 a 2π.

Le (14), (15), (16) mostrano che quando a, b, r variano nello stesso rapporto, non mutano nè i valori dell'angolo φ, nè le variazioni $d\theta$ dell'anomalia θ; perciò la forma della linea resta determinata dal rapporto b/a. Ne viene che, mantenendo b costante e facendo variare a da zero a $+\infty$, otteniamo le stesse variazioni di forma che si hanno mantenendo costante a e facendo variare b da $+\infty$ a zero. Supponendo b costante, i due punti P_0, P'_0 rimangono sempre alla stessa distanza dal polo O, e quando a tende a zero, anche l'angolo θ'_0 impicciolisce insieme con i singoli rami delle linea, la cui forma va accostandosi a quella di una cicloide e il cui numero, necessario a far compiere a P un intero giro intorno ad O, va crescendo; quando a tende all'infinito, θ'_0 tende a 2π, la linea si allarga sempre più, assumendo forma sempre più prossima a quella di una cardioide, finchè al limite, per $a = \infty$, essa racchiude tutto il piano, scomponendosi nella semiretta uscente da P_0, sul prolungamento di OP_0, contata due volte, e nella retta all'infinito del piano.

Per particolari valori del rapporto b/a, l'angolo θ'_0 può essere contenuto un numero intero n di volte in 2π, e l'intera linea si chiude dopo un giro intorno ad O, assumendo una forma lobata con n lobi; per altri valori di b/a, θ'_0 può essere ancora commensurabile con 2π e la linea si chiude dopo aver girato più volte intorno ad O; in generale θ'_0 sarà incommensurabile con 2π e la linea continuerà a svolgersi indefinitamente intorno ad O.

Segue infine da quanto sopra è stato detto che, fissati il polo O e due punti P_0, P'_0, egualmente distanti da O, restano determinati due valori $\theta'_{0.1}$ e $\theta'_{0.2} = 2\pi - \theta'_{0.1}$, eguali rispettivamente all'angolo concavo e all'angolo convesso che restano determinati dai due raggi vettori OP_0, OP'_0, ai quali corrispondono due linee a curvatura costante rispetto ad O di questo primo tipo, ciascuna delle quali ha uno dei suoi rami con gli estremi cuspidali nei due punti P_0, P'_0. Per una delle linee questo ramo si svolge in quello concavo, per l'altra in quello convesso dei due angoli suddetti.

6. Anche nel secondo caso, poichè $a > 0$, e quindi $K > 0$, la linea è concava verso il polo O, ma, a differenza del primo caso, essendo $b < 0$, sen φ non può annullarsi, e quindi la linea non ha nessuna tangente passante per O. Il minimo b^3, che il trinomio v, espresso dalla (19), assume per $r = 0$, è ora negativo, sicchè v si annulla una prima volta per un valore negativo di r, che non dobbiamo prendere in considerazione, e per due valori positivi r_0 ed r_m, il primo minore, il secondo maggiore del valore $r = 4a$, al quale corrisponde il massimo di v, che è certamente positivo, essendo eguale a $32a^3 + b^3$, ed essendo $b > -2a\sqrt[3]{4}$.

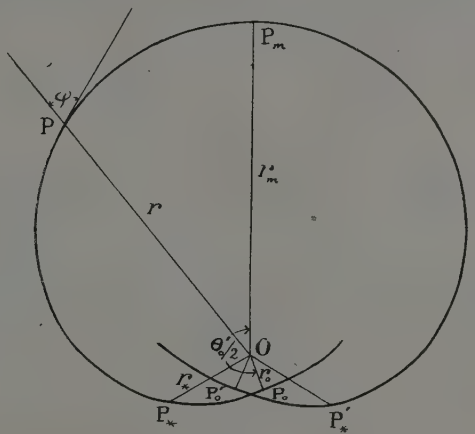


Fig. 5.

Nei punti P_0, P_m, (fig. 5) corrispondenti ai due valori r_0, r_m di r, $\text{sen}^2\varphi$ risulta eguale ad uno, ed è quindi $\varphi_0 = \varphi_m = \pi/2$; per tutti i valori di r compresi tra r_0 ed r_m, $\text{sen}^2\varphi$ risulta invece minore di uno, ed assume il valore minimo $\text{sen}^2\varphi_* = -b/2a\sqrt[3]{4}$ per $r_* = -b\sqrt[3]{2}$. Ricordando che, per $r = 6a$, risulta $v = b^3 < 0$, si può dunque dire che il valore del raggio vettore dei punti della linea in esame sono compresi fra r_0 ed r_m, essendo $0 < r_0 < -b\sqrt[3]{2} < 4a < r_m < 6a$.

Assumiamo, quale punto iniziale, come nel primo caso, il punto P_0 corrispondente al valore minimo r_0 del raggio vettore; in esso la curvatura k della linea ha il suo valore minimo, eguale alla curvatura K relativa al punto O. A partire da P_0, sen φ diminuisce e $k = K \operatorname{cosec}\varphi$ aumenta fino al punto P_* nel quale $r_* = -b\sqrt[3]{2}$; in questo punto l'angolo φ ha il valore minimo φ_* sopra indicato e k ha il corrispondente valore massimo $K \operatorname{cosec}\varphi_*$; di poi sen φ aumenta e k diminuisce, fino al punto P_m in cui

φ torna al valore $\pi/2$ e k riprende il suo valore minimo K. Il punto P ha così descritto la prima metà di un ramo della linea, e percorre poi la seconda metà, del tutto simmetrica alla prima rispetto al raggio vettore OP_m, attraversando una posizione P'_* in cui il raggio vettore riprende il valore $r_* = -b\sqrt[3]{2}$, e terminando in P'_0, dove r ha di nuovo il valore minimo r_0. Nella prima metà è $\varphi < \pi/2$ e i radicali delle (14), (15) vanno assunti positivi, nella seconda metà è $\varphi > \pi/2$ e gli stessi radicali vanno assunti negativi.

Se, supponendo a costante, facciamo tendere b a zero, anche r_0 e r^* tendono evidentemente a zero, mentre r_m, radice maggiore dell'equazione $v = 0$, tende al valore $6a$ che ha questa radice per $b = 0$. Dobbiamo però notare che, essendo

$$r_* = -b\sqrt[3]{2} \quad , \quad r_0 = \sqrt{-b^3/(6a - r_0)},$$

r_* è infinitesimo dello stesso ordine di b, mentre r_0 è infinitesimo di ordine superiore, e ciò chiarisce come, all'avvicinarsi di entrambi i punti P_*, P_0 al polo O, φ_* tenda a zero, e quindi OP_* tenda a diventare tangente alla linea, mentre φ_0 rimane eguale a $\pi/2$ ed OP_0 si mantiene quindi normale alla linea stessa. L'anomalia θ_* del punto P_*, cioè l'angolo $P_0\,OP_*$ si avvicina dunque sempre più a $\pi/2$ e raggiunge questo limite quando $b = 0$ e i due punti P_0, P_*, come i due analoghi P'_0, P'_* si confondono con il polo. La linea diventa allora una cardioide, ma a differenza del caso limite delle linee del primo tipo, il punto P, dopo descritta la cardioide rappresentata dalla fig. 2, prosegue il suo cammino sulla cardioide simmetrica ad essa rispetto alla retta condotta per O normalmente ad OP_m, e continua ad alternare i due percorsi ad ogni suo ritorno nel punto O, quando il raggio vettore OP compie una rotazione istantanea eguale a π.

Se supponiamo di tenere costante il valore r_0 del raggio vettore iniziale che annulla il trinomio (19), così che le costanti a e b rimangano legate dalla relazione $6ar_0^2 - r_0^3 + b^3 = 0$, e facciamo tendere a all'∞, anche b, r_*, r_m tendono all'∞, e al limite la linea si scompone nelle due rette parallele distanti r_0 dal polo e nella retta all'infinito del piano che ad esse si collega nel loro punto all'infinito P_*.

Anche in questo caso limite, come nel precedente, il rapporto b/a si annulla e l'anomalia θ'_0 relativa ad un ramo della linea vale 3π, senza però che il raggio vettore subisca in questo caso l'improvvisa rotazione, eguale a π, che deve subire in quello, quando il punto, giunto alla cuspide, passa dall'una all'altra cardioide.

Supponiamo ancora a costante e facciamo tendere b al suo limite inferiore $-2a\sqrt[3]{4}$; in tal caso r_0, r_*, r_m tendono tutti e tre al valore $4a$, e, come si è già detto al n. 9, per b eguale a detto limite, la linea diviene

la circonferenza di raggio $4a$ e cioè di curvatura $k = K$, mentre l'angolo θ'_o diviene in tal caso 2π.

7. Nel terzo caso, essendo $a < 0$ e quindi $K < 0$, la linea è convessa verso il polo O. Affinchè sen φ sia reale, deve essere $r \leq b$. Nel punto P_o, (fig. 6) corrispondente a questo massimo valore b di r, è $\varphi_o = \pi$, e la curvatura k della linea, dovendo essere eguale a $|K|$ cosec φ_o, è infinita; in tale punto iniziale la linea ha dunque, come nel primo caso, una cuspide tangente al raggio vettore. A partire da P_o, φ diminuisce insieme con r, poichè sen φ, in questo terzo caso, aumenta al diminuire di r, ed appartenendo φ al secondo quadrante, nelle (14), (15) il radicale va assunto con

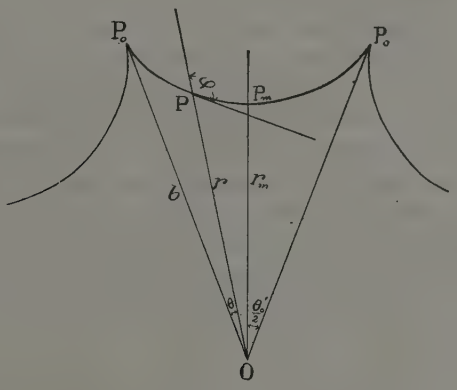


Fig. 6.

segno negativo; contemporaneamente la curvatura della linea, cioè $k = |K|$ cosec φ, diminuisce. Ciò continua fino al massimo valore 1 che può assumere sen φ, e quindi fino al corrispondente minimo valore r_m di r, che annulla il trinomio (19). Questo trinomio ha ora un minimo per $r = 4a < 0$, è massimo ed eguale a $b^3 > 0$ per $r = 0$, dopo il quale è sempre decrescente, e già per $r = b$ ha il valore negativo $6ab^3$; è dunque $0 < r_m < b$. Nel punto P_m in cui $r = r_m$, $\varphi = \varphi_m = 90°$, la curvatura k della linea acquista il suo minimo valore $k_m = |K|$ ed il raggio di curvatura il suo valore massimo $4|a|$.

Dopo P_m, r aumenta, sen φ diminuisce e la linea si incurva sempre più, simmetricamente, rispetto alla retta OP_m, alla metà già descritta, fino alla cuspide finale P'_o, che essa raggiunge quando r ritorna eguale a b. In questa seconda metà del ramo di linea considerato φ varia da 90° a 0°, e nelle (14), (15) il radicale va preso con il segno positivo.

Se, per a costante, facciamo tendere b all'infinito, cioè allontaniamo all'infinito il polo O, la linea, come nel primo caso, tende ad acquistare

curvatura costante rispetto a una direzione fissa e diventa, al limite, una cicloide, descritta dal punto di una circonferenza di raggio $2a$, che, in questo terzo caso, volge la convessità alla direzione fissa. L'angolo θ'_0 fra i raggi vettori dei due punti cuspidali che limitano un ramo della linea ha allora il suo limite inferiore 0.

Supponiamo r_m costante e facciamo tendere b a $+\infty$, a a $-\infty$, mantenendo però queste due costanti legate dall'equazione $6\,a\,r_m^2 - r_m^3 + b^3 = 0$, alla quale r_m deve sempre soddisfare; al limite la linea diviene la retta normale ad OP_m, cioè la retta distante r_m dal polo, e i due raggi vettori OP_0, OP'_0 sono allora le due semirette che escono da O in direzione opposta fra loro e parallela a detta retta. In questo caso l'angolo θ'_0 fra questi due raggi vettori estremi ha il suo limite superiore π.

Poichè θ'_0, in questo terzo caso, varia fra zero e π, fissati i due punti P_0, P'_0 e il polo O, esiste una linea a curvatura costante negativa verso O, un ramo della quale ha i suoi estremi cuspidali in P_0, P'_0.

Per quanto s'è detto ora e nei due numeri che precedono, quando si faccia astrazione dalle dimensioni della linea e se ne consideri soltanto la forma, ad un dato angolo $\psi < \pi$ corrispondono una linea del primo tipo, concava verso il polo O, ed una di questo terzo tipo, convessa verso O, per le quali l'angolo θ'_0 fra i due raggi vettori estremi di ogni suo ramo è eguale a ψ; esiste una terza linea, pure del primo tipo, concava verso O, per la quale $\theta'_0 = 2\pi - \psi$ ed esiste una quarta linea del secondo tipo, concava verso O, per la quale $\theta'_0 = 2\pi + \psi$.

Matematica. — *Le connessioni tensoriali.* Nota [1] del Corrisp. E. Bompiani.

1. Preliminari. – Le idee su cui riposano le teorie degli spazi a connessione sono le seguenti.

In uno spazio numerico X_n, descritto dal «punto» x di coordinate x^i, $i = 1, \cdots, n$, più funzioni, contraddistinte da indici, si dicono componenti di un *ente geometrico* quando è possibile calcolare le loro trasformate in un nuovo sistema $x^{i'}$ (appena date quelle e le formole di trasformazione delle coordinate). Tali sono i tensori, soddisfacenti alla legge

$$\xi^{\cdots rs\cdots}_{ih\cdots} = \xi^{\cdots r's'\cdots}_{i'h'\cdots} \cdots \vartheta^{i'}_i \, \vartheta^{h'}_h \cdots \vartheta^r_{r'} \, \vartheta^{s'}_s \cdots \quad (1.1)$$ [2]

(1) Presentata nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) Tutti gli indici o apici variano fra 1 ed n; ed è sottintesa l'addizione rispetto ad indici ripetuti in alto e in basso. In tutte le equazioni che seguono si possono scambiare gli indici con accenti e quelli senza.

ove

$$(1.2) \qquad \vartheta^{i'}_{i} = \partial_i x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad , \quad \vartheta^{i}_{i'} = \partial_{i'} x^{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} .$$

Poichè l'operazione di derivazione *non* fa passare da un tensore ad un tensore si sostituisce ad essa una combinazione del tensore dato e di una sua derivata che abbia carattere tensoriale. Precisamente s'introduce la nuova operazione per i vettori controvarianti (per esempio per i differenziali dx^i); nel caso più semplice, in cui detta operazione sia lineare l'espressione (*derivata covariante*)

$$(1.3) \qquad \nabla_l \xi^i_{\cdot} = \partial_l \xi^i_{\cdot} + \mathrm{L}^i_{hl} \xi^h = \xi^i_{\cdot l}$$

ha carattere tensoriale se e solo se le L^i_{hl} e le loro trasformate $\mathrm{L}^{i'}_{h'l'}$ soddisfano alle *equazioni fondamentali*

$$(1.4) \qquad \vartheta^i_{h'k'} = \mathrm{L}^{i'}_{hk'} \vartheta^i_{i'} - \mathrm{L}^i_{hk} \vartheta^h_{h'} \vartheta^k_{k'} \quad , \quad \vartheta^i_{h'k'} = \partial_{h'k'} x^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{h'} \partial x^{k'}} .$$

L'ente geometrico, di componenti L^i_{hk}, dicesi *connessione affine:* e tutta la teoria degli spazi a connessione affine è conseguenza delle (1.4). Da esse segue per esempio che le formazioni $1/2\,(\mathrm{L}^i_{hk} + \mathrm{L}^i_{kh}) = \mathrm{S}^i_{hk} = \mathrm{S}^i_{kh}$ sono componenti di una *connessione* (*simmetrica*, associata alla data) e le $1/2\,(\mathrm{L}^i_{hk} - \mathrm{L}^i_{kh}) = \mathrm{E}^{\cdot\cdot i}_{hk\cdot} = -\mathrm{E}^{\cdot\cdot i}_{kh\cdot}$ sono componenti di un *tensore* (*di torsione* della connessione data).

Si vede poi che con la stessa connessione, che dirò vettoriale, si possono costruire derivate covarianti di un tensore qualsiasi; e in particolare la *derivata seconda covariante*

$$(1.5) \qquad \nabla_{ml} \xi^i_{\cdot} = \nabla_m \nabla_l \xi^i_{\cdot} = \partial_{lm} \xi^i_{\cdot} + \mathrm{L}^i_{hl} \partial_m \xi^l_{\cdot} + \mathrm{L}^i_{hm} \partial_l \xi^h - \mathrm{L}^h_{ml} \partial_h \xi^i_{\cdot} + \\ + (\partial_m \mathrm{L}^i_{pl} + \mathrm{L}^i_{hm} \mathrm{L}^h_{pl} - \mathrm{L}^i_{hp} \mathrm{L}^h_{ml}) \xi^p_{\cdot} .$$

Ciò ricordato, mi propongo di costruire in questa e in successive Note nuovi enti geometrici che si presentano in alcune questioni altrettanto spontanei quanto le connessioni affini (vettoriali, o da esse dedotte per i tensori) e che possono considerarsi estensioni di esse in varie direzioni.

Per terminare i preliminari ricordo qui identità fra le derivate delle x^i rispetto alle $x^{i'}$ che occorreranno:

$$(1.6) \qquad \vartheta^i_{l'} \vartheta^{l'}_{i'} = \delta^i_{i'} \; (= 0 \text{ per } i \neq i' \,, = 1 \text{ per } i = i') \quad , \quad \vartheta^i_{l'i'} \vartheta^{l'}_{l} + \vartheta^{l'}_{lj} \vartheta^i_{l'} \vartheta^j_{i'} = 0$$

$$(1.7) \qquad \vartheta^i_{m'p'} \vartheta^{l'}_{l} + \vartheta^i_{l'p'} \vartheta^{l'}_{ml} \vartheta^m_{m'} + \vartheta^i_{m'l'} \vartheta^{l'}_{lj} \vartheta^j_{i'} + \vartheta^i_{l'} \vartheta^l_{mlj} \vartheta^j_{i'} \vartheta^m_{m'} + \vartheta^i_{l'} \vartheta^{l'}_{lj} \vartheta^j_{i'm'} = 0 .$$

2. Connessioni tensoriali. – Ci si può proporre la costruzione della derivata covariante per esempio di un tensore doppio controvariante

senza necessariamente ricorrere a quella dedotta da una connessione vettoriale.

Dato un campo di tensori doppi controvarianti $\xi^{ik}_{\cdot\cdot}(x)$ le espressioni del tipo

$$\nabla_l \xi^{ik}_{\cdot\cdot} = \partial_l \xi^{ik}_{\cdot\cdot} + \mathrm{L}^{ik}_{rsl}(x)\, \xi^{rs}_{\cdot\cdot} \tag{2.1}$$

sono componenti di un tensore allora e solo quando

$$\mathrm{L}^{ik}_{rsp}\, \vartheta^{r}_{r'}\, \vartheta^{s}_{s'} + \vartheta^{i}_{r'p'}\, \vartheta^{k}_{s'}\, \vartheta^{p'}_{p} + \vartheta^{k}_{s'p'}\, \vartheta^{i}_{r'}\, \vartheta^{p'}_{p} = \mathrm{L}^{i'k'}_{r's'\rho}\, \vartheta^{i}_{i'}\, \vartheta^{k}_{k'}\, \vartheta^{\rho'}_{p} . \tag{2.2}$$

Queste definiscono un *ente geometrico* che si dirà *connessione tensoriale*; le L^{ik}_{rsl} ne sono le componenti e le (2.2) ne dànno la *legge fondamentale* di definizione. Le (2.1) potranno dirsi *derivate covarianti tensoriali* del tensore $\xi^{ik}_{\cdot\cdot}$ rispetto alla connessione L^{ik}_{rsl}.

Dalla linearità delle (2.2) segue facilmente che:

Data una connessione tensoriale L^{ik}_{rsl}, *le combinazioni* $1/2\,(\mathrm{L}^{ik}_{rsl} + \mathrm{L}^{ki}_{srl}) = \Gamma^{ik}_{rsl} = \Gamma^{ki}_{srl}$, *sono pure componenti di una connessione tensoriale; mentre le* $1/2\,(\mathrm{L}^{ik}_{rsl} - \mathrm{L}^{ki}_{srl}) = \Omega^{\cdots ik}_{rsl\cdot\cdot} = -\Omega^{\cdots ki}_{srl\cdot\cdot}$ *sono componenti di un tensore; e si ha*

$$\mathrm{L}^{ik}_{rsl} = \Gamma^{ik}_{rsl} + \Omega^{\cdots ik}_{rsl\cdot\cdot} . \tag{2.3}$$

Questa decomposizione ricorda quella per le connessioni vettoriali in componenti simmetriche (di una connessione) ed emisimmetriche (del tensore di torsione); ma *non* è l'analogo di quella. Nel caso attuale, infatti, le proprietà di simmetria e di alternanza riguardano simultaneamente due coppie di indici (in alto e in basso) e non i tre indici in basso.

Ancora dalla linearità delle (2.2) risulta che:

Date due connessioni tensoriali $\overset{1}{\mathrm{L}}{}^{ik}_{rsl}$, $\overset{2}{\mathrm{L}}{}^{ik}_{rsl}$ *le differenze* $\overset{1}{\mathrm{L}}{}^{ik}_{rsl} - \overset{2}{\mathrm{L}}{}^{ik}_{rsl}$ *sono le componenti di un tensore.*

3. Confronto fra connessioni tensoriali e vettoriali. – Data una connessione vettoriale L^{i}_{rs} si può formare con essa la connessione tensoriale (dedotta dalla precedente) $\mathrm{L}^{ik}_{rsl} = \mathrm{L}^{i}_{rl}\,\delta^{k}_{s} + \mathrm{L}^{k}_{sl}\,\delta^{i}_{r}$ (come risulta sia dall'ordinaria derivata covariante di $\xi^{ik}_{\cdot\cdot}$, sia direttamente dalle (2.2)).

Se ora vogliamo porre a confronto una qualsiasi connessione tensoriale L^{ik}_{rsl} con una qualsiasi connessione vettoriale L^{i}_{rs}, bisogna eliminare le derivate seconde $\vartheta^{i}_{r'p'}$ fra le (2.2) e le (1.4). Ciò fatto, risulta

$$\mathrm{L}^{ik}_{rsl} = \mathrm{L}^{i}_{rl}\,\delta^{k}_{s} + \mathrm{L}^{k}_{sl}\,\delta^{i}_{r} + \mathrm{R}^{\cdots ik}_{rsl\cdot\cdot} \tag{3.1}$$

ove $\mathrm{R}^{\cdots ik}_{rsl\cdot\cdot}$ è un tensore che definisce L^{ik}_{rsl} rispetto a L^{i}_{rs}.

L'annullarsi di questo tensore è condizione necessaria e sufficiente affinchè la L^{ik}_{rsl} sia dedotta dalla L^{i}_{rs}. Per vedere quando la L^{ik}_{rsl} sia dedotta

da una (incognita) connessione vettoriale $\overset{*}{L}{}^{i}_{rs}$, poichè può sempre porsi $\overset{*}{L}{}^{i}_{rs} - L^{i}_{rs} = T^{\cdot\cdot i}_{rs\cdot}$ (tensore) la (3.1) si trascrive

$$(3.2) \qquad L^{ik}_{rst} = \overset{*}{L}{}^{i}_{rt}\,\delta^{k}_{s} + \overset{*}{L}{}^{k}_{st}\,\delta^{i}_{r} + R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot} - T^{\cdot\cdot i}_{rt\cdot}\,\delta^{k}_{s} - T^{\cdot\cdot k}_{st\cdot}\,\delta^{i}_{r}$$

e perciò affinchè L^{ik}_{rst} sia dedotta dalla $\overset{*}{L}{}^{i}_{rs}$ occorre e basta che sia $R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot} = T^{\cdot\cdot i}_{rt\cdot}\,\delta^{k}_{s} + T^{\cdot\cdot k}_{st\cdot}\,\delta^{i}_{r}$. Riassumendo:

Una connessione tensoriale può sempre esprimersi, con le (3.1), *per mezzo di una qualsiasi connessione vettoriale, assegnata ad arbitrio e di un tensore che definisce la prima rispetto alla seconda. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la connessione tensoriale sia dedotta da una connessione vettoriale è che per il tensore che la definisce si abbia*

$$(3.3) \qquad R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot} = T^{\cdot\cdot i}_{rt\cdot}\,\delta^{k}_{s} + T^{\cdot\cdot k}_{st\cdot}\,\delta^{i}_{r}.$$

4. Permanenza dei caratteri di simmetria e di alternanza. – È naturale chiedere che la derivazione tensoriale (2.1) applicata ad un tensore $\xi^{ik}_{\cdot\cdot}$ simmetrico o alternante conservi questi caratteri. Poichè la connessione dedotta da una connessione vettoriale ha già questa proprietà, dovrà richiedersi, in base alla (3.1), che per $\xi^{ik}_{\cdot\cdot} = \xi^{ki}_{\cdot\cdot}$ sia

$$R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot}\,\xi^{rs}_{\cdot\cdot} = R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{rst\cdot}\,\xi^{rs}_{\cdot\cdot}$$

e per $\xi^{ik}_{\cdot\cdot} = -\xi^{ki}_{\cdot\cdot}$

$$R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot}\,\xi^{rs}_{\cdot\cdot} = -R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{rst\cdot}\,\xi^{rs}_{\cdot\cdot}.$$

Per l'arbitrarietà di $\xi^{ik}_{\cdot\cdot}$ esse dànno luogo a

$$R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot} + R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{srt\cdot} = R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{rst\cdot} + R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{srt\cdot}$$

$$R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot} - R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{srt\cdot} = -R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{rst\cdot} + R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{srt\cdot}$$

che per addizione e sottrazione si esplicitano nell'unico gruppo di condizioni

$$(4.1) \qquad R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot} = R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{srt\cdot}.$$

Queste portano che il tensore $\Omega^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot}$ delle (2.3) è nullo; e viceversa.

Le uniche connessioni tensoriali con permanenza dei caratteri di simmetria e di alternanza sono quelle per cui è nullo il tensore $\Omega^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot}$ *delle* (2.3), *o anche per cui nelle* (3.1) *è* $R^{\cdot\cdot\cdot ik}_{rst\cdot} = R^{\cdot\cdot\cdot ki}_{srt\cdot}$.

Un esempio di connessione di questo tipo, non dedotta da una connessione vettoriale, si ha partendo da un tensore doppio covariante g_{ik}, costruendone il tensore di Riemann, $R^{\cdot\cdot ik}_{rs\cdot\cdot} = -R^{\cdot\cdot ki}_{rs\cdot\cdot} = R^{\cdot\cdot ki}_{sr\cdot\cdot}$, e facendo di questo la derivata covariante $\nabla_t R^{\cdot\cdot ik}_{rs\cdot\cdot}$ nel solito modo.

Ad un tensore $R^{\cdots ik}_{rst\cdots} = R^{\cdots ki}_{srt\cdots}$ può sempre sostituirsi, come s'è visto nella (3.2), cambiando la connessione di riferimento, il tensore

$$\overset{*}{R}{}^{\cdots ik}_{rst\cdots} = R^{\cdots ik}_{rst\cdots} - T^{\cdots i}_{rt\cdots}\delta^k_s - T^{\cdots k}_{st\cdots}\delta^i_r .$$

Dato $R^{\cdots ik}_{rst\cdots}$, si determini $T^{\cdots i}_{rt\cdots}$ in modo che sia

$$R^{\cdots ip}_{rpt\cdots} = n\,T^{\cdots i}_{rt\cdots} + \frac{1}{2n}R^{\cdots pq}_{pqt\cdots}\delta^i_r$$

cioè

$$T^{\cdots i}_{rt\cdots} = \frac{1}{n}R^{\cdots ip}_{rpt\cdots} - \frac{1}{2n^2}R^{\cdots pq}_{pqt\cdots}\delta^i_r ;$$

ne risulta

$$\overset{*}{R}{}^{\cdots pq}_{pqt\cdots} = R^{\cdots pq}_{pqt\cdots} - 2n\,T^{\cdots p}_{pt\cdots} = 0 .$$

Dunque:

Con una scelta conveniente della connessione vettoriale di confronto si può dare alla più generale connessione tensoriale la forma

$$L^{ik}_{rst} = \overset{*}{L}{}^{i}_{rt}\delta^k_s + \overset{*}{L}{}^{k}_{st}\delta^i_r + \overset{*}{R}{}^{\cdots ik}_{rst\cdots}$$

ove $\overset{*}{R}{}^{\cdots ik}_{rst\cdots} = \overset{*}{R}{}^{\cdots ki}_{srt\cdots}$ *e* $\overset{*}{R}{}^{\cdots pq}_{pqt\cdots} = 0$.

Risulta da quanto precede che la connessione $\overset{*}{L}{}^{i}_{rs}$ determinata da questa proprietà è unica, cioè è individuata dalla connessione tensoriale; servendosi di essa si può ritornare alle ordinarie operazioni di derivazione per tensori qualsiansi.

5. Osservazioni complementari. – Le osservazioni fatte finora si estendono senza difficoltà a qualsiasi altra specie di tensori; in particolare hanno carattere tensoriale le formazioni

$$\partial_t \xi^{\cdots}_{rs} - L^{ik}_{rst}\xi^{\cdots}_{ik} .$$

Definite le derivate tensoriali covarianti si possono definire, come per le ordinarie connessioni, i *differenziali assoluti*, per esempio

$$\delta\xi^{ik}_{\cdots} = (\partial_t \xi^{ik}_{\cdots} + L^{ik}_{rst}\xi^{rs}_{\cdots})\,dx^t = d\xi^{ik}_{\cdots} + L^{ik}_{rst}\xi^{rs}_{\cdots}\,dx^t$$

e in particolare i *trasporti paralleli* con la condizione $\delta\xi^{ik}_{\cdots} = 0$, cioè

$$d\xi^{ik}_{\cdots} = -L^{ik}_{rst}\xi^{rs}_{\cdots}\,dx^t .$$

Matematica. — *Connessioni del secondo ordine.* Nota [1] del Corrisp. E. Bompiani.

1. Preliminari. – Un'estensione della teoria degli spazi a connessione, diversa da quella data nella Nota precedente [2], si ottiene considerando le combinazioni lineari delle componenti di un tensore, delle sue derivate prime e di una derivata seconda che hanno carattere tensoriale.

È di questo tipo la derivata seconda covariante di un vettore nelle ordinarie connessioni; ma si vedrà che anche nel caso più semplice di uno spazio riemanniano si possono costruire derivate seconde covarianti (per esempio simmetriche) non coincidenti con quelle ordinarie.

Ai nuovi enti geometrici che definiscono quelle combinazioni do il nome di connessioni del 2° ordine perchè essi si presentano in relazione alle derivate seconde di un vettore.

2. Connessioni del secondo ordine. – Una combinazione del tipo:

$$\partial_{ml}\,\xi^i_{\cdot} + C^{iq}_{ml\,,\,p}\,\partial_q\,\xi^p_{\cdot} + D^{i}_{ml\,,\,p}\,\xi^p_{\cdot} \tag{2.1}$$

ha carattere tensoriale se e solo se fra le $C^{iq}_{ml\,,\,p}$, $D^{i}_{ml\,,\,p}$ e le loro trasformate valgono le relazioni:

$$\text{(C)}\qquad C^{iq}_{ml\,,\,p}\,\vartheta^m_{m'}\,\vartheta^l_{l'}\,\vartheta^{i'}_{i} = \vartheta^q_{m'l'}\,\vartheta^{i'}_{p} + \vartheta^{i'}_{pl}\,\vartheta^m_{m'}\,\vartheta^q_{l'} + \vartheta^{i'}_{pl}\,\vartheta^l_{l'}\,\vartheta^q_{m'} + C^{i'q'}_{m'l'\,,\,p'}\,\vartheta^{p'}_{p}\,\vartheta^q_{q'}$$

$$\text{(D)}\qquad D^{i}_{ml\,,\,p}\,\vartheta^m_{m'}\,\vartheta^l_{l'}\,\vartheta^{i'}_{i} = \vartheta^{i'}_{mlp}\,\vartheta^m_{m'}\,\vartheta^l_{l'} + \vartheta^{i'}_{pl}\,\vartheta^l_{m'l'} + C^{i'q'}_{m'l'\,,\,p'}\,\vartheta^{p'}_{pq}\,\vartheta^q_{q'} + D^{i'}_{m'l'\,,\,p'}\,\vartheta^{p'}_{p}.$$

Ciò si vede eseguendo effettivamente il cambiamento di variabili, tenendo conto del carattere tensoriale delle $\xi^i_{\cdot}$ e delle combinazioni proposte, e infine delle identità (1.6) e (1.7) della Nota I. In base a queste identità si prova pure che le (C) e (D) sono invertibili (cioè si possono scambiare gli indici accentati con quelli non accentati).

Le (C) mostrano che *le* $C^{iq}_{ml\,,\,p}$ *sono le componenti di un ente geometrico,* che dirò C-connessione; invece le $D^{i}_{ml\,,\,p}$ da sole *non* sono componenti di un ente geometrico, ma lo sono le $C^{iq}_{ml\,,\,p}$ e le $D^{i}_{ml\,,\,p}$ prese insieme: e questo ente si dirà CD-connessione o connessione del 2° ordine. Le (C) o le (C) e (D) sono le *equazioni fondamentali* per i due enti.

Segue dalle (C) che:

Le $C^{iq}_{(ml)\,,\,p}$ *sono componenti di una* C*-connessione; le* $C^{iq}_{[ml]\,,\,p}$, $C^{iq}_{[ml\,,\,p]}$, $C^{[iq]}_{[ml]\,,\,p}$, $C^{[iq]}_{m\,[l\,,\,p]}$ *sono componenti di tensori* [3].

(1) Presentata nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) E. Bompiani, *Sugli spazi a connessione.* Nota I: *Le connessioni tensoriali.* Questo fascicolo di questi « Rendiconti ».

(3) Come d'abitudine, ( ) e [ ] indicano le operazioni di simmetrizzazione e di alternazione rispetto agli indici contenuti in parentesi.

Quindi ogni C–connessione può esprimersi per mezzo di una C–connessione simmetrica negli indici m, l e di un tensore emisimmetrico rispetto agli stessi indici.

Più in generale *se* $\bar{C}^{iq}_{ml,p}$ *e* $C^{iq}_{ml,p}$ *sono componenti di due* C–*connessioni, si ha*

$$\bar{C}^{iq}_{ml,p} = C^{iq}_{ml,p} + S^{\cdot\cdot}_{ml,p\cdot\cdot}{}^{\cdot iq} \tag{2.2}$$

ove $S^{\cdot\cdot}_{ml,p\cdot\cdot}{}^{\cdot iq}$ *è un tensore.*

Meno semplice è il legame fra due CD–connessioni.

Per le (D) e per le ultime scritte si ha

$$(\bar{D}^{i}_{ml,p} - D^{i}_{ml,p})\,\vartheta^{m}_{m'}\,\vartheta^{l}_{l'}\,\vartheta^{i'}_{i} = S^{\cdot\cdot}_{m'l',p'\cdot\cdot}{}^{\cdot i'q'}\,\vartheta^{p'}_{p}\,\vartheta^{q}_{q'} + (\bar{D}^{i'}_{m'l',p'} - D^{i}_{ml,p})\,\vartheta^{p'}_{p}.$$

In questa relazione compaiono le $\vartheta^{p'}_{pq}$. Per eliminarle, bisogna servirsi di un'ordinaria connessione affine di componenti L^{i}_{pq} (cioè delle (1.4), Nota I) e si ha:

Sono componenti di un tensore le espressioni

$$\bar{D}^{i}_{ml,p} - D^{i}_{ml,p} - S^{\cdot\cdot}_{ml,h\cdot\cdot}{}^{\cdot iq}\,L^{h}_{pq} = T^{\cdot\cdot}_{ml,p\cdot}{}^{\cdot i}. \tag{2.3}$$

Una qualsiasi connessione del 2° *ordine può esprimersi a partire da una di esse assegnata ad arbitrio per mezzo di una ordinaria connessione affine e di due tensori a norma delle* (2.2) *e* (2.3).

3. Confronto fra le nuove connessioni e le ordinarie. – Introdotta, come in fine al numero precedente, una ordinaria connessione $L^{i}_{pq} = S^{i}_{pq} + E^{\cdot\cdot i}_{pq\cdot}$ con $S^{i}_{pq} = L^{i}_{(pq)}$, $E^{\cdot\cdot i}_{pq\cdot} = L^{i}_{[pq]}$ si può cercare come si esprimano a partire da essa una C–connessione e una CD–connessione. Bisognerà perciò eliminare dalle (C) e (D) le derivate seconde e terze, $\vartheta^{i}_{p'q'}$ e $\vartheta^{i}_{m'l'p'}$ servendosi delle (1.4), delle loro derivate e delle (1.6) e (1.7) della Nota I.

Ciò facendo si trova:

Data una connessione affine $L^{i}_{pq} = S^{i}_{pq} + E^{\cdot\cdot i}_{pq\cdot}$, *la più generale connessione del* 2° *ordine si esprime per mezzo di essa e di due tensori arbitrari nel modo seguente:*

$$C^{iq}_{ml,p} = S^{i}_{pm}\,\delta^{q}_{l} + S^{i}_{pl}\,\delta^{q}_{m} - S^{q}_{ml}\,\delta^{i}_{p} + \mathfrak{C}^{\cdot\cdot}_{ml,p\cdot\cdot}{}^{\cdot iq}$$
$$D^{i}_{ml,p} = \partial_{p} L^{i}_{ml} - 2\,E^{\cdot\cdot i}_{mh\cdot}\,S^{h}_{pl} - \mathfrak{C}^{\cdot\cdot}_{ml,h\cdot\cdot}{}^{\cdot iq}\,S^{h}_{pq} + \mathfrak{D}^{\cdot\cdot}_{ml,p\cdot\cdot}{}^{\cdot i}.$$

Le più semplici connessioni del 2° ordine si ottengono partendo da una connessione affine simmetrica, $E^{\cdot\cdot i}_{pq\cdot} = 0$ e supponendo nulli i due tensori che occorrono a definirla, cioè sono del tipo

$$C^{iq}_{ml,p} = S^{i}_{pm}\delta^{q}_{l} + S^{i}_{pl}\,\delta^{q}_{m} - S^{q}_{ml}\,\delta^{i}_{p}$$
$$D^{i}_{ml,p} = \partial_{p}\,S^{i}_{ml}$$

e sono necessariamente simmetriche rispetto agli indici m, l.

4. Applicazione agli spazi riemanniani. - Dato uno spazio di Riemann, di tensore fondamentale g_{ik}, la più semplice connessione del 2° ordine che possa considerarsi è quella data dalle ultime formule quando le S^i_{pq} siano i simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} i \\ pq \end{matrix} \right\}$ relativi al tensore g_{ik}.

Ne segue che la più semplice formazione tensoriale del tipo voluto è

$$\xi^{\cdot\cdot i}_{ml\cdot} = \partial_{ml}\,\xi^i_\cdot + \left\{ \begin{matrix} i \\ pm \end{matrix} \right\} \partial_l\,\xi^p_\cdot + \left\{ \begin{matrix} i \\ pl \end{matrix} \right\} \partial_m\,\xi^p_\cdot - \left\{ \begin{matrix} q \\ ml \end{matrix} \right\} \partial_q\,\xi^i_\cdot + \partial_p \left\{ \begin{matrix} i \\ ml \end{matrix} \right\} \xi^p_\cdot .$$

Questa (come già risulta dall'essere simmetrica) *non* coincide con l'ordinaria derivata seconda covariante

$$\nabla_{lm}\,\xi^i_\cdot = \partial_m\,\xi^i_\cdot + \left\{ \begin{matrix} i \\ pm \end{matrix} \right\} \partial_l\,\xi^p_\cdot + \left\{ \begin{matrix} i \\ pl \end{matrix} \right\} \partial_m\,\xi^p_\cdot - \left\{ \begin{matrix} q \\ ml \end{matrix} \right\} \partial_q\,\xi^i_\cdot +$$

$$+ \left(\partial_m \left\{ \begin{matrix} i \\ pl \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ pl \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ hp \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ ml \end{matrix} \right\} \right) \xi^p_\cdot$$

e si ha

$$\nabla_{ml}\,\xi^i_\cdot - \xi^{\cdot\cdot i}_{ml\cdot} = \mathrm{R}^{\cdot\cdot\ \ \cdot i}_{pm\ ,\ l\cdot}\,\xi^p_\cdot$$

ove figura il tensore di Riemann

$$\mathrm{R}^{\cdot\cdot\ \ \cdot i}_{pm\ ,\ l\cdot} = \partial_m \left\{ \begin{matrix} i \\ pl \end{matrix} \right\} - \partial_p \left\{ \begin{matrix} i \\ lm \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ pl \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ hp \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ ml \end{matrix} \right\} .$$

Si può notare, per controllo, che la nota identità di non commutabilità per le ordinarie derivate seconde covarianti

$$(\nabla_{ml} - \nabla_{lm})\,\xi^i_\cdot = \mathrm{R}^{\cdot\cdot\ \ \cdot i}_{lm\ ,\ p\cdot}\,\xi^p_\cdot$$

è conseguenza della simmetria della nuova derivata $\xi^{\cdot\cdot i}_{lm\cdot} = \xi^{\cdot\cdot i}_{ml\cdot}$ e dell'identità ciclica del tensore di Riemann (rispetto ad m, l, p).

Il fatto che la nuova derivata è simmetrica permette di *propagare* in modo intrinseco un vettore dato in un punto fino all'intorno del 2° ordine del punto stesso; cioè date le $\xi^i_\cdot$ se ne possono definire le derivate prime e seconde con le condizioni intrinseche

$$\nabla_l\,\xi^i_\cdot = 0 \quad , \quad \xi^{\cdot\cdot i}_{ml\cdot} = 0$$

cioè

$$\partial_l\,\xi^i_\cdot = - \left\{ \begin{matrix} i \\ hl \end{matrix} \right\} \xi^l_\cdot$$

$$\partial_{ml}\,\xi^i_\cdot = \left(\left\{ \begin{matrix} i \\ hm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ pl \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hl \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ pm \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ml \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ ph \end{matrix} \right\} - \partial_p \left\{ \begin{matrix} i \\ ml \end{matrix} \right\} \right) \xi^p_\cdot .$$

5. Considerazioni analoghe alle precedenti possono farsi sostituendo al vettore $\xi^i_\cdot$ un tensore.

Astronomia. — *Sul secondo problema fondamentale della Cosmogonia.* Nota [1] del Socio G. Armellini.

1. Le osservazioni astronomiche mostrano che le stelle non sono sparse uniformemente nello spazio, ma si raccolgono in colossali ammassi, aventi forma di dischi od ellissoidi rotondi molto schiacciati e che noi chiamiamo ora *Nebulose Extragalattiche*, o semplicemente *Galassie*, perchè molto simili alla nostra Via Lattea, o Galassia, che è l'ammasso stellare a cui appartiene il Sole. Si tratta ora di spiegare questa singolare distribuzione, ammettendo - come si cerca di fare in Cosmogonia - che le stelle traggano origine da un gas, estremamente rarefatto ed a bassa temperatura, che riempiva anticamente lo spazio. Il problema è duplice, e cioè:

1° Anzi tutto occorre spiegare, partendo dalla legge di Newton e dalle proprietà dei gas, perchè questo gas, anzichè essersi raccolto in un solo ammasso, si sia suddiviso in tanti ammassi separati, quante sono appunto le varie Galassie.

2° Risoluto questo primo problema (e siamo ancora lontani da una soluzione soddisfacente), occorre spiegare perchè le stelle, a cui ha dato origine ciascun ammasso gassoso, si siano generalmente raccolte disponendosi secondo un'ellissoide rotondo estremamente schiacciato da somigliare spesso ad un disco piano; come appunto avviene per la Via Lattea, per la Nebulosa di Andromeda ecc.

Chiameremo questi due problemi col nome di *primo e secondo problema fondamentale della Cosmogonia*, e nella presente Nota ci occuperemo del secondo.

2. Fin ad ora, l'unica spiegazione che si è data è la seguente. Si ammette che inizialmente l'ammasso gassoso avesse forma sferoidica con debole velocità di rotazione e che si trovasse ad altissima temperatura. Raffreddandosi, esso si è grandemente contratto e quindi, per la diminuzione del momento d'inerzia, è assai aumentata la sua velocità di rotazione facendogli assumere un forte schiacciamento polare. Ma tale spiegazione non regge alla critica, perchè:

a) Occorre supporre una temperatura iniziale altissima, mentre invece sembra oggi probabile che il gas fosse inizialmente freddo e che le stelle debbano la loro alta temperatura alle reazioni nucleari che si produssero - e si producono tuttora nel loro interno - sia per la grande pressione, sia per un primo incremento di temperatura dovuto alla contrazione.

(1) Presentata nella seduta del 18 maggio 1946.

b) La teoria delle figure di equilibrio mostra che, anche nell'ipotesi più favorevole (e cioè nel caso dell'omogeneità), la lunghezza dell'asse polare dell'ellissoide è sempre superiore alla metà (più esattamente a 58/100) dell'asse equatoriale, mentre invece esistono molte nebule extragalattiche in cui il rapporto dei due asse è eguale a circa 1/10.

Vogt ha cercato di superare questa difficoltà ammettendo, oltre all'attrazione newtoniana, anche una forza repulsiva proporzionale alla distanza. Ma, a parte l'artificiosità dell'ipotesi, essa non basta per spiegare schiacciamenti tanto forti (2). Proponiamo quindi una nuova spiegazione, radicalmente diversa, e fondata sulla sola legge di Newton.

3. Per entrare in argomento, ricordiamo che l'esame delle fotografie delle nebulose extragalattiche - ed in modo speciale di quella di Andromeda, che è la più vicina a noi – eseguito col *microdensimetro* (strumento che permette di rilevare anche i più lievi annerimenti della lastra) ha mostrato ora che queste nebule sono generalmente immerse in un colossale ellissoide gassoso, rotondo e debolmente schiacciato, di cui formano quasi il piano equatoriale. *Questa scoperta astronomica* (fin ad ora poco considerata) *da forse, secondo noi, la chiave della soluzione.* Ed ecco come.

Supponiamo di avere un colossale ammasso gassoso, ruotante con debole velocità angolare e quindi di forma quasi sferica, e supponiamo pure che il gas sia estremamente rarefatto, e cioè con una densità media dell'ordine di 10^{-25} gr/cm^3; quale all'incirca si ottiene immaginando che la materia componente le stelle di una Galassia venga uniformemente distribuita nel volume occupato dalla Galassia stessa. Immaginiamo ora che in un punto qualsiasi P di questo ammasso gassoso, si formi un nucleo di condensazione S. Si dimostra subito che questo nucleo, avendo densità superiore a quella del gas circostante, si muoverà dirigendosi verso il centro O dell'ammasso gassoso.

Ora, poichè a causa dell'estrema rarefazione del gas ogni resistenza viscosa appare trascurabile, sembra a prima vista che S dovrà assumere un movimento oscillatorio lungo il raggio PO, restando costante l'ampiezza delle oscillazioni. Se però consideriamo che la massa di S va crescendo col tempo (giacchè è noto che, una volta avvenuta una condensazione, essa va sempre accentuandosi), il calcolo mostra che le oscillazioni diminuiscono di ampiezza. Ed anzi, se S raggiunge una densità sufficientemente grande rispetto a quella del gas dell'ammasso, si trova che le oscillazioni avvengono intorno al centro O e che esse divengono tanto più piccole, quanto maggiore è l'aumento di massa. Ma andiamo innanzi.

(2) Cfr. Vogt, *Zur Dynamik der Spiralnebel*, in «Astr. Nachr.», Bd. CCXXXXIII n. 5832; G. Armellini, *Ricerche sopra la forma dei nuclei delle nebulose extragalattiche* in «Rend. Lincei», 1933 sem. II.

Supponiamo che nell'ammasso gassoso che consideriamo si siano formati molti nuclei di condensazione; dopo un certo tempo, per quanto abbiamo detto, essi si troveranno tutti raccolti in vicinanza del centro. Il momento d'inerzia dell'ammasso, rispetto all'asse di rotazione, risulterà quindi diminuito ed in conseguenza sarà aumentata la sua velocità di rotazione, onde l'ammasso, da sferico, sarà divenuto nettamente ellissoidico; restando però sempre l'asse polare maggiore della metà di quello equatoriale, come già abbiamo notato.

Continuiamo ora il nostro ragionamento e supponiamo che in un punto qualsiasi dell'ammasso gassoso, divenuto ora nettamente ellissoidico e ruotante con maggiore velocità angolare, si formi un nuovo nucleo di condensazione S. Ammettendo che la densità raggiunta da S sia sufficientemente grande, si dimostra allora che S tenderà a descrivere, intorno al centro O, un'orbita posta nel piano equatoriale.

Dopo un certo tempo quindi, nell'ammasso gassoso considerato, avremo un gran numero stelle, alcune raccolte nell'intorno dal centro ed altre descriventi orbite - anche molto distanti dal centro – ma sempre giacenti quasi sul piano equatoriale. Avremo cioè una vera nebulosa stellare a forma di disco molto schiacciato e con notevole addensamento verso il centro, contornata da uno sferoide gassoso di cui la nebula forma quasi il piano equatoriale. E ciò è appunto quanto risulta dalle osservazioni.

Passiamo ora a dimostrare col calcolo, quanto abbiamo accennato.

4. Consideriamo anzi tutto un ammasso gassoso in riposo, senza alcun moto di rotazione, e quindi di forma sferica, ed immaginiamo che in un suo punto P si sia formato un nucleo di condensazione S di massa M. Il moto di S avverrà evidentemente lungo il raggio PO, che noi prenderemo come asse z, scegliendo per origine il centro O.

Ora, le forze che agiscono su S, sono:

a) L'attrazione di tutto l'ammasso gassoso, diretta lungo l'asse z verso O, ed avente per intensità MZ, essendo Z la forza unitaria.

b) La spinta idrostatica esercitata su S dal gas in cui è immerso; spinta che per il principio di Archimede sarà eguale a $-mZ$, essendo m la massa del fluido spostata.

c) La resistenza viscosa al moto, che si può assumere proporzionale alla densità del gas (e quindi ad m) ed alla velocità di S e cioè a $\frac{dz}{dt}$.

d) Inoltre, se nel tempuscolo dt la massa M di S aumenta di dM, occorre comunicare alla massa dM la velocità $\frac{dz}{dt}$, onde S riceverà un impulso eguale a $-\frac{d\mathrm{M}}{dt}\frac{dz}{dt}$, e cioè eguale e contrario alla quantità di moto comunicata, divisa per il tempuscolo dt.

Avremo dunque, come equazione del moto di S lungo il raggio PO;

$$(1) \qquad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = (M-m)Z - \left(\frac{dM}{dt} + \alpha m\right)\frac{d\zeta}{dt}$$

dove α è un coefficiente di proporzionalità.

In pratica, se l'addensamento S aumenta e tende a trasformarsi in una stella, dopo qualche tempo la sua densità è divenuta talmente superiore a quella del gas in cui è immerso (che, come dicemmo può stimarsi dell'ordine di 10^{-25} gr/cm^3) che m è trascurabile rispetto ad M. La (1) diviene dunque:

$$(2) \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\frac{d\zeta}{dt} - Z = 0$$

dove M è funzione del tempo e Z è funzione di ζ.

La (2) in generale, non è riducibile alle quadrature; ma, poichè la forza Z è diretta sempre verso il centro O e si annulla in O, e cioè è una forza di richiamo (sebbene non proporzionale alla distanza), il nucleo S dovrà in generale oscillare sull'asse ζ da una banda e dall'altra di O. Ma, se M è funzione crescente del tempo e cioè se $\frac{dM}{dt}$ si mantiene positivo e diverso da zero, possiamo dimostrare che queste oscillazioni diminuiscono sempre di ampiezza.

Infatti, supponiamo che nell'istante t_1 il nucleo S si trovi all'estremo di un'oscillazione, per esempio dalla banda positiva dell'asse ζ, e sia $\zeta = h$. Supponiamo ancora, se è possibile, che dopo aver attraversato l'origine, S pervenga nell'istante t_2 alla stessa distanza da O con velocità v. Avremo allora, moltiplicando la (2) per $\frac{d\zeta}{dt}\,dt$ ed integrando tra t_1 e t_2:

$$(3) \qquad \frac{v^2}{2} = \int_{t_1}^{t_2} Z\frac{d\zeta}{dt}\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 dt\,.$$

Ora il primo integrale al secondo membro rappresenta il lavoro compiuto dalla forza *unitaria* Z nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, e cioè quando passiamo da $\zeta = h$ a $\zeta = -h$. Poichè Z è sempre diretta verso O ed assume valori eguali in punti equidistanti da O (essendo l'ammasso sferico), tale lavoro è evidentemente nullo. Quanto al secondo integrale, essendo per ipotesi $\frac{dM}{dt}$ sempre positiva e diversa da zero, esso risulterà ovviamente positivo e diverso da zero. Dunque, per la (3) risulterà v^2 negativo e diverso da zero, ciò che è assurdo. Quindi S, dopo aver attraversato l'origine, non potrà giungere ad una distanza eguale a quella h in cui si trovava all'estremo dell'oscillazione precedente. Ne segue che, finchè M si mantiene crescente, le oscillazioni decrescono di ampiezza; in pratica, se

l'incremento di M è molto grande (come avviene quando un nucleo di condensazione del gas si trasforma in una stella), S da un certo tempo in poi resterà sempre nelle vicinanze del centro O dell'ammasso gassoso.

Per esempio, supponiamo, secondo Langmuir, che la massa di un addensamento aumenti (almeno sul principio) con legge esponenziale, e cioè poniamo:

$$M = ae^{2bt} \tag{4}$$

essendo a e b costanti positive. Se adottiamo tale legge e, per maggiore semplicità, supponiamo l'ammasso gassoso omogeneo (con che risulta dalla Meccanica $Z = -\lambda^2 z$, essendo λ^2 costante), la (2) diviene facilmente

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2b\frac{dz}{dt} + \lambda^2 z = 0 \tag{5}$$

equazione lineare a coefficienti costanti, il cui integrale generale è

$$z = Ce^{-bt}\sin\left(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\, t + C'\right) \tag{6}$$

essendo C e C' costanti. Crescendo t, ne risulta subito che z tende a zero.

5. Consideriamo ora il caso di un ammasso gassoso ellissoidico rotondo, ruotante con velocità angolare ω, che per semplicità assumeremo come positiva. Prendiamo per origine il centro O dell'ellissoide, come asse z l'asse di rotazione, e come assi x ed y due assi ortogonali, di direzione invariabile, giacenti sul piano equatoriale. Chiamiamo pure con X, Y, Z le componenti della forza di attrazione $\widehat{F}$ che l'ammasso esercita sul punto di massa unitaria situato in x, y, z; e ricordiamo pure che, a causa della rotazione ω, le componenti di velocità di questo punto sono eguali rispettivamente a $-\omega y$, ad ωx ed a 0.

Possiamo ora ripetere il ragionamento precedente, osservando però che le componenti di velocità di S sono $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$ e che quindi se la sua massa aumenta di dM, le componenti della quantità di moto comunicata alla massa dM sono rispettivamente eguali a $\left(\frac{dx}{dt} + \omega y\right)dM$, a $\left(\frac{dy}{dt} - \omega x\right)dM$ ed a $\frac{dz}{dt}dM$.

Avremo quindi come equazioni del moto, trascurando sempre m di fronte ad M:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{1}{M}\dfrac{dM}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt} + \omega y\right) - X = 0 \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} + \dfrac{1}{M}\dfrac{dM}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt} - \omega x\right) - Y = 0 \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{1}{M}\dfrac{dM}{dt}\dfrac{dz}{dt} - Z = 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

Essendo l'ellissoide rotondo, è utile scegliere coordinate cilindriche ponendo

$$x = r\cos\vartheta \quad ; \quad y = r\sin\vartheta \qquad (r^2 = x^2 + y^2) \tag{8}$$

e ricordando che la forza attrattiva $\widehat{F}$ agente sul punto x, y, z, per ragioni di simmetria, giace sempre sul piano meridiano passante per detto punto e che quindi si ha

$$X = R\cos\vartheta \quad ; \quad Y = R\sin\vartheta \tag{9}$$

essendo R funzione di r ed eventualmente anche di z.

La prima e la seconda delle (7) divengono allora

$$\begin{cases} r''\cos\vartheta - 2r'\sin\vartheta\vartheta' - r\cos\vartheta\vartheta'^2 - r\sin\vartheta\vartheta'' + \\ \qquad + \dfrac{1}{M}\dfrac{dM}{dt}(r'\cos\vartheta - r\sin\vartheta\vartheta' + \omega r\sin\vartheta) - R\cos\vartheta = 0 \\ r''\sin\vartheta + 2r'\cos\vartheta\vartheta' - r\sin\vartheta\vartheta'^2 + r\cos\vartheta\vartheta'' + \\ \qquad + \dfrac{1}{M}\dfrac{dM}{dt}(r'\sin\vartheta + r\cos\vartheta\vartheta' - \omega r\cos\vartheta) - R\sin\vartheta = 0 \end{cases} \tag{10}$$

dove gli accenti indicano derivate rispetto al tempo.

Moltiplichiamo la prima equazione per $\cos\vartheta$ e la seconda per $\sin\vartheta$ e sommiamo; ed analogamente moltiplichiamo la prima per $\sin\vartheta$ e la seconda per $\cos\vartheta$ e sottraiamo. Avremo con brevi riduzioni

$$\begin{cases} r'' - r\vartheta'^2 + \dfrac{1}{M}\dfrac{dM}{dt}r' - R = 0 \\ \vartheta'' + \dfrac{2r'\vartheta'}{r} + \dfrac{1}{M}\dfrac{dM}{dt}(\vartheta' - \omega) = 0 . \end{cases} \tag{11}$$

Nel caso in cui l'ellissoide si supponga omogeneo, si ha, come è noto dalla Meccanica, $R = -h^2 r$ con h costante, onde le (11) ammettono la soluzione

$$r = \text{cost.} \quad ; \quad \vartheta' = \omega = h . \tag{12}$$

Ora inizialmente, prima che cominciasse la condensazione, S faceva parte dell'ammasso ellissoidico e si muoveva quindi con velocità angolare costante descrivendo un parallelo; si aveva cioè $\vartheta' = \omega = h$ ed $r = \text{cost.}$ Dunque ϑ' rimarrà sempre eguale ad ω ed r resterà costante. D'altra parte, l'ultima delle (7), essendo Z funzione solo di z ed anzi eguale a $\lambda^2 z$, mostra che z tenderà a zero se M riesce all'infinito. In conseguenza il nuovo astro tenderà a descrivere un'orbita circolare, giacente sul piano equatoriale dell'ellissoide gassoso in cui si è formato. Notiamo che se M è funzione esponenziale del tempo secondo la (4), in conformità all'ipotesi

di Langmuir, le (7) divengono equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, d'immediata integrazione.

Il problema diviene assai più difficile quando l'ellissoide gassoso non si suppone omogeneo, giacchè allora R e Z contengono generalmente le due variabili r e z. Ma, pur essendo impossibile l'integrazione, si può seguire qualitativamente l'andamento del fenomeno.

A tale scopo, moltiplichiamo la seconda delle (11) per Mr^2 e ricordiamo che il momento K della quantità di moto di S rispetto all'asse z è eguale a $Mr^2\vartheta'$. Avremo facilmente

$$\frac{dK}{dt} = r^2\,\omega\,\frac{dM}{dt} \tag{13}$$

la quale mostra che, essendo ω e $\frac{dM}{dt}$ sempre positivi, anche $\frac{dK}{dt}$ è sempre positiva. Ma inizialmente K aveva il segno di ω ed era quindi positiva, onde essa sarà funzione crescente del tempo e, tendendo la massa M ad un valore finito (massa della stella risultante) anche K tenderà ad un valore K_0 finito e maggiore di zero.

Durante tutto il tempo di accrescimento della massa M del nuovo astro S, avremo dunque $0 < K < K_0$; e quindi, per note proprietà meccaniche, S *non* verrà mai ad incontrare l'asse di rotazione.

D'altra parte, l'ultima delle (7) può essere interpretata come l'equazione del moto di un punto, mobile sull'asse z sotto l'azione di una forza di richiamo diretta verso l'origine (e funzione, oltre che di z, anche di un parametro r) e sottoposto inoltre ad una resistenza proporzionale alla velocità col coefficiente $\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}$. Ora, poichè senza tale resistenza il punto compirebbe sempre oscillazioni limitate (dello stesso ordine di grandezza della sua distanza iniziale dal piano equatoriale), è chiaro che a causa di tale resistenza le oscillazioni andranno smorzandosi, sebbene non possa più dirsi che esse formano una successione sempre decrescente a causa della presenza del parametro r. Se l'accrescimento di massa è molto grande – come appunto avviene quando un primo nucleo di condensazione si trasforma lentamente in una stella – z da un certo tempo in poi diverrà molto piccola e cioè S finirà col rimanere sempre nelle vicinanze del piano equatoriale.

Quando l'accrescimento di massa è terminato, se indichiamo con M_0 la massa dell'astro e poniamo $K_0 : M_0 = c$, si avrà $r^2\vartheta' = c$, mentre essendo z sempre prossima a zero, R sarà funzione della sola r. Allora la prima delle (11), diviene, essendo $\frac{dM}{dt} = 0$:

$$r'' - \frac{c^2}{r^3} - R(r) = 0 \tag{14}$$

che è appunto l'equazione di un moto orbitale nel piano equatoriale, con costante delle aree eguale a c. L'astro finirà dunque col descrivere un'orbita nel piano equatoriale dell'ammasso gassoso.

Riepilogando, *le stelle risultanti dai nuclei di condensazione dànno origine ad una nebulosa extragalattica a forma di disco pianeggiante disteso sul piano equatoriale dell'ammasso gassoso generatore, con un addensamento al centro costituito dalle stelle formatesi nei primi tempi.* E ciò è appunto quanto mostrano le osservazioni.

Fisica. — *Sulla polarizzazione della luce del cielo*[1]. Nota I[2] del Corrisp. A. Carrelli.

Il fenomeno della polarizzazione della luce del cielo può considerarsi interpretato nelle sue linee fondamentali dalla teoria di Soret-Hurion (a). Com'è noto, il punto essenziale di tale teoria è il processo di diffusione della luce di Tyndall, che Lord Rayleigh utilizzò per l'interpretazione di tale fenomeno, spiegando così almeno in prima approssimazione la presenza di una polarizzazione; è però da osservare che questa polarizzazione non è totale, e presenta il valore massimo a 90° del Sole (e qualche volta il massimo non si riscontra nemmeno a 90°). Secondo la primitiva teoria di Lord Rayleigh si spiega inoltre il colore particolare della luce diffusa, e cioè la dipendenza da λ secondo la legge λ^{-4}.

Questa prima teoria è incompleta, perchè non dà ragione fra l'altro della parziale polarizzazione, inoltre della presenza di punti neutri, e della conseguente inversione della polarizzazione.

Questi fatti[3] vengono in realtà spiegati in modo esauriente seguendo appunto Soret e Hurion e ammettendo un processo di doppia diffusione; ammettendo cioè che le particelle dell'atmosfera oltre a diffondere la luce che direttamente le colpisce, diffondono luce già una volta diffusa e che giunge a ciascuna di esse da tutta l'atmosfera (in realtà, per una teoria completa bisognerebbe inoltre tener conto anche della luce diffusa dalla superficie terrestre). La teoria sviluppata in questo senso da Soret e da Hurion, per citare i più importanti autori, ha mostrato che questa luce già diffusa una volta ha una componente nella stessa direzione dei raggi solari, e tale condizione può spiegare benissimo la depolarizzazione riscontrata.

Ma Soret riconosce ancora un'altra causa importantissima di dissimetria nella atmosfera, e cioè osserva che le particelle che si trovano negli

(1) Questo lavoro che ora vede la luce è stato compiuto per massima parte nell'anno 1943–44 quando per eventi bellici l'Istituto Fisico della R. Università di Napoli era praticamente chiuso e lo scrivente si trovava a Meta di Sorrento.

(2) Presentata nella seduta del 18 maggio 1946.

(3) Per la bibliografia cfr. Busch-Jensen, *Atmospherische Polarisation.*

strati più bassi hanno grandezze maggiori e sono maggiori di numero, quindi Soret prevede che quando il Sole è all'orizzonte si può presentare un'inversione della polarizzazione.

Questa concezione che ammette la presenza di un anello di particelle più diffondenti negli strati più bassi, fu dal Soret stesso formulata in un primo momento solo quale elemento qualitativo. È invece Hurion che riesce con tale argomento a giungere ad una formulazione esauriente perfezionando e concretizzando l'idea del Soret in modo molto plausibile; ammettendo cioè l'esistenza negli strati più bassi dell'atmosfera di un cerchio diffondente che si suppone nello stesso piano dei raggi solari; ed è allora comprensibile con facili considerazioni come a Sole basso per la presenza di questo anello, che non è efficace quando il Sole è alto, può verificarsi l'inversione della polarizzazione e la comparsa dei punti neutri.

Questa teoria è in grado effettivamente di spiegare molte delle particolarità osservate, pur essendo però ancora schematica; essa è basata sulla perfetta simmetria dell'anello, e quindi in base ad essa si prevedono quattro punti neutri, due solari e due antisolari, come anche la posizione di questi punti risulta uguale per tutti, e funzione di un unico parametro, e cioè di una grandezza proporzionale al numero di particelle presenti per unità di lunghezza in questo cerchio diffondente. L'altezza di anche uno solo dei punti permetterebbe quindi d'individuare l'unico parametro che interviene nella teoria. In ogni modo pur con le inevitabili imperfezioni, la teoria di Hurion è molto importante, perchè quando il Sole è all'orizzonte dalle misure compiute dallo stesso A. si trovano anomalie che sono perfettamente interpretabili con la teoria svolta, per quanto piuttosto schematica.

Lo scopo del presente lavoro è quello di sviluppare la teoria e porre in evidenza molti fatti non ancora ben chiaramente studiati.

1. Calcolo dell'angolo α. — In primo luogo ci siamo preoccupati di ricercare se la direzione del vettore polarizzazione in condizioni normali (e cioè fuori della zona di anomalia, e col Sole alto) coincida con la direzione che può prevedersi teoricamente, e per far ciò, dato che la direzione del vettore polarizzazione può, come si dirà in seguito, essere determinata sperimentalmente riferendosi al piano individuato dalla retta che congiunge il punto osservato con l'osservatore e dalla retta orizzontale, che si appoggia alla precedente, abbiamo proceduto al calcolo dell'angolo α che la normale al piano Sole – punto osservato ad occhio dell'osservatore (piano π_1) forma col piano individuato dal punto dell'osservazione – occhio e retta orizzontale (piano π_2). Quest'angolo coincide con l'angolo che il vettore polarizzazione della luce del cielo forma con il piano che passa per il punto osservato, per l'occhio e che contiene la retta orizzontale. La determinazione teorica di quest'angolo α in funzione della posizione del Sole e del punto osservato si fa appunto per stabilire se sperimentalmente si riscon-

trano anomalie tra il valore teorico e quello sperimentale, quando il Sole è alto ed anche in altre ricerche di cui si parlerà in Note successive quando il Sole è al disotto dell'orizzonte ed inoltre per stabilire l'andamento dell'anomalia quando ci sono i punti neutri, quando cioè compare l'inversione della polarizzazione. Per procedere al calcolo dell'angolo α si consideri il Sole di altezza φ_0 nel meridiano di azimut $\lambda = 0$. Nel punto di osservazione P_1 si consideri una terna di assi ortogonali: x nel meridiano, orizzontale e positivo nel senso dell'allontanamento dal Sole, z verticale e positivo verso l'alto, y normale ai primi due. Si consideri una sfera di raggio 1; le coordinate di P_2, e cioè del Sole proiettato su detta sfera, sono evidentemente

$$x_2 = -\cos\varphi_0 \quad , \quad y_0 = 0 \quad , \quad z_2 = \operatorname{sen}\varphi_0 .$$

Si consideri un punto generico della volta celeste, e sia P_3 la sua proiezione sulla sfera unitaria, indicando con λ l'azimut del piano che passa per il centro degli assi, per P_2 e che sia normale al piano orizzontale le coordinate di P_3 sono

$$x_3 = -\cos\varphi\cos\lambda \quad , \quad y_3 = \cos\varphi\operatorname{sen}\lambda \quad , \quad z_3 = \operatorname{sen}\varphi$$

Il vettore polarizzazione della luce proveniente da P_3 deve essere normale al piano individuato dai punti P_1, P_2, P_3. Il piano passante per P_3 e per una retta orizzontale e cioè per una retta contenuta nel piano xy normale alla retta P_3P_1 può individuarsi in quanto che due dei suoi punti sono P_3 e P_1, il terzo punto P'_1 può facilmente fissarsi perchè sarà un punto qualunque della retta contenuta nel piano xy e normale a P_3P_1.

Troviamo quindi qual'è l'equazione di questa retta: essa è normale all'intersezione del piano P_3zP_1 col piano xy l'equazione di essa è:

$$y\cos\lambda + x\operatorname{sen}\lambda = 0$$

e la retta a questa normale ha per equazione

$$y\operatorname{sen}\lambda - x\cos\lambda = 0$$

un punto generico di questa retta può essere quello di coordinate

$$x'_1 = \operatorname{sen}\lambda \quad , \quad y'_1 = \cos\lambda$$

quindi quelle di P'_1

$$x'_1 = \operatorname{sen}\lambda \quad , \quad y'_1 = \cos\lambda \quad , \quad z'_1 = 0 .$$

I due piani π_1 e π_2 passano dunque per i punti di coordinate

$$\pi_1 \begin{cases} P_1 & x_1 = 0 & y_1 = 0 & z_1 = 0 \\ P_2 & x'_2 = -\cos\varphi_0 & y_2 = 0 & z_2 = \operatorname{sen}\varphi_0 \\ P_3 & x_3 = -\cos\varphi\cos\lambda & y_3 = \cos\varphi\operatorname{sen}\lambda & z_3 = \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$\pi_2 \begin{cases} P_1 \quad x_1 = 0 & y_1 = 0 & z_1 = 0 \\ P'_1 \quad x'_2 = \operatorname{sen}\lambda & y'_2 = \cos\lambda & z'_2 = 0 \\ P_3 \quad x_3 = -\cos\varphi \cos\lambda & y_3 = \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda & z_3 = \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

Per calcolare l'angolo fra questi due piani bisogna calcolare i valori dei tre coseni direttori a_1, b_1 e c_1; a_2, b_2 e c_3 relativi ciascuno di essi, e cioè

$$a_1 = -\operatorname{sen}\varphi_0 \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda$$

$$b_1 = \cos\varphi_0 \operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi_0 \cos\varphi \cos\lambda$$

$$c_1 = -\cos\varphi_0 \cos\varphi \operatorname{sen}\lambda$$

analogamente

$$a_2 = \cos\lambda \operatorname{sen}\varphi$$

$$b_2 = -\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\varphi$$

$$c_3 = \cos\varphi .$$

Il coseno dell'angolo ε formato dai due piani è dato dalla formula

$$\cos\varepsilon = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

e l'angolo α formato dalla normale a π_1 col piano π_2 è evidentemente $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Quindi poichè

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \cos\varphi_0 \operatorname{sen}\lambda$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \operatorname{sen}^2\varphi_0 \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\lambda - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi_0 \operatorname{sen} 2\varphi \cos\lambda$$

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$

dunque, in definitiva, si ottiene

$$\cos\varepsilon = \operatorname{sen}\alpha = \frac{\cos\varphi_0 \operatorname{sen}\lambda}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi_0 \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\lambda - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi_0 \operatorname{sen} 2\varphi \cos\lambda}}$$

Si ricava subito da questa formula che cambiando λ in $-\lambda$ il valore di sen α cambia solo di segno, e cioè, com'era da prevedere, la distribuzione della polarizzazione è simmetrica; inoltre cambiando φ_0 in $-\varphi_0$, l'unico termine che varia di segno è un termine del denominatore e precisamente il termine $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\varphi_0 \operatorname{sen} 2\varphi \cos\lambda$. Se però per il Sole sotto l'orizzonte ($\varphi_0 < 0$)

consideriamo i punti per i quali $\cos\lambda$ conserva immutato il valore ma cambia di segno (e cioè passiamo ai punti $\pi - \lambda$), per questi punti $\cos\alpha$ assume lo stesso valore; dunque calcolato α per i punti φ e λ per $\varphi_0 > 0$ si ottiene lo stesso valore di α per $\varphi_0 < 0$ per i punti per i quali φ è rimasto invariato e si è passato da λ a $\pi - \lambda$. Definendo l'Antisole come il punto di altezza $-\varphi_0$ si conclude che quando il Sole è sotto l'orizzonte l'angolo α del punto φ, λ è lo stesso angolo α che si ha per il Sole sopra l'orizzonte per i punti φ e $\pi - \lambda$. La formula calcolata ci serve per i vari ordini di questioni, e cioè in primo luogo per poter calcolare, quando il Sole è sotto l'orizzonte, l'effettiva posizione teorica del vettore polarizzazione (ed in ciò si suppone che il fenomeno abbia luogo con le stesse modalità che si hanno quando il Sole è al di sopra dell'orizzonte); per poter calcolare inoltre la posizione del vettore con il Sole molto basso, quando cioè è molto difficile dare la posizione con metodo diretto, ed infine per poter prevedere nelle zone di grandi anomalie l'andamento della posizione del vettore e confrontare tale andamento con l'effettiva orientazione di esso.

2. - Determinazione sperimentale di α. — Sperimentalmente si è proceduto nel modo seguente: su di un teodolite che permette di fissare le coordinate altoazimutali di un qualunque punto della volta celeste, partendo dal piano del Sole ($\lambda = 0$), è fissato un tubo che porta ad un estremo un polariscopio di Savart fissato su di un disco; il polariscopio può ruotare intorno all'asse del tubo ed una graduazione può determinarne la posizione; fissato un punto della volta celeste si ruota il polariscopio fino a che scompaiono le frange: è noto che in tali condizioni l'asse del cristallo è a 45° dal vettore polarizzazione del cielo; in tal modo quindi può determinarsi punto per punto il valore dell'angolo α. Le misure fatte a Meta di Sorrento (luglio, agosto e settembre 1943) con tale dispositivo portano a valori di α che sono approssimati a meno di $\pm 2°$, $\pm 4°$ a secondo del valore della polarizzazione; le misure sono naturalmente più precise quando più intense sono le frange, e cioè quando più elevato è il valore della polarizzazione. Dalle misure eseguite col Sole alto, e cioè quando non v'è accenno ad anomalie d'inversione, mentre la polarizzazione, com'è noto da misure fatte da molti sperimentatori, è molto variabile (e cioè non coincide con il valore della teoria che prevede il 100/100), la distribuzione del vettore è quella teorica nell'ordine di approssimazione realizzato. Dato che era possibile dal punto d'osservazione usato avere un ampio tratto dell'orizzonte marino, si è particolarmente insistito a procedere nelle misure per i punti prossimi all'orizzonte, ma col Sole alto i valori trovati sono coincidenti con quelli teorici.

Com'è noto, Arago trovò, usando un polariscopio montato su di un cerchio graduato, che permetteva una maggiore approssimazione nella lettura della posizione del vettore, variazioni di qualche grado in alcuni punti del

cielo, variazioni che oscillavano al variare dell'altezza solare. Questo importante punto sarà trattato in seguito con metodi più precisi. In prima approssimazione ed in linea di massima può affermarsi che quando il Sole è alto, l'andamento coincide con quello teorico e non ha influenza la diffusione degli strati bassi perchè non si riscontra anomalia anche quando si determina la posizione del vettore per i punti molto prossimi all'orizzonte. Queste misure sono state ripetute anche col metodo proposto da Hurion (4), che permette di individuare la posizione del piano del Sole e contemporaneamente la posizione del piano di polarizzazione e quindi è possibile, sempre però con l'approssimazione di $\pm z°$, quando il Sole è al di sopra dell'orizzonte e non troppo basso, accertare se il valore sperimentale attuale coincide effettivamente con quello che si prevede dalla teoria. Le misure sono state condotte in varie giornate e si può affermare quanto segue: col Sole piuttosto alto ($\varphi_0 \sim 17°$) si può giungere nel suo intorno, nella zona della

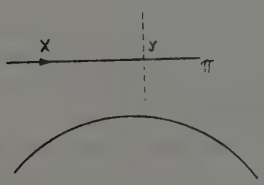


Fig. 1.

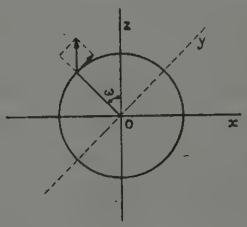


Fig. 2.

depolarizzazione, senza che si verifichino anomalie nella posizione del vettore polarizzazione. Dunque, quando il Sole è piuttosto alto, e cioè a circa 17°, l'unica anomalia che si riscontra è quella dipendente dalla depolarizzazione, e quindi non è ancora da riscontrare la presenza di un cerchio diffondente. Questi risultati ottenuti con questi due metodi portano a ritenere che solo la presenza di un anello diffondente, nel piano dei raggi solari, abbastanza ben definito porta alla presenza di anomalie; di qui deriva l'importanza di seguire più da vicino e con maggiore particolarità la formazione del punto di Babinet e d'Arago, per stabilire quando può considerarsi nell'atmosfera presente in media l'anello.

Riprendendo la teoria di Soret–Hurion si riconosce subito che possono farsi alcuni completamenti. Il Soret ritiene che la seconda diffusione può spiegare il fatto sperimentale della depolarizzazione. Ora più generalmente si consideri (fig. 1) la direzione x quale direzione dei raggi solari, e si consideri il piano π (x, z) quale piano che contiene i raggi solari ed una retta orizzontale. Si sostituiscano a tutte le particelle diffondenti distribuite lungo una qualunque direzione una particella unica che abbia una ampiezza d'oscil-

(4) Hurion, « Ann. de Chemie. et de Phys. », s. VII, vol. VII, p. 456 (1896).

lazione che equivalga a quelle che sono effettivamente distribuite in tutta l'atmosfera per unità di superficie di una sfera unitaria, che circonda una particella (e cioè la particella O che si suppone alla origine degli assi), e sia a l'ampiezza del moto di questa particella che si suppone capace di sostituire tutte le altre. Evidentemente, indicando con ω (fig. 2) l'angolo che una retta contenuta nel piano $x\zeta$ forma con l'asse delle x, si avrà $a = a(\omega)$. Ripetendo il ragionamento di Soret si ottiene che la componente normale alla direzione che forma l'angolo ω con l'asse delle x sarà $a(\omega)\cos\omega$ e la componente lungo x sarà $a(\omega)\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\omega$ mentre quella lungo ζ sarà $a(\omega)\cos^2\omega$. L'effetto che un elemento di superficie eserciterà sulla particella in O si ottiene ricordando che le azioni sono incoerenti, e quindi si riconosce che deve procedersi alla somma dei quadrati delle ampiezze per ottenere l'intensità totale; bisogna quindi quadrare le espressioni trovate, moltiplicarle per $\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega\,d\varphi$ che è l'elemento di superficie sferica unitaria, procedere all'integrazione rispetto ad ω da O a 2π e poi all'integrazione rispetto a φ da O a π e cioè effettuando una ruotazione del piano considerato intorno all'asse x; è evidente che la quantità $a(\omega)$ oltre ad essere funzione dell'angolo ω dipende anche dall'orientazione del piano π e quindi dipende da φ; dunque le tre componenti sono date da

$$X = \iint a^2(\omega, \varphi)\cos^2\omega\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega\,d\varphi$$

$$Y = \iint a^2(\omega, \varphi)\cos^2\omega\,\mathrm{sen}^3\,d\omega\,d\varphi$$

$$Z = \iint a^2(\omega, \varphi)\cos^4\omega\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega\,d\varphi$$

Evidentemente non è possibile *a priori* poter calcolare il valore di questi integrali, si può solo dire che la particella in O, oltre che a diffondere luce per il raggio diretto che la colpisce proveniente nella direzione x, diffonda luce che è costituita da radiazioni con componenti lungo x, y, ζ quindi poichè c'è una componente di vibrazione anche lungo x, la luce proveniente da un punto qualunque del cielo è depolarizzata, ed in modo non prevedibile. Può dirsi ancora che nella luce diffusa che arriva in O v'è anche quella proveniente dal suolo; e poichè tale luce è più intensa relativamente ai punti che distano angolarmente poco dal Sole, può spiegarsi immediatamente l'aumento della depolarizzazione totale che si osserva avvicinandosi al Sole.

È ancora da osservare che per la presenza di componenti dell'intensità lungo y e ζ nella luce proveniente da O non v'è soltanto una componente lungo x costituita da luce diffusa due volte, ma anche in queste due direzioni vi può essere una percentuale notevole, e non determinabile *a priori*, di tali radiazioni, ed evidentemente quando l'intensità di questa diventa molto

cospicua, si deve giungere alla completa depolarizzazione. Concludendo, dunque: l'analisi del ragionamento di Soret porta a stabilire che vi può essere una percentuale di luce lungo x diffusa due volte molto intensa, e quindi tale da produrre una notevole depolarizzazione. Questa luce è più intensa quanto più ci avviciniamo al Sole, anche perchè in tale direzione si aggiunge la luce che proviene dal suolo, è dunque facilmente spiegabile la grande depolarizzazione, anzi la depolarizzazione totale che si osserva nelle vicinanze del Sole.

Queste considerazioni non spiegano un altro dato sperimentale assicurato: che cioè la depolarizzazione cresce anche dall'altra parte e cioè dalla parte della volta celeste che dista dal Sole per angoli maggiori di 90°; quindi quale causa di depolarizzazione deve considerarsi anche qualche altra causa finora non tenuta in conto.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Analisi). — *Sopra l'esistenza dell'estremo nei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore.* Nota di S. Cinquini, presentata [1] dal Socio U. Amaldi.

Nella presente Nota ci occupiamo dei problemi del Calcolo delle variazioni in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore.

A tale argomento aveva dedicato, alcuni anni fa, un'ampia Memoria N. Bogoliouboff [2], il quale per quanto riguarda l'esistenza dell'estremo aveva studiato un caso in cui il funzionale da render minimo non è semicontinuo e, ispirandosi a un procedimento seguito dal Tonelli per gli integrali $\mathfrak{I}_C = \int_C F\left(x(s), y(s), x'(s), y'(s)\right) ds$ incompletamente regolari, aveva stabilito nel caso considerato una condizione necessaria e sufficiente per la esistenza dell'estremo.

Invece, la nostra ricerca si attiene al metodo delle successioni minimizzanti, basato sul concetto di semicontinuità e seguìto dal Tonelli nei propri « Fondamenti » [3] e in successivi lavori, e si propone di indicare in qual modo si possa costruire, per i problemi in questione, una teoria che, pur essendo organica quanto quelle sviluppate per altri tipi di problemi

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) N. Bogoliouboff, *Sür l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations.* « Annali di Matematica pura e applicata », ser. IV, to. IX, 1931, pp. 195–241.

(3) L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Due volumi. N. Zanichelli, Bologna, 1921–23.

variazionali, presenta alcune proprie originalità che la Memoria del Bogoliouboff non lasciava prevedere e che meritano di esser poste in rilievo.

È ben noto che la teoria dei problemi del primo ordine [4] in forma parametrica ha come punto di partenza il fatto che al variare della rappresentazione parametrica della curva C il valore del relativo integrale $\mathfrak{J}_C$ resti immutato. Naturalmente anche lo studio dei problemi in questione va impostato in modo che sussista un'analoga invarianza; e a tal riguardo abbiamo preferito modificare lievemente l'impostazione del Bogoliouboff.

Precisamente, limitandoci a considerare, per semplicità e come fa il citato A., i problemi del secondo ordine, noi supponiamo (vedi n. 1, α)) che la funzione F che compare sotto il segno d'integrale dipenda dalle coordinate del punto corrente sulla curva, dalle loro derivate del primo ordine rispetto al parametro e dalla curvatura e che soddisfi a un'opportuna condizione di omogeneità [5]. La classe di *curve ordinarie* $C^{(2)}$ che noi consideriamo (vedi n. 1, γ)) coincide con quella presa in esame dal Bogoliouboff; però siccome nella nostra ricerca hanno notevole influenza anche le curve di lunghezza nulla, è stato necessario precisare che cosa si deve intendere come intorno del secondo ordine di una curva costituita da un solo punto.

Rinviando ad una successiva Nota le ricerche relative alla semicontinuità degli integrali in questione, abbiamo enunciato [6] al n. 2 della presente i principali risultati raggiunti per il problema dell'esistenza dell'estremo in classi di curve contenute in un campo limitato.

Un primo teorema si applica a classi di curve aventi lunghezza inferiore a un numero fisso, ma di esso abbiamo indicato sia alcuni corollari, sia una notevole estensione, valevoli per gli integrali quasi-regolari seminormali indipendentemente dall'ipotesi ora citata. Un secondo teorema, dedicato agli integrali soltanto quasi regolari, presenta maggiore originalità e la sua dimostrazione è stata particolarmente delicata e laboriosa.

Per mancanza di spazio nella presente Nota non possiamo render conto dei procedimenti dimostrativi che abbiamo seguito e che presentano particolare interesse, perchè avendo dovuto superare sia difficoltà proprie della forma parametrica, sia difficoltà che si incontrano nella forma ordinaria, abbiamo fatto appello a considerazioni svariate.

(4) Come è noto, si intende come problema di ordine n quello dipendente in modo effettivo dagli elementi differenziali di ordine non superiore a n.

(5) La ragione di tutto ciò è illustrata al n. 2 della nostra Memoria, redatta da qualche anno e che è ancora in corso di stampa a motivo delle persistenti difficoltà tipografiche: *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore.*

(6) Le dimostrazioni di tutte le proposizioni enunciate nella presente Nota sono contenute nella nostra Memoria citata in (5), nella quale lo sviluppo della materia è illustrato da esempi che mettono in evidenza la ragione delle ipotesi che facciamo.

Infine abbiamo stabilito alcuni criteri che permettono di estendere i precedenti teoremi esistenziali al caso di campi illimitati; due di tali proposizioni sono riportate al n. 3 della presente Nota: esse si possono enunciare anche per i problemi del primo ordine e in questo caso mentre la prima fornisce una lieve estensione di un criterio già noto, la successiva si presenta del tutto nuova.

1. Generalità. - α) Tenuto presente che dicesi campo A [7] un insieme di punti del piano (x, y) contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito, supponiamo che $F(x, y, x', y', \theta')$ sia una funzione: 1° definita e continua insieme con la propria derivata parziale $F_{\theta'}$ in ogni punto (x, y) del campo A, per ogni coppia di numeri x', y' non entrambi nulli e per ogni valore finito di θ'; 2° positivamente omogenea di grado uno rispetto alle variabili x', y'; 3° tale inoltre che sia $F(x, y, 0, 0, \theta') = 0$ [8].

Dicesi coppia normalizzata ogni coppia x', y', per la quale è $x'^2 + y'^2 = 1$.

β) Se C è una curva rettificabile, e $x = x(s), y = y(s), (0 \leq s \leq L)$ è una sua rappresentazione parametrica, prendendo come parametro l'arco rettificato s, dicesi *angolo di direzione* θ della curva C in un suo punto in cui esiste la tangente, l'angolo determinato a meno di multipli di 2π, di cui deve ruotare, nel senso delle rotazioni positive, l'asse delle x per divenire parallelo a tale tangente e avere lo stesso verso. Intenderemo inoltre che quando la curva considerata possiede in ogni punto la tangente, la cui direzione e il verso varino in modo continuo al variare del punto, l'arbitrarietà di θ sia subordinata al fatto che $\theta(s)$ risulti funzione continua di s lungo tutta la curva se questa è aperta, o possa presentare al più una sola discontinuità nel punto che si assume come punto iniziale e quindi anche come punto terminale della curva se questa è chiusa.

γ) Diciamo *curva ordinaria* $C^{(2)}$ ogni curva rettificabile

$$C^{(2)}: \quad x = x(s) \ , \quad y = y(s) \ , \quad (0 \leq s \leq L),$$

essendo s la lunghezza dell'arco rettificato, per la quale ogni punto $\big(x(s), y(s)\big)$, con $0 \leq s \leq L$, appartiene al campo A, le funzioni $x(s), y(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x'(s), y'(s)$ ed esiste finito l'integrale (del Lebesgue)

$$\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F\big(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)\big)\, ds,$$

(7) Vedi L. Tonelli, opera citata in (3), vol. I, cap. V, n. 72, p. 201.

(8) Il Bogoliouboff (loc. cit. in (2), § 1, p. 197), assunto come parametro l'arco s, indicato con θ l'angolo di direzione e posto $\theta' = \frac{d\theta}{ds}$, considera la funzione $f(x, y, \theta, \theta')$ che suppone periodica di periodo 2π rispetto a θ: in tal caso l'integrale risulta indipendente dal parametro scelto se si assume come funzione integranda il prodotto $f(x, y, \theta, \theta')\sqrt{x'^2 + y'^2}$.

ove si è tenuto presente che dall'assoluta continuità delle $x'(s)$, $y'(s)$ segue quella di $\theta(s)$, e quindi la curvatura $\theta'(s)$ esiste finita quasi-dappertutto.

Converremo inoltre che ogni curva costituita di un solo punto sia una curva ordinaria $C^{(2)}$, per la quale è $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}} = 0$.

δ) L'integrale $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ dicesi *quasi-regolare positivo*, se in tutti i punti (x, y) del campo A, per tutte le coppie x', y', di numeri non ambedue nulli, la derivata parziale $F_{\theta'}(x, y, x', y', \theta')$, considerata come funzione della sola θ', è sempre non decrescente. Esso è inoltre *seminormale* se per nessuna delle quaterne (x, y, x', y') ora indicate la derivata $F_{\theta'}$ è costante per tutti i valori di θ'.

L'integrale $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ dicesi *definito positivo* se per tutte le quaterne (x, y, x', y') ora indicate e per tutti i valori di θ' è $F > 0$.

ε) Data una curva ordinaria $C^{(2)}_0$ di lunghezza $L_0 > 0$ diremo che un'altra curva ordinaria $C^{(2)}$ di lunghezza L appartiene all'intorno $(\rho)^2$, con $0 < \rho < 1$, della $C^{(2)}_0$, quando, indicate con s e σ le lunghezze degli archi delle $C^{(2)}_0$ e $C^{(2)}$ contate a partire dai loro primi punti terminali, se le curve sono aperte, o da punti convenientemente scelti, se le curve sono chiuse, è possibile determinare una funzione $\sigma(s)$, $(0 \leq s \leq L_0)$ con $\sigma(0) = 0$, $\sigma(L_0) = L$, la quale sia continua insieme con la propria derivata del primo ordine $\sigma'(s)$, e per la quale valga la doppia disuguaglianza $1 - \rho \leq \sigma'(s) \leq 1 + \rho$, in modo che si abbia per ogni s di $(0, L_0)$

$$|x_0(s) - x(\sigma(s))| \leq \rho \quad , \quad |y_0(s) - y(\sigma(s))| \leq \rho \quad ,$$

$$\left| \frac{dx_0(s)}{ds} - \left[\frac{dx(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho \quad , \quad \left| \frac{dy_0(s)}{ds} - \left[\frac{dy(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)} \right| \leq \rho .$$

Se la $C^{(2)}_0$ è costituita da un solo punto (x_0, y_0) diremo che una curva ordinaria $C^{(2)}$ di lunghezza $L > 0$

$$x = x(\sigma) \quad , \quad y = y(\sigma) \quad , \quad (0 \leq \sigma \leq L)$$

appartiene all'intorno $(\rho)^2$ della $C^{(2)}_0$ se è per ogni σ di $(0, L)$

$$|x_0 - x(\sigma)| \leq \rho \quad , \quad |y_0 - y(\sigma)| \leq \rho ,$$

e se per ogni coppia di valori distinti σ_1 e σ_2 di $(0, L)$ sono verificate le disuguaglianze

$$|x'(\sigma_1) - x'(\sigma_2)| \leq \rho \quad , \quad |y'(\sigma_1) - y'(\sigma_2)| \leq \rho .$$

Infine se anche $C^{(2)}$ è costituita da un solo punto (x, y), è evidente che essa appartiene all'intorno $(\rho)^2$ della $C^{(2)}_0$ quando sono verificate le disuguaglianze $|x_0 - x| \leq \rho$, $|y_0 - y| \leq \rho$.

ζ) Considerato un insieme J di infinite curve ordinarie $C^{(2)}$ si dice che la curva $C^{(2)}_0$ è una sua *curva di accumulazione di ordine* 2, se ad ogni intorno $(\rho)^2$ della $C^{(2)}_0$ appartengono sempre infinite curve dell'insieme.

Ciò premesso, un insieme J di curve ordinarie $C^{(2)}$ costituisce una *classe completa di ordine* 2, quando ogni sua curva di accumulazione di ordine 2 se è una curva ordinaria $C^{(2)}$ appartiene pure all'insieme J.

2. Esistenza dell'estremo in campi limitati. – α) Supponiamo in tutto il presente numero che il campo A, di cui al n. 1, α), sia limitato e indichiamolo con A_0.

β) Teorema I. – *Si supponga che*: 1° *l'integrale* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *sia quasi-regolare positivo;* 2° *esista una funzione* $\Phi(u)$, $(0 \leq u < +\infty)$ *inferiormente limitata tale che per* $u \to +\infty$ *sia* $\Phi(u) : u \to +\infty$, *in modo che in tutto il campo* A_0 *e per ogni coppia normalizzata* x', y' *sia*

$$F(x, y, x', y', \theta') \geq \Phi(|\theta'|).$$

Allora in ogni classe $K^{(2)}$ *completa di ordine* 2 *di curve ordinarie* $C^{(2)}$ *di lunghezza inferiore ad un numero fisso esiste il minimo assoluto di* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$.

γ) Corollari del teorema I. – Nel teorema precedente la condizione che le curve della classe $K^{(2)}$ abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso può essere soppressa se è verificata o l'una o l'altra delle seguenti ipotesi:

I) l'integrale $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ è definito positivo;

II) esiste una costante $\lambda > 0$ in modo che per ogni $u \geq 0$ risulti $\Phi(u) \geq \lambda u$.

δ) Un'estensione del teorema I. – *Il teorema I continua ad essere valido anche quando le lunghezze delle curve della classe* $K^{(2)}$ *non siano limitate, purchè tutte le curve ordinarie* $C^{(2)}$ *per le quali è* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}} \leq 0$, *abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso.*

Osservazione. - Questa condizione è sempre verificata, quando $\Phi(u)$ è non negativa e si annulla soltanto per $u = 0$.

ε) Teorema II. – *Si supponga che*: 1° *l'integrale* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *sia quasi-regolare positivo;* 2° *esistano* t *punti distinti* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_t, y_t)$ *e* $t+2$ *numeri positivi* $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t, \omega, h_0$, *con* ω *maggiore di tutti i* $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t$, *in modo che in tutto il campo* A_0, *per ogni coppia* x', y' *normalizzata e per ogni* θ' *sia verificata la disuguaglianza*

$$F(x, y, x', y', \theta') \geq$$

$$\geq h_0 \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\right)^{\mu_1} \cdots \left(\sqrt{(x-x_t)^2 + (y-y_t)^2}\right)^{\mu_t} |\theta'|^{1+\omega}.$$

Sotto queste ipotesi in ogni classe $K^{(2)}$ *completa di ordine* 2 *di curve ordinarie* $C^{(2)}$ *esiste il minimo assoluto di* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$.

3. Esistenza dell'estremo in campi illimitati. – Abbandonata l'ipotesi che il campo A sia limitato, abbiamo stabilito fra l'altro i seguenti criteri:

a) *Se esistono un numero* $R > 0$ *e una funzione* $\psi(u)$ *definita e continua per* $u \geqq R$, *sempre positiva, non decrescente e tale che* $\int_R^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} = +\infty$, *in modo che in ogni punto del campo* A *esterno al cerchio* $(0; R)$, *per ogni coppia* (x', y') *normalizzata e per ogni valore di* θ' *sia*

$$F(x, y, x', y', \theta') \geqq \frac{1}{\psi(\sqrt{x^2 + y^2})},$$

e se in ogni parte limitata del campo A *sono verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi del numero precedente, allora esiste il minimo assoluto di* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *in ogni classe completa di ordine* 2 *di curve ordinarie* $C^{(2)}$ *ognuna delle quali debba passare per almeno un punto di un dato insieme limitato e chiuso.*

b) *Se esistono un numero* $R > 0$ *e una funzione* $\varphi(u)$ *definita e continua per* $u \geqq R$, *non negativa e tale che, per* $u \to +\infty$, *sia* $\varphi(u) \to +\infty$, *in modo che in ogni punto del campo* A *esterno al cerchio* $(0; R)$, *per ogni coppia normalizzata* (x', y'), *e per ogni valore di* θ' *sia*

$$F(x, y, x', y', \theta') \geqq \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

e se in ogni parte limitata del campo A *sono verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi del numero precedente, allora esiste il minimo assoluto di* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *in ogni classe* $K^{(2)}$ *completa di ordine* 2 *di curve ordinarie* $C^{(2)}$ *di lunghezza non inferiore ad un numero fisso* $l' > 0$.

Osservazione. – Le proposizioni del presente numero si possono enunciare anche per i problemi del primo ordine, e, in tal caso, mentre la *a*) fornisce una lieve estensione di un teorema del Tonelli [9], la *b*) si presenta del tutto nuova.

Matematica. — *Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali* [1]. Nota II di L. Amerio, presentata [2] dal Corrisp. M. Picone.

Osservazione. – Si possono indicare altri procedimenti, analoghi a quello della precedente Nota, per determinare le autosoluzioni dei problemi al contorno. Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$\Delta_2 u + \lambda u = 0,$$

(9) Vedi L. Tonelli, opera cit. in (3), vol. II, n. 23, *a*), p. 68.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(i cui autovalori sono tutti positivi) e cerchiamo l'autosoluzione del problema di Dirichlet (determinata, come è noto, a meno di un fattore costante)[3] che corrisponde al minimo autovalore.

Siccome tale autosoluzione ha segno costante in τ, si ricava dalla (9), in cui si ponga $w = 1$,

$$\int_\sigma B\, d\sigma = \lambda \int_\tau u\, d\tau \neq 0 .$$

Si può allora porre

$$B \sim 1 - \sum_0^\infty{}_r (1 , v'_r)\, v'_r ,$$

perchè se risultasse

$$1 \sim \sum_0^\infty{}_r (1 , v'_r)\, v'_r ,$$

sarebbe, per le (20),

$$\int_\sigma B\, d\sigma = \sum_0^\infty{}_r (1 , v'_r) \int_\sigma B v'_r\, d\sigma = 0 ,$$

ciò che è assurdo.

4. Possiamo ottenere le autosoluzioni del problema di Dirichlet anche valendoci del sistema (17).

Sia $\mathbf{G}$ il vettore incognito, di componenti u in τ, B in σ e sia $\{ \omega_r \}$ la successione di vettori di componenti $-E^*(w_r)$ in τ, w_r in σ. Sia poi $\{ \varkappa_r \}$ la successione ortogonale e normale dedotta dalla successione $\{ \omega_r \}$ con il noto procedimento di ortogonalizzazione e normalizzazione.

Dalla (17) segue allora, per $A \equiv f \equiv 0$, che $\mathbf{G}$ è autosoluzione del sistema

$$(\mathbf{G} , \varkappa_r) = 0 . \tag{33}$$

Inoltre *tutte* le autosoluzioni del problema di Dirichlet si deducono dalle autosoluzioni del sistema (33).

Per trovare tali autosoluzioni si può procedere nel modo seguente.

Sia $\{ \Phi_s \}$ *la successione di vettori di componenti* w_s *in* τ, 0 *in* σ.

Si ha allora che *condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema* (33) *ammetta un'autosoluzione* $\mathbf{G}_1$ *è che esista un'indice* s_1 (*e se ne esistono più sceglieremo il minore*) *tale che risulti*

$$\int_\tau w_{s_1}^2\, d\tau = (\Phi_{s_1} , \Phi_{s_1}) > \sum_0^\infty{}_r (\Phi_{s_1} , \varkappa_r)^2 \tag{34}$$

(3) R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*. Berlin, Springer, 1931, vol. I, pp. 392–93.

In tal caso si può porre

$$\mathbf{G}_1' \sim \boldsymbol{\Phi}_{s_1} - \sum_0^\infty{}_r (\boldsymbol{\Phi}_{s_1}, \boldsymbol{z}_r)\, \boldsymbol{z}_r . \tag{35}$$

La condizione è necessaria. Infatti se per ogni s risulta

$$(\boldsymbol{\Phi}_s, \boldsymbol{\Phi}_s) = \sum_0^\infty{}_r (\boldsymbol{\Phi}_s, \boldsymbol{z}_r)^2,$$

cioè

$$\boldsymbol{\Phi}_s \sim \sum_0^\infty{}_r (\boldsymbol{\Phi}_s, \boldsymbol{z}_r)\, \boldsymbol{z}_r,$$

si ha, per la (33),

$$(\mathbf{G}, \boldsymbol{\Phi}_s) = \int_\tau u w_s \, d\tau = 0 .$$

Ne segue, per la (16),

$$u \equiv 0$$

e quindi, per la seconda delle (13),

$$\mathrm{B} \equiv 0$$

cioè

$$\mathbf{G} \equiv 0 .$$

La condizione è sufficiente. Se vale la (34) si ha infatti, per la (5), che il vettore $\mathbf{G}_1'$ dato dalla (35) è autosoluzione del sistema (33). Inoltre, per la seconda delle (13), la sua componente in τ, u_1', non può essere identicamente nulla ed è un'autosoluzione del problema di Dirichlet.

Poniamo ora

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1' (\mathbf{G}_1', \mathbf{G}_1')^{-\frac{1}{2}},$$

in modo che $\mathbf{G}_1$ risulti un'autosoluzione normale del sistema (33), e consideriamo il sistema

$$\begin{cases} (\mathbf{G}_2', \boldsymbol{z}_r) = 0 \\ (\mathbf{G}_2', \mathbf{G}_1) = 0 . \end{cases} \tag{36}$$

Con lo stesso ragionamento ora fatto si ha che *condizione necessaria e sufficiente perchè esista un'autosoluzione* $\mathbf{G}_2'$ *del sistema* (36) *è che esista un indice* s_2 *tale che risulti*

$$(\boldsymbol{\Phi}_{s_2}, \boldsymbol{\Phi}_{s_2}) > (\boldsymbol{\Phi}_{s_2}, \mathbf{G}_1)^2 + \sum_0^\infty{}_r (\boldsymbol{\Phi}_{s_2}, \boldsymbol{z}_r)^2 . \tag{37}$$

In tal caso si può porre

$$\mathbf{G}_2' \sim \boldsymbol{\Phi}_{s_2} - (\boldsymbol{\Phi}_{s_2}, \mathbf{G}_1)\, \mathbf{G}_1 - \sum_0^\infty{}_r (\boldsymbol{\Phi}_{s_2}, \boldsymbol{z}_r)\, \boldsymbol{z}_r . \tag{38}$$

Inoltre come indice s_2 (necessariamente $> s_1$) sceglieremo il *primo* intero positivo per cui valga la (37).

Posto

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2' (\mathbf{G}_2', \mathbf{G}_2')^{-\frac{1}{2}}.$$

$\mathbf{G}_2$ risulta un'autosoluzione del sistema (33), normale e ortogonale a $\mathbf{G}_1$. Le due componenti u_2, u_1 di tali vettori sono perciò autosoluzioni del problema di Dirichlet linearmente indipendenti.

Così proseguendo, si ottiene una successione $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \cdots, \mathbf{G}_p, \cdots$ di autosoluzioni del sistema (33) ortogonali e normali, cui corrispondono le autosoluzioni $u_1, u_2, \cdots, u_p, \cdots$ linearmente indipendenti.

Risulta poi

$$\mathbf{G}_h = \mathbf{G}_h' (\mathbf{G}_h', \mathbf{G}_h)^{-\frac{1}{2}}, \tag{39}$$

dove si è posto, per $h > 1$,

$$\mathbf{G}_h' \sim \boldsymbol{\Phi}_{s_h} - \sum_1^{h-1} {}_i (\boldsymbol{\Phi}_{s_h}, \mathbf{G}_i)\, \mathbf{G}_i - \sum_{1}^{\infty} {}_r (\boldsymbol{\Phi}_{s_h}, \boldsymbol{z}_r)\, \boldsymbol{z}_r. \tag{40}$$

Inoltre *ogni autosoluzione* $\mathbf{G}$ *del sistema* (33) *è una combinazione lineare dei vettori* $\mathbf{G}_h$.

Infatti supponiamo che $\mathbf{G}$ sia un'autosoluzione del sistema

$$\begin{cases} (\mathbf{G}, \boldsymbol{z}_r) = 0 \\ (\mathbf{G}, \mathbf{G}_h) = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Osserviamo che ogni vettore $\boldsymbol{\Phi}_t$ si può sviluppare in una serie del tipo

$$\boldsymbol{\Phi}_t \sim \sum_1^{k_t} {}_i (\boldsymbol{\Phi}_t, \mathbf{G}_i)\, \mathbf{G}_i + \sum_{0}^{\infty} {}_r (\boldsymbol{\Phi}_t, \boldsymbol{z}_r)\, \boldsymbol{z}_r, \tag{42}$$

per il modo stesso con cui si sono ottenuti i vettori $\mathbf{G}_h$.

Dalle (41), (42) segue allora

$$(\mathbf{G}, \boldsymbol{\Phi}_t) = \int_\tau u w_t \, d\tau = 0$$

e quindi

$$u \equiv 0.$$

Per la seconda delle (13) risulta poi

$$\mathrm{B} \equiv 0$$

da cui

$$\mathbf{G} \equiv 0.$$

La successione $\{G_h ; \varepsilon_r\}$ è perciò chiusa. Se G è un'autosoluzione del sistema (33) risulta allora

$$G \sim \sum (G , G_h) G_h$$

da cui la tesi.

Osservazione. - I procedimenti che abbiamo indicati per trovare tutte le autosoluzioni del problema di Dirichlet, valgono anche per determinare le autosoluzioni degli altri problemi al contorno per l'equazione (7), come facilmente si dimostra.

Lo stesso dicasi per le altre equazioni considerate nei lavori precedentemente ricordati.

Matematica. — *Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue.* Nota di L. Cesari, presentata [1] dal Corrisp. M. Picone.

1. Le superficie continue in forma parametrica [2]. - Sia A una regione aperta di Jordan dal piano $\pi \equiv (u , v)$, sia A* la curva continua, semplice e chiusa costituente la frontiera di A e sia $\bar{A} = A + A^*$. Siano $x(u , v) , y(u , v) , z(u , v)$ funzioni continue in $\bar{A}$ e sia S la superficie continua

$$(1) \quad S : x = x(u , v) \quad ; \quad y = y(u , v) \quad , \quad z = z(u , v) \quad , \quad (u , v) \in \bar{A} .$$

Ad ogni punto $P \equiv (u , v)$ di $\bar{A}$ corrisponde per le (1) un punto $Q \equiv (x , y , z)$ dello spazio (x , y , z) che dicesi l'immagine $Q \equiv S(P)$ del punto P sulla superficie S. Ogni punto $Q \equiv (x , y , z)$ della superficie S è l'immagine di almeno un punto di A. Diciamo $S^{-1}(Q)$ l'insieme di tutti i punti di $\bar{A}$ la cui immagine cade in Q. L'insieme $S^{-1}(Q)$ è chiuso ed i suoi componenti sono dei continui. Sia G la collezione di tutti i continui g di $\bar{A}$ che sono componenti di qualche insieme $S^{-1}(Q)$. Ogni punto di $\bar{A}$ appartiene ad uno ed un solo continuo g di G. I continui g di G sono i continui massimali di $\bar{A}$ sui quali le funzioni $x(u , v) , y(u , v) , z(u , v)$ sono (tutte e tre) costanti.

Ai punti di A* corrispondono sulla superficie S i punti di una curva continua e chiusa C. Diremo talvolta che la superficie S si appoggia alla curva C. Diremo inoltre L (S) l'area secondo Lebesgue della superficie S.

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Sullo stesso argomento cfr. L. Cesari, *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica.* « Boll. U. M. I. », ser. II, anno IV, pp. 109-117. Inoltre *a) Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie.* « Ann. R. Scuola Normale Sup. Pisa », ser. II, vol. XII (1943), pp. 61-84; *b) Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie.* « Mem. R. Accad. Italia », vol. XIV (1944), pp. 891-953; *c) Sulla rappresentazione delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue.* « Rend. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXIX (1946); *d) Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue.*

2. Superficie non degeneri e superficie di tipo A[3]. – Diremo che la superficie S è *di tipo* A se la relativa collezione G gode della seguente proprietà: α) per ogni continuo g di G l'insieme aperto $\pi - g$ è connesso. Diremo che la superficie S è *non degenere*, ossia *del tipo topologico del disco circolare*, se la relativa collezione G gode delle seguenti proprietà: α') per ogni continuo g di G l'insieme aperto A — Ag è connesso; β') nessun continuo g di G contiene interamente A*.

Ogni superficie non degenere è una superficie di tipo A ma non viceversa. Tuttavia, ogni superficie di tipo A che si appoggia ad una curva di Jordan è non degenere[4].

3. Funzioni a variazione limitata secondo Tonelli in un insieme aperto[5]. – Sia $f(x)$ una funzione continua nell'insieme aperto E dell'asse x e siano $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ gli intervalli aperti, a due a due senza punti interni in comune, costituenti E. In ciascuno degli intervalli α_i la funzione $f(x)$ abbia una variazione totale $v_i, i = 1, 2, \cdots$. Poniamo

$$W(E, f) = \sum_{i=1}^{(\infty)} v_i,$$

ove abbiamo scritto (∞) per indicare che si tratta di una somma, oppure di una serie secondochè il numero degli intervalli α_i costituenti E è finito, oppure infinito.

Diremo $W(E, f)$ la *variazione totale secondo Tonelli* della funzione $f(x)$ nell'insieme aperto E. Diremo che la funzione $f(x)$ è a *variazione limitata secondo Tonelli* nell'insieme aperto E se $W(E, f) < +\infty$. Diremo infine che $f(x)$ è *assolutamente continua secondo Tonelli* nell'insieme aperto E se $f(x)$ è a variazione limitata in E e assolutamente continua in ciascuno degli intervalli α_i costituenti E.

Sia $f(x, y)$ una funzione continua in un insieme aperto E del piano (x, y). Ogni retta $y = \bar{y}$ sega l'insieme E in un insieme lineare aperto $E(\bar{y})$ (eventualmente vuoto). Analoga definizione abbiano gli insiemi $E(\bar{x})$. Diciamo $W_x(E, f, \bar{y})$ la variazione totale W della funzione della sola x, $f(x, \bar{y})$ nell'insieme aperto $E(\bar{x})$, ossia poniamo

$$W_x(E, f, \bar{y}) = W[E(\bar{y}), f(x, \bar{y})],$$

ove intendiamo $W_x(E, f, \bar{y}) = 0$ se $E(\bar{y})$ è vuoto. Analoga definizione abbia $W_y(E, f, \bar{x})$.

Diremo che la funzione $f(x, y)$ è *a variazione limitata secondo Tonelli* in E se la funzione della sola y, $W_x(E, f, y)$, $-\infty < y < +\infty$, è quasi

(3) Loc. cit. in (2) *a*, *b*.

(4) Loc. cit. in (2) *a*, p. 63.

(5) L. Tonelli, *Sur la semicontinuité des intrègrales doubles du Calcul des Variations*. « Acta Matematica », vol. 53 (1929), pp. 325–346.

ovunque finita, quasi continua e integrabile secondo Lebesgue e, analogamente, per la funzione della sola x, $W_y(E, f, x)$. Diremo che la funzione $f(x, y)$ è *assolutamente continua secondo Tonelli* in E se $f(x, y)$ è a variazione limitata secondo Tonelli in E, se, per quasi tutti gli $\bar{y}$, la funzione della sola x, $f(x, \bar{y})$ è assolutamente continua nell'insieme $E(\bar{y})$ e, analogamente scambiando x con y.

4. Rappresentazione quasi conforme delle superficie non degeneri. – Diremo che la rappresentazione

$$S: x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in \bar{A} = A + A^*,$$

della superficie continua S è *quasi conforme* [6] se

a) le funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono assolutamente continue secondo Tonelli in A.

b) le derivate parziali $x_u, x_v, \cdots, z_v$ sono integrabili L^2 in A;

c) quasi ovunque in A si ha $E = G, F = 0$, ove

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad , \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad , \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Diremo cerchio unità il cerchio $\mathfrak{C} \equiv (u^2 + v^2 \leq 1)$. Facendo uso del metodo diretto del Calcolo delle Variazioni io ho dimostrato il seguente teorema del tipo di Schwarz:

Teorema I [7]. – *Ogni superficie poliedrica aperta e non degenere ammette una rappresentazione quasi conforme sul cerchio unità.*

Mediante questo teorema ho poi ritrovato, direttamente, il seguente

Teorema II (di C. B. Morrey [8]). – *Ogni superficie continua aperta e non degenere, di area finita secondo Lebesgue, ammette una rappresentazione quasi conforme sul cerchio unità. Inoltre*

$$L(S) = \iint_{\mathfrak{C}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{C}} (E + G)\, du\, dv.$$

5. Rappresentazione quasi conforme delle superficie di tipo A [9]. – Sia S una superficie qualsiasi e sia la (1) una sua rappresentazione. Sia M un qualsiasi insieme aperto contenuto in A. Diciamo che la rappresentazione (1) della superficie continua S è *quasi conforme nell'insieme aperto* M contenuto in A se

a) le funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ [continue in $\bar{A}$] sono a variazione limitata e assolutamente continue secondo Tonelli nell'insieme aperto M;

(6) C. B. Morrey, *An analytic characterisation of surfaces of finite Lebesgue area.* « Amer. Journ. of Math. », vol. LVII (1935), pp. 692–702.

(7) Loc. cit. in (2) *a*.

(8) Loc. cit. in (6). Cfr. loc. cit. in (2) *a*.

(9) Loc. cit. in (2) *c*.

b) le derivate parziali $x_u, x_v, \cdots, z_v$ sono integrabili L^2 in M;

c) quasi ovunque in M si ha $E = G, F = 0$.

Sia ora S una superficie di tipo A e sia la (1) una sua rappresentazione. Sia G la relativa collezione dei continui massimali g di $\bar{A}$ sui quali le funzioni $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono (tutte e tre) costanti.

Sia $\{g\}^*$ la sottocollezione dei continui g di G che contengono almeno un punto di A^* [10]. Sia F l'insieme dei punti di $\bar{A}$ occupato dai continui g di $\{g\}^*$. L'insieme F è chiuso [11] e pertanto l'insieme $\mathfrak{A} = \bar{A} - F$ è aperto (relativamente ad $\bar{A}$). Diremo $\mathfrak{A}$ l'insieme *base* della superficie S di tipo A nella rappresentazione (1).

Io ho dimostrato il seguente

TEOREMA III [12]. – *Ogni superficie continua di tipo* A *e di area finita secondo Lebesgue ammette, nel cerchio unità* $\mathfrak{C}$, *una rappresentazione che risulta quasi conforme nel relativo insieme base* $\mathfrak{A}$ *contenuto in* $\mathfrak{C}$. *Inoltre*

$$L(S) = \iint_{\mathfrak{A}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \frac{1}{2} \iint_{\mathfrak{A}} (E + G)\, du\, dv .$$

6. FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA V IN UN INSIEME QUALUNQUE. – Sia $f(x), a \leq x \leq b$, una funzione continua nell'intervallo $I \equiv (a, b)$ e sia $E \subset I$ un qualsiasi insieme di punti di I. Poniamo

$$V(E, f) = \text{extr. sup.} \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

per tutte le possibili n–uple $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ di punti, tutti appartenenti ad E.

Diremo $V(E, f)$ [13] la *variazione totale* V della funzione $f(x)$ nell'insieme E. Diremo che la funzione $f(x)$ è *a variazione limitata* V nell'insieme E se $V(E, f) < +\infty$. Diremo infine che $f(x)$ è *assolutamente continua* V nell'insieme E se ad ogni numero $\varepsilon > 0$ si può far corrispondere un $\lambda > 0$ tale che, per ogni gruppo finito di intervalli $(a_i, b_i), i = 1, 2, \cdots, n$, a due a due senza punti interni in comune, i cui estremi appartengono ad E e tali che $\sum (b_i - a_i) < \lambda$, risulta $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ [14].

(10) Loc. cit. in (2) *b*, p. 907.

(11) Loc. cit. in (2) *b*, p. 907.

(12) Loc. cit. in (2), *c*.

(13) Cfr. S. SAKS, *Theory of the integral*. «Monografie Matematyczne, Warszawa» (1937), pp. 221–223. Tali funzioni, usate da DENJOY e da altri AA., sono indicate, da S. SAKS, col nome di funzioni VB.

(14) Se l'insieme E è aperto e $f(x)$ è a variazione limitata V in E, allora essa è anche a variazione limitata secondo TONELLI in E, ma non viceversa. Altrettanto per la assoluta continuità.

Per tali funzioni valgono proposizioni che estendono note proprietà delle funzioni a variazione limitata e assolutamente continue in un intervallo. Tra l'altro, vale la seguente (Denjoy-Kintchine [15]): Se $f(x)$ è a variazione limitata V in un insieme E, allora, quasi ovunque in E, esiste la derivata asintotica $f'_{as}(x)$ e tale funzione risulta integrabile L in E. Inoltre $V(f, E) \geqq \geqq \int_E |f'_{as}(x)|\, dx$.

Sia $f(x, y)$, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, una funzione continua nel quadrato $Q \equiv (0, 1, 0, 1)$ e sia $E \subset Q$ un insieme di punti di Q. Con le notazioni già adoperate nel n. 3, diremo $V_x(E, f, \bar{y})$ la variazione totale V della funzione della sola $x, f(x, \bar{y})$, $0 \leqq x \leqq 1$, nell'insieme $E(\bar{y})$, ossia poniamo

$$V_x(E, f, \bar{y}) = V[E(\bar{y}), f(x, \bar{y})],$$

ove intendiamo $V_x(E, f, \bar{y}) = 0$ se $E(\bar{y})$ è vuoto. Analoga definizione abbia $V_y(E, f, \bar{x})$, $0 \leqq \bar{x} \leqq 1$.

Diremo che la funzione $f(x, y)$, continua in Q, è *a variazione limitata* V in E se la funzione della sola y, $V_x(E, f, y)$, $0 \leqq y \leqq 1$, è quasi ovunque finita, quasi continua e integrabile L in $(0, 1)$ e, analogamente, per la funzione della sola x, $V_y(E, f, x)$, $0 \leqq x \leqq 1$. Diremo che la funzione $f(x, y)$ è *assolutamente continua* V in E se essa è a variazione limitata V in E, se per quasi tutti gli $\bar{y}$, $0 \leqq \bar{y} \leqq 1$, la funzione della sola $x, f(x, \bar{y})$, $0 \leqq x \leqq 1$, è assolutamente continua V nell'insieme $E(\bar{y})$ e, analogamente, scambiando x con y [16].

Vale la seguente proposizione [17]: ogni funzione $f(x, y)$ continua in Q e a variazione limitata V in un insieme $E \subset Q$ è dotata, quasi ovunque in E, di derivate parziali asintotiche e di differenziale asintotico [18] e le derivate parziali asintotiche risultano integrabili L in E. Non necessariamente esiste, quasi ovunque in E, il differenziale asintotico *regolare*, che potrà assicurarsi in determinati casi.

7. Rappresentazione delle superficie continue qualsiasi [19]. – Sia S una superficie qualsiasi e sia la (1) una sua rappresentazione. Sia M un

(15) Loc. cit. in (13), p. 222.

(16) Vale una proposizione analoga a quella della nota (14).

(17) Loc. cit. in (2) *d*.

(18) Cfr. per la nozione di differenziale asintotico e di differenziale asintotico regolare H. Stepanoff, *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale*. «Rec. Math. Soc. Moscou», vol. 32 (1925), pp. 511-525; R. Caccioppoli, *Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili*. «Rend. R. Accad. Lincei», ser. VI, vol. VII (1928), 1° sem., pp. 901-905; R. Caccioppoli e G. Scorza-Dragoni, *Necessità della condizione di Weierstrass* ecc. «Mem. R. Acc. Italia», vol. IX (1938), pp. 251-268; T. Rado, *On the derivative of the Lebesgue area of continous surfaces*. «Fund. Math.», to. XXX (1938), pp. 34-39.

(19) Loc. cit. in (2) *d*.

insieme contenuto in A. Diremo che la rappresentazione (1) della superficie continua S è *quasi conforme* nell'insieme $M \subset \bar{A}$, se

a) le funzioni $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ [continue in $\bar{A}$], sono a variazione limitata V e assolutamente continue V nell'insieme M;

b) le derivate parziali prime *asintotiche* $x'_u, x'_v, \cdots, z'_v$ sono integrabili L^2 in M;

c) quasi ovunque in M si ha $E = G, F = 0$.

Quando, inoltre, le funzioni $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ sono dotate, quasi ovunque in M, di differenziale asintotico regolare, diremo che la rappresentazione (1) è quasi conforme *regolare*.

Sia S una superficie continua qualsiasi e sia la (1) una sua rappresentazione. Diremo che un punto P interno ad A è *eccezionale* per la rappresentazione (1) se esiste un intorno circolare $\gamma \equiv U(P)$ di P tale che la superficie definita dalle (1) su U(P) ha area nulla secondo Lebesgue. Tale nozione si estende facilmente ai punti P che appartengono al contorno A^* di A.

L'insieme di tutti i punti eccezionali di $\bar{A}$ è un insieme aperto relativamente ad $\bar{A}$. Diremo che un insieme K di punti di $\bar{A}$ è *eccezionale* per la rappresentazione (1) se K è aperto relativamente ad $\bar{A}$ e tutti i suoi punti sono eccezionali. Diremo che un insieme H di punti di $\bar{A}$ è *proprio* per la rappresentazione (1) se $\bar{A} - H$ è eccezionale. Ogni insieme proprio è chiuso.

Io ho dimostrato il seguente

Teorema IV [20]. - *Ogni superficie continua* S *di area finita secondo Lebesgue ammette una rappresentazione*

$$S : x = X(u,v), y = Y(u,v), z = Z(u,v), \quad (u,v) \varepsilon Q \equiv (0,1,0,1),$$

sul quadrato fondamentale Q, *la quale risulta quasi conforme e regolare sopra un insieme chiuso* $H \subset Q$, *proprio per la rappresentazione. Inoltre*

$$L(S) = \iint_H \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \frac{1}{2} \iint_H (E + G)\, du\, dv.$$

Per le superficie non degeneri si può far sì che l'insieme H coincida con Q, per le superficie di tipo A si può far sì che H sia la chiusura dell'insieme base aperto $\mathfrak{A}$ della rappresentazione. In tal modo i teoremi II e III sono casi particolari del teorema IV. Il teorema IV assicura inoltre che, per ogni superficie continua di area finita secondo Lebesgue, esiste una rappresentazione (e quindi infinite) per la quale l'area è data dall'integrale classico.

(20) Loc. cit. in (2) *d*.

Matematica. — *Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazione.* Nota I di C. Birindelli, presentata [1] dal Socio M. Picone.

1. Nel § 1 di questo lavoro viene estesa la validità di un teorema di B. Manià [2] relativo ad una proprietà dell'integrale di Lebesgue. Il teorema in questione, dimostrato dal Manià nel caso dell'integrale di Lebesgue esteso ad un intervallo finito (a, b) dell'$S_{(1)}$, viene qui stabilito nel caso generale dell'integrale di Lebesgue esteso ad un insieme arbitrario E di $S_{(r)}$, ove $r \geqq 1$, con E misurabile limitato o no e di misura finita e sotto certe condizioni anche infinita. Nel § 2 viene dimostrata la validità anche per l'integrazione Lebesguiana, estesa agli insiemi E, misurabili limitati o no ma di misura finita (ma con FE di misura nulla se E è non limitato), di un qualunque $S_{(r)}$, di un teorema di L. Nachbin [3] sulla estensione di un classico lemma di Dirichlet, stabilito dal Nachbin nel solo caso dell'integrazione ordinaria secondo Riemann e limitatamente all'integrale lineare esteso ad un intervallo finito (a, b). La estensione del teorema alla integrazione Lebesguiana viene qui stabilita ricorrendo ai risultati trovati al § 1. Nel § 3, infine, viene brevemente segnalato il contributo che portano, per le condizioni di validità del teorema del § 1, alcuni teoremi del prof. M. Picone sulla uniforme sommabilità delle successioni di funzioni quasi continue in un insieme E misurabile e appartenente ad un $S_{(r)}$ qualunque.

§ 1. – 2. Sia $f(P)$ una funzione sommabile secondo Lebesgue in un insieme misurabile E limitato o no dello spazio $S_{(r)}$. È noto che preso il quadrato T, cioè un dominio quadrato rispetto ad $S_{(r)}$ contenente il punto P di E risulta in quasi-tutto E $\lim_{T \to P} \left\{ \frac{1}{\mathrm{Mis}\,(ET)} \cdot \int_{ET} g(P)\, dT \right\} = g(P)$.

Per semplificare l'esposizione delle dimostrazioni dei teoremi che seguono ci porremo nel caso in cui E sia dello spazio $S_{(2)}$; decomposti allora gli assi, a partire dall'origine O, in intervalli consecutivi di lunghezza $\frac{1}{n}$, si mandino dai punti di suddivisione le parallele all'asse lungo cui non stanno i punti stessi, dimodochè l'$S_{(2)}$ resti decomposto nella rete di dominî quadrati $T^{(n)}_{h,k}$. Gli insiemi misurabili $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$ presi due a due

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) B. Manià, *Una proprietà dell'integrale di Lebesgue.* « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXVII, fascicoli XI–XV, 1934.

(3) L. Nachbin, *Un'estensione di un lemma di Dirichlet.* Atti della Reale Accademia d'Italia, « Rendiconti » della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali, serie VII, vol. III, fasc. 6, novembre 1941.

sono privi di punti comuni, eccetto al più di un insieme di misura nulla. Limitandoci agli insiemi $E \cdot T_{h,k}^{(n)}$ di misura non nulla, porremo nei punti P di essi

$$g_n(P) = \frac{1}{\text{Mis}\left(E \cdot T_{h,k}^{(n)}\right)} \cdot \int_{E \cdot T_{h,k}^{(n)}} g(P)\, dT$$

escludendo se si vuole la definizione della funzione nei punti di E appartenenti alla frontiera di $T_{h,k}^{(n)}$ e nei punti degli $E \cdot T_{h,k}^{(n)}$ di misura nulla. La $g_n(P)$ è definita così in quasi-tutto E.

Dimostriamo i seguenti tre lemmi che dimostreremo per semplicità nel caso di $S_{(r)}$ per $r = 2$.

Lemma I. – *Se* E *è un insieme misurabile di misura finita e* $U < E$ *con* U *misurabile, se* μ *è un numero positivo tale che* $\text{Mis}\, U < \mu$, *ad ogni numero positivo* ε *si può far corrispondere un intero* $n(\varepsilon)$ *tale che per ogni decomposizione di* E *negli insiemi misurabili soliti* $E \cdot T_{h,k}^{(n)}$, *con* $n \geq n(\varepsilon)$, *la misura complessiva delle parti* $E \cdot T_{h,k}^{(n)}$ *nelle quali la densità media di* U *nelle* $E \cdot T_{h,k}^{(n)}$ *cioè il rapporto* $\dfrac{\text{Mis}\left(U \cdot T_{h,k}^{(n)}\right)}{\text{Mis}\left(E \cdot T_{h,k}^{(n)}\right)}$ *è* $> \varepsilon$, *sia* $< \mu$.

Se l'insieme U è formato da un numero finito di parti $E \cdot T$ a due a due senza punti interni comuni il teorema è evidente per ε nullo e quindi è vero *a fortiori* per ε positivo. Se l'insieme U è formato da una successione infinita di parti $E \cdot T : E \cdot T_1, E \cdot T_2, \cdots, E \cdot T_n, \cdots$ a due a due senza punti interni comuni, fissiamo un μ' tale che sia $\text{Mis}\, U < \mu' < \mu$, e un intero n tale che $\text{Mis}\,(E \cdot T_{1+n} + E \cdot T_{2+n} + \cdots) < \dfrac{\varepsilon(\mu - \mu')}{2}$. Diviso E nelle parti $E \cdot T_{h,k}^{(n)}$ la misura di quelle nelle quali l'insieme $E \cdot T_{1+n} + E \cdot T_{2+n} + \cdots$ ha una densità media $> \dfrac{\varepsilon}{2}$ è $< \mu - \mu'$. Ma se m è opportunamente grande, la misura delle parti nelle quali la densità media dell'insieme $E \cdot T_1 + E \cdot T_2 + \cdots + E \cdot T_n$ è $> \dfrac{\varepsilon}{2}$ è, per quanto si è detto sopra, $< \mu'$. Ne segue che la misura delle parti nelle quali la densità media di $U = ET_1 + ET_2 + \cdots + ET_n + ET_{n+1} + \cdots$ è $> \varepsilon$, è $< \mu' + (\mu - \mu') = \mu$.

Infine, se $U\,(< E)$ è un insieme misurabile qualunque, si determina una successione $U' = ET_1 + ET_2 + \cdots$, ove gli insiemi ET_n sono privi di punti interni comuni, contenente U e tale che $\text{Mis}\, U \leq \text{Mis}\, U' < \mu$. Ciò posto, per ogni $\varepsilon > 0$ si determini il numero $m(\varepsilon)$ corrispondente relativo all'insieme U': questo stesso $m(\varepsilon)$ soddisfa alla condizione dell'enunciato anche relativamente all'insieme U.

Lemma II. – *Sia* $g(P)$ *sommabile in* E *misurabile con misura finita, scelto* ε *positivo arbitrario è possibile far corrispondere ad* ε *un* $\delta(\varepsilon)$ *positivo*

tale che, per ogni n, comunque si prenda un insieme $U < E$ *misurabile tale che* $\text{Mis}\, U < \delta(\varepsilon)$, *sia* $\int_U |g_n(P)|\, dT < \varepsilon$.

Supponiamo come primo caso $g(P) \geq 0$ in tutto E. Ad ε corrisponde un $\rho(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni insieme misurabile $\Omega < E$ sia, se $\text{Mis}\, \Omega < 2 \cdot \rho(\varepsilon)$,

$$(a) \qquad \int_\Omega g(P)\, dT < \frac{\varepsilon}{3},$$

ed è possibile, in corrispondenza di ε, assegnare un nnmero positivo $N(\varepsilon)$ in maniera che nell'insieme $E_{N(\varepsilon)}$, definito dai punti P di E per cui $g(P) > N(\varepsilon)$, sia $\text{Mis}\, E_{N(\varepsilon)} < \rho(\varepsilon)$.

Siccome in quasi-tutto E è $\lim_{n\to\infty} g_n(P) = g(P)$ si può determinare un insieme misurabile E_1 con $\text{Mis}\, E_1 < \frac{1}{2}\rho(\varepsilon)$ con $E_1 < E$ e un intero n_1 tale che per $n \geq n_1$ in ogni punto di E ma esterno ad E_1 sia $|g_n(P) - g(P)| < 1$. Allora nell'insieme complementare di $E_1 + E_{N(\varepsilon)}$ su E, cioè $\Gamma_E(E_1 + E_{N(\varepsilon)})$, sarà $0 \leq g_n(P) < N(\varepsilon) + 1$ per $n \geq n_1$. Poichè è $\text{Mis}(E_1 + E_{N(\varepsilon)}) < \frac{3}{2}\rho(\varepsilon)$ si può applicare il lemma I nel senso che pensando alla decomposizione di E mediante le solite $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$ è possibile trovare un n' tale che per $n \geq n'$ il complesso delle parti $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$ in cui la densità media $\dfrac{\text{Mis}\left\{T^{(n)}_{h,k} \cdot (E_1 + E_{N(\varepsilon)})\right\}}{\text{Mis}\left(E \cdot T^{(n)}_{h,k}\right)}$, di $E_1 + E_{N(\varepsilon)}$ rispetto alla decomposizione di E nelle parti $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$, è $\geq \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot \int_E g(P)\, dT}$ abbia una misura $< 2 \cdot \rho(\varepsilon)$. Detto allora n_2 il maggiore dei numeri n_1, n' e indicando con $\Omega^{(n)}_1, \Omega^{(n)}_2, \cdots$, quelli degli $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$, in cui la detta densità media è $\geq \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot \int_E g(P)\, dT}$, è per $n \geq n_2$

$$(b) \qquad \int_{E_1 + E_{N(\varepsilon)}} g_n(P)\, dT \leq \int_{\Sigma_s \Omega^{(n)}_s} g_n(P)\, dT + \int_{\Omega_{(n)}} g_n(P)\, dT$$

ove $\Omega_{(n)}$ è la parte di $E_1 + E_{N(\varepsilon)}$ non appartenente ad $\Sigma_s \Omega^{(n)}_s$. Ma per la (a) è

$$(c) \qquad \int_{\Sigma_s \Omega^{(n)}_s} g_n(P)\, dT = \int_{\Sigma_s \Omega^{(n)}_s} g(P)\, dT < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Osservando che se U misurabile appartiene ad una delle parti $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$, sicchè $\text{Mis } U = \text{Mis}\left(U \cdot T^{(n)}_{h,k}\right)$, ed è $\theta = \dfrac{\text{Mis } U}{\text{Mis}\left(E \cdot T^{(n)}_{h,k}\right)}$ la densità media di U rispetto ad E, in $ET^{(n)}_{h,k}$, risulta

$$\int_U g_n(P)\, dT = \frac{1}{\text{Mis}\left(ET^{(n)}_{h,k}\right)} \int_{ET^{(n)}_{h,k}} g(P)\, dT \cdot \text{Mis } U = \theta \cdot \int_{E \cdot T^{(n)}_{h,k}} g(P)\, dT,$$

ne viene, per l'insieme $\Omega_{(n)}$,

$$(d) \qquad \int_{\Omega_{(n)}} g_n(P)\, dT \leq \frac{\varepsilon}{3 \cdot \int_E g(P)\, dT} \cdot \int_E g(P)\, dT = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dalle (b), (c), (d) risulta

$$(e) \qquad \int_{E_1 + E_{N(\varepsilon)}} g_n(P)\, dT < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Sia ora $U < E$ un arbitrario insieme misurabile e di misura $< \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot [N(\varepsilon)+1]}$ e indichiamo con U' la parte di U contenuta in $E_1 + E_{N(\varepsilon)}$ e con U'' la parte di U esterna ad $E_1 + E_{N(\varepsilon)}$. Si ha per la (e) che $\int_{U'} g_n(P)\, dT < \frac{2}{3}\varepsilon$ e che $\int_{U''} g_n(P)\, dT < [N(\varepsilon) + 1] \cdot \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot [N(\varepsilon) + 1]} = \dfrac{\varepsilon}{3}$, per $n \geq n_2$, vale a dire

$$(f) \qquad \int_U g_n(P)\, dT < \varepsilon, \quad \text{per} \quad n \geq n_2.$$

Poichè le $g_n(P)$ escluse sono in numero finito ($n < n_2$) si ha che il lemma vale per tutti gli n. Passando al caso in cui non sia sempre $g(P) \geq 0$, chiamata $g_1(P)$ la funzione $= g(P)$ ove $g(P) \geq 0$ e nulla altrove e con $g_2(P)$ l'altra $= -g(P)$ ove $g(P) < 0$ e nulla altrove, si ha $g(P) = g_1(P) - g_2(P)$ e $g_n(P) = g_{1_n}(P) - g_{2_n}(P)$ e quindi $|g_n(P)| \leq g_{1_n}(P) + g_{2_n}(P)$ conchè ci si riconduce al precedente caso.

Lemma III. – *Se per* α *e* β *positivi tali che* $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, *le* $|f(P)|^\alpha$, $|g(P)|^\beta$ *sono sommabili in* E *misurabile con misura finita, ad* $\varepsilon > 0$ *arbitrario si può far corrispondere un* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tale che per ogni insieme misurabile* $U < E$ *con misura* $\leq \delta(\varepsilon)$ *e per ogni* n *sia* $\int_U |f(P) \cdot g_n(P)| \cdot dT < \varepsilon$.

Trattiamo anzitutto il caso in cui $f(P)$ e $g(P)$ siano entrambe non negative in E. È in quasi-tutto E $\lim_{n \to \infty} g_n(P) \cdot f(P) = g(P) \cdot f(P)$.

Sia $\rho(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni insieme $\Omega < E$ misurabile con $\text{Mis}\,\Omega \leq 2\rho(\varepsilon)$ sia

$$(g) \qquad \int_{\Omega} [f(P)^{\alpha} + g(P)^{\beta}]\, dT < \frac{\varepsilon}{3}$$

e $N(\varepsilon) > 0$ opportuno in maniera che detto $E_{N(\varepsilon)}$ l'insieme $< E$ nei cui punti P $f(P) \cdot g(P) > N(\varepsilon)$, sia $\text{Mis}\, E_{N(\varepsilon)} < \rho(\varepsilon)$. Per essere in quasi-tutto E $\lim_{n\to\infty} g_n(P) \cdot f(P) = g(P) \cdot f(P)$, si può trovare un insieme $E_1 < E$ tale che $\text{Mis}\,[E_1 + E_{N(\varepsilon)}] < \frac{2}{3}\rho(\varepsilon)$ in maniera che nell'insieme $\Gamma_E(E_1 + E_{N(\varepsilon)})$ per $n \geq n_1$, con n_1 opportuno, sia sempre

$$(h) \qquad 0 \leq g_n(P) \cdot f(P) < N(\varepsilon) + 1 .$$

In forza del lemma I è possibile trovare un intero n' tale che per $n \geq n'$ il complesso delle parti $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$ in cui la densità media $\dfrac{\text{Mis}\left[T^{(n)}_{h,k} \cdot (E_1 + E_{N(\varepsilon)})\right]}{\text{Mis}\left[E \cdot T^{(n)}_{h,k}\right]}$, di $E_1 + E_{N(\varepsilon)}$ rispetto alla decomposizione di E nelle parti $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$, è $>$ di un certo numero σ, che fisseremo, sia $< 2\rho(\varepsilon)$. Se n_2 è il maggiore dei numeri n', n_1, per un $n \geq n_2$ siano $\Omega^{(n)}_1, \Omega^{(n)}_2, \cdots$, quelli degli $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$ in cui la detta densità media di $E_1 + E_{N(\varepsilon)}$ è maggiore di σ. Si ha, con le solite notazioni usate nella dimostrazione del lemma II,

$$(i) \qquad \int_{E_1 + E_{N(\varepsilon)}} g_n(P) \cdot f(P) \cdot dT \leq \int_{\sum_s \Omega^{(n)}_s} g_n(P) \cdot f(P) \cdot dT + \int_{\Omega_{(n)}} g_n(P) \cdot f(P) \cdot dT .$$

Per ogni $E \cdot T^{(n)}_{h,k}$ è

$$(l) \qquad \int_{E \cdot T^{(n)}_{h,k}} g_n(P) \cdot f(P) \cdot dT = \frac{1}{\text{Mis}\left(E \cdot T^{(n)}_{h,k}\right)} \cdot \int_{ET^{(n)}_{h,k}} g(P)\, dT \cdot \int_{E \cdot T^{(n)}_{h,k}} f(P) \cdot dT$$

ma per la relazione di Hölder

$$(m) \qquad \int_{E \cdot T^{(n)}_{h,k}} g(P)\, dT \leq \left(\int_{ET^{(n)}_{h,k}} g(P)^{\beta}\, dT \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(\text{Mis}\left(E \cdot T^{(n)}_{h,k}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{E_1 T^{(n)}_{h,k}} (g(P)^{\beta} + f(P)^{\alpha})\, dT \right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(\text{Mis}\left(ET^{(n)}_{h,k}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\int_{E \cdot T^{(n)}_{h,k}} f(P)\, dP \leq \left(\int_{ET^{(n)}_{h,k}} (g(P)^{\beta} + f(P)^{\alpha})\, dT \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\text{Mis}\left(ET^{(n)}_{h,k}\right)\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

da cui, sostituendo nella precedente,

$$(n) \qquad \int_{E\cdot T^{(n)}_{h,k}} g_n(P)\cdot f(P)\cdot dT \leq \int_{ET^{(n)}_{h,k}} (f(P)^\alpha + g(P)^\beta)\, dT.$$

Osserviamo ora che se U misurabile appartiene ad una delle parti $E\cdot T^{(n)}_{h,k}$ e la sua densità media rispetto $ET^{(n)}_{h,k}$ è $\leq \sigma$, si ha

$$(p) \qquad \int_U g_n(P)\cdot f(P)\cdot dT = \frac{1}{\mathrm{Mis}\left(ET^{(n)}_{h,k}\right)} \cdot \int_U f(P)\, dT \cdot \int_{ET^{(n)}_{h,k}} g(P)\, dT \leq$$

$$\leq \left(\frac{\mathrm{Mis}\, U}{\mathrm{Mis}\left(E\cdot T^{(n)}_{h,k}\right)}\right)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \int_{ET^{(n)}_{h,k}} (f(P)^\alpha + g(P)^\beta)\, dT \leq \sigma^{\frac{1}{\beta}} \cdot \int_{ET^{(n)}_{h,k}} (f(P)^\alpha + g(P)^\beta)\, dT.$$

Ma, per (n) e (g),

$$\int_{\Sigma_s \Omega^{(n)}_s} g_n(P)\cdot f(P)\cdot dT \leq \int_{\Sigma_s \Omega^{(n)}_s} (f(P)^\alpha + g(P)^\beta)\, dT < \frac{\varepsilon}{3}$$

e dalla (p)

$$\int_{\Omega_{(u)}} g_n(P)\, f(P)\, dT < \sigma^{\frac{1}{\beta}} \cdot \int_E (f(P)^\alpha + g(P)^\beta)\, dT.$$

Ne segue che se σ è scelto in modo che il secondo membro dell'ultima disuguaglianza sia eguale ad $\frac{\varepsilon}{3}$, è

$$(q) \qquad \int_{E_1 + E_{N(\varepsilon)}} g_n(P)\cdot f(P)\cdot dT < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Se $U < E$ è un arbitrario insieme misurabile e di misura $< \frac{\varepsilon}{3\cdot[N(\varepsilon)+1]}$ si vede subito operando come alla fine della dimostrazione del lemma II servendoci della (q) invece che della (e), che è

$$(r) \qquad \int_U g_n(P)\cdot f(P)\, dT < \varepsilon \quad \text{per} \quad n \geq n_2 \quad \text{e se} \quad \mathrm{Mis}\, U < \frac{\varepsilon}{3\,[N(3)+1]}.$$

Siccome le n escluse sono in numero finito $(n < n_2)$, il lemma resta giustificato per tutti gli n.

Se le $f(P), g(P)$ non sono sempre di un segno basta osservare che le solite $g_1(P), g_2(P), g_{1_n}(P), g_{2_n}(P)$ e le analoghe $f_1(P), f_2(P), f_{1_n}(P), f_{2_n}(P)$ dànno che

$$g_n(P)\cdot f(P) = [g_{1_n}(P) - g_{2_n}(P)]\cdot[f_1(P) - f_2(P)] =$$
$$= g_{1_n}(P)\cdot f_1(P) + g_{2_n}(P)\cdot f_2(P) - g_{2_n}(P)\cdot f_1(P) - g_{1_n}(P)\cdot f_2(P)$$

e dopo ciò si è ricondotti al caso precedente. La notevole importanza del II e III lemma consiste in sostanza nel fatto di mettere in evidenza il carattere della uniforme sommabilità delle successioni di funzioni $g_n(P)$, $g_n(P)\cdot f(P)$ in E (e quindi per ogni $U < E$ e misurabile).

Dimostriamo dopo ciò il seguente

Teorema I. – *Se la funzione* $g(P)$ *è sommabile secondo Lebesgue in un insieme* E, *di* $S_{(r)}$, *misurabile limitato o no di misura finita od infinita e supposta la* $g(P)$ *limitata in* E *e la* $f(P)$ *sommabile secondo Lebesgue in* E *allora è*

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(P)\cdot f(P)\cdot dT = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(P)\cdot g(P)\cdot dT = \int_E f(P)\cdot g(P)\cdot dT.$$

La proposizione vale anche nel caso in cui la $f(P)$ *è sommabile e limitata in* E *e la* $g(P)$ *sommabile in* E. Osserviamo anzitutto che per essere

$$\int_{ET_{h,k}^{(n)}} g_n(P) f(P)\, dT = \frac{1}{\mathrm{Mis}\left(ET_{h,k}^{(n)}\right)}\cdot\int_{ET_{h,k}^{(n)}} g(P)\, dT\cdot\int_{ET_{h,k}^{(n)}} f(P)\, dT = \int_{ET_{h,k}^{(n)}} f_n(P)\cdot g(P)\cdot dT$$

si ha che

$$\int_E g_n(P) f(P)\, dT = \int_E f_n(P)\, g(P)\, dT.$$

Nel primo caso essendo la $g(P)$ limitata in E è anche $|g_n(P)| \leq L$ se $|g(P)| \leq L$. Per $U < E$ è $\int_U |g_n(P)\cdot f(P)|\, dT \leq L\cdot\int_U |f(P)|\, dT$, da cui la uniforme sommabilità in E della successione $\{g_n(P)\cdot f(P)\}$.

Poichè la stessa successione converge in quasi-tutto E, per n tendente ad ∞, verso il limite $f(P)\cdot g(P)$ ne segue la (1) per il teorema di Lebesgue-Vitali. Il secondo caso si riconduce al primo tenendo conto dell'ultima uguaglianza.

Questo teorema è notevole perchè vale anche se E è di misura infinita.

Per il caso di $f(P)$ e $g(P)$ anche illimitate (ma con E non di misura infinita) vale il

Teorema II. – *Se le due funzioni* $f(P)$, $g(P)$ *sono quasi continue in un insieme misurabile* E, *di* $S_{(r)}$, *limitato o no e di misura finita e se per due numeri reali* α, β *positivi tali che* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ *le* $|g(P)|^\alpha$, $|f(P)|^\beta$ *sono sommabili in* E *secondo Lebesgue, allora vale la* (1).

Col medesimo calcolo eseguito nelle (l), (m), (n) si ha che

$$\int_{ET_{h,k}^{(n)}} |g_n(P)\cdot f(P)|\, dT \leq \int_{ET_{h,k}^{(n)}} (|g(P)|^\alpha + |f(P)|^\beta)\, dT.$$

Per l'integrabilità secondo Lebesgue della $|g(P)|^\alpha + |f(P)|^\beta$ in E e tenendo presente l'ultima disuguaglianza si ha che la funzione $g_n(P) \cdot f(P)$ è sommabile secondo Lebesgue in E. Inoltre per il lemma III la successione $g_n(P) \cdot f(P)$ è uniformemente sommabile in E. Per la convergenza della successione stessa verso la $g(P) \cdot f(P)$ in quasi-tutto E, è applicabile il teorema di Lebesgue-Vitali.

Osservazione. – Il teorema vale in particolare se $f(P)$ e $g(P)$ sono hilbertiane in E. Più particolarmente ancora se per α e β positivi tali che $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ le $|f(P)|^\alpha$, $|f(P)|^\beta$ sono sommabili in E, dal che segue essere $f(P)$ hilbertiana in E, è $\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(P) \cdot f(P)\, dT = \int_E [f(P)]^2\, dT$.

Matematica. — *Relazioni quantitative per gli autovalori di un'equazione integrale omogenea di seconda specie* [1]. Nota di G. Grioli, presentata [2] dal Socio M. Picone.

In varie questioni di Fisica-Matematica è fondamentale lo studio dell'equazione integrale

$$y(P) = \lambda \int_E K(P;Q)\, dE(Q), \tag{1}$$

ove P, Q sono punti di un insieme E ad un numero qualunque di dimensioni, λ un parametro di cui occorre determinare gli autovalori ed il nucleo reale simmetrico $K(P;Q)$ di quadrato sommabile ammette autovalori reali. Ulteriori condizioni permettono di asserire che essi hanno tutti il medesimo segno. Volendomi riferire a casi concreti che interessano la Fisica-Matematica farò quindi l'ipotesi che gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, della (1) verifichino le disuguaglianze [3]

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots, \tag{2}$$

intendendo che il primo autovalore sia di rango uno.

In un metodo di calcolo degli autovalori di λ nella (1) dovuto al Picone [4], si viene ad assumere come prima approssimazione di un autovalore il numero λ^* definito da:

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) Il caso di autovalori tutti negativi si riconduce immediatamente a quello qui considerato.

(4) Per la completa esposizione di tale metodo vedi: G. Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. Parte I, p. 369.

$$(3) \qquad \lambda^* = \frac{\int_E K(P;Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dE(Q)\,dE(P)}{\int_E \left\{\int_E K(P;Q)\,\varphi(Q)\,dE(Q)\right\}^2 dE(P)},$$

ove $\varphi(P)$ è una funzione prefissata.

Vien fatto di chiedersi: di quale autovalore della (1), λ^* è la prima approssimazione ed in che senso lo è?

Mi sembra spontaneo intendere λ^* quale prima approssimazione di un prefissato autovalore λ_h della (1) se al variare di r nella successione dei numeri interi $1, 2, \cdots$ si ha

$$(4) \qquad |\lambda^* - \lambda_r| = \text{min.}, \qquad \text{per} \quad r = h.$$

È evidente che disponendo della $\varphi(P)$ si può soddisfare alla (4) per un h comunque scelto.

Basta, ad esempio, assumere $\varphi(P) \equiv y_s(P)$, con $y_s(P)$, $(s = 1, 2, \cdots)$, autofunzione corrispondente all'autovalore λ_s, perchè la (4) sia verificata per $h = s$.

Poichè nei casi concreti, per lo più, il più basso degli autovalori è quello che interessa maggiormente, ritengo utile stabilire un criterio che permetta di assicurare se la (4) è soddisfatta per $h = 1$. Nello stesso tempo stabilirò in modo molto semplice qualche limitazione relativa al secondo autovalore della (1). Nella ipotesi che esista $\int_E K(P;P)\,dE(P)$ mostrerò che la proprietà di simmetria del nucleo $K(P;Q)$ porta a stabilire la disuguaglianza

$$(5) \qquad \lambda_1 < \frac{\int_E K(P;P)\,dE(P)}{\int_E K^2(P;Q)\,dE(P)\,dE(Q)},$$

che si ha, qualunque sia $\varphi(P)$,

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda_1 \leqq \lambda^*, & [\text{il segno} = \text{vale soltanto se } \varphi(P) \equiv y_1(P)], \\ \lambda_2 > \dfrac{4}{\int_E K(P;P)\,dE(P)} - \lambda^*, \end{cases}$$

e inoltre che:

Condizione sufficiente perchè la (4) *sia verificata per* $h = 1$ *è che* λ^* *verifichi la disuguaglianza*

$$(7) \qquad \lambda^* \leqq \frac{2}{\int_E K(P;P)\,dE(P)}.$$

In più stabilirò che ove λ^* soddisfi alla disuguaglianza [più restrittiva di (7)]

$$\lambda^* \leqq \frac{1{,}805}{\int_E K(P;P)\, dE(P)}, \tag{8}$$

si ottiene per il secondo autovalore la limitazione

$$\lambda_2 > 2 \frac{\int_E K(P;P)\, dE(P)}{\int_E K^2(P;Q)\, dE(P)\, dE(Q)} - \lambda^* \tag{9}$$

che può riuscire più vantaggiosa di quella espressa da (6,2).

* * *

La (5) si giustifica immediatamente osservando che in base al noto sviluppo del nucleo simmetrico [supposte normalizzate le autofunzioni] si ha (5)

$$\frac{\int_E K(P;P)\, dE(P)}{\int_E K^2(P;Q)\, dE(P)\, dE(Q)} - \lambda_1 = \frac{\sum_i \frac{1}{\lambda_i}}{\sum_i \frac{1}{\lambda_i^2}} - \lambda_1 = \frac{\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)}{\sum_i \frac{1}{\lambda_i^2}} > 0$$

a causa della (2).

Posto poi $\alpha_i = \int_E y_i(P)\, \varphi(P)\, dE(P)$, si ha [vedi (3)]

$$\lambda^* - \lambda_1 = \frac{\sum_i \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i}}{\sum_i \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i^2}} - \lambda_1 = \frac{\sum_i \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)}{\sum_i \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i^2}}$$

che, in base a (2), conduce a (6,1).

La (6,2) si ottiene invece osservando che dalle disuguaglianze

$$\lambda_2 + \lambda_1 - \frac{4}{\int_E K(P;P)\, dE(P)} \geqq \lambda_2 + \lambda_1 - \frac{4}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\lambda_1 + \lambda_2} > 0,$$

segue

$$\lambda_2 + \lambda_1 > \frac{4}{\int_E K(P;P)\, dE(P)} \tag{10}$$

e questa, se si tien conto della (6,1), dà subito luogo alla (6,2).

(5) Vedi: M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, p. 561.

È evidente che la relazione (4) per $h = 1$ è completamente espressa dalla disuguaglianza

$$2\lambda^* - (\lambda_1 + \lambda_2) < 0 \tag{11}$$

e poichè in base a (10) si ha

$$2\lambda^* - (\lambda_1 + \lambda_2) < 2\lambda^* - \frac{4}{\int_E K(P;P)\, dE(P)},$$

segue che se λ^* soddisfa alla (7), è verificata la (11) e di conseguenza lo è la (4) per $h = 1$, c. d. d.

Se si considera la differenza

$$L = 2\frac{\int_E K(P;P)\, dE(P)}{\int_E K^2(P;Q)\, dE(P)\, dE(Q)} - (\lambda_1 + \lambda_2), \tag{12}$$

in base a (2) si trae

$$L \leq 2\frac{\int_E K(P;P)\, dE(P)}{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}} - (\lambda_1 + \lambda_2) = \tag{13}$$

$$= \frac{2\int_E K(P;P)\, dE(P) - \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\right]}{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}}.$$

Si constata allora subito che, detto $q > 1$ il rapporto $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, risulta certamente

$$L \leq 0 \tag{14}$$

tutte le volte che è

$$\lambda_1 \int_E K(P;P)\, dP(P) \leq \frac{q^3 + q^2 + q + 1}{2q^2}. \tag{15}$$

È facile constatare che il secondo membro di (15), al variare di q da zero ad infinito, è sempre maggiore di 1,805. Quindi se λ^* soddisfa alla (8), la (15) è verificata con il segno di disuguaglianza [vedi (6,1)] e di conseguenza lo è la (14) [pure come disuguaglianza]. Da (12), (14) si ha

$$2\frac{\int_E K(P;P)\, dE(P)}{\int_E K^2(P;Q)\, dE(P)\, dE(Q)} < \lambda_1 + \lambda_2. \tag{16}$$

Sottraendo λ^* da ambo i membri di (16) e tenendo conto di (6,1) si ottiene immediatamente la disuguaglianza (9).

* * *

Come esempio, considererò il problema delle vibrazioni trasversali di una corda omogenea fissa agli estremi. Il nucleo $K(P;Q)$ coincide con la funzione di Burkhardt. Se gli estremi della corda hanno le ascisse $a = 0$, $b = 1$, si ricava facilmente

$$\begin{cases} \int_E K(P;P)\, dE(P) = \frac{1}{6}, \\ \dfrac{\int_E K(P;P)\, dE(P)}{\int_E K^2(P;Q)\, dE(P)\, dE(Q)} = 15, \end{cases}$$

mentre assumendo $\varphi(P) \equiv 1$ si trova $\lambda^* = 10$. Si constata così che la disuguaglianza (8) [e quindi la (7)] è effettivamente soddisfatta mentre la limitazione (9) riesce più conveniente della (6,2).

Matematica. — *Su una generalizzazione della convergenza in media.* Nota II di C. Birindelli, presentata [1] dal Corrisp. M. Picone.

Viene ripresa la trattazione della Nota I, pubblicata nel precedente fascicolo.

4. Un procedimento lineare di sommazione delle serie e successioni tale da soddisfare alle condizioni di Toeplitz abbia il polinomio n° di sommazione

$$T_n = \sum_{\nu}^{0,n} a_{n,\nu} \cdot u_\nu = \sum_{\nu}^{0,n-1} (a_{n,\nu} - a_{n,\nu+1})\, s_\nu + a_{n,n} \cdot s_n$$

per una serie $\sum_{\nu}^{0,\infty} u_\nu$ o per una successione s_ν.

Esso procedimento rientra in quello dato da un « più generale procedimento di sommazione » se per ogni n la successione finita $a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,\nu}, \cdots a_{n,n}$, è costituita di quantità reali, mai negative, e la successione stessa è non crescente per ν variabile da 0 ad n; l'ulteriore condizione $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$ è conseguenza delle condizioni di Toeplitz.

(1) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

Per un siffatto procedimento lineare T_n si estendono, di conseguenza, i sei teoremi generalizzati, accennati al precedente numero e validi per ogni « più generale procedimento di sommazione ».

Per il primo di questi teoremi si richiede anche qui la condizione restrittiva di essere una almeno delle due successioni $\int_E [f_\nu(X)]^2 d\mathrm{T}$, $\int_E [g_\nu(X)]^2 d\mathrm{T}$ limitata, e altrettanto è da farsi per il secondo dei teoremi stessi; inoltre vale sempre per T_n la convergenza uniforme rispetto ad U di E in tutte queste proposizioni generalizzate.

5. Tra i numerosissimi procedimenti lineari T_n rientranti come casi particolari nel « più generale procedimento di sommazione » sono da annoverarsi i metodi (C, r) di Cesàro.

Soffermandoci al caso particolare noto sotto il nome di metodo della media aritmetica, o procedimento $(C, 1)$, si ha, in corrispondenza al I Teorema generalizzato del n. 3, la seguente proposizione « Se delle due successioni $\int_E [f_\nu(X)]^2 d\mathrm{T}$, $\int_E [g_\nu(X)]^2 d\mathrm{T}$ una almeno è limitata, mentre le due seguenti $\sqrt{\int_E [f_\nu(X) \quad f(X)]^2 d\mathrm{T}}$, $\sqrt{\int_E [g_\nu(X) \quad g(X)]^2 d\mathrm{T}}$ sono sommabili $(C, 1)$ verso la somma generalizzata $s = 0$, cioè se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu}^{0,n-1} \sqrt{\int_E [f_\nu(X) \quad f(X)]^2 d\mathrm{T}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu}^{0,n-1} \sqrt{\int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 d\mathrm{T}} = 0,$$

allora è sommabile $(C, 1)$, uniformemente rispetto ad U, la successione

$$\int_U f_\nu(X) \cdot g_\nu(X)\, d\mathrm{T}$$

e la somma generalizzata è data da $\int_U f(X) \cdot g(X)\, d\mathrm{T}$; si ha cioè $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_U \left(\sum_{\nu}^{0,n-1} f_\nu(X)\, g_\nu(X) \right) d\mathrm{T} = \int_U f(X) \cdot g(X)\, d\mathrm{T}$. Casi particolari di questa proposizione si ottengono ripetendo il 2°, 3°, 4°, 5° e 6° teorema pel caso particolare del procedimento $(C, 1)$.

Osservazione. – Il risultato espresso dalla precedente proposizione vale certamente ogni qualvolta le due successioni seguenti

$$\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 d\mathrm{T} \quad , \quad \int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 d\mathrm{T}$$

siano sommabili (C, 1) e verso la comune somma generalizzata zero, vale a dire ogni qualvolta sia $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 \, dT =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 \, dT = 0 .$$

Risulta infatti, ripetendo il procedimento già svolto in generale al n. 3, supposto che sia la $\int_E [g_\nu(X)]^2 \, dT$ quella, fra le due successioni solite, che si ammette essere limitata,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_U f_\nu(X) \cdot g_\nu(X) \, dT - \int_U f(X) \cdot g(X) \, dT \right| \leq$$

$$\leq L \cdot \left\{ \sum_{\nu}^{0,n-1} \sqrt{\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 \, dT} + \sum_{\nu}^{0,n-1} \sqrt{\int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 \, dT} \right\} \Big/ n$$

ed elevando a quadrato si ottiene

$$\left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_U f_\nu(X) \cdot g_\nu(X) \, dT - \int_U f(X) \cdot g(X) \, dT \right]^2 \leq$$

$$\leq L \cdot 2n \cdot \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 \, dT + \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 \, dT \right\} =$$

$$= 2L \cdot \left\{ \frac{1}{n} \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 \, dT + \frac{1}{n} \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 \, dT \right\},$$

e qui l'ultimo membro tende al limite zero, per $n \to \infty$. Per la base del quadrato a primo membro, risulta che è, uniformemente rispetto ad U,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{\nu}^{0,n-1} \int_U f_\nu(X) \, g_\nu(X) \, dT = \int_U f(X) \, g(X) \, dT .$$

6. Altra conseguenza delle proposizioni studiate nel precedente numero è data dal seguente

Teorema. – Se E è un insieme misurabile, limitato o no, e le due successioni $\sqrt{\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 \, dT}$, $\sqrt{\int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 \, dT}$ sono sommabili (C, 1) verso la somma generalizzata zero e una almeno delle due altre successioni $\int_E [f_\nu(X)]^2 \, dT$, $\int_E [g_\nu(X)]^2 \, dT$ è limitata, allora,

se per una classe $[U]_{(\varrho)}$ di insiemi misurabili contenuti in E risulta $n \int_U [f_n(X) g_n(X) - f_{n-1}(X) g_{n-1}(X)] dT$ maggiore di $-A(U)$ con $A(U) \geqq \rho$, ove $\rho > 0$, $\Big($oppure $n \cdot \int_U [f_n(X) \cdot g_n(X) - f_{n-1}(X) g_{n-1}(X)] dT$ minore di $A(U)\Big)$, si ha che

$$\lim_{n \to \infty} \int_U f_n(X) \cdot g_n(X) \, dT = \int_U f(X) \, g(X) \, dT ,$$

uniformemente rispetto agli U della classe $[U]_{(\varrho)}$.

Per la dimostrazione si osservi che per il I Teorema generalizzato la successione $\int_U f_n(X) g_n(X) dT$ è uniformemente sommabile (C, 1) rispetto agli U misurabili contenuti in E e verso la somma generalizzata $\int_U f(X) g(X) dT$.

È d'altronde noto, per un teorema di Hardy-Landau, che se una serie $\overset{0,\infty}{\sum_\nu} u_\nu$ è sommabile (C, 1) e se è $n \cdot u_n > -A$, oppure $n \cdot u_n < A$, allora la serie $\overset{0,\infty}{\sum_\nu} u_\nu$ è pure sommabile (C, 0), vale a dire converge nel senso ordinario. Nel nostro caso, le due diseguaglianze $nu_n > -A$, $nu_n < A$ sono date appunto dalle due

$$n \cdot \int_U [f_n(X) g_n(X) - f_{n-1}(X) g_{n-1}(X)] dT > -A(U) ,$$

$$n \int_U [f_n(X) g_n(X) - f_{n-1}(X) g_{n-1}(X)] dT < A(U) , \quad \rho > 0 ,$$

e di conseguenza il teorema è dimostrato.

Il teorema è ancor valido se alla sommabilità (C, 1), verso la somma generalizzata zero, delle due successioni

$$\sqrt{\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 dT} , \quad \sqrt{\int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 dT}$$

si sostituisce la sommabilità (C, 1), verso la somma generalizzata zero, delle due successioni $\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 dT$, $\int_E [g_\nu(X) - g(X)]^2 dT$ come appare evidente in base alla Osservazione del precedente numero.

Osserviamo infine che in corrispondenza ai teoremi II, III, IV, V e VI del n. 1 si ottengono altrettanti teoremi come casi particolari di quello ora dimostrato.

Ci limiteremo a rilevare il seguente caso particolare

« Sia l'insieme E di misura finita e in E sia assegnata una funzione $f(X)$ e una successione di funzioni $f_n(X)$. Supposto che la $f(X)$ e le $f_n(X)$ siano hilbertiane in E, avvenga che la successione $s_\nu = \sqrt{\int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 \, dT}$ (oppure la $s_\nu = \int_E [f_\nu(X) - f(X)]^2 \, dT$) sia sommabile (C, 1) con somma generalizzata zero e in quasi-tutto E sia $n[f_n(X) - f_{n-1}(X)] > -A$ (oppure $n[f_n(X) - f_{n-1}(X)] < A$), con $A > 0$. Assegnato un qualsiasi reale positivo N minore di Mis E, se si considera la classe $[U]_N$ degli insiemi U di E tali che Mis $U \leq N$ si ha che la successione $\int_U f_n(X) \, dT$ è convergente nel senso ordinario per ogni U di E e lo è inoltre uniformemente rispetto agli U della classe $[U]_N$ e la somma ordinaria è l'$\int_U f(X) \, dT$. ».

Per la dimostrazione, basta osservare che questa proposizione non è che un Corollario del precedente teorema, poichè dalle poste condizioni risulta la disuguaglianza

$$n \cdot \left[\int_U f_n(X) \, dT - \int_U f_{n-1}(X) \, dT \right] > -A \cdot \text{Mis } U \geq -A \cdot N,$$

$$\left(\text{oppure l'altra } n \cdot \left[\int_U f_n(X) \, dT - \int_U f_{n-1}(X) \, dT \right] < A \cdot \text{Mis } U \leq A \cdot N \right).$$

Matematica. — *Su un problema riducibile di integrazione di una particolare equazione a derivate parziali* [1]. Nota di G. Aquaro, presentata [2] dal Socio M. Picone.

In una sua Nota dal titolo: *Problemi riducibili di integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali* [3], il prof. Picone ha additato una vasta classe di problemi di integrazione di tali equazioni, in r variabili indipendenti, la cui traduzione in equazioni integrali, tipo Fredholm, può essere conseguita con l'introduzione di funzioni di Green competenti a problemi di integrazione per equazioni in numero di variabili minore di r.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) M. Picone, *Problemi riducibili d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali.* « Rendiconti della Reale Accademia d'Italia », vol. I della serie VI, pp. 642–655.

Appartiene alla detta classe il seguente problema: Detto R il dominio rettangolare del piano x, y definito dalle limitazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2 , \\ y_1 \leqq y \leqq y_2 , \end{cases}$$

detta $\{u\}$ la totalità dalle funzioni continue in R con le derivate parziali

$$u_x , u_y , u_{xx} , u_{xxy}$$

si vuol determinare una soluzione dell'equazione:

$$(2) \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 u + f$$

appartenente alla totalità $\{u\}$, verificante le seguenti condizioni sul contorno di R:

$$(3) \qquad \begin{cases} u(x, y_1) = X(x) & \text{per} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ u_x(x_1, y) = Y_1(y) \quad u_x(x_2, y) = Y_2(y) & \text{per} \quad y_1 \leqq y \leqq y_2 \end{cases}$$

dove b, c, c_0, f, sono assegnate funzioni continue in R, $X(x)$ è funzione pure essa continua, con le sue derivate prima e seconda nell'intervallo (x_1, x_2), e $Y_1(y)$ e $Y_2(y)$ sono funzioni, del pari assegnate, continue nell'intervallo (y_1, y_2).

Dietro suggerimento del prof. Picone, come oggetto della mia tesi di laurea, ho considerato il problema ora enunciato e sono pervenuto a dimostrare l'esistenza e l'unicità della sua soluzione.

Tale risultato ha un notevole interesse, anche per la circostanza che i dati sul contorno di R, atti ad individuare una soluzione u, appartenente alla totalità $\{u\}$, della equazione (2) che è del *terzo* ordine, sono perfettamente gli stessi di quelli che valgono ad individuare una soluzione della stessa totalità nell'ipotesi che il coefficiente $b(x, y)$ sia negativo in tutto R, per la seguente equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 u + f = 0 ,$$

che è del *secondo* ordine.

Si vede dunque, ancora una volta in questo esempio, quanto sia imprecisa la nozione del *numero delle funzioni arbitrarie* da cui, talvolta, si vuol far dipendere univocamente, a seconda del suo ordine, la soluzione di una equazione a derivate parziali.

1. Equazione integrale traducente il problema. – Introdotta la funzione incognita

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

è facile dedurre che la $u(x, y)$ deve avere necessariamente la seguente espressione:

$$(4) \qquad u(x,y) = X(x) + [Y_2(y) - Y_2(y_1)]\, G(x, x_2) -$$

$$- [Y_1(y) - Y_1(y_1)]\, G(x, x_1) - \int_{y_1}^{y} d\eta \int_{x_1}^{x_2} G(x, \xi)\, \varphi(\xi, \eta)\, d\xi$$

nell'ipotesi, necessaria per l'esistenza di essa, che risulti:

$$(5) \qquad X'(x_1) = Y_1(y_1) \quad , \quad X'(x_2) = Y_2(y_1);$$

ove la $G(x, \xi)$ è la funzione di Green, relativa alla equazione differenziale ordinaria:

$$v'' - v = 0$$

e all'intervallo (x_1, x_2) con le condizioni:

$$v'(x_1) = v'(x_2) = 0,$$

si ha cioè:

$$G(x, \xi) \begin{cases} = \dfrac{\cos h\,(x - x_2) \cos h\,(x_1 - \xi)}{\operatorname{sen} h\,(x_2 - x_1)}, & x_1 \leqq \xi \leqq x \leqq x_2, \\ = \dfrac{\cos h\,(\xi - x_2) \cos h\,(x - x_1)}{\operatorname{sen} h\,(x_2 - x_1)}, & x_1 \leqq x \leqq \xi \leqq x_2. \end{cases}$$

Soddisfatte le (5), si verifica poi immediatamente che la $u(x, y)$ espressa dalla (4), supposta $\varphi(x, y)$ continua, appartiene alla totalità $\{u\}$ e soddisfa le condizioni (3) al contorno del rettangolo R.

Dopo ciò possiamo dire che la $u(x, y)$, testè introdotta, fornirà una soluzione del problema allora e allora soltanto che essa verifichi l'equazione alle derivate parziali (2). Da tale equazione, postavi la u, nella sua espressione (4), si deduce come equazione integrale traducente il problema, la seguente nella incognita $\varphi(x, y)$:

$$(6) \qquad \varphi(x,y) = b(x,y) \int_{y_1}^{y} \varphi(x, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_{y_1}^{y} d\eta \int_{x_1}^{x_2} \left[[c_0(x,y) + b(x,y)]\, G(x, \xi) + c_1(x,y) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right] \varphi(\xi, \eta)\, d\xi +$$

$$+ c_1(x,y) \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + [c_0(x,y) + b(x,y)]\, h(x,y) + f(x,y) +$$

$$+ b(x,y)\, [X''(x) - X(x)]$$

dove $h(x, y)$ ha la definizione:

$$(7) \qquad h(x,y) = X(x) + [Y_2(y) - Y_2(y_1)]\,G(x,x_2) - [Y_1(y) - Y_1(y_1)]\,G(x,x_1).$$

2. Risoluzione dell'equazione integrale traducente il problema. – L'equazione integrale (6) non è del preciso tipo di quelle che hanno già avuto una teoria generale, comparendo in essa la funzione incognita $\varphi(x,y)$, una volta, tolalmente integrata rispetto ad ambo le variabili, ed una seconda integrata rispetto alla sola variabile y. Ma è facile farle acquistare il tipo classico se si osserva che essa può scriversi

$$(8) \qquad \varphi(x,y) = b(x,y)\int_{y_1}^{y} \varphi(x,\eta)\,d\eta + P(x,y)$$

ove è:

$$P(x,y) = F(x,y) + \int_{y_1}^{y} d\eta \int_{x_1}^{x_2} \Gamma(x,y,\xi)\,\varphi(\xi,\eta)\,d\xi,$$

con

$$\Gamma(x,y,\xi) = -[c_0(x,y) + b(x,y)]\,G(x,\xi) - c_1(x,y)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$$

$$F(x,y) = f(x,y) + c_1(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + [c_0(x,y) + b(x,y)]\,h(x,y) + b(x,y)\,[X''(x) - X(x)].$$

Il nucleo risolvente della equazione (8) in $\varphi(x,y)$ è dato da:

$$b(x,y)\,e^{\int_{\eta}^{y} b(x,\tau)\,d\tau}$$

e pertanto essa equivale alla seguente:

$$\varphi(x,y) = P(x,y) + \int_{y_1}^{y} b(x,y)\,e^{\int_{y_1}^{y} b(x,\tau)\,d\tau}\,P(x,\eta)\,d\eta$$

la quale si riduce al tipo classico desiderato:

$$(9) \qquad \varphi(x,y) = \Psi(x,y) + \int_{y_1}^{y} d\eta \int_{x_1}^{x_2} V(x,y,\xi,\eta)\,\varphi(\xi,\eta)\,d\xi,$$

ove si è posto:

$$\Psi(x,y) = F(x,y) + b(x,y)\int_{y_1}^{y} F(x,\eta)\,e^{\int_{\eta}^{y} b(x,\tau)\,d\tau}\,d\eta$$

$$V(x,y,\xi,\eta) = -[b(x,y) + c_0(x,y)]\,G(x,\xi) - c_1(x,y)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi} +$$

$$- b(x,y)\int_{\eta}^{y}[b(x,\zeta) + c_0(x,\zeta)]\,G(x,\xi)\,e^{\int_{\xi}^{y} b(x,\tau)\,d\tau}\,d\zeta +$$

$$- b(x,y)\int_{\eta}^{y} c_1(x,\zeta)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\,e^{\int_{\xi}^{y} b(x,\tau)\,d\tau}\,d\zeta.$$

L'equazione (9), del tipo misto Volterra-Fredholm [4], ha una sola ed una sola soluzione continua $\varphi(x,y)$. Con che, quanto abbiamo sopra asserito è pienamente giustificato.

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato* [1]. Nota di D. Caligo, presentata [2] dal Socio M. Picone.

1. Per mezzo della trasformazione di Fourier, A. Ghizzetti [3] ha ricavato le formule risolutive del problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u = 0$ e per la striscia del piano xy come pure per lo strato dello spazio $xy\zeta$, assegnando, per i dati al contorno, condizioni sufficienti ad assicurare l'applicabilità delle formole stesse, che dànno la soluzione mediante integrali di Sommerfeld.

Uno studio molto ampio di M. Picone [4] sul problema di Dirichlet per le equazioni ellittico-paraboliche ha condotto, fra l'altro, a dimostrare un teorema di unicità per campi illimitati, assegnando un opportuno comportamento all'infinito per le soluzioni del problema posto. Ispirandosi a tale risultato L. Amerio [5] è riuscito a conseguire anche il teorema di esistenza.

Nel presente lavoro ci proponiamo di considerare detto problema per l'equazione $\Delta_2 u = f$ nell'iperstrato dello spazio $S_{(r+1)}$ ad $r+1$ dimensioni [6],

(4) M. Picone, *Appunti di Analisi superiore*. Rondinella, Napoli, 1940 [pp. 591-594].

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) A. Ghizzetti, *Sui problemi di Dirichlet per la striscia e per lo strato*. « Memorie della R. Acc. d'Italia ». Classe di scienze fisiche, ecc., vol. XIII, fasc. 3, pp. 617-649, 1942.

(4) M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*. Napoli, 1940, pp. 694-710.

(5) L. Amerio, *Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine, di tipo ellittico, nei domini illimitati*. « Atti R. Acc. d'Italia ». Classe di scienze fisiche, ecc., ser. VII, vol. IV, fasc. 8, pp. 287-298, 1943.

(6) La questione è stata proposta da M. Picone nel suo corso di *Analisi funzionale lineare* tenuto nell'anno 1941-42 presso il R. Ist. Naz. di Alta Matematica (cfr. « Rendic. di Mat. e delle sue applicazioni », ser. V, vol III, fasc. 1; questione n. 122).

costruendo la formula risolutiva con procedimento diverso da quello tenuto dal Ghizzetti per $r = 2$ e che consente di pervenire ad essa con ipotesi sul comportamento all'infinito della soluzione assai più larghe anche per $r = 2$ e per l'equazione $\Delta_2 u = 0$.

2. Sia $P(x_1, \cdots, x_r)$ un punto dello spazio euclideo $S_{(r)}$ ad r dimensioni, di origine O; $\omega(o)$ l'ipersfera unitaria di centro O; Q il punto di $\omega(o)$, che si trova sulla retta OP; ρ la distanza di P da O; y una variabile reale; T l'iperstrato dello spazio $(x_1, \cdots, x_r, y)$ ad $r + 1$ dimensioni, definito dalle condizioni: P in $S_{(r)}$ e y nell'intervallo $o \vdash\dashv a$.

Siano inoltre: $f(P, y) \equiv f(Q, \rho, y)$ una funzione continua nell'interno di T e, per ogni P, sommabile rispetto ad y in $o \vdash\dashv a$; $g_1(P) \equiv g_1(Q, \rho)$, $g_2(P) \equiv g_2(Q, \rho)$ due assegnate funzioni continue sulla frontiera FT di T; $u(P, y) \equiv u(Q, \rho, y)$ soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(P, y), \tag{1}$$

appartenente alla classe $\{u\}_T$, costituita dalle funzioni continue in T e, nell'interno di T, continue con le derivate prime e con le seconde che compaiono nella (1), essendo inoltre prescritte alla u le condizioni

$$u(P, o) = g_1(P) \quad , \quad u(P, a) = g_2(P), \tag{2}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{u(Q, \rho, y)}{\varphi(Q, \rho)} = o, \tag{3}$$

uniformemente al variare di Q su $\omega(o)$ e di y in $o \vdash\dashv a$.

La funzione $\varphi(P) > o$, che compare nella (3), sarà determinata in modo che sia assicurato il teorema di unicità.

Detto $[Y_l(Q)]$ il sistema ortonormale e completo delle funzioni ipersferiche, consideriamo le « trasformate » della soluzione u

$$u_{hl}(\rho) = \int_o^a \operatorname{sen} \frac{h\pi y}{a}\, dy \int_{\omega(o)} u(Q, \rho, y)\, Y_l(Q)\, d\omega, \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots \\ l = o, 1, \cdots \end{pmatrix}, \tag{4}$$

e, per ogni ε tale che sia $o < \varepsilon < \frac{a}{2}$, poniamo

$$v_{hl}(\rho) = \int_\varepsilon^{a-\varepsilon} \operatorname{sen} \frac{h\pi(y - \varepsilon)}{a - 2\varepsilon}\, dy \int_{\omega(o)} u(Q, \rho, y)\, Y_l(Q)\, d\omega, \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \cdots \\ l = o, 1, \cdots \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Phi_{hl}(\rho) = \int_\varepsilon^{a-\varepsilon} \operatorname{sen} \frac{h\pi(y - \varepsilon)}{a - 2\varepsilon}\, dy \int_{\omega(o)} f(Q, \rho, y)\, Y_l(Q)\, d\omega. \tag{6}$$

Per la continuità di $u(P, y)$ in T, si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v_{hl}(\rho) = u_{hl}(\rho). \tag{7}$$

Dalla (1), che deve essere soddisfatta nell'interno di T, applicando le trasformazioni (5) e (6) segue

$$\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} \operatorname{sen} \frac{h\pi(y-\varepsilon)}{a-2\varepsilon}\, dy \int_0^{\pi} d\vartheta_{r-2} \int_0^{\pi} d\vartheta_{r-3} \cdots \int_0^{\pi} d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} \left[\Delta_2 u + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] Y_l(Q) \operatorname{sen}^{r-2} \vartheta_1 \operatorname{sen}^{r-3} \vartheta_2 \cdots \operatorname{sen} \vartheta_{r-2}\, d\varphi = \Phi_{hl}(\rho)\ (7).$$

Con due successive integrazioni per parti e con il cambiamento della variabile indipendente e della funzione incognita

$$\sigma = h\alpha_\varepsilon \rho \quad , \quad y_\mu = \sigma^{\frac{r}{2}-1} v_{hl}(\rho) \tag{8}$$

(ove si è posto

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\pi}{a-2\varepsilon} \quad , \quad \mu = l + \frac{r}{2} - 1\Big)$$

si ottiene per y_μ l'equazione (tipo Bessel)

$$\sigma^2 \frac{d^2 y}{d\sigma^2} + \sigma \frac{dy}{d\sigma} - (\mu^2 + \sigma^2) y(\sigma) = \sigma^{\frac{r}{2}+1} V_{hl}(\sigma), \tag{10}$$

dove

$$V_{hl}(\sigma) = \frac{1}{(h\alpha_\varepsilon)^2} \left\{ \Phi_{hl}\left(\frac{\sigma}{h\alpha_\varepsilon}\right) + \right.$$

$$\left. + h\alpha_\varepsilon \int_{\omega(\sigma)} \left[(-1)^h u\left(Q, \frac{\sigma}{h\alpha_\varepsilon}, a-\varepsilon\right) - u\left(Q, \frac{\sigma}{h\alpha_\varepsilon}, \varepsilon\right) \right] Y_l(Q)\, d\omega \right\}.$$

Se con $I_\mu(\sigma)$, $K_\mu(\sigma)$ indichiamo le due funzioni di Bessel (di prima e di seconda specie, rispettivamente) di ordine μ e di argomento immaginario (8), con A_μ, B_μ due costanti, che determineremo, e con σ_0 un numero positivo, si ha l'espressione dell'integrale generale della (10)

$$y_\mu(\sigma) = A_\mu I_\mu(\sigma) + B_\mu K_\mu(\sigma) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} V_{hl}(\xi) \xi^{\frac{r}{2}} [I_\mu(\sigma) K_\mu(\xi) - I_\mu(\xi) K_\mu(\sigma)]\, d\xi,$$

(7) Si avverta che di qui in avanti indicheremo con $\Delta_2 u$ la $\sum_1^r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(8) Per gli sviluppi relativi a queste funzioni ci atterremo a G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*. Cambridge, 1922, pp. 77-80 e 202-203. Si osservi che, essendo r intero ≥ 2, risulta $\mu > 0$ intero oppure multiplo dispari di $\frac{1}{2}$ e si ricordi che il wronskiano di $I_\mu(\sigma)$, $K_\mu(\sigma)$ vale $-\frac{1}{\sigma}$.

dal quale, per le (8) e (9), si ricava

$$(11)\qquad v_{hl}(\rho) = \frac{A_\mu I_\mu(h\alpha_\varepsilon\rho) + B_\mu K_\mu(h\alpha_\varepsilon\rho)}{(h\alpha_\varepsilon\rho)^{\frac{r}{2}-1}} + \int_{\varrho_0}^{\varrho} (h\alpha_\varepsilon)^2 V_{hl}(h\alpha_\varepsilon\xi)\,\xi^{\frac{r}{2}}\,\frac{I_\mu(h\alpha_\varepsilon\rho)\,K_\mu(h\alpha_\varepsilon\xi) - I_\mu(h\alpha_\varepsilon\xi)\,K_\mu(h\alpha_\varepsilon\rho)}{\rho^{\frac{r}{2}-1}}\,d\xi .$$

Dalle ipotesi infine della sommabilità di $f(P, y)$ per $0 \leq y \leq a$ e della continuità delle funzioni u in T segue l'esistenza del limite di $V_{hl}(\sigma)$ per $\varepsilon \to 0$ e, tenute presenti le (2), dopo aver posto $\lim_{\varepsilon\to 0} (h\alpha_\varepsilon)^2 V_{hl}(\sigma) = U_{hl}(\sigma)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_\varepsilon = \pi/a = \alpha$, risulta

$$(12)\qquad U_{hl}(h\alpha\xi) = \int_0^a \operatorname{sen} h\alpha y\,dy \int_{\omega(0)} f(Q, \xi, y)\,Y_l(Q)\,d\omega + h\alpha \int_{\omega(0)} [(-1)^h g_2(Q, \xi) - g_1(Q, \xi)]\,Y_l(Q)\,d\omega .$$

È facile vedere che le (7) e le (11) permettono di assegnare alle trasformate (4) della soluzione della (1) l'espressione

$$(13)\qquad u_{hl}(\rho) = \frac{A_\mu I_\mu(h\alpha\rho) + B_\mu K_\mu(h\alpha\rho)}{(h\alpha\rho)^{\frac{r}{2}-1}} + \int_{\varrho_0}^{\varrho} U_{hl}(h\alpha\xi)\,\xi^{\frac{r}{2}}\,\frac{I_\mu(h\alpha\rho)\,K_\mu(h\alpha\xi) - I_\mu(h\alpha\xi)\,K_\mu(h\alpha\rho)}{(h\alpha\rho)^{\frac{r}{2}-1}}\,d\xi ,$$

$$(h, l = 1, 2, \cdots,) .$$

3. Unicità. - Se u appartiene alla classe $\{u\}_T$ e verifica l'equazione $\Delta_2 u + u_{yy} = 0$ assumendo sopra FT valori nulli, poichè $U_{hl}(h\alpha\xi) = 0$, la (13) si riduce alla $u_{hl}(\rho) = [A_\mu I_\mu(h\alpha\rho) + B_\mu K_\mu(h\alpha\rho)]/(h\alpha\rho)^{\frac{r}{2}-1}$, che si mantiene finita per $\rho \to 0$ solo se $B_\mu = 0$.

Se imponiamo la condizione (3) resta da soddisfare alla

$$A_\mu \lim_{\varrho\to\infty} \left\{ \left[I_\mu(h\alpha\rho)/(h\alpha\rho)^{\frac{r}{2}-1} \right] : \varphi(Q, \rho) \right\} = 0$$

uniformemente al variare di Q in $\omega(0)$. Ma per la funzione $I_\mu(h\alpha\rho)$ vale lo sviluppo asintotico $I_\mu(h\alpha\rho) \sim e^{h\alpha\rho}(2\pi h\alpha\rho)^{-\frac{1}{2}}\left[1 + o\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$, perciò, assumendo per la $\varphi(Q, \rho)$ l'espressione asintotica

$$(14)\qquad \varphi(Q, \rho) \sim e^{\alpha\varrho}/\rho^{\frac{r-1}{2}} ,$$

non si può verificare la condizione posta se non prendendo $A_\mu = 0$, ciò che permette di concludere essere ogni $u_{hl}(\rho) \equiv 0$ e quindi che la soluzione della (1) è unica non appena la funzione $\varphi(Q, \rho)$, che compare nella (3), è del tipo (14). Si ha dunque il teorema di unicità:

I. – *Se per la funzione u della classe* $\{u\}_T$ *risulta*

$$\lim_{\varrho \to \infty} u(Q, \rho, y)\, e^{-\alpha\varrho}\, \rho^{\frac{r-1}{2}} = 0 \tag{15}$$

uniformemente al variare di Q *in* $\omega(0)$ *e di* y *in* $0 \dashv a$, *la soluzione del problema proposto, qualora esista, è unica.*

4. Calcolo della soluzione. – Sia la funzione $f(P, y)$ hölderiana in ogni dominio limitato di T ed esistano tre costanti *positive* H, M, β $(\beta < \alpha)$ tali che siano verificate le limitazioni

$$|f(P, y)| \leq H\, e^{(\alpha-\beta)\varrho}\ , \quad |g_1(P)| < M\, e^{(\alpha-\beta)\varrho}\ , \tag{16}$$

$$|g_2(P)| < M\, e^{(\alpha-\beta)\varrho}\ , \quad \left(\rho = \sqrt{\sum_i^r x_i^2}\right);$$

in tali ipotesi è possibile determinare le costanti A_μ e B_μ, che compaiono nelle (13), in modo che le $u_{hl}(\rho)$ fornite dalle (13) stesse si mantengano finite per $\rho \to 0$ e la soluzione $u(P, y)$ verifichi la condizione

$$\lim_{\varrho \to \infty} u(Q, \rho, y)/e^{(\alpha-\gamma)\varrho} = 0, \qquad \text{con } 0 < \gamma < \beta < \alpha\ ^{(9)}. \tag{17}$$

uniformemente al variare di Q in $\omega(0)$ e di y in $0 \dashv a$.

Osserveremo anzitutto che, posto

$$J_1[\rho_0, \rho] = \int_{\varrho_0}^{\varrho} U_{hl}(h\alpha\xi)\, K_\mu(h\alpha\xi)\, \xi^{\frac{r}{2}}\, d\xi\ , \quad J_2[\rho_0, \rho] = \int_{\varrho_0}^{\varrho} U_{hl}(h\alpha\xi)\, I_\mu(h\alpha\xi)\, \xi^{\frac{r}{2}}\, d\xi,$$

le (13) si possono scrivere nella forma

$$u_{hl}(\rho) = \frac{K_\mu(h\alpha\rho)}{(h\alpha\rho)^{\frac{r}{2}-1}} \{B_\mu - J_2[\rho_0, \rho]\} + \frac{I_\mu(h\alpha\rho)}{(h\alpha\rho)^{\frac{r}{2}-1}} \{A_\mu + J_1[\rho_0, \rho]\}$$

(9) L'esistenza della soluzione nelle ipotesi (16) è assicurata da un teorema di L. Amerio (III dell'op. cit. in (5)) quando si assuma per la funzione di confronto, ivi indicata con φ, la espressione $M \operatorname{sen} k(y + \eta)\, Ch\, k_1 x_1\, Ch\, k_2 x_2 \cdots Ch\, k_r x_r$, con le limitazioni $0 < \sum_1^r k_i^2 \leq k^2 < \left(\frac{\pi}{a + \eta}\right)^2 < \alpha^2$ per le *costanti positive* k, η, k_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$, e si ponga $H \geq M\left(k^2 - \sum_1^r k_i^2\right)$. La (17), che si può dedurre pure dal citato lavoro (cfr. ivi teor. IV), assicura la verifica della (15) e, in base al teorema I del testo, l'unicità della soluzione, che ci proponiamo di calcolare.

e che sussistono le seguenti proprietà

a) dalle (16) si ottiene per le (12) la limitazione $|U_{hl}(h\alpha\xi)| < (H + 2h\alpha M)\, e^{(\alpha-\beta)\xi}$;

b) per il noto comportamento delle funzioni K_μ ed I_μ l'integrale $J_1[\rho_0, \rho]$ è convergente per $\rho \to +\infty$ e $J_2[\rho_0, \rho]$ è convergente per $\rho \to 0$;

c) ricordando la (9) e che $\gamma - \beta < 0$:

$$\lim_{\varrho \to 0} \{I_\mu(h\alpha\rho)\, \rho^{-\left(\frac{r}{2}-1\right)} J_1[\rho_0, \rho]\} = 0 \quad ,$$

$$\lim_{\varrho \to +\infty} \{K_\mu(h\alpha\rho)\, e^{-(\alpha-\gamma)\varrho}\, (h\alpha\rho)^{-\left(\frac{r}{2}-1\right)} J_2[0, \rho]\} = 0 .$$

Possiamo dunque porre $B_\mu = J_2[\rho_0, 0]$, $A_\mu = -J_1[\rho_0, +\infty]$ per giungere alla espressione

$$u_{hl}(\rho) = -(h\alpha\rho)^{-\left(\frac{r}{2}-1\right)} \{J_1[\rho, +\infty] \cdot I_\mu(h\alpha\rho) + J_2[0, \rho] \cdot K_\mu(h\alpha\rho)\},$$

ovvero, tenuto conto delle posizioni fatte,

$$(18) \quad u_{hl}(\rho) = -\frac{1}{(h\alpha\rho)^{\frac{r}{2}-1}} \left\{ I_\mu(h\alpha\rho) \int_\varrho^{+\infty} U_{hl}(h\alpha\xi)\, K_\mu(h\alpha\xi)\, \xi^{\frac{r}{2}}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + K_\mu(h\alpha\rho) \int_0^\varrho U_{hl}(h\alpha\xi)\, I_\mu(h\alpha\xi)\, \xi^{\frac{r}{2}}\, d\xi \right\}.$$

Alla soluzione della (1) verificante le (2) e (3) si può infine attribuire lo sviluppo

$$(19) \qquad u(Q, \rho, y) \sim \frac{2}{a} \sum_h^{1,\infty} \sum_l^{0,\infty} u_{hl}(\rho)\, \operatorname{sen} \frac{h\pi y}{a}\, Y_l(Q);$$

questa serie risulta convergente in media verso la soluzione $u(P, y)$ della classe $\{u\}_T$, ma, nelle ipotesi generali nelle quali ci siamo posti, la teoria non fornisce indicazioni circa la sua convergenza puntuale, il cui studio formerà l'oggetto di una ulteriore ricerca. Si può pertanto enunciare il teorema

II. – *Se le funzioni* $f(P, y)$, $g_1(P)$, $g_2(P)$ *soddisfano le condizioni* (16), *essendo inoltre la* $f(P, y)$ *hölderiana in ogni dominio limitato di* T, *esiste una ed una sola funzione* $u(Q, \rho, y)$ *della classe* $\{u\}_T$ *soluzione della* (1), *verificante le condizioni* (2) *ed avente, per* $\rho \to +\infty$, *il comportamento espresso dalla* (17). *Tale soluzione ha lo sviluppo in serie* (19), *essendo i coefficienti* $u_{hl}(\rho)$ *forniti dalle* (18).

Matematica. — *Sull'integrabilità in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado* [1]. Nota di G. Fichera, presentata [2] dal Socio M. Picone.

Detto $P \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_r)$ un punto dello spazio S_r, consideriamo le k $(\leq r)$ r-ple

$$x_1^{(h)}(\tau_h) \quad ; \quad x_2^{(h)}(\tau_h), \cdots, x_r^{(h)}(\tau_h) \quad (h = 1, 2, \cdots, k),$$

ciascuna costituita da funzioni di τ_h definite in un intorno di t_h, continue e derivabili in t_h, e tali che riesca

$$x_i = x_i^{(h)}(t_h) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

essendo inoltre k la caratteristica della matrice

$$\left\| x_i^{(h)'}(t_h) \right\|.$$

Rimane individuato un elemento lineare $\delta_h s$ di centro P le cui r componenti, $\delta_h x_1, \delta_h x_2, \cdots, \delta_h x_r$, secondo gli assi coordinati sono date da

$$\delta_h x_i = x_i^{(h)'}(t_k)\, d\tau_h .$$

Considerata la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 \cdots \delta_1 x_r \\ \delta_2 x_1 & \delta_2 x_2 \cdots \delta_2 x_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_k x_1 & \delta_k x_2 \cdots \delta_k x_r \end{matrix} \right\|,$$

ne indicheremo brevemente con

$$[\delta x_{j_1}, \delta x_{j_2}, \cdots, \delta x_{j_k}]$$

il minore di ordine k costituito con le colonne di indici $j_1, j_2, \cdots, j_k$.

Detta F una funzione di r variabili definita in un intorno di P, continua in P assieme alle sue derivate parziali prime, indicheremo con $\delta_j F$ il suo differenziale in P relativo ad un arbitrario elemento lineare $\delta_j s$ di centro P, porremo cioè:

$$\delta_j F = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, \delta_j x_i .$$

Porremo inoltre:

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.
(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

$$[\delta F\, \delta x_{j_1}\, \delta x_{j_2} \ldots \delta x_{j_k}] = \begin{vmatrix} \delta_{j_1} F & \delta_{j_1} x_{j_1} & \delta_{j_1} x_{j_2} \cdots \delta_{j_1} x_{j_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{j_k} F & \delta_{j_k} x_{j_1} & \delta_{j_k} x_{j_2} \cdots \delta_{j_k} x_{j_k} \\ \delta_j F & \delta_j x_{j_1} & \delta_j x_{j_2} \cdots \delta_j x_{j_k} \end{vmatrix}.$$

Sia D un dominio di S_r e siano in esso definite le $\binom{r}{k}$ funzioni uniformi

$$X_{j_1 j_2 \cdots j_k}(P),$$

denotando $j_1, j_2, \cdots, j_k$ una disposizione di classe k degli r numeri $1, 2, \cdots, r$ con $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Al variare di P in D tali funzioni riescano continue assieme alle loro derivati parziali prime.

Si definisce come *forma differenziale esterna di grado k* l'espressione

$$(1) \qquad \Omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_k} X_{j_1 j_2 \cdots j_k}(x_1, x_2, \cdots, x_r)\, [\delta x_{j_1}\, \delta x_{j_2} \cdots \delta x_{j_k}],$$

dove le funzioni $X_{j_1 j_2 \cdots j_k}$ sono i *coefficienti* della forma.

La forma è identicamente nulla in D se ivi son tali i suoi coefficienti.

Se è $k < r$ la seguente forma differenziale di grado $k+1$ dicesi la *derivata esterna* secondo Cartan della forma Ω:

$$(2) \qquad \Omega' = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_k} [\delta X_{j_1 j_2 \cdots j_k}\, \delta x_{j_1}\, \delta x_{j_2} \cdots \delta x_{j_k}].$$

Indicati con $j_{k+1}, j_{k+2}, \cdots, j_r$ gli $r - k$ indici che non compaiono nella disposizione $j_1, j_2, \cdots, j_k$, riesce:

$$[\delta X_{j_1 j_2 \cdots j_k}\, \delta x_{j_1}\, \delta x_{j_2} \cdots \delta x_{j_k}] = \sum_{i=1}^{r-k} \frac{\partial X_{j_1 j_2 \cdots j_k}}{\partial x_{j_{k+1}}} [\delta x_{j_{k+i}}\, \delta x_{j_1}\, \delta x_{j_2} \cdots \delta x_{j_k}].$$

Supposto che sia:

$$j_{h_i} < j_{k+1} < j_{h_i+1} \,^{(3)} \qquad (0 < h_i \leq k)$$

abbiamo:

$$[\delta X_{j_1 j_2 \cdots j_k}\, \delta x_{j_1}\, \delta x_{j_2} \cdots \delta x_{j_k}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r-k} (-1)^{h_i} \frac{\partial X_{j_1 j_2 \cdots j_k}}{\partial x_{j_{k+i}}} [\delta x_{j_1} \cdots \delta x_{j_{h_i}}\, \delta x_{j_{k+1}}\, \delta x_{j_{h_i+1}} \cdots \delta x_{j_k}].$$

(3) Conveniamo di assumere $j_{h_i} = 0$ se è $h_i + 1 = 1$ e $j_{h_i+1} = r+1$ se è $h_i = k$.

Detta allora $q_1, q_2, \cdots q_{k+1}$ una disposizione di classe $k+1$ degli indici $1, 2, \cdots, r$ con $q_1 < q_2 < \cdots < q_{k+1}$, abbiamo per la forma (2):

$$\Omega' = \sum_{q_1 < q_2 < \cdots < q_{k+1}} \left\{ \sum_{h=1}^{k+1} (-1)^{h-1} \frac{\partial X_{q_1 \cdots q_{h-1} q_{h+1} \cdots q_{k+1}}}{\partial x_{q_h}} \right\} [\delta x_{q_1} \delta x_{q_2} \cdots \delta x_{q_{k+1}}].$$

Si pone il seguente problema:
assegnata in D *una forma differenziale di grado* $k+1$

$$\Pi = \sum_{q_1 < q_2 < \cdots < q_{k+1}} A_{q_1 q_2 \cdots q_{k+1}} [\delta x_{q_1} \delta x_{q_2} \cdots \delta x_{q_{k+1}}] \tag{3}$$

quali sono le condizioni necessarie e sufficienti a cui essa deve soddisfare perchè esista in D *una forma* Ω, *di grado* k, *che l'ammetta come derivata esterna?*

È ovvio che il problema posto equivale ad assegnare le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle soluzioni del seguente sistema di $\binom{r}{k+1}$ equazioni lineari alle derivate parziali nelle funzioni incognite $X_{j_1 j_2 \cdots j_k}$:

$$\sum_{h=1}^{k+1} (-1)^{h-1} \frac{\partial X_{q_1 \cdots q_{h-1} q_{h+1} \cdots q_{k+1}}}{\partial x_{q_h}} = A_{q_1 q_2 \cdots q_{k+1}}.$$

Diremo che la forma Π è *integrabile* in D se esiste una forma Ω tale che sia $\Omega' = \Pi$.

È intanto ben noto che è condizione necessaria perchè questo avvenga che la derivata esterna alla forma π sia identicamente nulla in D [4], mentre tale condizione è sufficiente *in piccolo*, cioè se essa viene verificata in D per ogni punto di tale dominio si può determinare un intorno nel quale è definita una forma differenziale di grado k avente la forma π come derivata.

Per talune applicazioni è di grande interesse la risoluzione *in grande* del problema posto, cioè la determinazione delle condizioni necessarie e sufficienti atte ad assegnare l'esistenza *in tutto* D di una forma Ω, *primitiva* della Π [5].

A tale proposito in un lavoro in corso ho dimostrato il seguente teorema:

I. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè la forma* (3) *sia integrabile in* D *è che riesca, comunque si consideri la varietà* V_{k+1} $(k+1)$*-dimensionale regolare chiusa, contenuta in* D:

$$\int_{V_{k+1}} \sum_{q_1 < q_2 < \cdots < q_{k+1}} A_{q_1 q_2 \cdots q_{k+1}} [\delta x_{q_1} \delta x_{q_2} \ldots \delta x_{q_{k+1}}] = 0.$$

(4) Cfr. E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux* (Librairie scientifique A. Hermann & Fils, Paris, 1922), p. 71 e sgg.

(5) Nell'ipotesi che la forma (3) sia definita su una varietà chiusa che ammette una suddivisione poliedrale, il problema è già stato considerato da G. DE RHAM, *Sur l'Analysis Situs des variètes a n dimensions* (thèse) (Gauthier-Villars et C.ie, Paris, 1931), il quale è pervenuto per altra via all'analogo del teorema I.

Tale risultato costituisce un'ampia estensione del bèn noto teorema che assegna le condizioni necessarie e sufficienti d'integrabilità per una forma differenziale lineare

$$A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \cdots + A_r\,dx_r.$$

Per $k = 0$ si ottiene infatti tale teorema.

Supposto che in D, riesca

$$\Pi' \equiv 0 \tag{4}$$

ci si può chiedere di determinare ulteriori condizioni che assieme alla (4) riescano necessarie e sufficienti per l'integrabilità della forma π in D.

Una volta acquisito il teorema I, segue che:

II. – *Se* D *ha la connessione* $(k+1)$*-dimensionale di ordine* p *e se riesce in* D *verificata la* (4)*, condizione necessaria e sufficiente perchè* Π *sia ivi integrabile è che fissato un sistema fondamentale di* p *varietà regolari chiuse:* $V^{(1)}_{k+1}, V^{(2)}_{k+1}, \cdots, V^{(p)}_{k+1}$ *di* D [6] *si abbia:*

$$\int_{V^{(i)}_{k+1}} \Pi = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, p).$$

Da ciò segue che:

III. – *Se* D *ha semplice la connessione* $(k+1)$*-dimensionale la condizione* $\Pi' \equiv 0$ [7] *è necessaria e sufficiente per l'integrabilità della forma* Π *in* D.

(6) Tale cioè che comunque si considerino $p' \leqq p$ varietà del sistema, non esiste in D alcuna varietà regolare $(k+2)$-dimensionale che le ammetta come completo contorno, mentre comunque si consideri in D una varietà $(k+1)$-dimensionale distinta da $V^{(1)}_{k+1}, V^{(2)}_{k+1}, \cdots, V^{(p)}_{k+1}$ essa da sola o assieme ad un certo numero delle indicate varietà costituisce il contorno completo di una V_{k+2} regolare di D.

(7) Nel caso $k = 0$, la condizione $\Pi' \equiv 0$ si riduce alle ben note condizioni d'integrabilità locali per una forma differenziale lineare

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, r).$$

Il caso $k = 1, r = 3$ equivale all'integrazione dell'equazione vettoriale nel vettore incognito $\boldsymbol{u}$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}, \tag{5}$$

che di frequente s'incontra nelle applicazioni della Meccanica. Cfr. ad esempio L. Lichtenstein, *Grundlagen der Hydromechanik* [Springer (Berlin) 1929], p. 87 e sgg., dove la (5) è considerata assieme ad altre condizioni che determinano univocamente $\boldsymbol{u}$. Cfr. anche G. Morera, *Alcune considerazioni relative all'equazione differenziale* $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. [«Rend. del Circolo Matematico di Palermo», to. VII, 1893]. L'equazione considerata dal Morera non è altro che la condizione $\Pi' = 0$ per una forma di grado due in tre variabili.

Matematica. — *Sull'equazione del calore* [1]. Nota II di L. Amerio, presentata [2] dal Corrisp. M. Picone.

Supponiamo assegnati i valori della funzione u sulla parte di σ^* in cui risulta $\cos(ny) = 1$ e, su $\sigma - \sigma^* - \chi$, i valori di una combinazione lineare

$$h(M)\,u(M) + k(M)\frac{\partial u(M)}{\partial \nu} = C(M), \tag{20}$$

con h, k, C funzioni assegnate su $\sigma - \sigma^* - \chi$. Supponiamo poi che la soluzione $u(P)$ appartenga all'insieme Γ_α (in modo analogo si ragiona se $u(P)$ appartiene all'insieme Γ_β).

Quanto alle funzioni h, k, C, ammettiamo che, escluso al più un insieme di misura nulla χ', risulti $h^2 + k^2 > 0$ e che l'insieme $\sigma - \sigma^* - \chi - \chi'$ si possa dividere in due parti, σ_0 e $\bar{\sigma}$, in modo che su σ_0 la (20) sia risolubile rispetto a $u(M)$, su $\bar{\sigma}$ rispetto a $\frac{\partial u(M)}{\partial \nu}$. Posto al solito, su σ, $A = u$, $B = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, sarà, su σ_0,

$$A = -\frac{k}{h}B + \frac{C}{h} \tag{21}$$

e, su $\bar{\sigma}$,

$$B = -\frac{h}{k}A + \frac{C}{k} \tag{22}$$

dove supporremo le funzioni $\frac{k}{h}, \frac{h}{k}$ limitate su $\sigma_0, \bar{\sigma}$ rispettivamente, le $\frac{C}{h}, \frac{C}{k}$ sommabili negli stessi insiemi.

Dalla (17) si ricava perciò

$$-\int_{\sigma_1^*} A v_r\, d\sigma_1^* - \int_{\sigma_0} B\left\{\frac{k}{h}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(ny) + v_r\cos(ny)\right) + v_r\operatorname{sen}(ny)\right\} d\sigma_0 +$$

$$+\int_{\bar{\sigma}} A\left\{\frac{\partial v_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(ny) + v_r\cos(ny) + \frac{h}{k}v_r\operatorname{sen}(ny)\right\} d\bar{\sigma} = -\int_{\sigma^* - \sigma_1^*} A v_r\, d\sigma^* -$$

$$-\int_{\sigma_0}\frac{C}{h}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(ny) + v_r\cos(ny)\right) d\sigma_0 + \int_{\bar{\sigma}}\frac{C}{k}v_r\operatorname{sen}(ny)\, d\bar{\sigma} + \int_{\tau} f v_r\, d\tau = c_r', \tag{23}$$

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.
(2) Nella seduta del 12 gennaio 1946.

con c'_r costanti note. Considerato allora, nello spazio S_3, un vettore $\mathbf{G}'$ di componenti A in σ_1^*, B in σ_0, A in $\bar{\sigma}$, e una successione di vettori $\{\boldsymbol{\omega}'_r\}$, di componenti $-v_r$ in σ_1^*, $-\frac{k}{h}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu}\operatorname{sen} ny + v_r \cos(ny)\right) - v_r \operatorname{sen}(ny)$ in σ_0, $\frac{\partial v_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(ny) + v_r\cos(ny) + \frac{h}{k}v_r \operatorname{sen}(ny)$ in $\bar{\sigma}$, dalla (23) si ricava

$$(\mathbf{G}', \boldsymbol{\omega}'_r) = c'_r, \tag{24}$$

cioè si conoscono i coefficienti di Fourier del vettore $\mathbf{G}'$ rispetto alla successione di vettori $\{\boldsymbol{\omega}'_r\}$. Viceversa, sia $\mathbf{G}'$ un vettore soddisfacente alla (24). Per le (21), (22) e ricordando che la A risulta determinata su σ_1^*, le funzioni A, B si possono definire quasi ovunque su σ, $\sigma - \sigma^*$ rispettivamente. Eliminando poi la C dalle (23) mediante le (21), (22) si ricava che A, B soddisfano al sistema (17) e quindi alla (13). Per il teorema I, l'integrale $u(P)$ dato dalla (14) soddisfa quasi ovunque alle condizioni (11), (12) ed appartiene all'insieme Γ_α. Per le (21), (22) la $u(P)$ soddisfa perciò alla condizione (20). Inoltre se vale, per il problema considerato, il teorema di unicità (nella classe Γ_α) la successione $\{\boldsymbol{\omega}'_r\}$ è chiusa; se tale teorema non vale, le autosoluzioni sono *caratterizzate* dall'essere i corrispondenti vettori $\mathbf{G}'$ *ortogonali* alla successione $\{\boldsymbol{\omega}'_r\}$, cioè tali che risulti $(\mathbf{G}', \boldsymbol{\omega}'_r) = 0$. Dedotta poi, nel modo ben noto, dalla successione $\{\boldsymbol{\omega}'_r\}$ una successione $\{\zeta'_r\}$ ortogonale e normale, il sistema (24) *equivale* al sistema

$$(\mathbf{G}', \zeta'_r) = d'_r,$$

con d'_r costanti note, e, per il teorema di Fischer-Riesz, si ha che *condizione caratteristica affinchè il problema dato ammetta soluzione, il vettore* $\mathbf{G}'$ *risultando di norma integrale finita, è che converga la serie* $\sum d'^2_r$.

Osserviamo inoltre che, in virtù del teorema I, l'equazione (13), o l'equivalente sistema (17), consente di trovare le soluzioni, se esistono, di quei problemi al contorno nei quali i valori assegnati risultino sovrabbondanti: ad esempio, se si suppone assegnata la funzione A in tutti i punti di σ. Lo stesso dicasi per il problema di Cauchy, nel quale si supporrà assegnata la A (M) su una parte, σ_2^*, di σ^*, le A (M), B (M) su una parte, σ_2, di $\sigma - \sigma^* - \chi$, mentre sono incogniti i valori della A (M) in $\sigma^* - \sigma_2^*$, delle A (M), B (M) in $\sigma - \sigma^* - \chi - \sigma_2$.

3. Una notevole proprietà delle funzioni dell'insieme Γ_α è indicata dal seguente teorema, analogo a uno già dimostrato per le equazioni di tipo ellittico:

II. – *Sia w una funzione di classe 2 in un dominio τ' contenente τ nel suo interno e sia $u(P)$ una funzione dell'insieme Γ_α. Vale allora la formula di Green:*

$$(25)\qquad -\int_\tau u\mathrm{E}^*(w)\,d\tau =$$

$$= \int_\sigma \left\{ \mathrm{A}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\operatorname{sen}(n\nu) + w\cos(n\nu)\right) - \mathrm{B}w\operatorname{sen}(n\nu)\right\} d\sigma - \int_\tau fw\,d\tau .$$

4. Nel procedimento di integrazione indicato nel n. 2 si fa esplicitamente uso, attraverso le funzioni $v_r(\mathrm{M})$, della soluzione fondamentale. Ora, analogamente a quanto vale per le equazioni di tipo ellittico, ciò può essere evitato (circostanza questa, come è naturale, utile soprattutto nell'integrazione delle equazioni a coefficienti variabili).

Posto infatti

$$(26)\qquad w_r = x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}\, y^{\alpha_{m+1}}, \qquad (\alpha_k = 0, 1, \cdots)$$

consideriamo il sistema di equazioni

$$(27)\qquad -\int_\tau u\mathrm{E}^*(w_r)\,d\tau =$$

$$= \int_\sigma \left\{ \mathrm{A}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(n\nu) + w_r\cos(n\nu)\right) - \mathrm{B}w_r\operatorname{sen}(n\nu)\right\} d\sigma - \int_\tau fw_r\,d\tau$$

per il quale si dimostra il seguente teorema.

III. – *Siano* u, A, B *tre funzioni, delle quali* A, B sen $(n\nu)$ *sommabili su* $\sigma, \sigma - \sigma^*$ *rispettivamente e soddisfacenti all'equazione* (13), u *definita entro* τ *dalla* (14). *Allora* u, A, B *soddisfano al sistema* (27).

Viceversa, siano u, A, B sen $(n\nu)$ *tre funzioni sommabili nei rispettivi insiemi di definizione e soddisfacenti al sistema* (27). *Allora* A, B *soddisfano alla* (13) *e* u, *ove se ne alteri al più il valore in un insieme di misura nulla, è data dalla* (14).

Il sistema (27) permette di risolvere i problemi al contorno per la (1) con lo stesso procedimento adoperato nel n. 2. Mantenendo le medesime notazioni, si ricava infatti dalle (23), (27).

$$(28)\qquad \int_\tau u\mathrm{E}^*(w_r)\,d\tau - \int_{\sigma_1^*} \mathrm{A}w_r\,d\sigma_1^* - \int_{\sigma_0} \mathrm{B}\left\{ \frac{k}{h}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(n\nu) + w_r\cos(n\nu)\right) + \right.$$

$$\left. + w_r\operatorname{sen}(n\nu)\right\} d\sigma_0 + \int_{\bar\sigma} \mathrm{A}\left\{ \frac{\partial w_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(n\nu) + w_r\cos(n\nu) + \frac{h}{k}w_r\operatorname{sen}(n\nu)\right\} d\bar\sigma = c_r'',$$

con c_r'' costanti note. Definiamo ora, nello spazio S_4, un vettore G'' di componenti u in τ, A in σ_1^*, B in σ_0, A in $\bar\sigma$, e una successione di

vettori $\{\omega_r''\}$ di componenti $E^*(w_r)$ in τ, $-w_r$ in σ_1^*, $-\frac{k}{h}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(ny) + \right.$

$\left. + w_r \cos(ny)\right) - w_r \operatorname{sen}(ny)$ in σ_0, $\frac{\partial w_r}{\partial \nu}\operatorname{sen}(ny) + w_r\cos(ny) + \frac{h}{k}\, w_r \operatorname{sen}(ny)$ in $\bar{\sigma}$.

Si ha allora, per la (28), il sistema

$$(29) \qquad (G'', \omega_r'') = c_r'',$$

cioè si conoscono i coefficienti di Fourier dell'incognito vettore G'' rispetto alla successione $\{\omega_r''\}$. Si dimostra poi, ragionando come nel n. 2, che se G'' è una soluzione del sistema (29) le funzioni A, B, che si possono definire su tutto σ e su tutto $\sigma - \sigma^* - \chi$ mediante la conoscenza di G'' e le (21), (22), dànno luogo, per la (14), a una funzione $u(P)$ che è integrale dalla (1) e soddisfa alla (20).

Anche in questo caso infine le autosoluzioni sono *caratterizzate* dall'essere i corrispondenti vettori G'' ortogonali alla successione $\{\omega_r'\}$.

Osservazione. – Dal teorema III segue che *la successione* $\{E^*(w_r)\}$ *è chiusa rispetto alla totalità delle funzioni sommabili in* τ.

Infatti se risulta, per ogni r,

$$\int_\tau u E^*(w_r)\, d\tau = 0,$$

si soddisfa al sistema (27) ponendo $A \equiv B \equiv f \equiv 0$. Per il teorema III la u è allora necessariamente quasi ovunque nulla.

5. Consideriamo ora il metodo della trasformata di Laplace a dominio di integrazione limitato, ideato dal Picone.

Posto $w = e^{\sum_1^m {}_k\, p_k x_k + qy}$, se u, A, B sono tre funzioni per cui valgono le (13), (14) risulta, per il teorema II,

$$(30) \qquad -\left(\sum_1^m {}_k\, p_k^2 + q\right)\int_\tau uw\, d\tau =$$

$$= \int_\sigma \left\{ A\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\operatorname{sen}(ny) + w\cos(ny)\right) - Bw\operatorname{sen}(ny)\right\} d\sigma - \int_\tau fw\, d\tau.$$

Perciò, se $q = -\sum_1^m {}_k\, p_k^2$ e quindi la funzione

$$(31) \qquad w' = e^{\sum_1^m {}_k\, p_k x_k - y\sum_1^m {}_k\, p_k^2}$$

è un integrale dell'equazione $E^*(w') = 0$, si ricava che le funzioni A, B soddisfano all'equazione

$$(32) \quad \int_\sigma \left\{ A\left(\frac{\partial w'}{\partial \nu} \operatorname{sen}(n\nu) + w' \cos(n\nu)\right) - Bw' \operatorname{sen}(n\nu) \right\} d\sigma - \int_\tau fw'\, d\tau \equiv 0 .$$

Questa è perciò soddisfatta dalle coppie A, B di funzioni coincidenti rispettivamente con i valori assunti su σ da un integrale u della (1) (appartenente all'insieme Γ_α) e dalla sua derivata conormale. Il Picone ha posta la questione di dimostrare sotto quali condizioni non vi siano altre coppie di funzioni, oltre quelle dotate del comportamento ora indicato, soddisfacenti alla (32). In tal caso tale equazione si può utilizzare per la risoluzione dei problemi al contorno deducendone, mediante le derivazioni di tutti gli ordini rispetto ai parametri p_k effettuate in un punto qualsiasi $(p'_1, \cdots, p'_m)$, un equivalente sistema di Fischer–Riesz analogo al sistema (17).

Quanto alla questione posta dal Picone, vale il teorema

IV. – *Se le funzioni* A, B *soddisfano all'equazione* (32) *e se per ogni* η *l'insieme dei punti appartenenti all'iperpiano caratteristico di equazione* $y = \eta$ *ed esterni al dominio* τ *risulta connesso, le stesse funzioni soddisfano all'equazione* (13).

Perciò, nelle ipotesi del teorema IV, all'equazione (32) soddisfano *tutte e sole* le coppie A, B coincidenti, con i valori assunti su σ da un integrale u della (1) (appartenente alla classe Γ_α) e dalla sua conormale.

Matematica. — *Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche* [1]. Nota II, di JOSÈ SEBASTIÃO E SILVA, presentata [2] dal Corrisp. M. PICONE.

I risultati contenuti in questa Nota si collegano ad un mio lavoro dallo stesso titolo pubblicato nel fascicolo precedente.

1. Per la valutazione degli errori con cui vengono calcolate le radici mediante il metodo di Gräffe, sono già stati proposti alcuni procedimenti. Non ho potuto però accertare se quello che presento in seguito costituisce o non un progresso rispetto a tutto ciò che si è trovato finora su questo argomento.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. L'autore fruisce di una borsa di studio dell'« Instituto para a Alta Cultura » di Lisbona, presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

Ricordando quanto si è detto nella nota 1, e ponendo, per comodità, $2^p = s$, è facile vedere come si abbia, qualunque sia $k = m_1, m_2, \cdots, m_r$:

$$|\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| \sqrt[s]{1 - (h-1)\lambda_k^s} \leq |\sqrt[s]{A_{k,p}}| < |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| \sqrt[s]{h},$$

o ancora

$$(5) \quad |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| \leq |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot [1 - (h-1)\lambda_k^s]^{-\frac{1}{s}},$$

dove h rappresenta il massimo di $\binom{n}{i}$ per $i = 1, 2, \cdots, n$, e

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 & , \text{ per } k = n \\ \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|, & \text{per } k < n \end{cases}$$

(ammettendo, naturalmente, che il valore di p sia già abbastanza elevato perchè si abbia $1 - (h-1)\lambda_k^s < 1$).

Osserviamo inoltre che la diseguaglianza $|\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| > |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{s}}$ sussiste qualunque sia $k = 1, 2, \cdots, n$.

Supponiamo allora che si abbia, per un determinato valore di k:

$$(6) \quad \left|\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}\right| > h^{-\frac{1}{s}} \ (i = 2, 3, \cdots, k) \ ; \ \lambda_k < h^{-\frac{1}{s}}.$$

Allora, tenendo conto della (5) e dell'ultima delle condizioni (6), verrà

$$[1 - (h-1)\lambda_k^s]^{-\frac{1}{s}} < [1 - (h-1)/h]^{-\frac{1}{s}} = h^{\frac{1}{s}},$$

$$(7) \quad |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| < |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{\frac{1}{s}}.$$

D'altra parte, tenendo conto delle prime condizioni (6), si avrà

$$|\alpha_1|^k \cdot h^{-\frac{1}{s}} \cdot h^{-\frac{2}{s}} \cdots h^{-\frac{k-1}{s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| < |\alpha_1|^k,$$

ossia

$$|\alpha_1|^k \cdot h^{-\frac{k(k-1)}{2s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k| < |\alpha_1|^k,$$

donde

$$|\sqrt[k]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}| < |\alpha_1| < h^{\frac{k-1}{2s}} |\sqrt[k]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}|,$$

e finalmente, badando a (7):

$$|\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{ks}} < |\alpha_1| < |\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \cdot h^{\frac{k-1}{2s} + \frac{1}{ks}}.$$

Però, non si sa *a priori* quale è il valore di k che soddisfa le condizioni (6); ma si sa che, nella peggiore delle ipotesi, sarà $k = n$. *Allora è facile vedere come il modulo di* $|\alpha_1|$, *stia sempre compreso tra il massimo valore di* $|\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{s}}$ *ed il massimo valore di* $|\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \, h^{\frac{k-1}{2s}+\frac{1}{ks}}$, *per* $k = 1, 2, \cdots, n$ [3].

Abbiamo così, per il modulo di $|\alpha_1|$, una *prima* limitazione, la quale non richiede calcoli supplementari troppo faticosi, purchè si faccia uso di logaritmi. Se il massimo valore di k così raggiunto è superiore a 1, ciò significa che le k radici di modulo massimo sono *approssimatamente* equimodulari (cioè, costituiscono un *grappolo* di radici, entro il grado di approssimazione raggiunto).

Per le altre radici dello stesso grappolo possono utilizzarsi ancora le condizioni (6). Allora, divisi i coefficienti $A_{k+1,p}, A_{k+2,p}, \cdots, A_{n,p}$ per il valore approssimato di $|\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k|$, si procederà per i risultati in modo analogo al precedente; e così via.

La maggiorazione degli errori effettuata in questa *prima fase* è, naturalmente, poco economica, dato che ci siamo collocati nell'ipotesi più sfavorevole. I grappoli di radici non si presentano con tanta frequenza nella pratica, e, una volta ottenuti i primi valori approssimati dei moduli $|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|$, si potrà migliorare grandemente la valutazione degli errori, badando alle relazioni

$$|\sqrt[s]{A_{k,p}}| = |\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k| \cdot \left| \sqrt[s]{1 + \Sigma^* \left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k} \right)^s} \right|,$$

per i valori critici di k, e calcolando, tutt'al più con una cifra, i valori dei quozienti $\left| \frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k} \right|$, mediante i primi valori approssimati di $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots, |\alpha_n|$. *E si potrà ancora procedere in modo analogo, relativamente alla valutazione degli errori con cui vengono calcolate le parti reali delle radici, quando a questo scopo sono usate le formule* (4) *della nota precedente.*

Non bisogna tuttavia dimenticare che, se esistono radici approssimatamente equimodulari (non coniugate), le rispettive parti reali vengono mal determinate, ed allora sarà necessario, o spingere più in su il procedimento di Gräffe, o ricorrere a perfezionamenti del metodo che abbiamo descritto nel numero precedente (a meno che non si rinunci addirittura a questo metodo, in tale ipotesi) [4].

(3) È facile anche vedere come la differenza tra gli estremi di questa limitazione tenda a zero per $p \to \infty$.

(4) L'approssimazione ottenuta ogni volta per i moduli è sempre molto superiore a quella corrispondente ottenuta per le parti reali. Ma questo fatto non ha tanta importanza, se ricordiamo che, in generale, calcolati i moduli con k cifre esatte, non ci vuole molto lavoro in più per raddoppiare questo numero di cifre (eccettuati i casi di uguaglianza approssimata). D'altra parte, non bisogna dimenticare che le macchine calcolatrici consentono di fare i calcoli con almeno sette cifre significative.

In ogni modo, non mi sembra che l'applicazione del processo qui indicato per la valutazione degli errori comporti un sovraccarico eccessivo di lavoro – *purchè usato da un abile calcolatore che sappia sfruttare il metodo sino in fondo, senza sprecare energia. Molte possibilità di semplificazione possono essere suggerite dalla pratica. Siamo arrivati al punto in cui soltanto l'esperienza può decidere e chiarire.*

Tuttavia, per farci un'idea sull'economia di questo metodo di maggiorazione, supponiamo che la $F(x) = 0$ sia di grado sesto, e che si abbia $\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| > 0{,}99$ per $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Ora per accorgerci di questo ultimo fatto, nel corso del procedimento di Gräffe, ci vorrà un numero p di trasformazioni, tale che

$$h^{\frac{k-1}{2^p+1}-\frac{1}{2^p}} < 0{,}01\,, \quad \text{con} \quad k = 6\,, \quad h = \binom{6}{3} = 20\,,$$

ossia

$$p > 10\,.$$

Ma non dimentichiamo che un tal caso è un infortunio che raramente capiterà ad un calcolatore.

Bisogna intanto tener presente che, nel passaggio da una trasformata a quella successiva, si introducono quasi sempre errori, dovuti al fatto che, crescendo molto rapidamente i coefficienti, diventa presto impossibile conservarne tutte le cifre: i metodi di maggiorazione dovrebbero quindi essere perfezionati, tenendo conto anche di questo fatto. Osserviamo inoltre che tali errori sono più notevoli nei coefficienti *irregolari,* cioè, in quei coefficienti $A_{k,p}$ tali che il valore di $\left|\sqrt[2^p]{A_{k,p}}\right|$ non tende a nessun limite con $p \to \infty$; se ricordiamo che, nel metodo dello spezzamento (n. 3), il calcolo delle parti reali poggia proprio sui coefficienti di questo genere, si vede qui un inconveniente di tale metodo.

Osserviamo da ultimo che il riconoscere, nel corso dei calcoli, un dato coefficiente $A_{k,p}$ come irregolare, ha molto interesse per il problema della maggiorazione, poichè, a tale termine, corrisponderà (nel caso dei coefficienti reali) una coppia α_k, α_{k+1} di radici coniugate, ed allora si saprà che è *esattamente* $\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = 1$. D'altra parte, il detto coefficiente non dovrà più essere tenuto in conto nei calcoli della maggiorazione.

2. Il metodo dello spezzamento della trasformata suggerisce naturalmente questa domanda: Non sarebbe possibile fare qualche cosa di simile, *proprio sull'equazione proposta?*

Supponiamo allora che le m prime radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ della $F(x) = 0$ abbiano moduli superiori a quelli delle altre radici $\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$,

e siano $\varphi_{m,p}(x)$, $\psi_{m,p}(x)$ due polinomi di gradi rispettivamente $n-m$ ed $m-1$, tali che

$$\varphi_{m,p}(\alpha_i) + \alpha_i^p \psi_{m,p}(\alpha_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

essendo p un intero positivo qualunque.

Due polinomi siffatti esistono sempre e sono generalmente determinati a meno di una costante moltiplicativa. In tal caso, *il polinomio* $\varphi_{m,p}(x)$ *non è altro che l'm-esimo resto che si ottiene, applicando l'algoritmo di* Euclide (*delle divisioni successive*) *ai polinomi* x^p, $F(x)$.

Orbene: in un mio lavoro precedente (5), ho dimostrato che, *se la* $F(x) = 0$ *non ha radici multiple, le radici dell'equazione* $\varphi_{m,p}(x) = 0$ *tendono, per* $p \to \infty$, *alle* $n-m$ radici di modulo minimo *della* $F(x) = 0$. Se, invece, sono le $m-1$ radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ che hanno moduli superiori a quelli delle rimanenti, si può anche dimostrare che *le radici della* $\psi_{m,p}(x) = 0$ *tendono, per* $p \to \infty$, *alle* $m-1$ *radici di modulo massimo della* $F(x) = 0$.

Si ha così un metodo di *approssimazione razionale* per il calcolo delle radici. La costruzione dei polinomi $\varphi_{1,p}(x)$ può essere facilmente effettuata, per $p = 2, 2^2, 2^3, \cdots$, con un processo d'iterazione simile a quello di Gräffe. Dai polinomi $\varphi_{1,p}(x)$ si può in seguito passare ai polinomi $\varphi_{2,p}(x)$, $\varphi_{3,p}(x), \cdots$ per ogni valore di p; ma qui si presentano difficoltà di calcolo, derivate dall'impossibilità pratica di operare con più di un certo numero di cifre.

Supponiamo che sia $|\alpha_1| > |\alpha_i|$ $(i = 2, 3, \cdots, n)$. Allora possiamo anche dire che, prendendo una data radice α_1^* della $\varphi_{1,f}(x) = 0$, come valore approssimato della radice corrispondente α_i della $F(x) = 0$, si commette un errore inferiore, in valore assoluto, a $\left|\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right|^p$.

Questo metodo, che è stato provato all'I. A. C., con risultati incoraggianti, dal dott. Enzo Aparo, va ancora studiato e approfondito (6).

Tuttavia, non bisogna dimenticare la seguente norma: *Non sempre il metodo più interessante dal punto di vista estetico è quello che poi trionfa nella pratica.*

(5) *Sur une méthode d'approximation semblable à celle de Gräffe.* « Port. Math. », vol. 2 (1941), pp. 271-279.

(6) L'Aparo l'ha perfezionato dal punto di vista pratico e i suoi risultati sono raccolti n un lavoro che si trova in corso di pubblicazione nella rivista « Portugalia e Mathematica ».

Matematica. — *Determinazione unitaria di enti proiettivi legati ad un punto di una superficie.* Nota di U. Salini, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani,

1. – Consideriamo una superficie φ non rigata dello spazio ordinario e in un suo punto P il piano tangente δ, il fascio principale di quadriche [2] e le due cubiche γ_1 e γ_2 rispettivamente osculatrici alle asintotiche della superficie passanti per P.

Indichiamo poi con π_1 e π_2 le polarità nulle determinate dalle due cubiche γ_1 e γ_2 e con σ la polarità rispetto alla generica quadrica del fascio principale. Indichiamo ancora con π la proiettività prodotto di π_1 e σ e con π' la proiettività prodotto di π_2 e σ.

Scopo di questa Nota è quello di fare vedere che mediante dette proiettività π e π' è possibile individuare sia gli spigoli di Green che le direttrici di Wiltzynski uscenti dal punto P e quindi il piano canonico e il punto canonico [3]. Inoltre, restano individuate altre rette del primo e del secondo fascio canonico e altri elementi fuori del piano canonico e del piano tangente δ. La determinazione di tutti i detti enti viene poi a dipendere, come è ovvio, dall'intorno del terzo ordine del punto della superficie [4].

2. – Supponiamo la superficie φ riferita alle linee asintotiche e facciamo corrispondere alle coordinate (x'', y'', z'') di un qualsiasi punto dello spazio le coordinate ausiliarie o locali (x^*, y^*, z^*) mediante la posizione:

$$x'' = x + x^* \frac{\partial x}{\partial u} + y^* \frac{\partial x}{\partial v} + z^* \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \quad \text{(e le analoghe in } y \text{ e } z\text{)}.$$

Allora, rispetto alle coordinate locali omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 il fascio principale di quadriche è rappresentato dalla equazione [5]:

$$\mu x_2^2 - \frac{1}{3} x_0 x_1 + \frac{1}{3} M_1 x_0 x_2 + \frac{1}{3} M_2 x_1 x_2 + x_2 x_3 = 0$$

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Vedi: U. Salini, *Sopra un fascio di quadriche definito in un punto di una superficie*, «Rend. Lincei», vol. XXVII, ser. 6ª, fasc. I, 1938.

(3) Qui si segue un metodo unitario per la determinazione contemporanea dei detti enti. Vedi pure U. Salini, loc. cit. (9).

(4) La determinazione completa di un riferimento invariante non può farsi limitandosi all'intorno del 3° ordine del punto; ma occorre quello del 4° ordine. Essa è già stata fatta in modo unitario (servendosi delle coniche per il punto contenenti elementi curvilinei della superficie uscenti da esso) da E. Bompiani, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, «Rendic. Semin. Mat. Univ. di Roma», ser. VI, vol. II, 1938, pp. 99–120.

(5) Vedi: U. Salini, loc. cit. in (3).

dove si ha:

$$M_1 = a - \frac{1}{2b}\frac{\partial b}{\partial u} \quad ; \quad M_2 = q - \frac{1}{2p}\frac{\partial p}{\partial v}$$

dove i coefficienti a, b, p, q sono quelli che figurano nelle equazioni

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \gamma\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial x}{\partial v} \text{ (e le analoghe in } y \text{ e } z)$$

che definiscono la superficie φ riferita alle asintotiche.

Inoltre la cubica γ_1 osculatrice alla asintotica v è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_0 = t + \frac{1}{3}M_1 t^2 + Mt^3 \quad ; \quad x_1 = \frac{b}{2}t^2 \\ x_2 = \frac{b}{6}t^3 \quad ; \quad x_3 = 1 + Nt^2 + Ht^3 \end{cases}$$

dove t denota il parametro ed M, N, H sono certe espressioni formate con a, b, p, q e le loro derivate, che soddisfano alla relazione [6]:

$$3M + N = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial v} + bq\right).$$

Analogamente, la cubica γ_2 osculatrice alla asintotica u è rappresentata dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{p}{2}t_1^2 \quad ; \quad x_1 = t_1 + \frac{1}{3}M_2 t_1^2 + M' t_1^3 \\ x_2 = \frac{p}{6}t_1^3 \quad ; \quad x_3 = 1 + N' t_1^2 + H' t_1^3 \end{cases}$$

dove t_1 è il parametro ed M', N', H' sono certe espressioni formate con a, b, p, q e le loro derivate, che soddisfano alla relazione $3M' + N' = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial u} + ap\right)$.

3. – Se con $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ indichiamo le coordinate omogenee locali di un piano, la polarità σ è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{cases} \rho\xi_0 = -\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}M_1 x_2 \quad ; \quad \rho\xi_1 = -\frac{1}{6}x_0 + \frac{1}{6}M_2 x_2 \\ \rho\xi_2 = \frac{1}{6}M_1 x_0 + \frac{1}{6}M_2 x_1 + \mu x_2 + \frac{1}{2}x_3 \quad ; \quad \rho\xi_3 = \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

(6) Vedi: R. Calapso, *Un teorema sullo spigolo di Green.* «Rend. Lincei», vol. XIII, ser. 6ª, anno 1931.

dove ρ è un fattore di proporzionalità. Le polarità nulle π_1 e π_2 sono rispettivamente rappresentate dalle equazioni:

$$\begin{cases} \rho_1 \xi_0 = b x_1 \;\; ; \;\; \rho_1 \xi_1 = -b x_0 - \left(\dfrac{\partial b}{\partial v} + bq\right) x_2 \\ \rho \xi_2 = \left(\dfrac{\partial b}{\partial v} + bq\right) x_1 + b x_3 \;\; ; \;\; \rho_1 \xi_3 = -b x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_2 \xi_0 = -p x_1 - \left(\dfrac{\partial p}{\partial u} + ap\right) x_2 \;\; ; \;\; \rho_2 \xi_1 = p x_0 \\ \rho_2 \xi_2 = \left(\dfrac{\partial p}{\partial u} + ap\right) x_0 + p x_3 \;\; ; \;\; \rho_2 \xi_3 = -p x_2 \end{cases}$$

la proiettività π è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{cases} \lambda x_0^* = b x_0 + \left(Q - \dfrac{b}{3} M_2\right) x_2 \;\; ; \;\; \lambda x_1^* = -b x_1 - \dfrac{b}{3} M_1 x_2 \\ \lambda x_2^* = -\dfrac{b}{3} x_2 \;\; ; \;\; \lambda x_3^* = -\dfrac{b}{3} M_1 x_0 + \dfrac{1}{3}(bM_2 + Q) x_1 + \\ \quad + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2b}{3} M_1 M_2 - M_1 Q + 2b\mu\right) x_2 + \dfrac{b}{3} x_3 \end{cases}$$

dove λ è un fattore di proporzionalità e si ha $Q = \dfrac{\partial b}{\partial v} + aq$.

Analogamente la proiettività π' è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{cases} \lambda' x_2^* = -p x_0 - \dfrac{p}{3} M_2 x_2 \;\; ; \;\; \lambda' x_1^* = p x_1 + \left(S - \dfrac{p}{3} M_1\right) x_2 \\ \lambda' x_2^* = -\dfrac{p}{3} x_2 \;\; ; \;\; \lambda' x_3^* = \dfrac{1}{3}(pM_1 + S) x_0 - \dfrac{p}{3} M_2 x_1 + \\ \quad + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2p}{3} M_1 M_2 - M_2 S + 2p\mu\right) x_2 + \dfrac{p}{3} x_3 \end{cases}$$

dove λ' è un fattore di proporzionalità e si ha: $S = \dfrac{\partial p}{\partial u} + ap$.

4. – I punti uniti della proiettività π sono:

Il punto A di coordinate non omogenee $x^* = -\dfrac{2}{M_1}$; $y^* = 0$; $z^* = 0$ che appartiene alla tangente alla asintotica v; il punto B′ di coordinate non omogenee $x^* = 0$, $y^* = \dfrac{-4}{M_2 + \dfrac{Q}{b}}$, $z^* = 0$ che appartiene alla tangente

alla asintotica u; il punto P della superficie φ; il punto D le cui coordinate omogenee soddisfano alle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} b x_0 + \left(Q - \frac{b}{3} M_2\right) x_2 = 0 \quad ; \quad 2 x_1 + M_1 x_2 = 0 \\ - b M_1 x_0 + (b M_2 + Q) x_1 + \left(\frac{2}{3} b M_1 M_2 - M_1 Q + 2 b\mu\right) x_2 + 2 b x_3 = 0 . \end{cases}$$

Al variare di μ, cioè al variare della quadrica nel fascio principale, questo punto D descrive la retta n_1 di equazioni:

$$x^* + \frac{1}{4}\left(3\frac{Q}{b} - M_2\right) z^* = 0 \quad ; \quad y^* + \frac{1}{2} M_1 z^* = 0 .$$

Da quanto precede, risulta che la proiettività π è una omografia generale i cui quattro punti uniti A, B′, P, D sono i vertici di un tetraedro. Gli spigoli PA, PB′ di questo tetraedro sono rispettivamente le tangenti alla asintotica v e a quella u, lo spigolo PD è la retta n_1. Restano inoltre individuati i piani α_1 e α_2' delle facce PAD e PB′D, di rispettive equazioni:

$$y^* + \frac{1}{2} M_1 z^* = 0 \quad ; \quad x^* + \frac{1}{4}\left(3\frac{Q}{b} - M_2\right) z^* = 0 .$$

5. - In modo analogo si può studiare la proiettività π' e si trova che essa è una omografia generale i cui quattro punti uniti sono: Il punto P della superficie φ; il punto A′ di coordinate non omogenee $x^* = 0$, $y^* = -\frac{2}{M_2}$, $z^* = 0$ appartenente alla tangente in P alla asintotica u; il punto B di coordinate non omogenee $x^* = \frac{-4}{M_1 + \frac{S}{p}}$; $y^* = 0$; $z^* = 0$ appartenente alla tangente alla asintotica v; il punto D′ le cui coordinate omogenee soddisfano al sistema:

$$\begin{cases} 2 x_0 + M_1 x_2 = 0 \quad ; \quad \frac{4}{3} p x_1 + \left(S - \frac{p}{3} M_1\right) x_2 = 0 \\ (p M_1 + S) x_0 - p M_2 x_1 + \left(\frac{2}{3} p M_1 M_2 - M_2 S + 2 p\mu\right) x_2 + 2 p x_3 = 0 . \end{cases}$$

Al variare di μ, cioè al variare della quadrica nel fascio principale, questo punto D′ descrive la retta n_1' di equazioni:

$$x^* + \frac{1}{2} M_2 z^* = 0 \quad ; \quad y^* + \frac{1}{4}\left(3\frac{S}{p} - M_1\right) z^* = 0 .$$

I punti uniti della proiettività π' sono i vertici di un tetraedro PA′BD′, i cui spigoli PB, PA′ sono rispettivamente le tangenti all'asintotica

v e a quella u, lo spigolo PD′ è la retta n_1' e le facce PBD , PA′D′ individuano i piani α_2 e α_1' di rispettive equazioni:

$$y^* + \frac{1}{4}\left(3\,\frac{S}{p} - M_1\right)z^* = 0 \quad ; \quad x^* + \frac{1}{2}M_2\,z^* = 0\,.$$

6. – I quattro punti A , A′ , B , B′ individuati sul piano tangente δ permettono di individuare contemporaneamente il secondo spigolo s_2 di Green, la seconda direttrice d_2 di Wiltzynski, la prima e la seconda tangente canonica e due altre rette a_2 ed l_2 del secondo fascio canonico.

Infatti, tenendo conto delle coordinate di detti punti, si vede subito che la retta AA′ ha le equazioni:

$$M_1\,x^* + M_2\,y^* + 2 = 0 \quad ; \quad z^* = 0$$

ed essa è il secondo spigolo di Green. La retta BB′ ha le equazioni

$$\left(M_1 + \frac{S}{p}\right)x^* + \left(M_2 + \frac{Q}{b}\right)y^* + 4 = 0 \quad ; \quad z^* = 0$$

questa retta, che diremo l_2 taglia la s_2 nel punto C che è il punto canonico (7). Resta così pure individuata la seconda tangente canonica $t_2 \equiv PC$, mentre la prima tangente canonica t_1 è la congiungente del punto P col punto H comune alle rette $n_2 \equiv AB'$, $n_2' \equiv A'B$. La retta $a_2 \equiv CH$, che è la coniugata armonica della t_2 rispetto alle rette l_2 ed s_2 , ha le equazioni:

$$\left(3\,M_1 + \frac{S}{p}\right)x^* + \left(3\,M_2 + \frac{Q}{b}\right)y^* + 8 = 0 \quad ; \quad z^* = 0$$

ed è una retta ben determinata del secondo fascio canonico. La coniugata armonica della s_2 rispetto alle rette l_2 e t_2 ha le equazioni:

$$\frac{S}{p}\,x^* + \frac{Q}{b}\,y^* + 2 = 0 \quad ; \quad z^* = 0$$

ed è la seconda direttrice d_2 di Wiltzynski. Si ha poi che:

$$(d_2\,s_2\,a_2\,t_2) = -3 \quad ; \quad (d_2\,s_2\,a_2\,l_2) = 3.$$

7. – I piani α_1 , α_2 , α_1' , α_2' precedentemente individuati sono rispettivamente i primi polari dei punti A , B , A′ , B′ rispetto alla generica quadrica del fascio principale. Questi piani dànno luogo ad un angolo quadrispigolo di vertice P i cui spigoli sono: le rette n_1 , n_2; la retta s_1 comune ai piani π_1 e π_1' , la retta l_1 comune ai piani π_2 e π_2'. Questo quadrispigolo corrisponde nella polarità rispetto alla quadrica del fascio principale al quadrangolo AB A′B′. Precisamente le rette s_1 , l_1 , n_1 , n_1' sono rispettivamente le polari dei lati s_2 , l_2 , n_2 , n_2'. Gli spigoli diagonali di questo quadrispigolo sono le

(7) Questa retta l_2 è stata da me già ottenuta per altra via, vedi U. Salini, loc. cit. in (2).

tangenti alle asintotiche della superficie uscenti dal punto P e la retta a_1 uscente da P di equazioni:

$$x^* + \frac{1}{8}\left(M_2 + 3\frac{Q}{b}\right)z^* = 0 \quad ; \quad y^* + \frac{1}{8}\left(M_1 + 3\frac{S}{p}\right)z^* = 0$$

che è la polare della retta $a_2 \equiv CH$ rispetto alla quadrica del fascio.

Il piano α_c delle due rette s_1 ed l_1 è il piano canonico, piano polare del punto C rispetto alla quadrica del fascio principale.

Sul detto piano α_c la retta s_1 è il primo spigolo di Green ed ha le equazioni:

$$x^* + \frac{1}{2}M_2 z^* = 0 \quad ; \quad y^* + \frac{1}{2}M_1 z^* = 0.$$

La retta l_1 di equazioni:

$$x^* + \frac{1}{4}\left(3\frac{Q}{b} - M_2\right)z^* = 0 \quad ; \quad y^* + \frac{1}{4}\left(3\frac{S}{p} - M_1\right)z^* = 0$$

non è la prima direttrice di Wiltzynski ma questa direttrice d_1 è la coniugata armonica della s_1 rispetto alle rette a_1 ed l_1 e le sue equazioni sono:

$$x^* + \frac{1}{2}\frac{Q}{b}z^* = 0 \quad ; \quad y^* + \frac{1}{2}\frac{S}{p}z^* = 0.$$

Inoltre si ha:

$$(s_1\, d_1\, l_1\, t_1) = 3 \quad ; \quad (s_1\, d_1\, a_1\, t_1) = -3.$$

Restano in questo modo individuati contemporaneamente il primo spigolo s_1 di Green, la prima direttrice d_1 di Wiltzynski, il piano canonico, ed ancora le rette a_1 ed l_1 del primo fascio canonico. Restano ancora individuate le rette n_1 ed n'_1 uscenti dal punto P della superficie e fuori del piano canonico.

Il piano delle dette rette ha la equazione:

$$\left(\frac{S}{p} - M_1\right)x^* + \left(\frac{Q}{b} - M_2\right)y^* + \left[\frac{1}{4}\frac{S}{p}\left(3\frac{Q}{b} - M_2\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}M_1\left(M_2 + \frac{Q}{b}\right)\right]z^* = 0.$$

Resta dunque provato quanto abbiamo affermato al n. 1.

Un'altra determinazione unitaria degli stessi elementi è stata data da me per altra via in altro lavoro [8].

(8) Vedi: U. Salini, *Un metodo per dedurre complessivamente gli enti proiettivi legati ad un punto di una superficie.* « Atti della Reale Accademia Peloritana », vol. XLVI. Quarto della terza serie.

Geometria. — *Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche.* Nota II [1] di B. SEGRE, presentata [2] dal Socio G. CASTELNUOVO.

5. In base alla definizione della Φ_h (n. 1), questa varietà è il luogo degli ∞^r spazi lineari π_h, di dimensione $\rho - r_h$ $(2 \leq h \leq n)$; il sistema di tali spazi è razionale, e vi è uno ed uno solo di essi per ogni punto generico di Φ_h. Ne consegue che Φ_h *è razionale* (e quindi irriducibile). Mostreremo ora che *la varietà* Φ_h *non contiene alcun altro sistema irriducibile di spazi* $S_{\rho-r_h}$ *soddisfacente alla condizione che per un punto generico di* Φ_h *passi uno ed uno solo di tali spazi.*

Infatti, in caso contrario, uno generico di quegli $S_{\rho-r_h}$ rappresenterebbe un sistema Σ lineare $\infty^{\rho-r_h}$ di forme f di S_r dotate di punto h–plo variabile. Una componente V_d $(d \geq 1)$ irriducibile del luogo di questo punto h–plo dovrebbe allora, a norma del teorema di Bertini, essere una varietà base $(h-1)$–pla di Σ. Ciò intanto chiaramente implica $r \geq 2$; inoltre $h = 2$, poichè un punto generico di Φ_h corrisponde ad una f avente un punto h–plo come unica singolarità puntuale, sicchè tale f non potrebbe appartenere a Σ se $h \geq 3$.

Ci resta soltanto da esaminare il caso $r \geq 2$, $h = 2$, in cui perciò $r_h = r + 1$ e V_d è una varietà base semplice di Σ. Denotando con ν il numero delle condizioni imposte alle forme f di ordine n di S_r dal passaggio per V_d, abbiamo $\nu \geq (n+d)_d$, dove l'uguaglianza sussiste se e soltanto se V_d è uno spazio lineare. D'altro canto, alle $\infty^{\rho-\nu}$ forme f passanti per V_d occorre imporre $r - d$ condizioni indipendenti affinchè acquistino un punto doppio in un punto P genericamente assegnato su V_d, onde le f soddisfacenti a tali condizioni sono $\infty^{\rho-(\nu+r-d)}$. Le f che così si ottengono quando P descrive V_d formano un sistema algebrico irriducibile, di dimensione $\leq \rho - (\nu + r - 2d)$, al quale deve appartenere il sistema lineare Σ, di dimensione $\rho - (r+1)$. Ne consegue $\nu \leq 2d + 1$, onde $(n+d)_d \leq 2d + 1$, e perciò $n = 2$, $d = 1$. Dunque Σ è un sistema lineare di quadriche di S_r, di dimensione $\delta = \rho - (r+1) = (r+2)(r-1)/2$; e le sue quadriche posseggono un punto doppio variabile, avente per luogo una curva V_1. Ne risulta che le quadriche di Σ passanti doppiamente per un punto P generico di V_1 sono $\infty^{\delta-1}$, sicchè tutte le quadriche di Σ hanno in P un iperpiano tangente fisso. Pertanto Σ appartiene al sistema formato dalle quadriche di S_r passanti per V_1 che toccano in due punti distinti di V_1 due iperpiani ivi tangenti a questa curva, onde $\rho - (r+1) \leq \rho - 3 - 2(r-2)$, e quindi $r = 2$.

(1) Continuazione della Nota I, pubblicata a p. 313 di questi «Rendiconti».

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

L'unico caso dubbio è così quello in cui $r = h = n = 2$, sicchè Φ_h ora rappresenta la totalità ∞^4 delle coniche riducibili di un piano. È ben noto che questa totalità contiene due distinti sistemi irriducibili ∞^2 di reti: ma una conica riducibile generica sta in una sola rete di un sistema ed in due reti diverse dell'altro sistema, onde uno solo di quei sistemi soddisfa alle condizioni volute.

6. In virtù del n. 5, un'omografia che trasformi in sè una varietà Φ_h $(2 \leq h \leq n)$ deve anche trasformare in sè il sistema ∞^r dei suoi spazi generatori π_h, e quindi subordina fra questi una corrispondenza algebrica e biunivoca senza eccezioni. Tale corrispondenza si riflette in S_r mediante una trasformazione Cremoniana priva di elementi eccezionali, ossia mediante un'*omografia*. La stessa conclusione si applica pure per $h = 1$, qualora Φ_1 venga considerato come insieme di iperpiani.

Reciprocamente, una qualunque omografia di S_r induce in S_ϱ un'*omografia trasformante in sè ciascuna delle* $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$, e precisamente tale che due spazi π_h generatori di Φ_h si corrispondono nell'omografia di S_ϱ se, e soltanto se, essi provengono da due punti di S_r corrispondenti nell'omografia di S_r. Ciò segue subito coll'osservare che ad una sostituzione lineare sulle (x) resta univocamente associata una sostituzione lineare sulle (ξ), mediante la condizione che la forma (1) ne risulti trasformata in sè; inoltre il sistema di equazioni (3), per $h = 1, 2, \cdots, n$, rimane pure invariante di fronte a tali sostituzioni lineari.

7. In base alla definizione di Ψ_h (n. 1) ed al teorema di Bertini, è subito visto che i soli spazi lineari giacenti sulla varietà Ψ_h (dove $h = 1, 2, \cdots, n$, ed $h < n$ se $r = 1$) sono gli spazi generatori χ_h ed i loro spazi lineari subordinati, colla sola eccezione del caso $h = n, r \geq 2$, in cui sulla Ψ esistono altri spazi di dimensione $\leq n$. Notiamo che allora la dimensione $(r + n - 1)_r - 1$ di χ_n è $> n$, tranne se $r = n = 2$. In quest'ultimo caso gli spazi χ_2 costituiscono su Ψ_2 un sistema ∞^2 di piani, tale che vi sono due distinti di questi contenenti un punto generico di Ψ_2; vi è ora su Ψ_2 un altro sistema ∞^2 di piani, dei quali però uno solo passa per un punto generico di Ψ_2.

Ne discende che un'omografia trasformante in sè una varietà Ψ_h $(1 \leq h \leq n)$ deve anche trasformare in sè il sistema ∞^r dei suoi spazi generatori χ_h, e quindi subordina fra questi una corrispondenza algebrica e biunivoca senza eccezioni. Tale corrispondenza si riflette in S_r mediante una trasformazione algebrica e biunivoca senza eccezioni fra i suoi iperpiani, ossia mediante un'*omografia*.

Reciprocamente, una qualunque omografia di S_r induce in S_ϱ un'*omografia trasformante in sè ciascuna delle varietà* $\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n$, e precisamente tale che due spazi χ_h generatori di Ψ_h si corrispondono nell'omografia

di S_ϱ se, e soltanto se, essi provengono da due iperpiani di S_r corrispondenti nell'omografia di S_r. Ciò si vede mediante considerazioni analoghe a quelle indicate alla fine del n. 6, tenuto conto del carattere intrinseco della definizione di Ψ_h.

8. Colle notazioni dei nn. 1, 2, 4 abbiamo che le

$$\{(qx)^n\}_{(q)}^{(j)} = 0 \qquad (j_0 + j_1 + \cdots + j_r = h - 1)$$

sono r_h forme indipendenti di S_r, di ordine n nelle (x), aventi l'iperpiano q, di equazione $(qx) = 0$, come componente di molteplicità $\geq n - h + 1$. In base alla (2), tali forme si rappresentano in S_ϱ coi punti $\xi^{(j)}$ di coordinate

$$\xi_{(i)}^{(j)} = \left[\{(qx)^n\}_{(q)}^{(j)}\right]_{(x)}^{(i)} \qquad (i_0 + i_1 + \cdots + i_r = n),$$

ossia:

$$\xi_{(i)}^{(j)} = \left\{\left[(qx)^n\right]_{(x)}^{(i)}\right\}_{(q)}^{(j)} = n! \left\{q_0^{i_0} q_1^{i_1} \cdots q_r^{i_r}\right\}_{(q)}^{(j)}.$$

Un iperpiano $(\xi\eta) = 0$ di S_ϱ contiene questi punti, ossia contiene lo spazio χ_h che, a norma del n. 1, proviene in S_ϱ dall'iperpiano q di S_r, se e soltanto se valgono le equazioni che si deducono dalla (3) assumendo $f = \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_r=n \\ i_0\geq 0,\cdots,i_r\geq 0}} \eta_{i_0,i_1,\ldots,i_r} q_0^{i_0} q_1^{i_1} \cdots q_r^{i_r}$ e scrivendo le (q) in luogo delle (x).

Poichè quest'ultima forma si ottiene dalla (1) mediante le sostituzioni

$$x_j = q_j \qquad (j = 0, 1, \cdots, r), \tag{11}$$

$$\xi_{i_0,i_1,\ldots,i_r} = i_0!\, i_1! \cdots i_r!\, \eta_{i_0,i_1,\ldots,i_r} \qquad (i_0 + \cdots + i_r = n), \tag{12}$$

ne risulta che la reciprocità Ω di S_ϱ rappresentata dalle (12) trasforma lo spazio χ_h associato all'iperpiano (q) di S_r nello spazio π_h proveniente giusta il n. 1 dal punto (q) di S_r. Pertanto Ω *trasforma* Ψ_h *in* Φ_h *(per* $h = 1, 2, \cdots, n$*), e si riflette in* S_r *colla reciprocità* ω *rappresentata dalle* (11). Notiamo per il seguito che le ω, Ω sono le polarità definite rispettivamente in S_r, S_ϱ dalle quadriche:

$$\sum_j x_j^2 = 0 \quad , \quad \sum_{(i)} \frac{\xi_{i_0,i_1,\ldots,i_r}^2}{i_0!\, i_1! \cdots i_r!} = 0.$$

Sia ora Θ, inversamente, una qualunque reciprocità di S_ϱ che trasformi Ψ_h in Φ_h per un dato $h = 1, 2, \cdots, n$. Allora $\Theta^{-1}\Omega$ è un'omografia di S_ϱ trasformante in sè Φ_h, e perciò (n. 6) è l'imagine in S_ϱ di un'omografia σ di S_r. Posto $\theta = \omega\sigma^{-1}$, talchè $\sigma = \theta^{-1}\omega$, la θ è ovviamente una *reciprocità* di S_r, e si riflette in S_ϱ colla reciprocità Θ; questa inoltre trasforma $\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n$ rispettivamente in $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$. È poi manifesto che la Θ è involutoria se, e soltanto se, tale è la θ.

Possiamo facilmente determinare tutte le *reciprocità* Θ *involutorie di* S_ϱ *trasformanti la* Ψ_h *nella* Φ_h. Si hanno intanto le reciprocità indotte dalle

polarità rispetto alle $\infty^{r(r+3)/2}$ quadriche di S_r. Con un'opportuna scelta delle coordinate in S_r possiamo identificare una qualsiasi di queste ultime colla ω, sicchè $\Theta = \Omega$ è la *polarità rispetto ad una quadrica di* S_ϱ. È chiaro che, se r è pari, non si hanno in S_ϱ trasformazioni ulteriori del tipo richiesto.

Se $r = 2s - 1$ è dispari, oltre alle suddette si hanno le reciprocità di S_ϱ indotte dalle $\infty^{(2s+1)(s-1)}$ polarità nulle di S_r. Con un'opportuna scelta delle coordinate in S_r possiamo identificare una qualsiasi di queste colla $\omega\sigma$, dove σ è l'omografia involutoria

$$x_j = x'_{s+j}, \quad x_{s+j} = -x'_j \qquad (j = 0, 1, \cdots, s-1),$$

la quale si riflette in S_ϱ colla

$$\xi_{i_0,\cdots,i_{s-1},i_s,\cdots,i_r} = (-1)^{i_s+\cdots+i_r}\, \xi'_{i_s,\cdots,i_r,i_0,\cdots,i_{s-1}} \qquad (i_0+\cdots+i_r = n).$$

Siccome il prodotto della Ω per quest'omografia di S_ϱ è una *polarità rispetto ad una quadrica* od una *polarità nulla* a seconda che n è pari o dispari, il teorema II risulta così completamente stabilito.

9. La condizione di apolarità in S_r può venir espressa geometricamente in S_ϱ nel modo seguente. Sia θ una qualunque reciprocità di S_r, e sia Θ la corrispondente reciprocità di S_ϱ (n. 8). *Una forma f di ordine n ed una forma φ di classe n di S_r sono apolari se, e soltanto se, l'iperpiano di S_ϱ trasformato mediante Θ del punto imagine di f contiene il punto imagine della trasformata di φ mediante θ.* È subito visto che la relazione così stabilita fra le f, φ non dipende dalla θ, e coincide invero coll'ordinaria condizione di apolarità [3].

Si ha così il modo di dar veste geometrica intuitiva alla *teoria dell'apolarità*, e di ottenere in modo semplice vari dei suoi risultati. Ad esempio, in base al n. 8, risulta immediatamente che, se f è un iperpiano da contarsi n volte, le f, φ sono apolari se e soltanto se questo iperpiano tocca la φ. Del pari i teoremi sulle *sizigie fra potenze n-me di forme lineari*, dovuti a Serret, Clifford [4] ed altri, possono venir stabiliti assai agevolmente dal punto di vista qui adombrato.

10. Come applicazione del principio di dualità ottenuto nel n. 8, ed usando le notazioni del n. 1, procediamo infine a determinare la molteplicità della varietà Ψ_h per la Ψ_k ($h < k$, e $k < n$ se $r = 1$).

Ritroviamo anzitutto l'ordine di Ψ_k nel modo seguente. Tale ordine è uguale al numero degli spazi χ_k generatori di Ψ_k incidenti ad un $S_{\varrho-(r+r_k-1)}$ generico di S_ϱ, ossia congiunti a quest'ultimo da uno spazio di dimensione

(3) Su questa ved. J. Rosanes, *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen*, « Journ. f. Math. », *76*, 312-330 (1873).

(4) Cfr. W. K. Clifford, *On syzygetic relations among the powers of linear quantics*, « Proc. London Math. Soc. », *3*, 9-12 (1869) = « Math. Papers », 119-122 (London 1882), ed anche ibid. 123-129.

$(r_k - 1) + (\rho - r - r_k + 1) = \rho - r$. In base alla dualità fra Ψ_k e Φ_k, l'ordine richiesto è dato dal numero degli spazi π_k generatori di Φ_k seganti un S_{r+r_k-2} generico di S_ρ secondo un S_{r-1}, ossia è uguale al numero dei punti di S_r che, imposti come k-pli alle forme f di un sistema lineare ∞^{r+r_k-2} generico, offrono r_k condizioni dipendenti. Rappresentando quest'ultimo sistema lineare coll'equazione

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_t f_t(x) = 0 , \qquad (t = r + r_k - 1), \tag{13}$$

dove le f sono forme generiche di grado n nelle (x) e le λ sono parametri, i punti suddetti sono quelli che annullano tutti i minori d'ordine massimo della matrice

$$\left| \{ f_j(x) \}^{(i)}_{(x)} \right| \qquad (i_0 + \cdots + i_r = k - 1 \ , \ j = 1, 2, \cdots, t), \tag{14}$$

e *sono pertanto in numero di* $(t)_r$ $(n - k + 1)^r$, d'accordo col n. 4.

Supponiamo ora che lo spazio $S_{\rho-(r+r_k-1)}$ considerato dianzi in S_ρ abbia, come unica particolarità, quella di appoggiarsi ad uno spazio χ_k generatore di Ψ_k in un punto A che giaccia sullo spazio χ_h generatore di Ψ_h $(h < k)$ situato in χ_k, ossia supponiamo che $S_{\rho-(r+r_k-1)}$ e χ_h siano congiunti da uno spazio di dimensione $\rho - (r + r_k - r_h)$. La molteplicità di Ψ_h per Ψ_k è data dal numero delle intersezioni di Ψ_k ed $S_{\rho-(r+r_k-1)}$ assorbite da A. Applicando la dualità nel modo suaccennato, vediamo che la molteplicità richiesta è uguale al numero dei punti annullanti tutti i minori d'ordine massimo della matrice (14) che cadono in un punto P di S_r che sia almeno h-plo per $\infty^{r+r_k-r_h-1} = \infty^{t-r_h}$ forme del sistema lineare (13). Se quest'ultimo presenta in P tale particolarità, possiamo sostituire alle $f_1, f_2, \cdots, f_t$ opportune combinazioni lineari fra loro indipendenti, che per semplicità denoteremo ancora con $f_1, f_2, \cdots, f_t$, tali che le $f_{r_a+1}, \cdots, f_{r_{a+1}}$ abbiano in P molteplicità a per $a = 0, 1, \cdots, h - 2$, le $f_{r_{h-1}+1}, \cdots, f_{r_h-1}$ abbiano in P molteplicità $h - 1$, le $f_{r_h}, \cdots, f_{r_{h+1}-1}$ abbiano in P molteplicità b per $b = h, \cdots, k - 1$, infine le $f_{r_k}, \cdots, f_{r_k+r-1} = f_t$ abbiano in P molteplicità k. Supposto che il sistema lineare (13) non presenti alcuna ulteriore particolarità, ed assunto P come punto fondamentale delle coordinate in S_r, si vede senza difficoltà che in P non si annullano tutti i minori d'ordine massimo della matrice formata dalle prime $t - r = r_k - 1$ colonne della (14); inoltre P è punto di molteplicità $k - (h - 1)$ per ciascuna delle r ipersuperficie che annullano i determinanti ottenuti orlando la matrice suddetta con una qualunque delle ultime r colonne della (14). Dunque la molteplicità d'intersezione di queste r ipersuperficie in P è $(k - h + 1)^r$, e generalmente non di più, sicchè *questa è altresì la molteplicità con cui la varietà* Ψ_h *è contenuta nella* Ψ_k.

Geometria. — *Sui sistemi continui di ipersuperficie algebriche.* Nota di B. Segre, presentata[1] dal Socio G. Castelnuovo.

1. In questa Nota viene stabilito esaurientemente il

Teorema I. - *Se un'ipersuperficie algebrica f_0 di una data V_r algebrica ($r \geq 1$)*[2], *ha molteplicità $\geq h$ in un punto semplice P_0 di V_r, allora ogni ipersuperficie algebrica f di V_r che sia infinitamente vicina alla f_0, e possegga un punto h-plo infinitamente vicino a P_0, deve contenere P_0 con molteplicità $\geq h-1$.*

Poichè su V_r si possono sempre ottenere due ipersuperficie *linearmente equivalenti* aggiungendo a f_0 ed f due ipersuperficie opportune non passanti per P_0, il teorema I non è che l'enunciato infinitesimale della prima parte del seguente

Teorema II. – *Se un'ipersuperficie algebrica f di V_r varia entro un sistema lineare e tende ad un'ipersuperficie f_0, in modo che un punto multiplo variabile P di f, di molteplicità $h \geq 2$, tenda ad un punto P_0 semplice di V_r, allora ogni posizione limite F_0 del fascio $F = \widehat{f_0 f}$*[3] *ammette P_0 come punto base di molteplicità $\geq h-1$. Più precisamente, per $r \geq 2$, se f_0 ha in P_0 molteplicità k ($\geq h$) e se, quando f tende ad f_0, la retta $t = P_0P$ tende ad una posizione limite t_0 che non sia una generatrice di molteplicità $\geq h$ per il cono φ (di ordine k e di dimensione $r-1$) tangente ad f_0 in P_0, allora o il fascio F_0 ha in P_0 un punto base di molteplicità $\geq h$, oppure tale punto base ha la molteplicità $h-1$ e tutte le ipersuperficie del fascio F_0 toccano in P_0 la $(k-h+1)$-ma polare di t_0 rispetto a φ.*

Il teorema I è già stato adoperato in alcuni importanti sviluppi di geometria algebrica; ad esempio, il classico risultato di Bertini sui punti multipli variabili delle ipersuperficie di un sistema lineare ne è una conseguenza immediata[4]. Le dimostrazioni che di esso si posseggono esigono tuttavia, esplicitamente od implicitamente, delle condizioni supplettive sulla f_0 e sul modo di tendere di f ad f_0, le quali, come qui risulterà, sono invece superflue.

Basterà anzitutto provare il teorema II nell'ipotesi che la varietà ambiente V_r sia uno spazio lineare, poichè allora quel teorema seguirà subito applicando il lemma qui stabilito nel n. 2. A tale scopo, ricorriamo alla rappresentazione lineare delle forme f di dato ordine n di S_r coi punti di uno spazio lineare S_ϱ, già studiata in due Note recenti. Posto per abbreviare

$$r_h = (r+h-1)_r = \binom{r+h-1}{r} = \frac{(r+h-1)!}{r!\,(h-1)!},$$

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) f_0 è cioè una varietà algebrica pura giacente su V_r, di dimensione $r-1$.

(3) Ossia del fascio determinato da f_0 ed f.

(4) Ved., anche per altre citazioni, F. Severi, *Trattato di geometria algebrica*, I$_1$ (Bologna, Zanichelli, 1926), pp. 38-42.

abbiamo $\rho = r_{n+1} - 1$, e la varietà Φ_h di S_ρ i cui punti rappresentano le forme f dotate di punto h-plo ($2 \leq h \leq n$) ha la dimensione $\delta_h = \rho + r - r_h$ e l'ordine $(r_h)_r (n-h+1)^r$; inoltre, se $h < n$, e k denota un qualunque intero soddisfacente alle $h < k \leq n$, Φ_h contiene Φ_k colla molteplicità $(k-h+1)^r$ (5). Il teorema II verrà dimostrato nel n. 4 valendosi in modo essenziale di queste varietà Φ, relativamente alle quali otterremo altresì i tre teoremi seguenti.

Teorema III. – *Un punto* A_0 *di* Φ_h *è origine di una falda lineare di questa varietà se, e soltanto se, esso rappresenta una forma* f_0 *di* S_r *dotata di un punto* P_0 *di molteplicità* h, *e non maggiore, tale che, se* $r \geq 2$, *il cono tangente di* f_0 *in* P_0 *non abbia alcuna generatrice* h*-pla* (*sicchè* P_0 *è punto* h*-plo isolato di* f_0). *I punti di quella falda lineare corrispondono allora alle forme di* S_r *che sono vicine alla* f_0 *ed hanno un punto* h*-plo vicino a* P_0.

Teorema IV. – *La* Φ_2 *è un'ipersuperficie di* S_ρ *possedente soltanto* ∞^r *iperpiani tangenti, i quali rappresentano i sistemi lineari* $\infty^{\rho-1}$ *di forme* f *di* S_r *dotati di un punto base semplice. Se* $h \geq 3$, *la varietà degli spazi tangenti di* Φ_h *coincide colla* Φ_{h-1}.

Teorema V. – *Se* $2 \leq h < k \leq n$, $r \geq 1$, *il cono tangente di* Φ_h *in un punto generico di* Φ_k *consiste di un cono, di ordine* $(k-h+1)^{r-1}$, *contato colla molteplicità* $k-h+1$.

2. Premettiamo un

Lemma. – *Data una qualunque ipersuperficie* f *di una* V_r *di* S_s, *che passi con molteplicità* $h \geq 1$ *per un punto* P_0 *semplice di* V_r *e sia l'intersezione completa di* V_r *con una forma* φ *di* S_s, *e presi arbitrariamente un* S_{s-r} *di* S_s *che contenga* P_0 *senza toccare* V_r *in questo punto ed una sezione iperpiana* g *di* V_r *non passante per* P_0, *esiste una forma di* S_s *intersecante* V_r *nella* f *e nella* g *contata con molteplicità opportuna, la quale* (*a*) *ammette* P_0 *come punto* h*-plo*, *e* (*b*) *ha in* P_0 *un cono tangente di ordine* h *passante per quell'* S_{s-r} *con molteplicità* h.

Introduciamo in S_s coordinate non omogenee $(x_1, x_2, \cdots, x_s)$, assumendo P_0 come origine, l'iperpiano di g come iperpiano all'infinito, l'S_r tangente a V_r nel punto semplice P_0 ed il suddetto S_{s-r} (i quali, per ipotesi, hanno in comune il solo punto P_0) rispettivamente come spazi coordinati $x_1 = \cdots = x_{s-r} = 0$ ed $x_{s-r+1} = \cdots = x_s = 0$. Fissiamo inoltre arbitrariamente in S_s $s-r$ ipersuperficie passanti per V_r ed aventi in P_0 un punto semplice coi rispettivi iperpiani tangenti $x_1 = 0, \cdots, x_{s-r} = 0$; le equazioni $\alpha_1(x) = 0, \cdots, \alpha_{s-r}(x) = 0$ di queste ipersuperficie saranno dunque identicamente soddisfatte su V_r, ed i loro primi membri saranno polinomi nelle x i cui termini di grado più basso possiamo supporre essere rispettivamente $x_1, \cdots, x_{s-r}$.

(5) Cfr. B. Segre, *Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche*, questo volume dei « Rendiconti », p. 313, Teorema I.

Sia $\varphi(x) = 0$ l'equazione della φ; i termini di grado più basso nelle x in $\varphi(x)$ costituiscono allora un polinomio omogeneo, $\varkappa(x)$, il cui grado k è uguale alla molteplicità ($\geqq 1$) di P_0 per la φ, sicchè $k \leqq h$. Notiamo che in questa limitazione vale l'uguaglianza se $\varkappa(x)$ non contiene nessuna delle $x_1, \cdots, x_{s-r}$, nel qual caso la φ soddisfa già alle condizioni (a) e (b) del lemma. Se così non è, possiamo assumere

$$\varkappa(x) = x_1 \varkappa_1(x) + \cdots + x_{s-r} \varkappa_{s-r}(x),$$

dove $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_{s-r}$ denotano polinomi omogenei di grado $k-1$ nelle $x_1, \cdots, x_s$ e considerare l'ipersuperficie

$$\varphi(x) - [\alpha_1(x) \varkappa_1(x) + \cdots + \alpha_{s-r}(x) \varkappa_{s-r}(x)] = 0.$$

Questa sega V_r nella f e nella g contata con debita molteplicità, e contiene il punto P_0 con molteplicità $> k$. È chiaro che possiamo ragionare su di essa come sulla φ: ma il procedimento indicato non può venir ripetuto indefinitamente, in quanto conduce a forme aventi in P molteplicità crescenti ma non superiori ad h, cosicchè l'ultima forma da esso fornita soddisfa alle condizioni (a) e (b) del lemma.

3. La varietà Φ_h di cui al n. 1 contiene ∞^r spazi lineari π, di dimensione $\rho - r_h$, ciascuno dei quali rappresenta la totalità delle forme di ordine n di S_r passanti con molteplicità $\geqq h$ per un dato punto di S_r. È subito visto che due qualunque distinti spazi π si segano secondo uno spazio di dimensione $\rho - 2r_h + (r + 2h - n - 2)_r$, e quindi sono congiunti da uno spazio di dimensione $\rho - (r + 2h - n - 2)_r$; osserviamo che quest'ultima dimensione è sempre *non inferiore* alla dimensione δ_h di Φ_h, ed uguale ad essa se e soltanto se $h = n = 2$.

Sia ora Ω una qualunque falda lineare di Φ_h, A_0 la sua origine ed A un suo punto generico. Vi è uno ed uno solo spazio π di Φ_h passante per A, e questo giace nello spazio χ a δ_h dimensioni che tocca Ω in A. Quando A, muovendosi arbitrariamente su Ω, tende ad A_0, χ tende allo spazio χ_0 tangente ad Ω in A_0, ma π può avere *a priori* una o più posizioni limiti. Tuttavia, siccome ciascuna di queste deve essere uno spazio generatore di Φ_h appartenente allo spazio a δ_h dimensioni χ_0, in base ad una precedente osservazione si conclude che π ha una posizione limite ben determinata, π_0, salvo eventualmente se $h = n = 2$. La stessa conclusione può tuttavia trarsi anche in quest'ultimo caso, tenuto conto del fatto che Φ_h è allora una varietà di Veronese, e che quindi ciascuno dei suoi spazi tangenti contiene uno ed uno solo dei suoi spazi generatori [6]. Ne consegue che A_0 rappresenta una forma f_0 di S_r possedente un punto P_0 di molteplicità $\geqq h$,

(6) Cfr. B. Segre, *Sulle varietà di Veronese a due indici.* « Rendic. R. Acc. Naz. Lincei » (6) 23, 303-309 e 391-397 (1936)$_1$, nn. 5, 6.

e che *i punti* A *di* Ω *rappresentano le forme* f *vicine alla* f_0 *aventi un punto* h*-plo vicino a* P_0.

Introduciamo in S_r coordinate non omogenee $(x_1, \cdots, x_r)$ coll'origine in P_0, e scriviamo l'equazione dell'ipersuperficie f generica d'ordine n di S_r nella forma

$$f(x) = \sum_{(i)} a_{i_1,\ldots,i_r} x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r} = 0 \quad (i_1 \geq 0, \cdots, i_r \geq 0 \; ; \; i_1 + \cdots + i_r \leq n),$$

talchè le a sono coordinate omogenee del punto A rappresentativo di f in S_r. Il suddetto punto A_0 avrà coordinate a^0 soddisfacenti alle

$$a^0_{i_1,\ldots,i_r} = 0 \qquad (i_1 + \cdots + i_r \leq h - 1),$$

ma non tutte le a^0 rimanenti si annullano, e sia per esempio $a^0_{c_1,\ldots,c_r} \neq 0$; potremo allora assumere $a_{c_1,\ldots,c_r} = 1$ per f_0 e per tutte le f vicine ad f_0, sicchè le rimanenti $a_{i_1,\ldots,i_r}$ sono coordinate non omogenee di A. Quelle fra tali forme f che posseggono un punto h–plo prossimo a P_0 soddisfano alle

$$(1) \qquad \{f(x)\}^{(i)}_{(x)} = 0 \qquad (i_1 \geq 0, \cdots, i_r \geq 0 \; ; \; i_1 + \cdots + i_r \leq h - 1),$$

dove, per abbreviare, si è posto

$$\{f(x)\}^{(i)}_{(x)} = \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_r} f(x)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_r^{i_r}},$$

e le (a, x) sono prossime in valor assoluto alle $(a^0, 0)$.

Nell'$S_{\varrho+r}$ dove le (a, x) sono coordinate non omogenee le (1) rappresentano r_h ipersuperficie, passanti semplicemente per il punto $A_0(a^0, 0)$, ed aventi ivi gli r_h iperpiani tangenti

$$(2) \qquad a^0_{i_1,\ldots,i_r} = 0 \qquad (i_1 + \cdots + i_r \leq h - 2),$$

$$(3) \qquad a_{i_1,\ldots,i_r} + [(i_1 + 1)\, a^0_{i_1+1,\ldots,i_r} x_1 + \cdots + (i_r + 1)\, a^0_{i_1,\ldots,i_r+1} x_r] = 0 \qquad (i_1 + \cdots + i_r = h - 1).$$

Questi sono sempre linearmente indipendenti fra loro, sicchè le (1) si intersecano secondo una V_{δ_h} di $S_{\varrho+r}$ che passa *semplicemente* per A_0, ed è toccata in A_0 dall'S_{δ_h} (2), (3); è poi chiaro che la proiezione di V_{δ_h} sull'S_ϱ $x_1 = \cdots = x_r = 0$ dall'S_r all'infinito rappresentato annullando tutte le a coincide colla Φ_n. La falda lineare di V_{δ_h} di origine A_0 si proietta nella falda di Φ_h, sia Ω, i cui punti rappresentano le f di S_r vicine ad f_0 aventi un punto h–plo vicino a P_0. In base a quanto precede, Ω è pure *lineare* eccetto se, e soltanto se, lo spazio rappresentato dalle (2), (3) incontra il centro di proiezione, cioè tranne nel caso che le espressioni in parentesi quadre nelle (3) si annullino tutte per valori non tutti nulli delle (x). Ciò può scriversi nella forma

$$\{\alpha_h(x)\}^{(i)}_{(x)} = 0 \qquad (i_1 + \cdots + i_r = h - 1),$$

dove

$$\alpha_h(x) = \sum_{(i)} a^0_{i_1,\dots,i_r} x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r} \qquad (i_1 + \cdots + i_r = h),$$

ed equivale ad assumere che o $\alpha_h(x)$ svanisca identicamente, ossia f_0 contenga P_0 con molteplicità $> h$, oppure f_0 abbia un punto h-plo in P_0 ed il relativo cono tangente, $\alpha_h(x) = 0$, possegga una generatrice h-pla.

Il teorema III è così dimostrato. Il teorema IV si ha poscia notando che, quando la suddetta falda Ω è lineare, lo spazio di S_ϱ ad essa tangente in A_0 si rappresenta colle (2) e colle equazioni ottenute eliminando i parametri x fra le (3). Ora le (2) esprimono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la forma f di S_r abbia in P_0 molteplicità $\geqq h - 1$; inoltre, quando le a siano state arbitrariamente fissate in modo che valgano le (2), è sempre possibile di soddisfare alle (3) con opportuna scelta delle x e delle a^0.

4. Consideriamo in S_r una forma f d'ordine n, possedente un punto h-plo P, la quale vari tendendo ad una forma f_0 in modo che P tenda ad un punto P_0, in cui f_0 avrà di conseguenza molteplicità $\geqq h$. Detti A ed A_0 i punti di Φ_h rappresentativi di f ed f_0, possiamo senza restrizione supporre che, quando f tende ad f_0, il punto A tenda ad A_0 descrivendo un ramo algebrico Γ di origine A_0. Il fascio $F = \widehat{f_0 f}$ si rappresenta in S_ϱ colla retta $\gamma = A_0 A$, ed il limite F_0 di F corrisponde allora alla retta γ_0 tangente a Γ in A_0. Vogliamo dimostrare che *il fascio* F_0 *ammette* P_0 *come punto base di molteplicità* $\geqq h - 1$.

Il ramo Γ appartiene alla falda di Φ_h rappresentativa delle f vicine ad f_0 aventi un punto h-plo vicino a P_0; su tale falda vi è certamente un ramo Γ' di origine A_0 avente in A_0 la stessa tangente γ_0 di Γ, e tale che il punto A' generico di Γ' sia *semplice* per Φ_h. La tangente γ' a Γ' in A' rappresenta un fascio di forme di S_r avente come $(h-1)$-plo l'unico punto h-plo, P', della forma f' rappresentata da A' (n. 3). Ora, quando A' tende ad A_0, P' e γ' tendono rispettivamente a P_0 e γ_0, onde segue l'asserto.

Suppongasi ora $r \geqq 2$, e dicasi $k\,(\geqq h)$ la molteplicità di f_0 in P_0. Prendendo P_0 come origine di un sistema di coordinate $(x_1, \cdots, x_r)$ non omogenee in S_r, ed esprimendo il punto A di Γ come funzione algebrica di un parametro λ uniformizzante che assuma il valore zero in A_0, otteniamo per la f relativa ad A uno sviluppo in serie del tipo

$$f = f_0(x) + \lambda^p f_1(x) + \lambda^{p+1} f_2(x) + \cdots = 0. \tag{4}$$

Qui p denota un intero (uguale all'ordine di Γ) tale che la forma $f_1(x)$ non svanisca identicamente, $f_0(x) = 0$ è l'equazione di f_0, ed il suddetto fascio F_0 è quello determinato dalle f_0 ed f_1, ove intanto si supponga che il rapporto $f_0(x)/f_1(x)$ non si riduca ad una costante.

In base a ciò che precede, l'ipersuperficie f_1 deve avere in P_0 molteplicità $\geqq h-1$; nell'ipotesi che questa molteplicità valga esattamente $h-1$ possiamo scrivere

$$f_0(x) = \varphi_k(x) + \cdots \quad , \quad f_1(x) = \psi_{h-1}(x) + \cdots , \tag{5}$$

dove φ_k e ψ_{h-1} indicano due forme nelle x di gradi uguali ai rispettivi indici ed i puntini stanno per termini di grado superiore. La (4) ha un punto h-plo $P(x)$, dato da sviluppi del tipo

$$x_j = x_j(\lambda) = c_j \lambda^q + \cdots \qquad (j = 1, 2, \cdots, r), \tag{6}$$

nei quali q è un numero razionale positivo, i coefficienti c_j non sono tutti nulli, ed i puntini stanno per termini infinitesimali rispetto a λ di ordine $> q$. La retta t_0, limite per $\lambda \to 0$ della PP_0, ha pertanto le equazioni $x_1 : x_2 : \cdots : x_r = c_1 : c_2 : \cdots c_r$, e supporremo ch'essa non sia una generatrice di molteplicità $\geqq h$ per il cono $\varphi_k(x) = 0$ tangente in P_0 ad f_0.

Siccome P è h-plo per la (4), abbiamo

$$\{f\}_{(x)}^{(i)} = \{f_0(x)\}_{(x)}^{(i)} + \lambda^p \{f_1(x)\}_{(x)}^{(i)} + \cdots = 0 \quad (i_1 + \cdots + i_r = h-1), \tag{7}$$

dove le f e le x vanno espresse colle (4)-(6). In base all'ipotesi precedente su t_0, $\{f_0(x)\}_{(x)}^{(i)}$ è con ciò un infinitesimo rispetto a λ il cui ordine è esattamente uguale a $(k-h+1)q$ per convenienti valori delle (i) soddisfacenti alla $i_1 + \cdots + i_r = h-1$; poichè tutti gli altri termini della (7) sono di ordine $\geqq p$, dev'essere dunque $(k-h+1)q \geqq p$. Inoltre $\{\psi_{h-1}(x)\}_{(x)}^{(i)}$ riducesi ad una costante non nulla per opportuni valori delle (i) soddisfacenti alla $i_1 + \cdots + i_r = h-1$, per i quali $\lambda^p \{f_1(x)\}_{(x)}^{(i)}$ ha quindi l'esatto ordine p rispetto a λ; notando che i termini seguenti della (7) sono di ordine $> p$, mentre $\{f_0(x)\}_{(x)}^{(i)}$ è di ordine $\geqq (k-h+1)q$, ne risulta $p \geqq (k-h+1)q$, e pertanto

$$p = (k-h+1)q. \tag{8}$$

Infine, uguagliando a zero i termini infinitesimali di ordine p rispetto a λ nella (7), e tenendo conto della (8), otteniamo

$$\{\varphi_k(c)\}_{(c)}^{(i)} + \{\psi_{h-1}(x)\}_{(x)}^{(i)} = 0 \qquad (i_1 + \cdots + i_r = h-1).$$

Ne consegue l'identità

$$\psi_{h-1}(x) = -\sum_{i_1 + \cdots + i_r = h-1} \{\varphi_k(c)\}_{(c)}^{(i)} \frac{x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r}}{i_1! \cdots i_r!},$$

esprimente che *il cono* $\psi_{h-1}(x) = 0$ *è la* $(k-h+1)$*-ma polare della retta* t_0 *rispetto al cono* $\varphi_k(x) = 0$.

Notiamo ora che nella (4) la $f_0(x)$ può essere proporzionale a qualcuna delle $f_1(x), f_2(x), \cdots$, ma non a tutte. Se $f_i(x)$ è la forma di indice più basso che non sia proporzionale alla $f_0(x)$, il fascio F_0 è quello determinato dalle f_0, f_i, ed il ragionamento precedente si applica ancora, con ovvie modificazioni, sostituendo la f_i alla f_1. Così il teorema II è dimostrato nel caso in cui la V_r ambiente è uno spazio lineare. Usando il lemma del n. 2, se ne deduce facilmente l'estensione al caso generale enunciata nel n. 1.

5. Un punto A_0 generico di Φ_k è l'imagine di una forma f_0 di S_r contenente, come unica singolarità, un punto k-plo P_0, e tale che, se $r \geqq 2$, il relativo cono tangente (di ordine k e dimensione $r-1$) è privo di generatrici multiple. In base ai nn. 1, 4, e supposto $2 \leqq h < k \leqq n$, il cono α tangente a Φ_h in A_0 ha dimensione δ_h, ordine $(k-h+1)^r$, e rappresenta un sistema di forme f di S_r passanti per P_0 colla molteplicità $h-1$ in modo che, se $r \geqq 2$, i relativi coni tangenti in P_0 sono le ∞^{r-1} polari $(k-h+1)$-me delle varie rette uscenti da P_0 rispetto ad α. Si vede senza difficoltà che la totalità delle f soddisfacenti a tali condizioni ha per imagine in S_ϱ una varietà algebrica irriducibile, di dimensione δ_h ed ordine $(k-h+1)^{r-1}$; ne discende che α *deve coincidere con questa varietà contata* $k-h+1$ *volte*, ciò che prova il teorema V.

Questo risultato avrebbe anche potuto ottenersi notando che la (8) fornisce $p = k-h+1$ se $q = 1$, sicchè, colle notazioni del n. 4, il ramo Γ dev'essere di ordine $k-h+1$ se si vuole che il luogo (6) del punto P passi semplicemente per P_0.

Geometria (Storia della Geometria). — *Per la storia del teorema di Desargues sui triangoli omologici.* Nota di T. Viola, presentata [1] dal Socio F. Enriques.

Lo Chasles rilevò per il primo, crediamo, l'uso che Stevino fece nella prospettiva centrale, della corrispondenza fra figure omologiche [2]. Ma non ci risulta che sia stato ancora messo in luce il fatto che nell'opera di Simone Stevino (1548–1620), precisamente nel breve trattato di prospettiva che quest'A. pubblicò a Leida nel 1608 sotto il titolo *Sciagraphia* [3], si trovano le premesse immediate e i mezzi per dimostrare il teorema fondamen-

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) M. Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Paris, 1875), note XVIII, p. 347.

(3) Le *Opere matematiche* di Stevino furono tradotte in francese, commentate e pubblicate da A. Girard a Leida nel 1634. A quest'edizione si fa qui riferimento.

tale: *se due triangoli, situati in uno stesso piano, si corrispondono in modo che le tre coppie di lati corrispondenti s'intersechino in tre punti allineati, le tre coppie di vertici corrispondenti sono allineate con uno stesso punto.* L'enunciato di tale teorema, insieme con quello del teorema inverso e con la dimostrazione d'entrambi, furono scoperti, com'è noto, da G. Desargues (probabilmente nel 1636) e pubblicati, per la prima volta, nell'opera di A. Bosse, *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective* (Paris 1648, p. 340).

Nell'ultimo capitolo del suo trattato di prospettiva, sotto il titolo: *De l'invention de l'oeil*, Stevino enuncia il problema fondamentale di restituzione prospettica: assegnata l'immagine prospettica d'una certa figura, trovarne il centro di vista. Lo studio ch'egli fa di questo problema non è che un primo saggio teorico, prendendo profondamente in esame una sola questione molto particolare, cioè: assegnati due quadrilateri piani, uno dei quali sul quadro e in posizione assegnata, collocare l'altro parallelamente al geometrale e collocare il centro di vista in tal modo, che il primo quadrilatero risulti l'immagine prospettica del secondo (prop. XII). Ma noi esamineremo un altro problema particolare, che l'A. si propone in una nota verso la fine del capitolo e la cui soluzione completa equivarrebbe appunto alla dimostrazione del teorema dei triangoli omologici. Vero è che l'A., non possedendo i concetti di punto e di retta impropri, non avrebbe potuto giungere alla scoperta d'un teorema unico, ma soltanto a quella di più teoremi, per noi equivalenti, nel loro insieme, a quell'unico. E perciò anche noi, per seguire il pensiero dell'A. e non cadere in complicazioni inutili, opportunamente dovremo intendere, con le parole « punto » e « retta », di riferirci soltanto ad elementi proprî.

1. Indichiamo (fig. 1) con O il centro di vista, con ff la retta fondamentale della prospettiva, cioè l'intersezione del quadro col piano geometrale, supponendo (per intenderci) che questo sia orizzontale e coincida col foglio del disegno, mentre il quadro sia (in posizione iniziale) verticale. Siano O_1 il piede della perpendicolare abbassata da O sul geometrale, P un punto generico del geometrale, P′ l'immagine di P sul quadro.

Immaginiamo che il quadro ruoti intorno alla ff e simultaneamente il centro di vista ruoti dello stesso angolo (in val. assol. e segno), intorno ad O_1, mantenendosi sempre in uno stesso piano perpendicolare alla ff. L'A. dimostra (prop. VII) che l'immagine P′ di P non varia nel quadro e ne deduce che tale proprietà deve mantenersi anche al limite, quando il quadro e quindi anche il segmento $O_1 O$ vengono a sovrapporsi al geometrale. Cioè il punto P e il suo corrispondente P′ devono risultare allineati col punto O*, ribaltamento di O sul geometrale (4).

(4) È dunque chiaro che il segmento $O_1 O^*$ deve risultare perpendicolare alla ff e di lunghezza uguale ad $O_1 O$. Per intenderci, supponiamo che il verso della rotazione del quadro sia antiorario, intorno alla ff supposta orientata (in fig.) da destra verso sinistra.

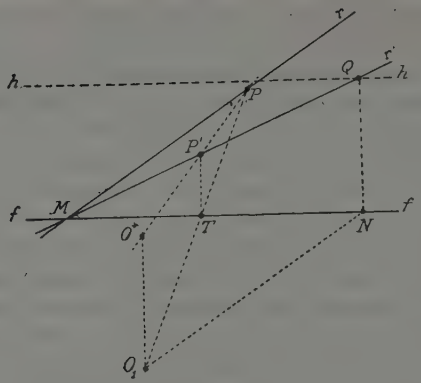


Fig. 1.

Così l'A. dimostra che a una qualunque figura obiettivamente considerata nel geometrale e descritta dal punto P, viene a corrispondere il ribaltamento della propria immagine prospettica descritto dal punto P', in una ben determinata omologia di cui O* è il centro ed ovviamente ff è l'asse. Il corrispondente P' d'un generico punto P può costruirsi, nel modo più semplice, com'è indicato in fig. 1, cioè: si unisce P ad O_1 e ad O*, poi, per l'intersezione T della ff con la O_1 P, si conduce la normale alla ff. Risulta, com'è immediato, che P' è l'intersezione di questa normale con la P O*.

L'A. osserva esplicitamente che, nella detta corrispondenza, a rette corrispondono rette (Prop. I). Per trovare la retta r' che corrisponde a una generica retta r, può operarsi come segue: si conduce per O_1 la parallela alla r e, per l'intersezione N di tale parallela con la ff, la perpendicolare alla ff fino a intersecare in Q l'orizzonte hh (retta parallela alla ff e a distanza $= \overline{O_1 O^*}$ dalla ff); la r' cercata passa per Q e per il punto M d'intersezione della r con la ff. Questa costruzione era già stata data da Guidobaldo del Monte [5].

2. Il problema che ci proponiamo di discutere consiste nella *ricerca del centro di vista, supposti assegnati nel geometrale due triangoli* A B C , A' B' C', *il secondo dei quali possa considerarsi come il ribaltamento dell'immagine prospettica del primo.* L'A. non s'occupa di trovare nè le condizioni necessarie affinchè questo problema sia risolubile, nè quelle affinchè la soluzione sia unica.

(5) Nell'opera di quest'A. dal titolo *Perspectivae libri sex* (Pesaro, 1600, libro II, prop. XV). In fig. 1 s'è costruita la retta r' corrispondente ad una generica r tracciata per P nel geometrale.

Anzi egli studia e risolve questo problema, a titolo d'esempio, soltanto in un caso particolarissimo in cui l'esistenza della soluzione è senz'altro assicurata: quello in cui due vertici omologhi per esempio C , C′ coincidono; mentre, supponendo che le altre due coppie di vertici omologhi A , A′ e B , B′ siano in posizione generica. effettivamente la soluzione risulta unica e ben determinata.

La fig. 2 riproduce esattamente (salvi il cambiamento di notazioni e la soppressione d'alcune rette inutili) l'ultima figura della p. 561 del trattato. Sia M il punto d'intersezione dei due lati omologhi A B , A′ B′ : la retta M C sarà senz'altro la fondamentale. Si conduca per B la parallela al lato A C e sia N la sua intersezione con la fondamentale. La N B avrà per corrispondente la N B′, la quale dovrà tagliare la C′ A′ in un punto U del-

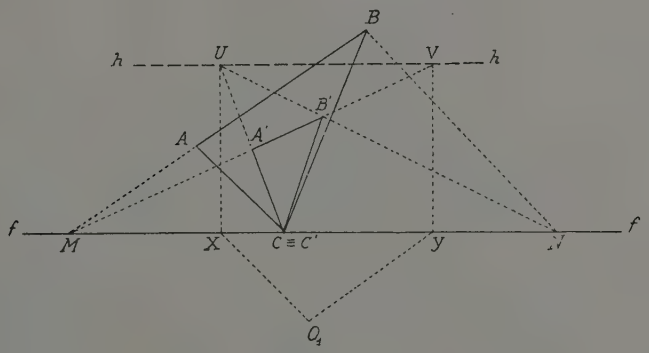


Fig. 2.

l'orizzonte (cioè U sarà la cosiddetta « fuga » della coppia di rette parallele C A , N B). L'orizzonte sarà la parallela alla fondamentale, condotta per U , e la fuga V della retta A B sarà l'intersezione della A′ B′ con l'orizzonte. Siano X , Y i piedi delle perpendicolari alla M N , abbassate rispettivamente da U , V. Si conducano per X la parallela alla A C, per Y la parallela alla AB. L'intersezione O_1 di tali parallele è la proiezione del centro di vista O sul geometrale: l'altezza di O sul geometrale è uguale alla lunghezza dei segmenti X U , Y V.

Nel caso che i lati omologhi A B , A′ B′ risultino paralleli fra loro, la costruzione indicata cade evidentemente in difetto, ma può esser facilmente modificata in qualche dettaglio, in modo da fornire la soluzione richiesta. È anche da osservare che il problema non ammette più una soluzione unica, ma ne ammette infinite (e precisamente una semplice infinità), nel caso che tanto i punti A , A′ quanto i punti B , B′ siano alllineati con C. Ma anche in tal caso la costruzione può essere applicata, con alcune modificazioni inessenziali e subordinatamente alla scelta della fondamentale *f f* (in un fascio

proprio od improprio, secondochè le rette A B ed A′ B′ si tagliano o no). Noi non abbiamo interesse a trattenerci in un esame critico di tal genere e passiamo senz'altro alla considerazione di due triangoli A B C, A′ B′ C′ assegnati genericamente nel piano, con la condizione restrittiva che le tre coppie di lati omologhi A B ed A′ B′, B C e B′ C′, C A e C′ A′ si taglino in punti appartenenti a una stessa retta *ff*. Dimostriamo, imitando esattamente il ragionamento di Stevino sopra riportato, che, in tale ipotesi, *il triangolo* A′ B′ C′ *è il ribaltamento dell'immagine prospettica del triangolo* A B C *in una ben determinata prospettiva centrale* e quindi *le coppie di vertici omologhi* A *ed* A′, B *e* B′, C *e* C′ *sono allineati con uno stesso punto* O* (ribaltamento del centro di vista) (fig. 3).

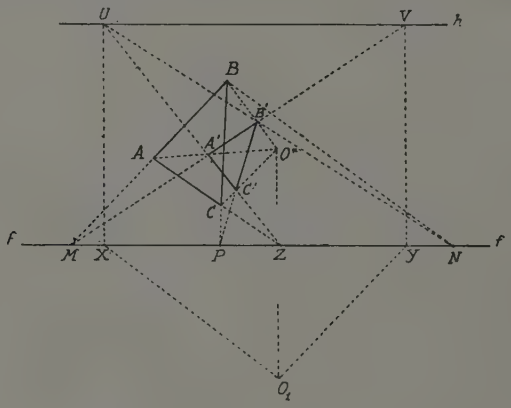


Fig. 3.

Indichiamo rispettivamente con M, P, Z i punti della retta *ff*, in cui vengono a tagliarsi, per ipotesi, le tre coppie di lati omologhi A B ed A′ B′, B C e B′ C′, A C ed A′ C′. Sia N l'intersezione della parallela alla A C condotta per B, con la *ff*. Per il punto U, intersezione della N B′ con la C′ A′, conduciamo la parallela alla *ff* e indichiamo poi con V l'intersezione di questa parallela con la A′ B′. Siano X, Y le proiezioni ortogonali rispettivamente di U, V sulla *ff*. La parallela alla A C condotta per X e la parallela alla A B condotta per Y s'intersecano in un certo punto O_1. Orbene, nella prospettiva la cui retta fondamentale è la *ff*, il cui quadro è perpendicolare al geometrale (coincidente col piano del disegno) e il cui centro di vista O è sulla perpendicolare in O_1 al geometrale e ad altezza $= \overline{XU} = \overline{YV}$ su questo, l'immagine del triangolo A B C si ribalta precisamente nel triangolo A′ B′ C′, secondo quanto sopra s'è visto. Se dunque, simultaneamente al ribaltamento del quadro sul geometrale, s'immagina di ribaltare su questo anche il centro di vista O (nel senso sopra indicato), s'ottiene un punto O*

col quale precisamente devono risultare allineate le tre coppie di vertici omologhi A ed A′, B e B′, C e C′.

3. I casi in cui la costruzione precedentemente indicata può cadere in difetto, sono: *a*) quello in cui uno dei vertici del secondo triangolo, per esempio C′, sia sovrapposto al vertice omologo C del primo triangolo, o quanto meno *b*) ad uno dei due lati di tale triangolo che escono da C, per esempio a CB, infine *c*) quello in cui la retta NB′ risulti parallela alla C′A′.

Il caso *a*) è quello esaminato da Stevino (n. preced.) e, per quanto abbiam visto, non fa eccezione alla proposizione enunciata. Nel caso *b*) si

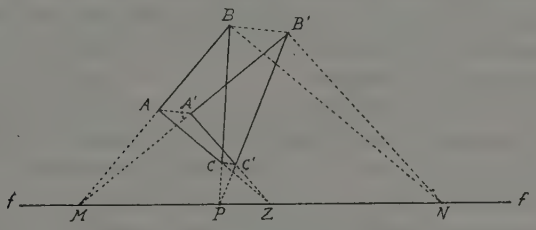


Fig. 4.

riconosce subito che necessariamente B′ cade su BC oppure, nell'ipotesi contraria, A′ cade su AB: questo caso, ai fini della dimostrazione del teorema di Desargues, è banale, l'allineamento delle tre coppie di vertici omologhi con uno stesso punto O* risultando allora evidente.

Infine, nel caso *c*) (fig. 4), dalla similitudine dei triangoli MAZ, MBN e da quella dei triangoli MA′Z, MB′N si deduce subito che AA′ è parallela a BB′. Analogamente, dalla similitudine dei triangoli PCZ, PBN e da quella dei triangoli PC′Z, PB′N si deduce che CC′ è parallela a BB′. *Le tre rette* AA′, BB′, CC′ *sono dunque fra loro parallele.* E vale la pena d'osservare che, se s'immagina di ruotare il triangolo A′B′C′, intorno alla *ff*, d'un angolo arbitrario (in particolare retto), le similitudini indicate permangono, onde il parallelismo delle tre rette AA′, BB′, CC′ (non più giacenti nel piano del disegno) continua a sussistere: ciò significa che A′B′C′ è il ribaltamento, sul quadro, dell'immagine di ABC *in una prospettiva parallela.*

Geometria. — *Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti.* Nota I di G. POMPILJ, presentata [1] dal Socio F. ENRIQUES.

I punti uniti di una trasformazione cremoniana T_n, d'ordine n, tra piani sovrapposti, vengono di solito determinati come punti base particolari di una rete di curve, detta rete delle curve isologhe [2]: e si trova che una trasformazione d'ordine n possiede $n + 2$ punti uniti (semplici) contando però i singoli punti uniti e le eventuali curve di punti uniti con la debita equivalenza. È facile determinare questa equivalenza in base alla teoria dell'intersezione delle curve algebriche piane, alla stessa maniera con cui si contano le $m \cdot n$ intersezioni di due curve (d'ordine rispettivamente m ed n) nel teorema di Bezout.

Qualche anno fa F. Severi [3], per il teorema di Bezout, ha dato un metodo, per continuità, atto a definire sia il concetto di molteplicità di una intersezione di due curve, sia il concetto di equivalenza di una eventuale curva comune.

Scopo del presente lavoro, che, per esigenze tipografiche, viene presentato in due Note, è di trasportare direttamente questo metodo di F. Severi anche alla definizione dell'equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti.

In questa prima Nota definisco il concetto di *punto unito semplice* svincolandolo dalla considerazione delle curve isologhe. Nella successiva osservo (n. 6) che la trasformazione cremoniana T_n appartiene ad un sistema lineare ∞^8, $|\overline{T}_n|$, di trasformazioni cremoniane che mutano la stessa rete omaloidica $|f|$ nella rete $|r|$ delle rette. Dimostro infine (n. 19) che la generica trasformazione di $|\overline{T}_n|$ non è degenere ed ha esattamente $n + 2$ punti uniti semplici. Da questo punto si procede con il metodo di F. Severi che qui riassumo.

Rappresentiamo con i punti di uno spazio S_8, ad otto dimensioni, le trasformazioni di $|\overline{T}_n|$. Ad un punto generico $\overline{T}$ dello S_8 corrisponde una trasformazione $\overline{T}_n$, non degenere [4], con $n + 2$ punti uniti semplici, mentre i punti dello S_8 cui corrispondono trasformazioni i cui punti uniti presen-

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Ved. per esempio: H. P. HUDSON, *Cremona trasformations in plane and space*. « Cambridge-University press 1927 ».

(3) Ved.: F. SEVERI, *Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie*. « Abhandlungen Math. Sem. Hamburgischen Universität », Bd. 9, 1933.

(4) Le trasformazioni degeneri si hanno in corrispondenza ai punti di una varietà W_7^3 di dimensione 7 ed ordine 3, che è la nota varietà immagine delle proiettività degeneri tra due forme di seconda specie (n. 7).

tano qualche accidentalità riempiono una varietà algebrica V sulla cui natura non ci interessa indagare.

Passiamo poi alla riemanniana H_{16} dello S_8.

Fissato ora comunque un punto T di H_{16} (anche sulla riemanniana di V) ed un generico punto $\overline{T}$ si può sempre, ed in infiniti modi, costruire una linea analitica (continua) γ che congiunga T con $\overline{T}$ senza incontrare (escluso il punto T) la Riemanniana di V (nè la riemanniana della W_7^3 richiamata in nota).

Facendo tendere, su γ, $\overline{T}$ a T la corrispondente trasformazione $\overline{T}_n$ tenderà a T_n ed i punti uniti di $\overline{T}_n$ tenderanno ai punti uniti di T_n; in questo passaggio al limite r_1 punti uniti di $\overline{T}_n$ tendono al punto unito Q_1 di T_n, r_2 al punto unito Q_2, $\cdots$, inoltre s_1 punti uniti di $\overline{T}_n$ tendono ad un gruppo $G^{(1)}$ di punti della curva (irriducibile) $U^{(1)}$ di punti uniti di T_n, s_2 al gruppo $G^{(2)}$ della curva di punti uniti $U^{(2)}$, $\cdots$.

I numeri $r_1, r_2, \cdots, s_1, s_2, \cdots$, così definiti, debbono essere interi e quindi risultano indipendenti sia dalla linea γ [5] sia dal punto generico $\overline{T}$.

Questi numeri r_i ed s_j ci dànno l'equivalenza numerativa degli elementi uniti della trasformazione cremoniana T_n.

Dalla maniera come questi numeri sono stati definiti risulta:

$$r_1 + r_2 + \cdots + s_1 + s_2 + \cdots = n + 2 .$$

Chiudo questa introduzione avvertendo che indicherò i polinomi con lettere in grassetto e le curve, che si ottengono eguagliando a zero questi polinomi, con le stesse lettere in corsivo.

1. I PUNTI UNITI SEMPLICI. – Sia T_n una trasformazione cremoniana d'ordine n, non degenere, tra piani sovrapposti; e la sua equazione sia:

$$(1) \qquad T_n \equiv \begin{cases} \rho x' = f_1(x, y, z) \\ \rho y' = f_2(x, y, z) \\ \rho z' = f_3(x, y, z) \end{cases}$$

Posto:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathbf{L}_1 \equiv y f_3 - z f_2 \\ \mathbf{L}_2 \equiv z f_1 - x f_3 \\ \mathbf{L}_3 \equiv x f_2 - y f_1 \end{cases}$$

la generica curva isologa ha equazione [6]

$$(3) \qquad \lambda_1 \mathbf{L}_1 + \lambda_2 \mathbf{L}_2 + \lambda_3 \mathbf{L}_3 = 0 .$$

(5) Non si può dire la stessa cosa per gli eventuali gruppi $G^{(1)}, G^{(2)}, \cdots$ i quali invece, generalmente, variano con la tangente a γ in T. Ulteriori precisazioni si trovano per esempio, in F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche.* (Lezioni raccolte da F. CONFORTO ed E. MARTINELLI; Edizioni Cremonesi, Roma 1942, vol I, cap. I).

(6) Ved. loc. cit. (2).

Si dice che il punto (proprio) Q è un *punto unito* SEMPLICE della trasformazione T_n quando:

a) non è base per la rete omaloidica $|f|$ che la T_n muta nella rete delle rette:

b) è base semplice per le curve isologhe;

c) nell'intorno di Q non vi sono altri punti base per le curve isologhe.

Questa definizione può essere liberata dall'intervento delle curve isologhe, cosa che farò nei prossimi numeri benchè ciò non sia necessario per quello che è lo scopo finale del presente lavoro.

2. Dovendo sviluppare alcuni calcoli conviene introdurre l'ipotesi semplificatrice che il punto unito semplice Q coincida con l'origine (0, 0, 1) delle coordinate.

In questa ipotesi le curve f_1 ed f_2 hanno in Q una intersezione semplice, mentre la f_3 non vi passa; posto, quindi, $z = 1$ si ha:

$$(4)\qquad \begin{cases} f_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 x^2 + \cdots \\ f_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 x^2 + \cdots \\ f_3 \equiv h + a_3 x + b_3 y + c_3 x^2 + \cdots \end{cases}$$

e deve essere:

$$(5)\qquad h \neq 0\,;\; a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0\,.$$

Mediante le (4) le identità (2) diventano

$$(6)\qquad \begin{cases} L_1 \equiv -a_2 x + (h - b_2) y + \cdots \\ L_2 \equiv (a_1 - h) x + b_1 y + \cdots \\ L_3 \equiv a_2 x^2 + (b_2 - a_1) xy - b_1 y^2 + \cdots ; \end{cases}$$

inoltre le curve L_1 ed L_2 debbono avere in Q una intersezione semplice, cioè deve essere:

$$(7)\qquad a_2 b_1 + (a_1 - h)(h - b_2) \neq 0\,.$$

È chiaro che le relazioni trovate sono non solo necessarie ma anche sufficienti; infatti, come si controlla facilmente, se valgono le (4), (5), (7) il punto Q (coincidente con l'origine delle coordinate) è un punto unito semplice.

3. Consideriamo ora una retta r per il punto Q di equazione

$$(8)\qquad y = \lambda x\,.$$

Un punto P di r ha coordinate: $(\delta, \lambda\delta, 1)$, mentre il suo corrispondente P', nella T_n, ha, per le (4), le seguenti coordinate:

$$(9)\qquad \begin{cases} x' = a_1\,\delta + b_1\,\lambda\delta + c_1\,\delta^2 + \cdots \\ y' = a_2\,\delta + b_2\,\lambda\delta + c_2\,\delta^2 + \cdots \\ z' = h + a_3\,\delta + b_3\,\lambda\delta + c_3\,\delta^2 + \cdots . \end{cases}$$

La retta $\bar{r}$ che congiunge P con P′ ha equazione

$$\frac{x - \delta}{x - \delta z'} = \frac{y - \lambda\delta}{y' - \lambda\delta z'} .$$

Facciamo ora tendere, sulla retta r, il punto P al punto Q; anche P′ tenderà a Q e la retta $\bar{r}$ tenderà alla retta r' di equazione:

$$(9)\qquad y = \frac{(b_2 - h)\,\lambda + a_2}{b_1\,\lambda + (a_1 - h)}\,x .$$

4. Con la costruzione del numero precedente si ottiene una *corrispondenza* Θ nel fascio di rette per Q che associa alla retta r di equazione (8) la retta r' di equazione (9) [7].

Nelle nostre ipotesi la corrispondenza Θ è una proiettività sicuramente non degenere a causa della (7). Però il solo fatto che la corrispondenza Θ sia una proiettività non degenere non è sufficiente ad assicurarci che il punto Q sia un punto unito semplice; infatti, come si controlla facilmente, non ci assicura che sia $h \neq 0$, cioè che il punto Q non sia base per la rete $|f|$.

D'altra parte *se il punto* Q *non è base per la rete* $|f|$ *e la corrispondenza* Θ *è una proiettività non degenere possiamo essere sicuri che* Q *è un punto unito semplice.*

Sia infatti:

$$(10)\qquad \begin{cases} f_1 \equiv k_1 + a_1\,x + b_1\,y + \cdots \\ f_2 \equiv k_2 + a_2\,x + b_2\,y + \cdots \\ f_3 \equiv h + a_3\,x + b_3\,y + \cdots . \end{cases}$$

Ripetendo la stessa costruzione del n. 3 si arriva ad una retta r' di equazione:

$$y = \frac{k_2}{k_1}\,x ,$$

e quindi, se k_2 e k_1 sono diversi da zero, la corrispondenza Θ è una proiettività degenere.

(7) Si tengano presenti i concetti di *coincidenza perfetta, di direzioni principali,...* Ved. per esempio loc. cit. (5), p. 278 e seguenti.

Pertanto l'ipotesi che Θ sia una proiettività non degenere ci assicura la validità delle (4) e delle (7); d'altra parte l'ipotesi che Q non sia base per la rete $|f|$ ci assicura la validità delle (5) e quindi (n. 2) il punto Q è un punto unito semplice.

5. Concludendo possiamo dire che il punto (proprio) Q è unito semplice quando:

a) non è base per la rete omoloidica $|f|$;

b) la corrispondenza Θ è una proiettività non degenere.

Geometria. — *Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli.* Nota di G. POMPILJ, presentata[1] dal Socio F. ENRIQUES.

In due precedenti lavori, occupandomi della rappresentazione algebrica dei piani tripli[2] e dei piani multipli diedrici[3], ho determinato l'equazione dei rispettivi modelli proiettivi; queste equazioni, che non sto qui a riportare, hanno in comune alcune caratteristiche, le quali, riferendoci al caso dei piani n-pli, possono essere così enumerate:

α) sono di grado n in z;

β) il coefficiente di z^n è 1 (o, in coordinate omogenee, $t^{n(d-1)}$);

γ) manca il termine in z^{n-1};

δ) il grado del coefficiente di z^{n-r} $(r = 2, \cdots, n)$ è: $r \cdot d$.

Dimostrerò in questa breve Nota che un risultato analogo sussiste per un qualunque piano multiplo; cioè che *come modello proiettivo dell'ente algebrico* ∞^2 *rappresentato su un piano n-plo si può prendere una superficie di equazione*

$$(1) \qquad f^{[n]}(xy/z) = z^n + a_{2d} z^{n-2} + \cdots + a_{rd} z^{n-r} + \cdots + a_{(n-1)d} z + a_{nd} = 0$$

dove $a_{2d}, \cdots, a_{rd}, \cdots, a_{nd}$ sono polinomi in x, y rispettivamente di grado $2d, \cdots, rd, \cdots, nd$.

1. È noto che una superficie rappresentabile su un piano n-plo è birazionalmente equivalente ad una superficie di equazione:

$$(2) \qquad a^{(0)} z^n + n a^{(1)} z^{n-1} + \cdots + a^{(n)} = 0$$

dove $a^{(0)}, a^{(1)}, \cdots, a^{(n)}$ sono polinomi in x, y.

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Ved. « Rend. Sem. Mat. R. Università di Roma », ser. IV, vol. 3, 1939.

(3) Loc. cit. in (2)

Assoggettando la (2) alla trasformazione T_1 di de Jonquières di equazione:

$$T_1 \equiv \left\{ x = x \ , \ y = y \ , \ z = \frac{z - a^{(1)}}{a^0} \right\} \ (4)$$

si ottiene:

$$(3) \qquad z^n + b_{s_2} z^{n-2} + \cdots + b_{s_r} z^{n-r} + \cdots + b_{s_n} = 0$$

dove b_{s_r} $(r = 2, \cdots, n)$ è un conveniente polinomio in x, y di grado s_r. Sui gradi $s_2, s_3, \cdots, s_n$ dei polinomi che figurano nella (3) non facciamo alcuna ipotesi, di modo che possiamo affermare solo che l'equazione (3) soddisfa alle condizioni α, β, γ e nulla possiamo dire per ora sulla condizione δ.

2. Se $K (\geqq n)$ è il grado della (3) come polinomio nelle tre variabili x, y, z, passando in coordinate omogenee, si ha:

$$(4) \qquad t^{K-n} z^n + t^{K-n+2-s_2} b_{s_2} z^{n-2} + \cdots + t^{K-n+r-s_r} b_{s_r} z^{n-r} + \cdots + t^{K-s_n} b_{s_n} = 0 .$$

Posto:

$$c_1 (x, y, t) \equiv ax + by + ct \qquad (\text{con } a, b, c \text{ generici}),$$

assoggettiamo la (4) alla trasformazione omografica τ di equazione:

$$\tau \equiv \{ x = x, y = y, z = z, t = c_1 \} ;$$

dopo di che si ottiene:

$$(5) \qquad c_1^{K-n} z^n + c_1^{K-n+2-s_2} \bar{b}_{s_2} z^{n-2} + \cdots + c_1^{K-n+r-s_r} \bar{b}_{s_r} z^{n-r} + \cdots + c_1^{K-s_n} \bar{b}_{s_n} = 0 .$$

Finalmente, assoggettando la (5) alla trasformazione T_2 di de Jonquières di equazione:

$$T_2 \equiv \left\{ x = x, y = y, z = \frac{z}{c_1^{K-n}} \right\},$$

si ottiene:

$$(6) \qquad z^n + c_1^{2(K-n+1)-s_2} \bar{b}_{s_2} z^{n-2} + \cdots + c_1^{r(K-n+1)-s_r} \bar{b}_{s_r} z^{n-r} + \cdots + c_1^{n(K-n+1)-s_n} \bar{b}_{s_n} = 0 .$$

(4) Si sarebbe dovuto scrivere più correttamente:

$$T_1 \equiv \left\{ x = x', y = y', z = \frac{z' - a^{(1)}}{a^{(0)}} \right\},$$

ma, siccome non vi può essere equivoco, preferisco non appesantire il simbolismo con inutili apici.

Posto $K - n + 1 = d$ si controlla facilmente che il grado del coefficiente di $x^{n-r} (r = 2, \cdots, n)$ è $r \cdot d$, cioè la (6), soddisfacendo alle condizioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, è del tipo (1).

3. Se ora esaminiamo il cammino percorso per arrivare alla (6) possiamo affermare che ogni superficie rappresentabile su un piano n-plo è birazionalmente identica ad una superficie la cui equazione è del tipo (1). c. v. d.

Questa superficie potrà essere chiamata *modello proiettivo principale* del piano multiplo.

Matematica (Matematica Finanziaria). — *Sulla risoluzione numerica delle equazioni in generale e in particolare di talune notevoli che si presentano in matematica finanziaria* [1]. Nota di P. Tortorici, presentata [2] dal Socio M. Picone.

In matematica finanziaria capita sovente di dovere calcolare talune radici reali di equazioni algebriche di grado molto elevato e di doverlo fare con grande approssimazione, interessando sopratutto una sicura maggiorazione dell'errore con cui riescono approssimate le radici stesse.

Tale problema è stato investigato a varie riprese nella matematica finanziaria, e sono stati dati vari metodi, più o meno potenti, per risolverlo, a proposito della ricerca del tasso nelle rendite certe temporanee non differite [3].

Io vorrei ora osservare, con questa Nota, che una brillante soluzione del problema è contenuta nelle lezioni di Calcolo numerico del prof. Picone [4]. Ecco in breve l'idea fondamentale su cui si basa il metodo.

Si debba calcolare la radice $\bar{x}$, separata dall'intervallo (p, q), della equazione

$$f(x) = 0,$$

e facciamo l'ipotesi che sia $f(p) < 0$, $f(q) > 0$ per modo che un valore x' di $\bar{x}$ riuscirà minore o maggiore di $\bar{x}$ secondochè $f(x')$ sarà negativo o positivo. Supponiamo inoltre che si conservi diversa da zero e, per fissare le

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) Se ne sono occupati i seguenti Autori: W. M. Makeham, G. F. Hardy, Makenzie, W. Sutton, F. P. Cantelli, A. Achard, C. W. Merrifield, A. De Morgan, Mc. Lanchlan, S. W. Newling, J. Spencer, J. F. Steffensen, Baily, T. Boggio, F. Sibirani, M. Kraitchik, C. A. Dell'Agnola, F. Lenzi, V. Lenz, Luek Baur, F. Ciaccardi.

(4) Cfr. M. Picone, *Lezioni di Calcolo numerico*, pp. 206 e sgg., « D. U. S. A. », Roma, 1940–1941.

idee, positiva, la derivata della $f(x)$, d'ordine $\mu \geq 2$. Decomposto $\mu - 2$ nella somma $\mu_1 + \mu_2$ di due numeri interi non negativi μ_1 e μ_2, diciamo $F(x)$ il polinomio di grado $\mu_1 + \mu_2 + 1 = \mu - 1$ che ha con $f(x)$, nel punto p un contatto d'ordine μ_1 e nel punto q un contatto d'ordine μ_2, che verifica cioè le equazioni:

$$F^{(i)}(p) = f^{(i)}(p) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, \mu_1)$$
$$F^{(i)}(q) = f^{(i)}(q) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, \mu_2).$$

È allora noto che

$$f(x) - F(x) = \frac{(x-p)^{\mu_1+1}(x-q)^{\mu_2+1}}{\mu!} f^{(\mu)}(\xi)$$

ove è ξ un punto interno all'intervallo (p, q).

Il polinomio

$$\varphi(x) = (x-p)^{\mu_1+1}(x-q)^{\mu_2+1}$$

conserva segno costante nell'interno dell'intervallo (p, q) che sarà il positivo o il negativo secondochè $\mu_2 + 1$ è pari o dispari.

Si assuma $\mu_2 + 1$ pari, sarà allora $F(x) < f(x)$ per $p < x < q$, e quindi $F(x) < 0$ per $p \leq x \leq \bar{x}$ e pertanto $F(x)$, poichè $F(q) = f(q) > 0$, ha radici nell'intervallo (p, q) e la minima di queste fornisce certo una quantità q_1 minore di q e maggiore di $\bar{x}$. Si assuma $\mu_2 + 1$ dispari, si ha allora $F(x) > f(x)$ per $p < x < q$ e quindi $F(x) > 0$ per $\bar{x} \leq x \leq q$ e pertanto $F(x)$, poichè $F(p) = f(p) < 0$, ha radici nell'intervallo (p, q) e la massima fra queste fornisce una quantità p_1 maggiore di p e minore di $\bar{x}$.

Poniamo

$$F(x) = Q_1(x) \quad \text{per} \quad \mu_2 + 1 \text{ pari},$$
$$F(x) = P_1(x) \quad \text{per} \quad \mu_2 + 1 \text{ dispari}.$$

Consideriamo ora l'intervallo (p, q_1) e indichiamo con $Q_2(x)$ il polinomio avente con $f(x)$ un contatto d'ordine μ_1 in p e d'ordine μ_2 in q_1 se $\mu_2 + 1$ è pari indichiamo con $P_2(x)$ il polinomio avente con $f(x)$ un contatto d'ordine μ_1 in p e d'ordine μ_2 in q_1 se $\mu_2 + 1$ è dispari. Detta q_2 la minore radice di $Q_2(x)$ nell'intervallo (p, q_1) e p_2 la maggiore di $P_2(x)$ nello stesso intervallo si avrà

$$p < p_1 < p_2 < x < q_2 < q_1 < q.$$

Si procede così indefinitamente prendendo successivamente in considerazione intervalli per i quali è sempre fisso l'estremo sinistro p.

Si perviene alla costruzione di due successioni $p, p_1, p_2, \cdots$, crescente e tendente a $\bar{x}$ e $q, q_1, q_2, \cdots$, decrescente e tendente pur essa a $\bar{x}$, con le quali si consegue il calcolo di $\bar{x}$. Ogni quantità p_h dà un valore approssimato per difetto di $\bar{x}$ con un errore minore di $q_k - p_h$, comunque si assuma k ed ogni quantità q_k dà un valore approssimato per eccesso della $\bar{x}$

con errore minore di $q_h - p_h$ comunque si assuma l'indice h. Alla h^{ma} operazione otterremo l'intervallo (p, q_h) separante la radice $\bar{x}$ e denoteremo con $F_h(x)$ il polinomio di grado $\mu_1 + \mu_2 + 1$ avente contatti degli ordini μ_1 e μ_2 in p e q_h con la $f(x)$, polinomio che sarà indicato con

$$P_h(x) \quad \text{se} \quad \mu_2 + 1 \quad \text{è dispari}$$
$$Q_h(x) \quad \text{se} \quad \mu_2 + 1 \quad \text{è pari.}$$

Ovviamente, la scelta del numero μ e della sua decomposizione nella somma $\mu = \mu_1 + \mu_2 + 2$ è collegata alla determinazione dell'intervallo (p, q) separante la radice in cui la derivata $f^{(\mu)}(x)$ si conserva sempre d'un segno ed inoltre alla convenienza di elevare gli ordini μ_1 e μ_2 dei contatti di $F_h(x)$ con la $f(x)$ in p e q_h per modo che la $F_h(x)$ si scosti il meno possibile dalla $f(x)$ e pertanto la massima o minima delle sue radici nell'intervallo (p, q_h) sia il più possibilmente prossima alla radice $\bar{x}$. Converrà in pratica sapere opportunamente scegliere i numeri μ, μ_1, μ_2 in modo da soddisfare le sopradette condizioni, ma anche quella della facile risoluzione delle equazioni $F_h(x) = 0$.

Quanto all'espressione della $F_h(x)$ essa è data dalla formula

$$(1) \qquad F_h(x) = \left(\frac{q_h - x}{q_h - p}\right)^{\mu_2+1} \sum_{i=0}^{\mu_1} \frac{f^{(i)}(p)}{i!} \sum_{j=i}^{\mu_1} \binom{\mu_2 + j - i}{j - i} \frac{(x-p)^j}{(q_h - p)^{j-i}} +$$
$$+ \left(\frac{p - x}{p - q_h}\right)^{\mu_1+1} \sum_{i=0}^{\mu_2} \frac{f^{(i)}(q_h)}{i!} \sum_{j=i}^{\mu_2} \binom{\mu_1 + j - i}{j - i} \frac{(x - q_h)^j}{(p - q_h)^{j-i}} \text{ (5).}$$

Nella formula (1) compaiono come divisori le potenze della differenza $p - q_h$ la quale si mantiene sempre maggiore di $\bar{x} - p$ e quindi discosta dallo zero per una quantità fissa, circostanza questa di notevole importanza pratica per il calcolo sufficientemente approssimato dei coefficienti del polinomio $F_h(x)$. In ciò una delle peculiarità del metodo. Ogni altro, dello stesso tipo interpolatorio, che obbligasse a sostituire al primitivo intervallo (p, q) gli intervalli (p_h, q_h) i cui estremi approssimano la radice $\bar{x}$ che si vuole calcolare condurrebbe a formule di difficile calcolo approssimato poichè esso richiederebbe la divisione per potenze della quantità $q_h - p_h$ che riesce infinitesima al divergere di k e di h.

Determinazione del tasso d'interesse nelle annualità differite e non differite. – Tale determinazione si consegue attraverso la risoluzione della seguente equazione

$$(2) \qquad f(1 + i) \equiv a(1 + i)^{n+m+1} \quad a(1 + i)^{n+m} \quad (1 + i)^n + 1 = 0$$

dove i è l'incognito tasso d'interesse, a è l'assegnato valore attuale di una rendita posticipata unitaria di n anni e differita di m. Di solito i numeri

(5) Cfr. Picone, *Lezioni di Algebra*. Veschi, 1945, n. 46.

interi n ed m positivi hanno valore molto elevato e possono portare il grado dell'equazione (2) nell'incognita i anche ad essere maggiore di cento. Di qui il motivo dei frequenti studi a cui è stata sottoposta la risoluzione dell'equazione (2), nel caso particolare $m = 0$ e la preferenza da dare a quei metodi di risoluzione che richiedono poche volte il calcolo della $f(x)$. L'equazione (2) non è stata per altro mai considerata nel caso $m \neq 0$ [6]. Con le vedute sopra esposte, la risoluzione numerica della (2) *per qualsivoglia valore di m, con quell'approssimazione che si desidera e con una sicura limitazione dell'errore commesso*, è presto conseguita. Posto $1 + i = x$, si constata intanto subito che l'equazione

$$f(x) \equiv ax^{n+m+1} - ax^{n+m} - x^n + 1 = 0 \tag{3}$$

ha un'unica radice $\bar{x}$, che è quella che interessa approssimare, maggiore di uno, che riesce minore di $q = \dfrac{a+1}{a}$ ed è facile altresì determinare un numero $p < \bar{x}$, tale che nell'intervallo (p, q) si conservino positive le derivate terza e quarta della funzione primo membro di (3).

Si potrà pertanto applicare il metodo di risoluzione sopra esposto, ponendo o $\mu = 3$ oppure $\mu = 4$.

Se si pone $\mu = 3$ i polinomi interpolatori $P_h(x)$ e $Q_h(x)$ risultano di secondo grado, e sono forniti dalla formula (1); i primi per $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, i secondi per $\mu_1 = 0$ e $\mu_2 = 1$.

Le seguenti tabelle forniscono i valori delle approssimazioni p_h e q_h in tre casi indicati nella testata delle tabelle stesse.

$a = 8{,}67438641$		
$n = 25$	$m = 15$	
h	p_h	q_h
0	3,359678	4,590362
1	3,982873	4,022299
2	3,999560	4,000030
3	3,999999	4,000000

$a = 6{,}88046625$		
$n = 50$	$m = 20$	
h	p_h	q_h
0	4.527897	5,373805
1	4,984600	5,014015
2	4,999440	5,000000
3	4.999999	5,000000

$a = 17{,}41314769$		
$n = 25$	$m = 0$	
h	p_h	q_h
0	1,675757	5,742787
1	2,736409	3,644394
2	2,933345	3,033009
3	2,996512	3,000087
4	2,999990	3,000000
5	2,999999	3,000000

(6) Il Cantelli in un suo lavoro del 1907 diede un procedimento per la determinazione approssimata della radice $\bar{x}$ di (3), nel caso particolare di $m = 0$, che è interessante per la sua originalità e in un altro successivo diede poi, sempre nel caso $m = 0$, un confine dell'errore commesso.

Nel terzo caso sono occorse, a differenza dei primi due, cinque approssimazioni per pervenire ad un valore di $\bar{x}$ con un errore minore di $1/10^6$. Vediamo se ponendo $\mu = 4$, adoperando quindi i polinomi di terzo grado, si possa pervenire, nel detto terzo caso, ad un calcolo più rapido di $\bar{x}$.

Si porrà allora per i polinomi $P_h(x)$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$ e per i polinomi $Q_h(x)$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Per le approssimazioni p_h e q_h di $\bar{x}$ si ottengono allora i valori riportati nella seguente tabella.

$a = 17{,}41314769$		
$n = 25$	$m = 0$	
h	p_h	q_h
0	1,675757	5,742787
1	2,969010	3,086660
2	2,999120	3,000070
3	2,999999	3,000000

Matematica (Analisi). — *Sopra la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore.* Nota di S. CINQUINI, presentata [1] dal Socio U. AMALDI.

In una Nota precedente [2] abbiamo enunciato alcuni teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali dei primi due ordini [3]

$$\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, ds .$$

La dimostrazione di tali teoremi esistenziali è contenuta in una nostra Memoria [4] in corso di stampa ed è basata su alcune condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ stabiliti nella citata Memoria e che vengono riportate al n. 4 della presente Nota.

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo nei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore.* Questi « Rendiconti », vol. I, p. 500.

(3) Vedi n. 1, α) e β) della presente Nota.

(4) S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore.*

Ma un interesse ben maggiore presentano le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali $\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$, dalle quali seguono immediatamente le condizioni di Legendre e di Weierstrass necessarie per l'esistenza dell'estremo.

Come è noto, qualunque sia il tipo di problema variazionale che si studia, per stabilire le condizioni necessarie per la semicontinuità su un dato elemento del campo funzionale considerato si incontrano, per solito, serie difficoltà di dimostrazione, le quali traggono origine dal noto fenomeno di Lavrentieff. Questo ostacolo può superarsi abbastanza facilmente nel caso dei problemi del primo ordine in forma parametrica assumendo come parametro la lunghezza dell'arco rettificato, ma si presenta in pieno nel problema in questione, perchè su ogni curva ordinaria $C^{(2)}$ la curvatura esiste finita quasi dappertutto, ma risulta limitata soltanto sulle curve di una sottoclasse della classe che si considera. Inoltre il problema in questione, in confronto a quello in forma ordinaria, offre un'ulteriore difficoltà per il fatto che nell'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ le derivate del secondo ordine non compaiono in modo indipendente, ma figurano nella curvatura, la quale non è un funzionale additivo.

Tuttavia, riprendendo l'idea che ci aveva guidati alcuni anni fa nel caso dei problemi in forma ordinaria dipendenti dalle derivate di ordine superiore [5], e raffinando il procedimento allora seguito, si possono stabilire in tutta la loro generalità le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali $\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$. Tali condizioni sono enunciate al n. 2 della presente Nota, mentre delle relative dimostrazioni, contenute in una nostra Memoria [6] in corso di stampa, qui non possiamo render conto per mancanza di spazio. Ci limitiamo a far presente che, a differenza dall'abituale usanza di stabilire inizialmente la condizione necessaria per la semicontinuità in tutto il campo, per giungere poi gradatamente al caso più difficile delle condizioni necessarie per la semicontinuità su una data curva ordinaria $C^{(2)}$ (di natura del tutto generale), ci siamo occupati senz'altro di queste ultime condizioni e precisamente di quella che si esprime mediante la funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass: la relativa dimostrazione, che si presenta particolarmente delicata, costituisce il nucleo della nostra citata Memoria.

Tale diversità di procedimento è dovuta non solo a ragioni di brevità, perchè da tale condizione si ricavano, come casi particolari, tutte le altre, ma al fatto che, a differenza da quanto avviene sia per i problemi del primo

(5) S. Cinquini, *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n.* « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. VI, 1937, pp. 149–178.

(6) S. Cinquini, *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore.* Tale Memoria redatta già da qualche tempo è tuttora in corso di stampa a motivo delle persistenti difficoltà tipografiche.

ordine in forma parametrica sia per quelli in forma ordinaria di ordine qualunque, il procedimento semplicissimo (basato sulla costruzione di curve composte di archi di circonferenza), con il quale si potrebbe stabilire direttamente la condizione necessaria per la semicontinuità in tutto il campo dell'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$, non può essere riutilizzato nella ricerca delle condizioni necessarie per la semicontinuità su una data curva.

1. Generalità. – Richiamiamo nel presente numero alcune delle generalità date nella nostra precedente Nota citata in [2], rinviando per le altre alla Nota stessa e aggiungendo quelle che occorrono nella presente.

α) Sia $F(x, y, x', y', \theta')$ una funzione: 1° definita e continua insieme con la propria derivata parziale $F_{\theta'}$ in ogni punto (x, y) di un campo A (contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito), per ogni coppia di numeri x', y' non entrambi nulli e per ogni valore finito di θ'; 2° positivamente omogenea di grado uno rispetto alle variabili x', y'; 3° tale inoltre che sia $F(x, y, 0, 0, \theta') = 0$.

La funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass è definita per ogni quintupla (x, y, x', y', θ') ora indicata e per ogni valore finito di $\bar{\theta}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{E}(x, y, x', y', \theta'; \bar{\theta}') = F(x, y, x', y', \bar{\theta}') - F(x, y, x', y', \theta') - (\bar{\theta}' - \theta') F_{\theta'}(x, y, x', y', \theta').$$

β) Dicesi *curva ordinaria* $C^{(2)}$ ogni curva rettificabile

$$C^{(2)}_0: \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

s essendo la lunghezza dell'arco rettificato, per la quale le funzioni $x_0(s)$, $y_0(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate $x'_0(s)$, $y'_0(s)$, ed esiste finito l'integrale (del Lebesgue)

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}_0} = \int_{C^{(2)}_0} F(x_0(s), y_0(s), x'_0(s), y'_0(s), \theta'_0(s))\, ds,$$

ove $\theta'_0(s)$ è la curvatura della curva $C^{(2)}_0$.

La curva ordinaria $C^{(2)}_0$ dicesi completamente interna al campo A, se ogni suo punto è interno ad A.

γ) Tenuta presente la definizione di appartenenza all'intorno $(\rho)^2$ data nella nostra precedente Nota [7], si dice che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ è funzione semicontinua inferiormente sulla curva ordinaria $C^{(2)}_0$, se, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, è possibile determinare un $\rho > 0$ in modo che la disuguaglianza

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}} > \mathfrak{J}^{(2)}_{C^{(2)}_0} - \varepsilon \tag{1}$$

(7) Vedi, loc. cit. in (2), n. 1, ε).

sia verificata per tutte le curve ordinarie $C^{(2)}$ che appartengono all'intorno $(\rho)^2$ della $C_0^{(2)}$.

Se poi $\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ gode della semicontinuità inferiore su ogni curva ordinaria $C^{(2)}$ diremo che tale integrale è funzione semicontinua inferiormente.

Le definizioni di semicontinuità superiore e di continuità si deducono dalle presenti sostituendo alla disuguaglianza (1) rispettivamente le seguenti

$$\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)} < \mathfrak{I}_{C_0^{(2)}}^{(2)} + \varepsilon \quad , \quad \left| \mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)} - \mathfrak{I}_{C_0^{(2)}}^{(2)} \right| < \varepsilon .$$

δ) Data una classe $K^{(2)}$ di curve ordinarie $C^{(2)}$ diremo che un punto $P_0 \equiv (x_0(s_0), y_0(s_0), x_0'(s_0), y_0'(s_0))$ della curva ordinaria $C_0^{(2)}$, appartenente alla classe considerata è *punto di indifferenza rispetto al campo* A *e alla classe* $K^{(2)}$, se è possibile determinare un numero $\rho_0 > 0$, in modo che si ottenga ancora una curva della classe $K^{(2)}$, quando si sostituisca ad un qualunque arco della $C_0^{(2)}$ definito da $s_1 \leq s \leq s_2$, con $s_1 \leq s_0 \leq s_2$, e tale che per ogni s di (s_1, s_2) sia

$$[x_0(s) - x_0(s_0)]^2 + [y_0(s) - y_0(s_0)]^2 + \\ + [x_0'(s) - x_0'(s_0)]^2 + [y_0'(s) - y_0'(s_0)]^2 \leq \rho_0 ,$$

un qualunque arco di una curva ordinaria $C^{(2)}$ in modo che, se $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$, $(0 \leq \sigma \leq l)$, sono le equazioni di tale arco, ove σ è la lunghezza dell'arco rettificato, per ogni σ di $(0, l)$ abbia luogo la disuguaglianza

$$[x(\sigma) - x_0(s_0)]^2 + [y(\sigma) - y_0(s_0)]^2 + \\ + [x'(\sigma) - x_0'(s_0)]^2 + [y'(\sigma) - y_0'(s_0)]^2 \leq \rho_0^2$$

e inoltre sia

(I) $\quad x(0) = x_0(s_1) \ , \ y(0) = y_0(s_1) \ , \ x'(0) = x_0'(s_1) \ , \ y'(0) = y_0'(s_1)$,

(II) $\quad x(l) = x_0(s_2) \ , \ y(l) = y_0(s_2) \ , \ x'(l) = x_0'(s_2) \ , \ y'(l) = y_0'(s_2)$,

intendendosi che sia le (I) che le (II) possano anche non essere verificate, quando sia rispettivamente $s_1 = 0$, $s_2 = L_0$.

ε) Enunciamo soltanto le condizioni per la semicontinuità inferiore [per il minimo], perchè quelle per la semicontinuità superiore [per il massimo] si deducono dalle prime cambiando il senso delle disuguaglianze che vi figurano.

2. Condizioni necessarie per la semicontinuità. — α) *Se*

$$C_0^{(2)}: \qquad x = x_0(s) \ , \quad y = y_0(s) , \qquad (0 \leq s \leq L_0)$$

è una curva ordinaria $C^{(2)}$ *completamente interna al campo* A, *condizione necessaria, affinchè l'integrale* $\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ *sia semicontinuo inferiormente sulla curva* $C_0^{(2)}$,

è che lo pseudoarco dei punti $(x_0(s), y_0(s))$ *di* $C_0^{(2)}$ *nei quali esiste finita la curvatura* $\theta_0'(s)$ *e non è verificata per tutti i valori di* $\tilde{\theta}'$ *la disuguaglianza*

$$(2) \qquad \mathcal{E}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), \theta_0'(s); \tilde{\theta}') \geqq 0$$

abbia misura nulla.

β) Se alle condizioni del n. 1, α) si aggiunge, soltanto nel presente capoverso, l'ipotesi che la funzione F ammetta, per tutte le quintuple (x, y, x', y', θ') allora indicate, finita e continua anche la derivata parziale $F_{\theta'\theta'}$, dal teorema precedente si deduce, come caso particolare, che *l'insieme dei punti* $(x_0(s), y_0(s))$ *di* $C_0^{(2)}$ *nei quali esiste finita la curvatura* $\theta_0'(s)$ *e non è verificata la disuguaglianza*

$$(3) \qquad F_{\theta'\theta'}(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), \theta_0'(s)) \geqq 0$$

deve essere uno pseudoarco di misura nulla.

γ) Sotto le sole ipotesi del n. 1, α) dal teorema del capoverso α) del presente numero e da quanto abbiamo rilevato al n. 1, ε) segue immediatamente che *condizione necessaria affinchè l'integrale* $\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ *sia una funzione continua sulla curva ordinaria* $C_0^{(2)}$, *supposta completamente interna al campo* A, *è che in tutti i punti di* $C_0^{(2)}$ *e per tutti i valori finiti* θ' *la funzione* F *abbia la forma*

$$F(x, y, x', y', \theta') = P(x, y, x', y') + \theta' Q(x, y, x', y'),$$

ove ciascuna delle due funzioni P *e* Q *risulta positivamente omogenea di grado uno rispetto alle variabili* x' *e* y'.

δ) *Se la curvatura* $\theta_0'(s)$ *esiste finita e continua lungo tutta la curva* $C_0^{(2)}$ *le disuguaglianze* (2) *e* (3) *devono essere verificate in tutti i punti della curva stessa, intendendosi che la* (2) *abbia luogo per tutti i valori finiti di* $\tilde{\theta}'$.

ε) Dai risultati dei precedenti capoversi si deducono immediatamente le condizioni necessarie per la semicontinuità e per la continuità in tutto il campo, per le quali rinviamo alla nostra Memoria citata in [6].

3. Le condizioni necessarie per l'esistenza del minimo. – α) *La condizione di Legendre. – Supposto che la funzione* $F(x, y, x', y', \theta')$ *soddisfi alle ipotesi del n. 2,* β), *se*

$$C_0^{(2)}: \qquad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \qquad (0 \leq s \leq L_0)$$

è una curva ordinaria $C^{(2)}$ *minimante* $\mathfrak{I}_{C^{(2)}}^{(2)}$ *in una classe* $K^{(2)}$ *di curve ordinarie* $C^{(2)}$, *allora in quasi tutto ogni suo arco* C, *tale che ogni suo punto, ad eccezione al più di quelli terminali, sia interno al campo* A *e di indifferenza rispetto ad* A *e alla classe* $K^{(2)}$, *deve essere soddisfatta la disuguaglianza* (3).

β) *La condizione di Weierstrass.* – *Supposto che la funzione* $F(x, y, x', y', \theta')$ *soddisfi soltanto alle condizioni del n. 1, α), e ferme restando tutte le altre ipotesi fatte al capoverso α) del presente numero, in quasi tutto l'arco* $\overline{C}$ *deve essere verificata per tutti i valori finiti di* θ *la disuguaglianza* (2).

γ) *Se lungo tutto l'arco* $\overline{C}$ *di cui ai capoversi α) e β) del presente numero la curvatura* $\theta'_0(s)$ *esiste finita e continua, le disuguaglianze* (3) *e* (2) *devono essere verificate rispettivamente in tutti i punti dell'arco stesso.*

4. Condizioni sufficienti per la semicontinuità. – α) Sotto le ipotesi del n. 1, α) sussiste il seguente:

Teorema di semicontinuità. – *Se* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *è un integrale quasi-regolare positivo seminormale* [8], *esso è semicontinuo inferiormente.*

β) *Corollario.* – *Ogni integrale* $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *quasi-regolare positivo è semicontinuo inferiormente in ogni classe* $K^{(2)}$ *di curve ordinarie*

$$C^{(2)}: \qquad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) , \qquad (0 \leq s \leq L),$$

per le quali le curve $x' = x'(s)$, $y' = y'(s)$, $(0 \leq s \leq L)$ *abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso.*

γ) *Teorema di continuità.* – *Se* $P(x, y, x', y')$, $Q(x, y, x', y')$ *sono due funzioni:* 1° *definite e continue, insieme con le derivate parziali* Q_x, Q_y, *in ogni punto* (x, y) *del campo* A *e per ogni coppia di numeri* x', y' *non entrambi nulli;* 2° *positivamente omogenee di grado uno rispetto alle variabili* x', y'; 3° *tali che sia* $P(x, y, 0, 0) = Q(x, y, 0, 0) = 0$, *allora l'integrale*

$$\int_{C^{(2)}} [P(x, y, x', y') + \theta' Q(x, y, x', y')] \, ds$$

è una funzione continua.

δ) Supponiamo nel presente capoverso, oltre alle ipotesi fatte al n. 1, α), che la funzione $F(x, y, x', y', \theta')$ ammetta, per tutte le quintuple (x, y, x', y', θ') indicate al luogo citato, finite e continue anche le derivate parziali $F_{\theta' x}, F_{\theta' y}$.

Sotto queste ipotesi ogni integrale $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *quasi-regolare positivo è semicontinuo inferiormente.*

(8) $\mathfrak{I}^{(2)}_{C^{(2)}}$ dicesi quasi-regolare positivo, quando, in tutti i punti (x, y) di A, e per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli, $F_{\theta'}(x, y, x', y', \theta')$ è funzione non decrescente della sola θ'. Esso è inoltre seminormale, se per nessuna delle quaterne (x, y, x', y') ora indicate la $F_{\theta'}$ è costante per tutti i valori di θ'.

Meccanica. — *Sicurezza rispetto ad una associazione dei tre casi di instabilità di Eulero, di Michell–Prandtl e di Reissner.* Nota di G. KRALL, presentata [1] dal Socio C. SOMIGLIANA.

Le considerazioni che qui mi permetto di svolgere hanno un'origine strettamente tecnica, ma presentano un interesse che può trascendere il caso specifico da cui derivano. Di questo, per completezza, passo a dare un cenno. Or molti anni son passati da quando attendevo al progetto ed alla costruzione di 2 gruppi, ognuno costituito da 4 torri–piloni, cilindrici in parete sottile di c. a., alti 60 m. e caricati in testa da pesanti travate metalliche,

Fig. 1.

correnti su campate da 60 m., alle quali doveva esser applicato, in totale, il tiro di ben 32 teleferiche da cantiere navale (cfr. figg. 1 e 2). Sui piloni centrali deriva una spinta in testa che può raggiungere, su ognuno, le 600 tonnellate ed uno sforzo verticale pressochè eguale. Per i contrappesi interni, introdotti onde centrare la linea delle pressioni, per il peso proprio della stessa struttura resistente, lo sforzo assiale cresce dalle 600 tonnellate alla quota massima a 3000 tonnellate al piede. Le pareti molto estese quasi fanno somigliare queste torri a grandi ali verticalmente infisse nel terreno; la *corda* $2l$ è di 16 m. in testa, si mantiene costante quasi per metà altezza,

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

poi cresce linearmente sino a 32 m. alla base; il *bordo d'entrata* è circolare di raggio costante $r = 2{,}50$ m.

Il vento investe queste ali da ogni lato ed al cimento che ne deriva si aggiunge, notevole, la sua azione sulle funi tra i 2 gruppi di piloni distanti tra loro quasi 350 m. Per l'opera d'ingegneria per se stessa, rinunciai ad ogni forma di controventamento (puntoni trasversali) che pur avevo prevista inizialmente. Ma, nella contemplazione del gioco imponente delle forze, innanzi alle torri che crescevano senza ponteggi, potenti nell'aspetto, sottili nelle pareti ($s = 16$ cm.) imitando una canna di bambù (cfr. fig. 3), questa rinuncia mi destò qualche preoccupazione. Lo sforzo assiale eccezionale, la flessione derivante dal tiro, l'azione trasversale del vento, associata eventualmente a qualche fenomeno aerodinamico, poteva mutuamente esaltare gli

Fig. 2.

effetti corrispondenti e dar luogo ad una *instabilità* contemporanea, vera combinazione dei 3 casi notissimi di *flambage* secondo Eulero [2], di *flessione deviata* secondo Prandtl–Michell [3], di *svergolamento aerodinamico* secondo Reissner [4].

Da questi pensieri ebbero inizio, nell'indirizzo noto ai costruttori aeronautici [5], studi abbastanza sistematici i quali, se nel caso specifico dimo-

(2) Cfr. S. Timoshenko, *Theory of elastic stability*. Cap. II, New-Jork and London, 1936.

(3) Ibidem, cap. V.

(4) Cfr. C. Minelli, *Su una forma di instabilità dell'equilibrio elastico nelle ali a sbalzo*. «Rend. Sem. Mat. R. Università di Roma», 1937.

(5) Cfr. G. Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. Vol. II, cap. X, Zanichelli, Bologna, 1940.

strarono soltanto che il pericolo non stava nella instabilità dell'equilibrio nel campo elastico, possono tuttavia esser di capitale interesse in altre circostanze, in particolare nel calcolo dei ponti sospesi molto leggeri [6]. In questa Nota presento uno dei primi risultati ai quali sono pervenuto. Si tratta di una sintetica espressione di un certo moltiplicatore critico λ_{cr} della distribuzione di carichi assiali N, del tiro orizzontale S, del quadrato della velocità del vento V per il quale si verifica l'instabilità globale dell'equilibrio elastico.

Ponendo ordinatamente $S = V = o$, $N = V = o$, $N = S = o$ per N od S applicati in testa, infine per V = cost. lungo il profilo, costanti supponendosi le caratteristiche geometriche elastiche si ricavano ordinatamente tre valori λ'_{cr} , λ''_{cr} , λ'''_{cr} tali che $\lambda'_{cr} N$, $\lambda''_{cr} S$, $\lambda'''_{cr} V^2$ danno proprio i classici valori per lo sforzo *assiale critico* di Eulero, per la *flessione deviata* di Prandtl, per la *velocità critica* di Reissner. Poichè si dimostra, ciò che

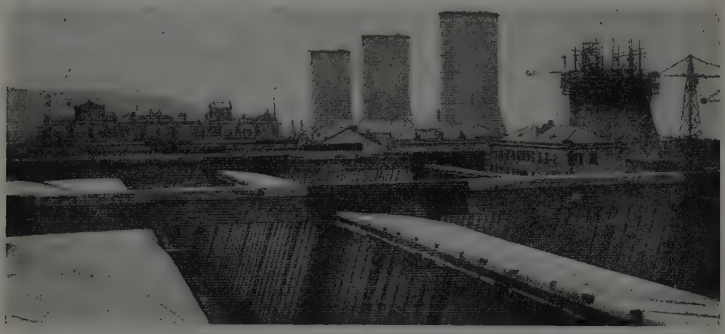


Fig. 3.

è del resto intuitivo, che $\lambda_{cr} < \lambda'_{cr}$, $< \lambda''_{cr}$, alla formola annunciata che compendia i 3 casi spetterà legittimo un sensibile interesse anche fuori dell'ambito delle costruzioni civili.

2. Fissiamo l'attenzione su un'ala elastica di cui sono $R_1 = EI_1$ ed $R_2 = EI_2$ i *coefficienti di rigidezza flessionale* nei due piani di simmetria π_1 e π_2 della sezione resistente Ω, $G\Theta$ il *numero di Bredt* o *coefficente di rigidezza torsionale.*

Sia $EI_1 \gg EI_2$ e la flessione agisca nel piano π_1. Un carico N, eventualmente funzione di x, coordinata contata da un estremo dell'asta, agisce assialmente. Infine, l'asta che ha (vogliamo ammettere) una sezione più o

(6) G. Krall, *Instabilità aerodinamica nei ponti sospesi.* « Mem. scient. di Aerotecnica, Minist. Aeronautica », ottobre 1945; Ibidem, *Statica ed aerodinamica del ponte sospeso ad una fune o ad un arco molto sottile.* « Giornale del Genio Civile », Minist. Lav. Pubblici, Roma, luglio 1945.

meno alare è investita dal vento di velocità V; la densità dell'aria si indichi con ρ ($\rho g = 1{,}293$ kgm^{-3} a 4° C; porremo quindi $\rho \cong 0{,}125$).

Sia $2\,l$ la corda del profilo, cioè la maggior lunghezza della sezione trasversale Ω (cfr. fig. 4).

Trascurando la resistenza aerodinamica, detta $\varphi = \varphi(x)$ la torsione in x, data dalla variazione angolare del piano di simmetria di Ω da π_1, si genera, addittivo, un *momento torcente* di origine aerodinamica

$$M = \Gamma_m \cdot \varphi \tag{1}$$

e, pure addittiva, una *portanza* P

$$P = \Gamma_p \cdot \varphi \tag{2}$$

dove, con riferimento all'unità di lunghezza secondo x,

$$\Gamma_m = C'_m \rho V^2 (2\,l)^2 \quad , \tag{1 a}$$

$$\Gamma_p = C'_p \rho V^2 (2\,l) \tag{2 a}$$

C'_m e C'_p essendo le derivate rispetto a φ dei cosidetti coefficenti di *momento* e di *portanza*, calcolati, poniamo, nell'intorno di $\varphi = 0$. Per detti coefficenti assumeremo i valori $C'_m = -0{,}025$, $C'_p = 2{,}00$.

Detto $w = w(x)$ lo scostamento del centro di Ω normalmente a π_1, la configurazione del sistema sarà definita dalle 2 funzioni $w = w(x)$ e $\varphi = \varphi(x)$.

Per $w = 0$, $\varphi = 0$ si ha equilibrio. Questo è stabile se per i carichi agenti non esistono altre configurazioni pur esse di equilibrio, instabile in caso diverso.

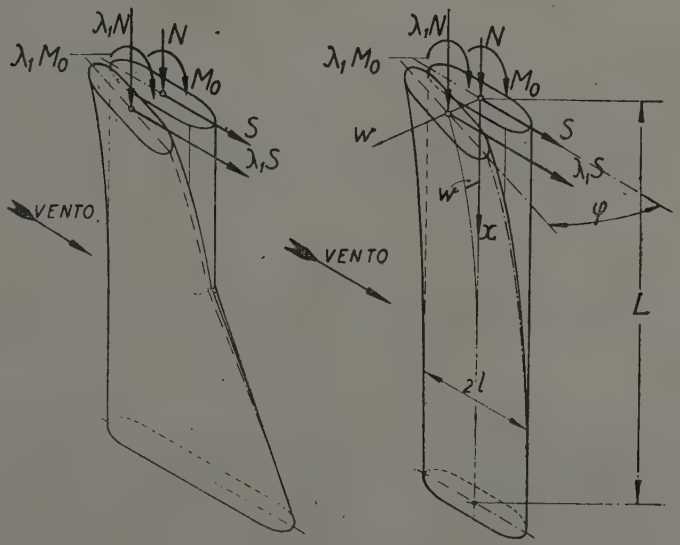


Fig. 4.

Ciò si può affermare secondo un celebre teorema del Poincarè sugli equilibri cosidetti *di diramazione*. Per questo si afferma che, se una configurazione dipende da un parametro λ e per un valore λ_1 di λ si hanno 2 configurazioni diverse, ove per $\lambda < \lambda_1$ sussista stabilità, per $\lambda \geqq \lambda_1$ si ha instabilità.

Nel caso attuale si può assumere come parametro λ un moltiplicatore (numerico) di N, S, V^2. Se per $\lambda = \lambda_1$ si ha una configurazione d'equilibrio anche per $w \neq 0$, $\varphi \neq 0$, i valori $\lambda_1 N$, $\lambda_1 S$, $\lambda_1 V^2$ comporteranno l'instabilità e si diranno *critici* (da ciò la scrittura λ_{cr} in luogo di λ_1).

Per trovare λ_1 si è condotti [7] a cercare *soluzioni* (*instabili*) prossime a quella statica $w = 0$, $\varphi = 0$ annullando la variazione $\delta\mathfrak{E}^*$, di una $\mathfrak{E}^*(w, \varphi)$ appresso definita, per una variazione w, φ contata dai corrispondenti valori nulli. Quanto a $\mathfrak{E}^*$, risulta determinata dall'energia elastica di deformazione per w, φ meno il corrispondente termine di 2° ordine in w, φ del lavoro fatto dagli sforzi interni e dai carichi moltiplicati per λ.

Il principio variazionale che ne segue dà luogo, secondo l'algoritmo ordinario, a 2 equazioni differenziali in w e φ, con specifiche condizioni agli estremi.

Dette equazioni ammettono soluzioni non nulle, soddisfacenti agli estremi quelle tra le condizioni che corrispondono ai vincoli, solo in corrispondenza ad una serie discreta, cosidetta *spettro*, di valori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$; di λ chiamati *autovalori*. Interesse ha naturalmente il più piccolo tra tutti, cioè λ_1, quando lo spettro sia ordinato in serie crescente. Ma passiamo ad esplicitare il nostro principio: l'energia elastica di deformazione dell'asta vale

$$\frac{1}{2}\int_0^L (EI_2\, w''^2 + G\Theta\varphi'^2)\, dx. \tag{3}$$

Per i termini di 2° ordine del lavoro si ha:

Dovuto al momento flettente $M(x)$ dovuto ad S, un termine

$$\int_0^L M(x)\cdot\varphi\cdot w''\, dx. \tag{4}$$

Considerato infatti l'elemento dx tra le sezioni $x = \text{cost.}$ e $x + dx = \text{cost.}$, a w corrisponde una rotazione delle due facce $\Omega(x)$ e $\Omega(x + dx)$ data da

$$\frac{dx}{\rho} \cong w''\, dx.$$

La componente $M(x)\, tg\,\varphi$ di $M(x)$ fa quindi (per $tg\,\varphi \sim \varphi$) un lavoro $M\varphi\, w''\, dx$; segue la (4) c. d. d.

(7) Cfr. G. Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*. Vol. II, cap. VIII, n. 11, Zanichelli, Bologna, 1940.

Dovuto ad $N(x)$:

$$\frac{1}{2}\int_0^L N(x)\, w'^2\, dx \tag{5}$$

come è ben noto.

Per quanto riguarda le azioni aerodinamiche, il contributo δL, di 2° ordine, è dato da

$$\delta L = -\lambda \int_0^L \{(\Gamma_p \varphi)\, \delta w + (\Gamma_m \varphi)\, \delta\varphi\}\, dx. \tag{6}$$

Si ha quindi in definitiva

$$\delta\mathfrak{E}^* = \delta \int_0^L \left\{ \frac{1}{2}(R_2 w''^2 + B\varphi'^2) + \lambda M(x)\varphi w'' - \right. \tag{7}$$

$$\left. -\lambda N(x) w'^2 \right\} dx + \int_0^L \left\{ \Gamma_p \lambda \varphi \delta w + \Gamma_M \lambda \varphi \delta\varphi \right\} dx = 0.$$

L'algoritmo ordinario porge le 2 equazioni

$$\begin{cases} (R_2 w'')'' + \lambda[(M\varphi)'' + (Nw')'] + \Gamma_p \lambda\varphi = 0, \\ -(B\varphi')' + \lambda M w'' + \Gamma_m \lambda\varphi = 0 \end{cases} \tag{8}$$

con la condizione che sia gli estremi,

$$-[\lambda(M\varphi)' + (R_2 w'')' + \lambda N w']\, \delta w + [R_2 w'' + \lambda M\varphi]\, \delta w' + (B\varphi')\delta\varphi = 0. \tag{8 a}$$

Le effettive condizioni ai vincoli sono:

Per l'incastro alla base $(x = L)$,

$$\delta w = 0 \quad , \quad \delta w' = 0 \quad , \quad \delta\varphi = 0$$

e la (8 *a*) risulta soddisfatta.

Per l'estremo libero $(x = 0)$, esprimendo:

a) l'eguaglianza del taglio $-(EI_2 w'')'$ alle forze secondo π_2,

$$\lambda(M\varphi)' + (EI_2 w'')' + \lambda N w' = 0,$$

b) l'eguaglianza del momento interno $-EI_2 w''$ a $M_0\varphi$,

$$\lambda M_0 \cdot \varphi + EI_2 w'' = 0,$$

c) infine, per l'assenza di momenti torcenti,

$$B\varphi' = 0,$$

si hanno condizioni che soddisfano la (8 *a*) come naturalmente deve essere.

Anzichè affrontare le (8), seguendo il *metodo diretto* del Ritz rifacciamoci al principio (7) e consideriamo note la w e φ, *a meno* di un incognito fattore A per la w, C per la φ, identificandole con funzioni soddisfacenti alle condizioni ai vincoli.

Poniamo precisamente, contando x dall'estremo libero,

$$w = A\left(1 - \sin\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad , \quad \varphi = C\cos\frac{\pi}{2}\xi \quad ; \quad \xi = \frac{x}{L}.$$

Per $M(0) = 0$ e per $R_2 = \text{cost.}$, $B = \text{cost.}$ le $(8\,a)$ sono effettivamente soddisfatte.

È, corrispondentemente ad uno sforzo S in testa,

$$M(x) = SL\,\xi, \tag{9}$$

ma porremo, piuttosto, a tutto favore della stabilità,

$$M(x) = SL\,\sin\frac{\pi}{2}\xi. \tag{9\,a}$$

Esprimendo la condizione di stazionarietà rispetto alle 2 variabili indipendenti A e C risultano 2 equazioni lineari omogenee in A e C. Soluzioni non nulle si hanno per l'annullarsi del discriminante. Risulta, per valori costanti di EI_2, $G\Theta$, Γ_p, Γ_m, l'equazione in λ, prima annunciata,

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^2}{4}\frac{EI_2}{L^2} - \lambda N & , & \frac{4}{3\pi}L\cdot\lambda S + \frac{8}{\pi^3}\Gamma_p L^3\lambda \\ \frac{4}{3\pi}L\cdot\lambda S & , & G\Theta + \frac{4}{\pi^2}\Gamma_m L^2\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Da questa si ha immediatamente λ_1. Ove le w e φ fossero sviluppate in serie di funzioni con n coefficenti incogniti $A_1, A_2, \cdots$; $C_1, C_2, \cdots$; in luogo di A e C la (10) risulta di grado $2n$ in λ. Risultano autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$; sulla convergenza dei quali (per $n \to \infty$) verso lo spettro critico non è il caso di soffermarsi. Conviene piuttosto considerare subito i casi particolari di Eulero, Prandtl e Reissner onde provare con i confronti la bontà della scelta per w e φ.

Caso di Eulero: $S = V = 0$, $N \neq 0$. Si ha

$$\lambda' N = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI_2}{L^2}. \tag{10\,a}$$

Caso di Prandtl: $N = V = 0$, $S \neq 0$. Si ha

$$\lambda'' S = 3{,}68\frac{\sqrt{EI_2\cdot G\Theta}}{L^2}. \tag{10\,b}$$

Caso di Reissner: $S = N = 0$, $V \neq 0$. Si ha

$$\sqrt{\lambda'''}\,V = \frac{\pi}{(2l)\cdot(2L)}\sqrt{\frac{G\Theta}{-C_{me}\cdot\rho}}. \tag{10\,c}$$

Le (10 *a*) e (10 *c*) coincidono con formole notissime. Per la (10 *b*) si ha in rigore, per $M = SL\xi$,

$$\lambda'' S = 4{,}012 \frac{\sqrt{EI_2 \cdot G\Theta}}{L^2}.$$

Il metodo, per sua natura, dovrebbe dare, come si sa dal Calcolo, un valore superiore. Ma la (10 *b*) è invece per difetto; ciò dipende dal fatto che si è assunta la distribuzione di momenti (9 *a*) ovunque eccedente rispetto alla effettiva (9), $\left(\text{si ha infatti per } \xi \leq 1 \text{ , } SL\xi < SL \sin \frac{\pi}{2}\xi\right)$.

Nel caso delle torri piloni di cui si accennò, risulta $\lambda \cong 6{,}00$, quindi una grande sicurezza all'instabilità. Naturalmente valori elevati di $\lambda S, \lambda N, \lambda V^2$ portano fuori dal campo elastico. Occorre allora analizzare ciò che avviene tenendo conto della plasticizzazione, proprio così come si fa per una colonna caricata di punta quando il carico di Eulero perde significato per i bassi rapporti $L : i$ (i = raggio di inerzia di Ω) come avviene nel caso specifico. Si rilevi che conviene in generale tener fisso $V = V_0$ ed applicare il moltiplicatore λ ad S ed N solamente.

Il problema va considerato agli inizi, poichè manca addirittura la trattazione nel campo plastico del caso elementare di Prandtl–Michell e per quello di Reissner. A questi mi riprometto di poter dedicare un'altra Nota che potrebbe avere interesse anche nel campo aeronautico per quanto riguarda la valutazione dei *gradi di sicurezza* effettivi, non solo nel campo elastico ma anche in quello plastico, di questa associazione di tre fondamentali casi di instabilità.

Meccanica. — *Vibrazioni e pressioni critiche delle piastre anulari soggette a pressione radiale* [1]. Nota di G. Grioli, presentata [2] dal Socio M. Picone.

Esporrò risultati conseguiti nello studio delle vibrazioni trasversali e delle pressioni critiche di una piastra anulare soggetta a pressione radiale e contenuti in tre Note in corso di stampa.

Nel caso delle piastre anulari le vibrazioni sincrone si esprimono assegnando allo spostamento elastico una espressione del tipo

$$(1) \qquad w_{ns}(\rho, \vartheta, t) = u_{ns}(\rho)\, e^{in\vartheta} \cos \omega_{ns}(t - t^*_{ns}),$$

ove ρ, ϑ, indicano coordinate polari nel piano α della sezione media della piastra con il polo nel centro O, t la variabile tempo, ω_{ns} le costanti di frequenza e t^*_{ns} delle costanti di fase. Se f_{ns} indicano le autofrequenze della

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.
(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

struttura vibrante, μ e N la densità superficiale e la rigidità flessionale della piastra, supposte costanti, la quantità

$$\sigma_{ns} = 4\pi^2 \frac{\mu}{N} f_{ns}^2 = \frac{\mu}{N} \omega_{ns}^2 \tag{2}$$

coincide con un autovalore del problema al contorno che traduce analiticamente quello delle vibrazioni della piastra, mentre $w_{ns}(\rho, \vartheta; t)$ è un autosoluzione competente a detto autovalore. Se sui bordi esterno ed interno della piastra agiscono, nel piano ed in direzione radiale, le pressioni uniformi p_e, p_i rispettivamente, gli autovalori σ_{ns} risultano funzioni dei parametri p_e, p_i.

Per lo studio delle oscillazioni della piastra intorno alla sua posizione di equilibrio interessa quindi la ricerca degli autovalori σ_{ns} reali e positivi.

La dimostrazione dell'esistenza degli autovalori σ_{ns} si riconnette nel caso d'incastro su entrambi i bordi della piastra alle ricerche di Cimino [3] e Giunti [4] sulle equazioni differenziali ordinarie di forma autoaggiunta, ricerche riprese successivamente da Kamke [5] ed estese a tipi più generali di condizioni al contorno.

Con lo scopo di liberarmi da alcune ipotesi restrittive contenute nei lavori dei citati autori e invece non sempre soddisfatte nei casi da me considerati, ho fatto ricorso alla teoria delle equazioni integrali [6] per stabilire che – tanto per le piastre anulari, come per quelle piene – tali autovalori effettivamente esistono e sono tutti reali almeno quando è soddisfatta una certa condizione chiamata *condizione* S (Nota I).

Detti r, R i raggi del bordo interno e di quello esterno della piastra, e supposti i carichi p_e, p_i positivi quando trattasi di effettive pressioni, la *condizione* S si enuncia:

Condizione sufficiente [7] *per l'esistenza di autovalori reali* σ_{ns} *nel problema delle vibrazioni trasversali della piastra anulare sollecitata radialmente è che*

(3) Cimmino, *Autovalori e autosoluzioni nelle equazioni differenziali lineari autoaggiunte di ordine superiore.* « Mathematische Zeitschrift », *32* (1940).

(4) Giunti, *Sviluppi in serie tipo Fourier di un vettore, secondo autovettori di un certo problema, e applicazione all'integrazione dell'equazione lineare a derivate parziali del 4° ordine competente al moto delle sbarre vibranti, dotate d'inerzia rotatoria.* « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », LXIII, 1940-41.

(5) Kamke, *Ueber die definiten selbstadiungierten Eigenwertaufgaben bei gewonlichen linearen Differentialgleichungen.* « Mathematische Zeitschrift », *45*, 1939, p. 759; *46*, 1940, p. 251, p. 231.

(6) M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore.* Rondinella, Napoli 1940.

(7) Per operatori del quarto ordine del tipo

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\left\{\eta(\rho)\frac{d^2}{d\rho^2}\right\} + \eta(\rho),$$

risultato analogo è già ottenuto: M. Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine.* « Annali della Scuola normale Superiore di Pisa », vol. XI, p. 132.

per il prefissato n e per ogni coppia di funzioni $\varphi_n(\rho)$, $\psi_n(\rho)$ verificanti le medesime condizioni al contorno a cui soddisfano le $u_{ns}(\rho)$ in virtù dei vincoli, sia verificata l'uguaglianza

$$\left\{\rho\{\varphi_n\psi_n'''-\psi_n\varphi_n'''+\varphi_n''\psi_n'-\varphi_n'\psi_n''\}+\varphi_n\psi_n''-\psi_n\varphi_n''+\frac{1+2n^2}{\rho}(\varphi_n'\psi_n-\psi_n'\varphi_n)-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho}{N}\frac{1}{R^2-r^2}\left\{\frac{r^2R^2}{\rho}(p_e-p_i)+r^2p_i-R^2p_e\right\}(\varphi_n\psi_n'-\varphi_n'\psi_n)\right\}\Bigg|_r^R=0,$$

ove gli apici denotano derivazione rispetto a ρ.

Tale condizione sufficiente di esistenza e realità è collegata direttamente al teorema di reciprocità in Meccanica attraverso considerazioni di simmetria della funzione d'influenza della piastra. Precisamente la condizione S non rappresenta altro che la traduzione analitica del teorema di reciprocità (Nota I).

Il problema delle vibrazioni della piastra in presenza di sollecitazione radiale è collegato a quello delle pressioni critiche. Detto λ^* un comune fattore moltiplicativo dei carichi p_e, p_i le pressioni critiche corrispondono agli autovalori λ_{ns} del parametro

$$\lambda=\frac{\lambda^*}{N}$$

del problema statico che viene ad essere espresso dallo stesso sistema differenziale che regola le vibrazioni della piastra quando si ponga uguale a zero il parametro σ di cui i σ_{ns} sono autovalori. L'esistenza degli autovalori λ_{ns} nei casi vincolari più comuni e in cui il parametro λ non interviene nelle condizioni al contorno [ad esempio: appoggio rigido, incastro rigido] è assicurata dalle ricerche dei citati Autori.

Se i carichi p_e, p_i verificano una delle due coppie di disuguaglianze

$$\text{(I)}\qquad p_e<0\quad,\quad p_i=0,$$

$$\text{(II)}\qquad\begin{cases}p_e\leq\dfrac{R^2+r^2}{2R^2}p_i\quad,\quad p_i<0,\quad \text{se}\quad n\neq 0,\\ p_e\leq 0\quad,\quad p_i<0;\quad \text{se}\quad n=0,\end{cases}$$

si può dimostrare (Nota I) che la configurazione indeformata della piastra è di equilibrio stabile e i $\sigma_{ns}(\lambda)$ risultano tutti positivi, mentre se i carichi verificano le disuguaglianze opposte a quelle espresse da (I), (II) la configurazione piana di equilibrio può essere instabile.

Con riferimento alle condizioni di vincolo più frequenti oppure al caso di assenza di vincolo le curve $\sigma=\sigma_{ns}(\lambda)$ di autofrequenza godono della seguente *proprietà* A (Nota I):

Per ciascun n, considerata la successione

$$\sigma_{n1}(\lambda)\leq\sigma_{n2}(\lambda)\leq\cdots\leq\sigma_{ns}(\lambda)\leq\cdots$$

degli autovalori $\sigma_{ns}(\lambda)$, *la funzione* $\sigma = \sigma_{ns}(\lambda)$ *ha derivata rispetto a* λ *sempre negativa e si annulla per* $\lambda = \lambda_{ns}$ [suppongo anche i λ_{ns} non decrescenti al crescere di s].

Così degli autovalori del parametro σ, *corrispondenti ad un prefissato* λ:

1° $s - 1$ *e soltanto* $s - 1$ *sono negativi, uno nullo e gli altri positivi per* $\lambda = \lambda_{ns}$;

2° *s e soltanto s sono negativi e gli altri tutti positivi per* $\lambda_{ns} < \lambda < \lambda_{ns+1}$;

3° *tutti sono positivi per* $\lambda < \lambda_{n1}$.

In corrispondenza allo spostamento elastico $u_{ns}(\rho) \cos n\theta$, ove si pensino normalizzate le autosoluzioni $u_{ns}(\rho)$, si ha in più (Nota I):

a) *la derivata* $\frac{d\sigma_{ns}}{d\lambda}$ [a meno del fattore $-\frac{1}{\pi}$ se $n \neq 0$, $-\frac{1}{2\pi}$ se $n = 0$] *esprime il lavoro effettuato in corrispondenza ai termini quadratici delle caratteristiche di deformazione dagli sforzi che si generano nella piastra quando si pensi alla sollecitazione esterna corrispondente a* $\lambda^* = 1$;

b) *l'energia potenziale elastica di deformazione e il lavoro effettuato in corrispondenza ai termini quadratici delle caratteristiche di deformazione dalla sollecitazione esterna* (p_e, p_i) *non variano al variare di* $u_{ns}(\rho)$ *nel sistema delle autosoluzioni competenti all'autovalore* σ_{ns}.

Facendo richiamo alla teoria classica della piastra elastica sottile si possono svolgere alcune considerazioni atte ad illustrare le azioni di un vincolo *concentrato* nel centro di una piastra circolare soggetta al carico uniforme p^* agente radialmente e la sua influenza sulle frequenze proprie e sulle pressioni critiche. Dirò subito che alla locuzione *vincolo concentrato* si dà – in accordo con il significato attribuito da vari Autori [8] – il significato di vincolo tradotto analiticamente da condizioni valide solo in un punto per lo spostamento elastico e per le sue derivate. Tuttavia osservo (Nota II) che affinchè la definizione di piastra con vincolo concentrato abbia significato, occorre qualche volta pensare quest'ultima come limite di un sistema materiale opportunamente definito. Così la piastra incastrata nel centro – perchè la sua definizione abbia un significato concreto – va definita come limite del sistema materiale costituito dalla piastra anulare incastrata sul bordo interno, al tendere a zero del raggio del foro [9]. Lo stesso non può dirsi per la piastra appoggiata o libera nel centro. Nel

(8) Cfr. ad esempio, NÁDAI, *Elastischen Platten*, pp. 194, 256; G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, parte seconda, p. 374; SOUTHWELL, *On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre and on the effects of rotations*. « Proc. Roy. Soc. London » (A), vol. 101, 1922, p. 133.

(9) Quantunque tale osservazione non sia esplicitamente fatta, pure essa in sostanza è applicata in SOUTHWELL, op. cit., nota (8), che tratta soltanto il caso in cui il bordo della piastra sia esente da vincolo e non soggetto a pressione radiale. In base alle formule ivi stabilite vengono riportati valori numerici delle autofrequenze in « Handbuch der Physik », vol. VI e in KRALL, op. cit., nota (8).

primo caso infatti due particelle vicinissime al centro ma situate da bande opposte su di uno stesso diametro, a causa dell'incastro non esercitano direttamente l'una sopra l'altra alcuna reciproca influenza, nel secondo invece le due particelle esercitano l'una sull'altra delle azioni che occorre tradurre analiticamente e che non trovano riscontro nel caso della piastra forata. Accade, cioè, qualcosa di analogo a quello che avviene nelle travi: un incastro intermedio divide la trave in due parti che si comportano in modo del tutto indipendente l'una dell'altra, mentre un appoggio, lasciando trasmettere inalterato il momento flettente dall'una all'altra delle due parti in cui divide la trave, permette reciproche azioni tra le due parti. Di conseguenza lo spostamento elastico dei punti della sezione media della piastra incastrata nel centro e ogni funzione di esso e delle sue derivate, si dovranno valutare quali limiti degli elementi corrispondenti nel caso della piastra anulare incastrata sul bordo interno, al tendere a zero del raggio del foro. Un tale modo di procedere per la piastra incastrata nel centro non ha tuttavia alcuna influenza nella determinazione delle autofrequenze e delle pressioni critiche, tranne, però, in corrispondenza alle soluzioni d'indice $n = 1$ per le quali, altrimenti, operando come nei casi della piastra libera o appoggiata nel centro non si troverebbero autovalori, e influisce invece sui valori limiti degli sforzi [10] nel centro. Ad illustrare meglio l'opportunità del punto di vista qui esposto concorre il fatto che se nello studio della piastra incastrata nel centro si segue la via analoga a quella seguìta nei casi della piastra appoggiata o libera nel centro, si presenta l'impossibilità di risolvere un problema semplicissimo: la determinazione della flessione della piastra circolare incastrata nel centro, soggetta al carico ortogonale al suo piano medio e di intensità proporzionale alla sua distanza da un diametro della sezione media della piastra (Nota II).

Se si pensa ai due tipi di soluzioni semplici

$$(1')\quad \begin{cases} U_{ns}(\rho, \vartheta; t) = u_{ns}(\rho) \cos n\theta \cos \omega_{ns}(t - t^*_{ns}), & (n = 0, 1, 2, \cdots), \\ & (s = 1, 2, \cdots), \\ V_{ns}(\rho, \vartheta; t) = v_{ns}(\rho) \operatorname{sen} n\theta \cos \omega_{ns}(t - t^*_{ns}), & (n = 1, 2, \cdots), \end{cases}$$

in cui si traduce evidentemente l'espressione (1) dello spostamento elastico, esaminando i tipi più comuni di costrizione vincolare, e cioè quello di appoggio e incastro rigidi nel centro, verrà fatto di notare che – in corrispondenza ad ognuna delle soluzioni semplici (1') – i sistemi di reazioni esercitati in entrambi i casi sono staticamente uguali, riducendosi essi a zero per tutte le soluzioni semplici (1') ad eccezione fatta della $U_{0s}(\rho, \vartheta; t)$ per la quale il sistema delle reazioni esplicate dal vincolo, sia esso di

(10) Mi riferisco – come è consuetudine nello studio di simili problemi – ai risultanti ed ai momenti risultanti degli ordinari sforzi agenti lungo l'intero spessore di una sezione ortogonale al piano medio della piastra con riferimento all'unità di lunghezza di sezione. Vedi Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, cap. XXII.

appoggio o di incastro rigido, è riducibile ad un unica forza con assenza di coppie (Nota II). Tale fatto, che si verifica qualunque siano le condizioni di vincolo presenti sul bordo della piastra non è prevedibile, per ciò che concerne le soluzioni semplici $U_{1s}(\rho, \vartheta; t)$, $V_{1s}(\rho, \vartheta; t)$, in base alla semplice intuizione, se si tien conto che – detta α' la superficie secondo cui la sezione media della piastra si deforma – il piano tangente ad α' nel punto corrispondente al centro della piastra si trova ruotato rispetto ad α nel caso dell'appoggio, mentre non deve esserlo nel caso dell'incastro. Il vincolo d'incastro ha quindi una effettiva funzione *raddrizzatrice* quando si considerino le soluzioni semplici $U_{1s}(\rho, \vartheta; t)$, $V_{1s}(\rho, \vartheta; t)$. Dal punto di vista statico si constata (Nota II), esaminando i limiti a cui tendono gli sforzi quando ci si avvicini al centro, che funzione dell'incastro – per la speciale sollecitazione supposta – è unicamente quella di alterare tali limiti rispetto a ciò che si ha nel caso dell'appoggio, in corrispondenza ad alcune soluzioni semplici (1'), ed è ciò che diversifica i due tipi di vincolo. Si osserva precisamente che soltanto in corrispondenza ai valori 1, 2, 3, dell'indice n nelle (1'), gli sforzi, quando ci si avvicini al centro della piastra, presentano un comportamento differente, tendendo a valori finiti nel caso dell'appoggio, ad infinito o a valori finiti diversi dai primi in quello dell'incastro. Sempre con riferimento alla piastra vincolata nel centro e soggetta a pressione uniforme sul bordo si può osservare (Nota II):

I) *Del sistema di reazioni offerte dal vincolo concentrato nel centro il risultante dipende esclusivamente dalla soluzione semplice* $U_{0s}(\rho, \vartheta; t)$, *il momento risultante da* $U_{1s}(\rho, \vartheta; t)$ *e* $V_{1s}(\rho, \vartheta; t)$.

II) *La modificazione del tipo di vincolo concentrato nel centro della piastra non altera mai, a partire dalle soluzioni semplici di indice* $n = 2$, *le autofrequenze nè le pressioni critiche.*

III) *Il mutarsi del vincolo di appoggio in quello d'incastro non altera le autofrequenze nè le pressioni critiche corrispondenti alle soluzioni semplici di indici* 0, 1, *che differiscono da quelle relative ad assenza di vincolo nel centro soltanto per le soluzioni semplici di indice* $n = 0$.

Nel problema delle vibrazioni trasversali di una trave semplicemente appoggiata soggetta a pressione assiale è nota una formula semplice che lega le autofrequenze alla pressione applicata [11]. Dato l'interesse che la questione presenta mi sembra conveniente presentare un'analoga formula per le piastre anulari e questa ho potuto stabilire (Nota III) qualunque siano le condizioni di vincolo presenti sui bordi, purchè nella loro traduzione analitica non intervengano i parametri caratteristici della sollecitazione radiale, [così resta escluso il caso di assenza di vincolo mentre non lo sono quelli d'incastro o appoggio]. La formula stabilita costituisce una soluzione

(11) G. KRALL, loc. cit., nota (8) p. 313.

di prima approssimazione del problema al contorno traducente quello meccanico, problema al contorno il quale – è bene osservarlo – non sempre si può integrare per funzioni note. Ad esempio, se le pressioni agenti sui due bordi della piastra non sono uguali il sistema differenziale in cui ci si imbatte non è integrabile per funzioni di Bessel [come invece avviene se le pressioni sono uguali] ed è proprio necessario ricorrere ad un metodo di successive approssimazioni per sviluppo in serie onde conseguirne l'integrazione. Detto q il rapporto tra i raggi interno ed esterno della piastra, siano per un prefissato n, $f_n^{(1)}(\lambda\,;q)$ e $\lambda_n^{(1)}(q)$ i valori di prima approssimazione di un'autofrequenza e dell'autovalore di λ zero della $\sigma_{ns}(\lambda)$ corrispondente [in base a (2)] a quell'autofrequenza. La formula di dipendenza di $f_n^{(1)}(\lambda\,;q)$ da λ è

$$(3)\qquad f_n^{(1)}(\lambda\,;q) = f_n^{(1)}(0\,;q)\sqrt{1-\frac{\lambda}{\lambda_n^{(1)}(q)}}\,;\qquad \lambda \leq \lambda_n^{(1)}(q)\,.$$

In vari casi concreti si è constatato [12] che il procedimento seguito per ricavare $f_n^{(1)}(\lambda\,;q)$ [più precisamente $\sigma_n^{(1)}(\lambda\,;q)$ da cui $f_n^{(1)}(\lambda\,;q)$ dipende] porta ad approssimare proprio l'autofrequenza più bassa nel senso che – pensate ordinate le autofrequenze $f_{ns}(\lambda\,;q)$ in ordine crescente al crescere di s – il valore assoluto della differenza

$$f_{ns}(\lambda\,;q) - f_n^{(\ )}(\lambda\,;q)$$

al variare di s nella successione $\{1, 2, \cdots\}$ risulta minimo per $s = 1$.

Un esempio numerico (Nota III) mostra che la formula (3) può fornire nei casi concreti un'ottima approssimazione dell'autofrequenza più bassa.

Meccanica. — *Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite.* Nota II di C. Tolotti, presentata [1] dal Corrisp. A. Signorini.

Conformemente a quanto preannunciato nell'introduzione alla Nota I, nella presente – riprendendo le notazioni e proseguendo la numerazione di detta Nota – conduco a termine la scrittura delle equazioni che, nei problemi d'equilibrio di lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite, vengono a sostituire le classiche equazioni di Beltrami della Statica delle superficie perfettamente flessibili ed inestendibili.

(12) G. Krall, op. cit., nota (8) parte I, p. 371; T. Viola, *Calcolo approssimato di autovalori.* «Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni», ser. V, vol. II, fasc. I, marzo 1941.

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

4. Dirò $\mathbf{R}dS'$ il risultante delle forze esterne alla lastra agenti sulla fibra delimitata dalle normali ad S condotte lungo il contorno dell'areola dS corrispondente a dS'.

La prima equazione cardinale della Statica applicata alla suddetta fibra si scrive [2]

$$\text{grad}_{Q'}\,\lambda = \mathbf{R}, \tag{21}$$

ossia, posto $R_r = \boldsymbol{i}_r \times \mathbf{R}$ $(r = 1, 2, 3)$ [3],

$$\begin{cases} \text{div}_{Q'}(K\lambda \boldsymbol{i}_1) - K\omega \boldsymbol{i}_3 \times K\lambda \boldsymbol{i}_2 + K\omega \boldsymbol{i}_2 \times K\lambda \boldsymbol{i}_3 = R_1 \\ \text{div}_{Q'}(K\lambda \boldsymbol{i}_2) + K\omega \boldsymbol{i}_3 \times K\lambda \boldsymbol{i}_1 - K\omega \boldsymbol{i}_1 \times K\lambda \boldsymbol{i}_3 = R_2 \\ \text{div}_{Q'}(K\lambda \boldsymbol{i}_3) + K\omega \boldsymbol{i}_1 \times K\lambda \boldsymbol{i}_2 - K\omega \boldsymbol{i}_2 \times K\lambda \boldsymbol{i}_1 = R_3. \end{cases} \tag{22}$$

Eliminando dalle (22) il vettore $K\lambda \boldsymbol{i}_3$ per mezzo della (20), si ha poi

$$\begin{cases} \text{div}_{Q'}(K\lambda \boldsymbol{i}_1) - K\omega \boldsymbol{i}_3 \times K\lambda \boldsymbol{i}_2 = R_1 + \\ \qquad + K\omega \boldsymbol{i}_2 \times \eta^{-1}[\mathbf{N} - BR\eta\, \text{grad}_{Q'}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)] \\ \text{div}_{Q'}(K\lambda \boldsymbol{i}_2) + K\omega \boldsymbol{i}_3 \times K\lambda \boldsymbol{i}_1 = R_2 - \\ \qquad - K\omega \boldsymbol{i}_1 \times \eta^{-1}[\mathbf{N} - BR\eta\, \text{grad}_{Q'}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)] \\ K\omega \boldsymbol{i}_1 \times K\lambda \boldsymbol{i}_2 - K\omega \boldsymbol{i}_2 \times K\lambda \boldsymbol{i}_1 = R_3 + \\ \qquad + \text{div}_{Q'}\{\eta^{-1}[\mathbf{N} - BR\eta\, \text{grad}_{Q'}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)]\}. \end{cases} \tag{23}$$

Nel caso $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, essendo

$$\xi_{11} = A_1 \quad , \quad \xi_{22} = A_2 \quad , \quad \xi_{21} = \xi_{12} = 0, \tag{24}$$

le (23), posto $N_r = \boldsymbol{i}_r \times \mathbf{N}$ $(r = 1, 2, 3)$, si possono anche scrivere

$$\begin{cases} \sum_1^2{}_s \left(\dfrac{\partial \lambda_{1s}}{\partial q_s} - p_{3s}\lambda_{2s}\right) = R_1 + \sum_1^2{}_s \dfrac{p_{2s}}{A_s} N_s - \\ \qquad - BA_1A_2 \sum_1^2{}_s \dfrac{p_{2s}}{A_s^2} \dfrac{\partial}{\partial q_s}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*) \\ \sum_1^2{}_s \left(\dfrac{\partial \lambda_{2s}}{\partial q_s} + p_{3s}\lambda_{1s}\right) = R_2 - \sum_1^2{}_s \dfrac{p_{1s}}{A_s} N_s + \\ \qquad + BA_1A_2 \sum_1^2{}_s \dfrac{p_{1s}}{A_s^2} \dfrac{\partial}{\partial q_s}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*) \\ \sum_1^2{}_s (p_{1s}\lambda_{2s} - p_{2s}\lambda_{1s}) = R_3 + \sum_1^2{}_s \dfrac{\partial}{\partial q_s}\left(\dfrac{1}{A_s} N_s\right) - \\ \qquad - B \sum_1^2{}_s \dfrac{\partial}{\partial q_s}\left[\dfrac{A_1A_2}{A_s^2} \dfrac{\partial}{\partial q_s}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_*)\right]. \end{cases} \tag{25}$$

(2) Cfr. loc. cit. I, (11).
(3) Cfr. la nota I, (13).

Ponendo nelle (25) $B = 0$, $N = 0$, esse si riducono, come naturale, alle classiche equazioni di Beltrami della Statica delle superficie flessibili ed inestendibili.

5. Alle equazioni (23) va ancora aggiunta quella che si ottiene moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{i}_3$ l'equazione (12) dei momenti.

Per esplicitare tale equazione comincerò coll'osservare che è, stante (4), [4]

$$\boldsymbol{i}_3 \times \operatorname{grad}_{Q'} \mu = \sum_1^2{}_s (p_{1s}\, \mu_{2s} - p_{2s}\, \mu_{1s}), \tag{26}$$

ossia, tenendo conto di (8) e (15),

$$\boldsymbol{i}_3 \times \operatorname{grad}_{Q'} \mu = (1 - \varkappa)\, B \sum_1^2{}_r (p_{r1}\, p^*_{r2} - p^*_{r1}\, p_{r2}). \tag{27}$$

È d'altra parte [5]

$$2\, \boldsymbol{i}_3 \times \mathbf{V}(\lambda K \xi) = \sum_1^2{}_s (\xi_{1s}\, \lambda_{2s} - \xi_{2s}\, \lambda_{1s}). \tag{28}$$

Moltiplicando la (12) scalarmente per $\boldsymbol{i}_3$ si ottiene quindi, stante (11), (27), (28),

$$\sum_1^2{}_s (\xi_{2s}\, \lambda_{1s} - \xi_{1s}\, \lambda_{2s}) = (1 - \varkappa)\, B \sum_1^2{}_r (p_{r1}\, p^*_{r2} - p^*_{r1}\, p_{r2}). \tag{29}$$

Nel caso $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, la (29) diviene, per le (24),

$$A_2\, \lambda_{12} - A_1\, \lambda_{21} = (1 - \varkappa)\, B \sum_1^2{}_r (p_{r1}\, p^*_{r2} - p^*_{r1}\, p_{r2}). \tag{30}$$

Ove si supponga nulla la rigidità flessionale B della lastra, la (30) si riduce, come naturale, alla relazione di simmetria degli sforzi di taglio tangenti ad S:

$$A_2\, \lambda_{12} = A_1\, \lambda_{21} \tag{31}$$

È interessante chiedersi se la proprietà (31) possa continuare a sussistere anche per una lastra a rigidità flessionale $B \neq 0$.

A tale scopo osserverò che, se le linee coordinate sono linee di curvatura per S_* ed è $\psi = 0$, si ha, stante (10) e (15),

$$\sum_1^2{}_r (p_{r1}\, p^*_{r2} - p^*_{r1}\, p_{r2}) = \left(\frac{1}{\mathcal{R}^*_1} - \frac{1}{\mathcal{R}^*_2}\right) A_1\, p_{22}. \tag{32}$$

(4) Cfr. la nota I, (13).
(5) Cfr. la nota I, (14).

Ma tali linee coordinate costituiscono su S un doppio sistema di linee mutuamente ortogonali. Pertanto, indicati con $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ i raggi principali di curvatura di S [6] e con α l'angolo che le linee di curvatura di S formano [7] colle imagini su S delle linee di curvatura di S_*, si ha [8]

$$(33)\qquad \begin{cases} \dfrac{A_1}{\mathcal{R}_1} + p_{21} + \dfrac{A_1}{A_2} p_{22} \operatorname{tg} \alpha = 0 \\ \dfrac{A_1}{\mathcal{R}_2} + p_{21} - \dfrac{A_1}{A_2} p_{22} \operatorname{cotg} \alpha = 0. \end{cases}$$

Da (32), (33) segue

$$(34)\qquad \sum_1^2 {}_r (p_{r1} p^*_{r2} - p^*_{r1} p_{r2}) = A_1 A_2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\mathcal{R}^*_1} - \frac{1}{\mathcal{R}^*_2} \right) \left(\frac{1}{\mathcal{R}_2} - \frac{1}{\mathcal{R}_1} \right),$$

formola che, come è facile convincersi [9], vale anche se le linee coordinate non sono linee di curvatura per S_* ma costituiscono un arbitrario doppio sistema di linee mutuamente ortogonali [10].

Associando (34) a (30), è immediato concludere che, per $B \neq 0$, la (30) si riduce alla (31) solo se è

$$\mathcal{R}^*_1 = \mathcal{R}^*_2 \quad \text{o} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \quad \text{o} \quad \alpha = 0;$$

cioè se la superficie S_* od S è piana o sferica oppure se si corrispondono le linee di curvatura di S_* ed S.

Ricordando che per una superficie piana o sferica ogni linea è linea di curvatura, si può anche dire che la relazione di simmetria (31) sussiste in una lastra elastica soggetta a deformazioni pseudofinite solo se la deformazione della superficie media della lastra può confondersi con una flessione che conservi le linee di curvatura.

6. In conclusione, le equazioni indefinite della Statica isoterma delle lastre elastiche, soggette a deformazioni pseudofinite, risultano costituite dalle quattro equazioni (23) e (29) a cui vanno associate le tre equazioni di Gauss e Codazzi (14). Se le linee coordinate sono mutuamente ortogonali ed i relativi versori sono, su S, proprio i_1 ed i_2 $\left(\text{caso } \varphi = \frac{\pi}{2}, \psi = 0\right)$, le (23) e (29) possono venir sostituite da (25) e (30).

(6) Per il segno intenderò valida la convenzione analoga a quella della nota I, (7).

(7) Intenderò assunto come verso positivo delle rotazioni quello levogiro rispetto ad i_3.

(8) Cfr. loc. cit. I, (9), p. 397.

(9) Basta osservare che il primo membro di (34) non dipende, stante (27), nè dalla scelta delle coordinate nè da quella di ψ e che altrettanto può affermarsi per il secondo membro di (34), limitatamente a coordinate curvilinee ortogonali.

(10) Per rendere la (34) valida anche per coordinate curvilinee non ortogonali basta sostituire nel suo secondo membro $A_1 A_2$ con $A_1 A_2 \operatorname{sen} \varphi$.

Le altre equazioni di Codazzi, cioè la (15) e le (16), servono per eliminare da (23), (29) e (14) p_{31}, p_{32} e p_{11} o p_{22}. Nel caso $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$, esse precisamente dànno, stante (24),

$$A_2 p_{11} + A_1 p_{22} = 0 \tag{35}$$

$$p_{31} = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial q_2} \quad , \quad p_{32} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial q_1} . \tag{36}$$

Le (23), (29) e (14) costituiscono sette equazioni alle derivate parziali nei quattro sforzi $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{12}, \lambda_{21}$ e nelle tre componenti dello spostamento $Q_* Q$. Trattasi di equazioni che, negli sforzi, sono lineari e di ordine non superiore al primo, mentre, negli spostamenti, sono non lineari e di ordine non superiore al quarto. Di loro applicazioni concrete mi occuperò in altro lavoro.

Qui mi limiterò a segnalare che, se è $\mathbf{R} = \mathbf{M} = 0$ o, più in generale, se possono ritenersi note [11] le componenti di $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}$ secondo $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, le (23) vengono a dipendere dallo spostamento $Q_* Q$ solo pel tramite delle rotazioni $p_{11}, p_{22}, p_{12}, p_{21}$. Le (23), (29) e (14) possono quindi anche venir considerate come equazioni nei quattro sforzi $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{12}, \lambda_{21}$ e nelle tre rotazioni p_{12}, p_{21} e p_{11} o p_{22}. Il vantaggio di considerar quest'ultime in luogo degli spostamenti è che, rispetto ad esse, le (23), (29) e (14) risultano di ordine non superiore al secondo.

Per quanto riguarda poi le condizioni al contorno osserverò che, considerato un generico elemento dc, per Q, del contorno di S ed indicati con $\mathbf{R}_c\, dc'$, $\mathbf{M}_c\, dc'$ [12] il risultante ed il momento risultante, rispetto a Q, delle forze esterne agenti sull'elemento staccato sul bordo della lastra dalle normali ad S condotte per gli estremi di dc, si ha (cfr. n. 2)

$$\lambda \boldsymbol{n}' = \mathbf{R}_c \quad , \quad \mu \boldsymbol{n}' = \mathbf{M}_c . \tag{37}$$

Le (37), (20) e (8) consentono di determinare, per ogni soluzione delle equazioni indefinite (23), (29), (14), a quali sollecitazioni lungo il bordo della lastra essa corrisponda.

(11) Si pensi, ad esempio, al caso di una lastra soggetta a pressione idrostatica.

(12) Naturalmente con dc' indico l'elemento del contorno di S' che corrisponde a dc.

Astronomia. — *Un nuovo tipo di telescopio astronomico* [1]. Nota di A. Colacevich, presentata [2] dal Socio G. Abetti.

È noto che se su di uno specchio sferico incide un'onda piana, questa, dopo la riflessione, risulta affetta da aberrazione sferica e dà origine, nel fuoco dello specchio, ad una caustica le cui dimensioni si possono ottenere con semplici calcoli di ottica geometrica.

Stabiliamo per semplicità come asse principale dello specchio quello che passa per il centro di curvatura e per il punto di mezzo dello specchio sferico supposto a contorno circolare.

Consideriamo, invece dell'onda piana, dei raggi luminosi paralleli a tale asse principale ed uno di tali raggi incida sullo specchio sferico ad una quota h dall'asse principale. Dopo la riflessione esso taglia lo stesso asse in un punto F_h, fuoco di tutta la zona dello specchio che dista di h dall'asse. Si sa che per h tendente a zero si ha il cosidetto fuoco parassiale F_p il quale si trova a mezza via tra il centro di curvatura e lo specchio.

Al centro di curvatura dello specchio e normalmente all'asse principale si metta un diaframma circolare; se lo specchio è sufficientemente grande è evidente che il ragionamento fatto per l'asse principale vale pure, per motivi di simmetria, per qualunque altro asse. Ne consegue che la superficie immagine di oggetti all'infinito attraverso ad uno specchio sferico è una superficie sferica con centro di curvatura coincidente con quello dello specchio stesso. Le minime dimensioni dell'immagine di una sorgente puntiforme all'infinito risulta $t_m = d^3 : 64\,R^2$ essendo d il diametro dello specchio ed R il suo raggio di curvatura.

In genere, nei telescopi astronomici, accade che tali dimensioni sono superiori alle tolleranze ammesse. Per questo motivo si adottò lo specchio parabolico che, se otticamente perfetto, porta sull'asse alla figura di diffrazione detta centrica; cioè, dà la più piccola immagine possibile. Però detto specchio poco fuori dell'asse è affetto da notevole coma che riduce il campo angolare utile negli usuali telescopi astronomici ad una frazione talvolta molto piccola di grado.

Lo specchio sferico ha invece la caratteristica di avere un campo che per ragioni di simmetria è indefinito (a parte diaframmi e schermi essenziali che impongono limiti pratici da stabilirsi di volta in volta); è quindi utile cercare la possibilità di adoperare lo specchio sferico invece del parabolico. Occorre trovare perciò il modo di diminuire e se possibile annullare l'aberrazione sferica così che l'onda riflessa sia sferica: o, detto altrimenti, portare per quanto possibile in coincidenza i vari fuochi zonali F_h.

(1) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.
(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

La soluzione del problema è stata trovata da B. Schmidt dell'osservatorio di Bergedorf (Amburgo). Egli ha introdotto una lastra di correzione, che porta ora il suo nome, collocata normalmente all'asse principale dello specchio e passante per il suo centro di curvatura. Questa lastra ha, nel caso più semplice, una faccia piana e l'altra se ne scosta in modo che vi è un aumento di spessore Δs della lastra stessa pari a:

$$\Delta s = \frac{h^4 - 2\,kr^2\,h^2}{4\,(n-1)\,R^3}$$

dove r è il raggio della lastra, inferiore o al massimo uguale ad R, k un parametro che nei casi pratici varia tra zero ed uno ed n l'indice di rifrazione della lastra.

Questa lamina (tale infatti si può considerare dato che lo scostamento da una lamina a facce piane e parallele non supera in genere pochi micron) introduce sull'onda incidente un'aberrazione che viene poi esattamente compensata da quella introdotta dallo specchio, per modo che l'onda riflessa è in definitiva sferica. La teoria [3] prova e la pratica conferma che essa corregge bene anche fuori d'asse tanto l'aberrazione sferica che quella cromatica. Questo strumento detto « telescopio Schmidt » ha reso già notevoli servizi all'astronomia e, specie negli Stati Uniti, ha trovato larga diffusione. Si sono potuti realizzare strumenti con forzate aperture relative fino all'ordine di 1/0.5 quantunque quelle usate nella fotografia astronomica siano dell'ordine di 1/2-1/3, avendosi nel contempo notevoli aperture lineari.

La costruzione di questo telescopio richiede la lavorazione di una superficie asferica che non è comune nell'industria e perciò viene generalmente fatta con metodi speciali e piuttosto laboriosi [4].

Esiste una seconda soluzione del problema che elimina la faccia asferica e rende quindi lo strumento di più pratica realizzazione industriale. La teoria di questa nuova forma di telescopi è stata da me svolta fin dal luglio 1943 ma non pubblicata; fu soltanto comunicata in una delle conferenze tenute al Seminario di Arcetri. Recentemente ho avuto notizia che un ottico russo ha realizzato uno strumento che sembra, in base alle scarse notizie qui pervenute, di tipo simile. Ritengo perciò opportuno dare qui un breve sommario della teoria di questo telescopio che attualmente si cerca di realizzare in Arcetri.

Consideriamo (vedi figura) una lente a facce parallele e con centro coincidente con quello di curvatura dello specchio sferico, posta tra il centro stesso e lo specchio sferico; siano r_1 ed r_2 i raggi di curvatura delle due facce. Lo spessore della lente sarà costante e pari per definizione ad $e = r_1 - r_2$,

(3) A. Colacevich, *Teoria del telescopio di Schmidt*, « Ottica », 1942/1.

(4) A. Colacevich, *Costruzione di un telescopio Schmidt*. « Osservazioni e Memorie dell'Osservatorio di Arcetri », fasc. *61*, 1943.

esso dovrà essere per la sua natura fisica una quantità positiva. Si tracci un raggio che incida ad una quota h sulla prima faccia di tale lente; si vuol stabilire il valore del segmento CF_h che determina il punto in cui detto raggio interseca l'asse dello specchio che è parallelo alla direzione originaria del raggio, dopo che quest'ultimo ha attraversato la lente ed è stato riflesso dallo specchio. Indichiamo con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, gli angoli di incidenza del raggio sulle due facce della lente e sullo specchio; con φ'_1, φ'_2 gli angoli di rifrazione sulle due superfici della lente; si ha, applicando la legge di Cartesio sulla rifrazione e il teorema dei seni, le seguenti espressioni

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{h}{r_1} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{h}{nr_2} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{h}{r_3}$$

$$\operatorname{sen}\varphi'_1 = \frac{h}{nr_1} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi'_2 = \frac{h}{r_2}.$$

Si indichi con ω la deviazione subita dal raggio nel passare attraverso la lente; si vede subito che è

$$\omega = \varphi_1 - \varphi'_1 + \varphi_2 - \varphi'_2.$$

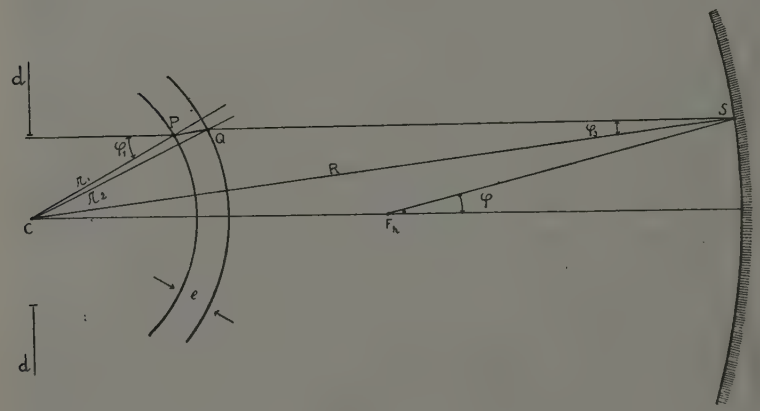


Fig. 1.

L'angolo φ con il quale il raggio taglia l'asse dello specchio è dato allora da

$$\varphi = 2\varphi_3 + \omega$$

mentre la distanza cercata CF_h risulta, applicando ancora il teorema dei seni

$$CF_h = \frac{h}{\operatorname{sen}(2\varphi_3 + \omega)}.$$

È evidente che CF_h dipende da h e quindi il fuoco F_h varia con h. Si tratta di vedere se sviluppando questa formula in serie di potenze di h

si possono, in particolari condizioni, annullare i primi coefficienti dello sviluppo in serie in modo che la variazione di CF_h con h sia trascurabile agli effetti pratici anche per discreti valori di h stesso. Si ricordi che è, arrestando gli sviluppi al 5° ordine:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$x = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{6} + \frac{3}{40}\operatorname{sen}^5 x .$$

Si trova, applicando queste formule al nostro caso:

$$\varphi = \left[\frac{2}{R} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right] + \left[\frac{2}{R^3} + \frac{n^3-1}{n^3}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)\right]\frac{h^3}{6} + \\ + \left[\frac{2}{R^5} + \frac{n^5-1}{n^5}\left(\frac{1}{r_1^5} - \frac{1}{r_2^5}\right)\right]\frac{3}{40}h^5$$

$$\frac{1}{CF_h} = A + Bh^2 + Ch^4$$

dove

$$= \frac{2}{R} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\left[\frac{2}{R^3} + \frac{n^3-1}{n^3}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)\right] - \left[\frac{2}{R} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right]^3\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{10}\left[\frac{2}{R^5} + \frac{n^5-1}{n^5}\left(\frac{1}{r_1^5} - \frac{1}{r_2^5}\right)\right] - \frac{1}{9}\left[\frac{2}{R} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right]^2\left[\frac{2}{R^3} + \frac{n^3-1}{n^3}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{30}\left[\frac{2}{R} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right]^5\right\}.$$

Se si pone h uguale a zero si trova $\frac{1}{CF_p} = \frac{1}{f}$, dove F_p indica al solito il fuoco parassiale; sarà perciò:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

restando inteso che f si conta dal centro di curvatura C e non dallo specchio.

Il coefficiente B contiene tre principali parametri r_1, r_2 ed R, dato che n, indice di rifrazione, ha poco effetto pratico per ciò che riguarda l'aberrazione sferica. Se assumiamo come unità di misura R, rimangono r_1 ed r_2. Possiamo sostituire ad r_2 lo spessore $e = r_1 - r_2$. Si tratta quindi di vedere se variando r_1, che indicheremo per semplicità con r, i valori

di e per cui B si annulla sono positivi. Ponendo B uguale a zero e riordinando si giunge all'equazione cubica in e.

$$pe^3 + qe^2 + se + t = 0$$

dove

$$p = -n(n-1) + 2nr(nr+n-1)^2$$
$$q = -(n^3-1) + 2nr^2(nr+n-1)^2 + 4n^2r^3(nr+n-1)$$
$$s = -(n^3-1) + 4n^2r^4(nr+n-1) + 2n^3r^5$$
$$t = 2n^3r^6.$$

Posto $n = 1.5$, le soluzioni dell'equazione portano a valori possibili, cioè spessori e positivi per r minore di 0.366. Le soluzioni positive sono due per r compreso tra 0.366 e 0.288, mentre se ne ha una sola per r minore di 0.288. Il valore di r può essere anche negativo, ciò significa che la lente volge all'oggetto la sua convessità. In pratica una sola soluzione è consigliabile e si hanno circa i valori $e = 0.1$ per $r = 0.35$, $e = 0.03$ per $r = 0.28$, $e = 0.01$ per $r = 0.23$ ed altri valori del genere per r negativo.

La ricerca dei valori per cui il coefficiente C dello sviluppo di $1/CF_b$ si annulla si fa ponendo la condizione preliminare che anche B sia nullo. Lo studio del coefficiente C è però di secondaria importanza dato che la ricerca conviene sia fatta praticamente in ogni singolo caso e per la preminenza che assume rispetto a detto coefficiente lo studio della cromatica residua.

Rimanendo nel campo della correzione dell'aberrazione sferica, si può quindi concludere che il problema ammette soluzioni varie verificate dal calcolo pratico e quindi è possibile la costruzione di un simile tipo di telescopio che rispetto a quello di Schmidt presenta fin d'ora, oltre al vantaggio delle facce sferiche, anche quello di un minore ingombro; difatti la lente può essere posta ad esempio a mezza via tra il fuoco e il centro di curvatura con una diminuzione di lunghezza di circa 1/4 rispetto allo Schmidt. Da un punto di vista fotometrico specialmente può convenire mettere un diaframma circolare al posto occupato dalla lastra di Schmidt, allo scopo di avere un ugual flusso di radiazione secondo i vari angoli di campo; il diaframma *dd* ha pure importanza per mantenere le aberrazioni sferiche secondo i detti angoli nelle stesse proporzioni.

Lo strumento ha anche una aberrazione cromatica che si calcola subito differenziando l'espressione di $1/f$ rispetto all'indice di rifrazione. Si trova facilmente:

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{dn}{n^2}.$$

Si è fatto un calcolo per il seguente caso pratico:

$R = 2000$ mm. , $r = 500$ mm. , $n = 1.50555$.

La soluzione dell'equazione cubica in e ha portato al valore $e = 28.4$ mm. Però per una migliore correzione dello strumento, fino ad $h = 200$ mm. (apertura lineare utile 400 mm., con focale di 1000 mm. e quindi apertura relativa 1/2.5) conviene ridurre lo spessore a 22 mm. per avere la migliore correzione della sferica complessiva. Le immagini che ne risultano hanno un diametro di 22 micron il che è un ottimo risultato. Tali dimensioni vengono però ampliate dalla cromatica; infatti per variazioni dell'indice usuali in un vetro borosilicato si ha tra la riga F e la C una aberrazione cromatica che porta ad un allargamento delle immagini fino a 60 micron di diametro. Questo valore può essere tollerato, ma rappresenta un limite che non dovrebbe essere sorpassato. Naturalmente per strumenti con focale minore la cromatica risulta proporzionalmente ridotta, come pure si riduce per valori di r inferiori a quello stabilito. Nel caso che lo strumento venga adoperato visualmente, la cromatica si può compensare con un residuo di cromatica di segno opposto introdotto negli oculari.

Dato però che lo strumento è ideato essenzialmente per l'uso fotografico, bisogna, nel caso che occorra, compensare altrimenti la aberrazione cromatica. Ciò si può fare in due modi. Il primo è quello usuale in ottica, cioè adottando una lente compensata cromaticamente come si fa per gli usuali doppietti.

Il secondo consiste nell'introduzione di un'altra lente il cui potere compensi esattamente quella della lente a facce parallele. Questa è una lente negativa il cui potere è:

$$P = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

La nuova lente va posta in luogo del diaframma di cui s'è parlato. Il sistema di queste due lenti ha potere complessivo nullo ed il loro accoppiamento porta ad un sistema perfettamente acromatico se esse sono fatte della stessa qualità di vetro ottico. La lente positiva può essere scelta in modo che il coma introdotto sia minimo; in ogni modo essa, dato il suo piccolo potere, non introduce aberrazioni sensibili per suo conto.

In conclusione, il calcolo teorico e numerico prova come nel modo accennato si possa progettare uno strumento ottico a grande campo ottimamente corretto per la sferica e con cromatica di un ordine tollerabile; questa può venire del tutto corretta con l'aggiunta di una lente. Lo strumento può essere realizzato per ottenere i suddetti risultati con apertura di 400 mm. e rapporto di apertura 1/2.5. L'apertura lineare può essere aumentata anche a 500 mm. raggiungendo un rapporto di 1/2. Prendendo queste condizioni quali limiti, si può affermare la praticità di simili strumenti per focali ed aperture lineari inferiori, praticità che lo rendono preferibile al telescopio tipo Schmidt di cui gode una gran parte delle caratteristiche.

Astronomia. — *Fotometria visuale e indice del colore della «Nova Aquilae 1945»*. Nota di L. GIALANELLA, presentata [1] dal Socio G. ARMELLINI.

1. INTRODUZIONE E GENERALITÀ. — La *Nova Aquilae 1945* è stata scoperta da Bertaud a Meudon la sera del 26 agosto 1945 ($20^h\,50^m$ T.U.), e poi indipendentemente da Tamm in Svezia il 27 agosto ($20^h\,28^m$ T.U.) e da Soloviev a Stalinabad il 28 agosto, apparendo come una stella di circa 7^m presso le *23* e *24 Aquilae*. Al nostro Osservatorio di Roma (Monte Mario) la notizia della scoperta è giunta solo la mattina del 31 agosto a mezzo di un telegramma dell'Ufficio centrale di Copenaghen. La sera stessa ne abbiamo iniziate le osservazioni, il prof. G. Armellini all'equatoriale Steinheil–Cavignato (apertura mm. 395, focale m. 5,25) munito di micrometro filare per la determinazione della posizione, ed io all'equatoriale Cauchoix–Cavignato (apertura mm. 155, focale m. 2,240) munito di fotometro a cuneo con filtri di luce per la determinazione delle variazioni di splendore e per le misure dell'indice di colore.

La posizione della *Nova Aquilae 1945* dalle misure di Armellini [93 confronti in ascensione retta e 25 in declinazione con le stelle B. D. + 0° 4106 = Boss G. C. 26314 e B. D. + 0° 4158 = Boss G. C. 26586] è risultata: $\alpha_{1945,0} = 19^h\,16^m\,30^s.74$; $\delta_{1945.0} = +\,0°\,31'\,46''.6$. Altre posizioni, fin ora note, sono le seguenti: a Uccle, Delporte: $\alpha = 19^h\,16^m\,30^s.64$, $\delta = 0°\,31'\,45''.4$ [2] (fotografica), Moureau e Verbaandert: $\alpha = 19^h\,16^m\,30^s.63$, $\delta = 0°\,31'\,43''.9$ [3] (cerchio meridiano); a Parigi, Semirot: $\alpha = 19^h\,16^m\,30^s.78$, $\delta = 0°\,31'\,46''.3$ [4] (fotografica); a San Fernando, Benitez: $\alpha = 19^h\,16^m\,30^s.67$, $\delta = 0°\,31'\,45''.6$ [5]; a Poznán, Koebe–Wierzbinski–Witkowski: $\alpha = 19^h\,16^m\,30^s.8$, $\delta = 0°\,31'\,46''$ [6] (fotografica); ad Odessa, Novopashenny: $\alpha = 19^h\,16^m\,30^s.66$, $\delta = 0°\,31'\,46''.5$.

La *Nova Aquilae 1945* deve aver raggiunto il massimo splendore il 27-28 agosto con la grandezza $7^m.2$ secondo le determinazioni di S. Gaposckin ad Harvard [7], poichè nei giorni precedenti le grandezze sono state: agosto 13–14, $11^m.0$; agosto 17–18, $10^m.8$. Delporte [8] a Uccle ha comunicato che la Nova non era visibile su una lastra del 24 luglio 1935 che contiene le

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.
(2) Circ. Copenaghen n. 1015.
(3) Circ. Copenaghen n. 1021.
(4) Circ. Copenaghen n. 1017.
(5) Circ. Copenaghen n. 1021.
(6) Circ. Copenaghen n. 1017.
(7) Circ. Copenaghen n. 1019; H. A. C. n. 721 del 7 settembre 1945.
(8) Circ. Copenaghen n. 1015.

stelle fino alla 15^m, mentre precedentemente, nella posizione indicata, non appariva alcuna stella su parecchie lastre prese ad Harvard tra il 1901 e il 1917, che pure mostravano stelle fino a $16^m.5$ (9). Aggiungiamo, infine, che Semirot ha trovato che la stella non è presente nel Catalogo fotografico di Algeri, dove dovrebbe comparire nel cliché 999 (del 25 giugno 1895) con le coordinate rettilinee (calcolate) + 32.895 , + 26.515. Si può quindi ritenere che la variazione totale di splendore ha certamente superato le 9 grandezze stellari.

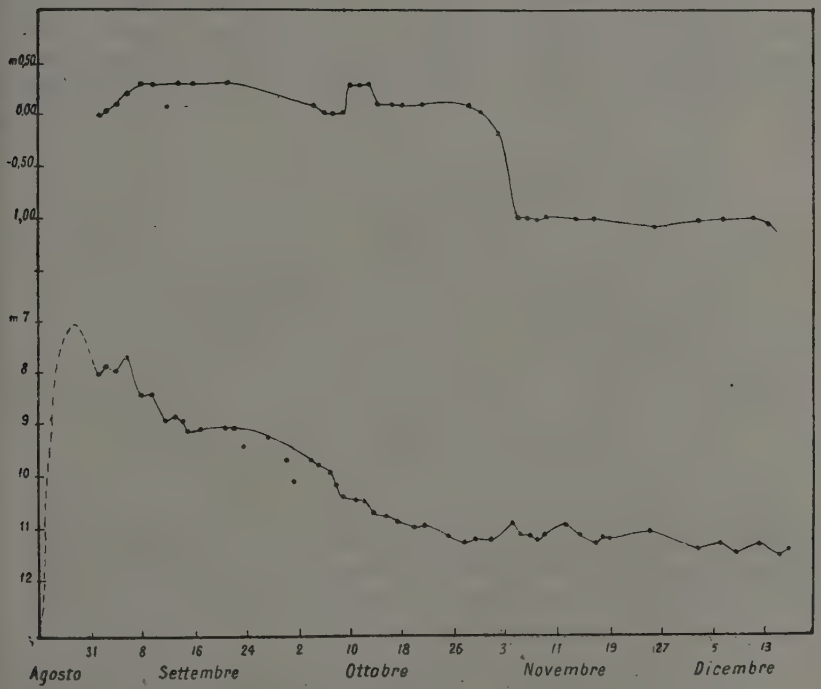


Fig. 1. – *Nova Aquilae 1945:* Curve di luce (in basso); indici di colore (in alto).

Le mie osservazioni fotometriche, di cui qui presento i risultati, sono continuate – in generale con buone condizioni atmosferiche – fino al 16 dicembre 1945, allorchè l'astro stesso è diventato inosservabile, immergendosi nel chiarore del crepuscolo. Sino alla sera del 5 ottobre le osservazioni fotometriche sono state fatte al Cauchoix; dalla sera successiva sino al termine col più grande cannocchiale Steinheil.

In tutto questo periodo la grandezza visuale della Nova è andata continuamente decrescendo dal valore $7^m.86$ del 1° settembre al valore $11^m.38$

(9) Circ. Copenaghen n. 1019.

del 16 dicembre, con un andamento assai regolare. L'indice del colore, debolmente positivo nei primi giorni di osservazione, è andato aumentando fino a raggiungere il valore $+ 0^m.32$ il 20 settembre; è tornato poi a zero nell'ottobre (con un altro temporaneo aumento nei primi giorni di questo mese), diventando infine decisamente negativo a novembre (70 giorni dopo il massimo) con valori minori di $- 1^m$ sino al termine delle osservazioni.

2. Fotometria visuale in luce normale. – Le stelle di confronto sono riportate nella Tabella I, di cui le grandezze sono ricavate dalla H. R. P., meno che per la n. 5 (B. D. $+ 0° 4177$), la quale mentre nel catalogo di Harvard è indicata come $9^m.04$, da miei numerosi confronti con le altre stelle ha ottenuto il valore $8^m.87 \pm 0^m.035$ (e. p.), che ho assunto nelle riduzioni.

Tabella I. – *Stelle di confronto.*

N.	*	Mag.	N.	*	Mag
1	B. D. $+ 0° 4170$	$6^m.52$	5	B. D. $+ 0° 4177$	$8^m.87$
2	B. D. $+ 0° 4166$	6 .74	6	B. D. $+ 0$ 4160	9 .19
3	B. D. $+ 0° 4158$	7 .53	7	B. D. $+ 0$ 4174	10 .54
4	B. D. $+ 0° 4157$	7 .73			

La Tabella II dà poi i risultati delle osservazioni riportati nella figura. Per la costante del cuneo ho assunto il valore $k = 0^m.1661 \pm 0^m.00073$ [10]. Le osservazioni dei giorni 23, 28, 30 settembre e del 1° ottobre sono state fatte dal prof. G. Armellini (al medesimo strumento Cauchoix-Cavignato).

3. Indice del colore. – Ho eseguito le determinazioni dell'indice di colore della Nova applicando al fotometro Toepfer dei convenienti filtri di luce, con un metodo già altre volte da me stesso adoperato e altrove dettagliatamente descritto. I filtri erano uno *giallo* (trasparenza massima λ 5500 — 5800 A) e uno *violetto* (trasparenza massima λ 4200 — 4500 A), adoperando stelle di confronto di indice di colore noto, ricavate dal catalogo di Oepik [11], previa opportuna riduzione al sistema di Harvard. In definitiva, l'equazione degli indici di colore è risultata: $gK_o - A_o = + 1^m.30$.

(10) Cfr. L. Gialanella, *L'assorbimento atmosferico della luce degli astri nel cielo di Roma*, «Memorie» della R. Acc. Naz. dei Lincei (in corso di pubblicazione).

(11) «Pubb. Tartu», to. 27, n. 1, 1929.

TABELLA II.

Fotometria visuale della « Nova Aquilae 1945 ».

Data 1945	t_s	T. U.	*	Cfr. *	Cfr. N	Lett. fotom. *	Lett. fotom. N	Δm	Mag.	Medie	Note
gosto 31	20^h08^m	20^h39^m	2	12	12	61.09	53.37	$1^m.28$	$8^m.02$	$8^m.01$	
31	20 38	21 09	1	12	12	64.18	56.25	1 .48	8 .00		
ettembre 1	20 15	20 42	4	10	10	58.10	56.30	0 .13	7 .86	7 .86	
3	21 00	21 21	2	10	10	61.93	54.37	1 .25	7 .99	7 .94	
3	21 20	21 41	4	10	10	56.40	55.43	0 .16	7. 89		
5	20 21	20 35	2	8	8	61.52	55.47	1 .00	7 .74	7 .74	Nubi
7	19 52	19 58	2	10	10	59.74	48.99	1 .78	8 .52		
7	20 17	20 23	4	12	12	56.49	52.47	0 .67	8 .40	8 .48	
7	20 36	20 42	2	9	9	62.55	51.65	1. 80	8 .54		
8	20 07	20 09	4	12	12	54.97	50.59	0 .73	8 .46	8 .46	Sospetto di vapori
11	19 37	19 26	4	12	12	55.84	48.65	1 .19	8 .92	8 .92	
11	19 58	19 47	3	15	15	57.03	48.65	1 .39	8 .92		
12	19 32	19 19	6	12	12	47.80	49.00	0 .20	8 .99		
12	19 44	19 31	5	12	12	50.90	49.97	0 .15	9 .02	8 .89	
12	19 54	19 41	4	12	12	56.92	51.31	0 .93	8 .66		
13	19 47	19 30	6	12	12	45.08	46.76	0 .28	8 .91	8 .91	
13	20 07	19 50	5	12	12	47.65	47.43	0 .04	8 .91		
14	20 21	20 00	6	8	8	46.17	46.47	0 .05	9 .24		
14	20 35	20 14	4	12	12	54.64	46.17	1 .41	9 .14	9 .16	©
14	20 48	20 27	5	12	12	47.25	45.85	0 .23	9 .10		
16	20 51	20 22	6	12	12	43.82	44.79	0 .16	9 .03	9 .08	© ©
16	21 12	20 41	5	12	12	45.41	43.91	0. 25	9 .12		
20	19 22	18 38	6	12	12	44.43	44.53	0 .02	9 .17	9 .06	© ©
20	19 44	19 00	5	12	12	44.71	44.24	0 .08	8 .95		
21	19 16	18 26	5	12	12	42.77	42.22	0 .09	8 .96	9 .09	©
21	19 35	18 45	6	15	15	42.78	42.54	0. 03	9 .22		

Segue: TABELLA II.

Data 1945	t_s	T. U.	*	Cfr. *	Cfr. N	Lett. fotom. *	Lett. fotom. N	Δm	Mag.	Medie	Note
Settembre 23	21h30m	20h30	4	10	10	43.33	32.77	1m.76	9m.49	9m.43	G. A.
23	21 40.	20 40	3	10	10	43.79	32.77	1 .84	9 .37		
28	21 34	20 15	4	5	5	43.00	34.84	1 .36	9 .00	9 .05	G. A.
28	21 50	20 30	3	5	5	43.78	34.84	1 .49	9 .02		
30	21 37	20 10	4	5	5	44.92	32.94	2 .00	9 .73	9 .69	G. A.
30	21 57	20 30	3	5	5	45.58	32.94	2 .11	9 .64		
Ottobre 1	21 30	20 00	3	5	5	47.54	32.66	2 .48	10 .01	10 .00	G. A.
1	21 45	20 15	4	5	5	46.28	32.66	2 .27	10 .00		
3	20 03	18 24	6	12	12	47.53	44.09	0 .57	9 .76	9 .69	
3	20 23	18 44	5	12	12	49.67	45.18	0 .75	9 .62		
5	20 22	18 35	6	8	8	47.68	43.75	0 .65	9 .84	9 .75	
5	20 40	18 53	5	12	12	48.54	43.83	0. 78	9 .65		
6	22 30	20 40	6	12	12	54.92	50.53	0 .73	9 .92	9 .92	
8	22 19	20 18	6	18	18	54.85	49.32	0 .92	10 .11	10 .11	
9	19 45	17 42	6	12	12	56.15	48.42	1 .28	10 .47		
9	20 00	17 57	5	12	12	58.88	49.75	1 .51	10 .38	10 .42	
9	20 20	18 17	7	12	12	48.20	49.63	0 .24	10 .30		
10	22 18	20 10	7	18	18	47.19	48.22	0. 17	10 .37		
10	22 28	20 20	6	8	8	54.76	47.29	1 .24	10 .43	10 .43	
10	22 38	20 30	5	8	8	58.91	49.18	1 .62	10 .49		
11	20 03	17 49	7	15	15	45.14	46.04	0 .14	10. 40	10 .43	
11	20 23	18 19	5	15	15	55.88	46.32	1 .59	10. 46		
13	20 20	18 00	7	18	18	44.53	44.12	0 .07	10 .61		
13	20 30	18 10	6	18	18	54.97	45.81	1. 52	10 .71	10 .64	©
13	20 45	18 25	5	18	18	56.67	46.19	1. 73	10 .60		
16	20 40	18 07	7	18	18	44.49	44.40	0 .01	10 .53	10 .65	©
16	20 52	18 18	6	15	15	53.54	44.02	1 .58	10 .77		

Segue: TABELLA II.

Data 1945		t_1	T. U.	*	Cfr. *	Cfr. N	Lett. fotom. *	Lett. fotom. N	Δm	Mag.	Medie	Note
ttobre	17	20h40m	18h05	7	18	18	45.17	44.20	0m.16	10m.70	10m.77	
	17	21 00	18 25	6	18	18	53.12	44.13	1 .66	10. 85		
	19	20 50	18 05	7	24	24	44.27	41.91	0 .39	10 .93	10 .93	☾ Sospetto di cirri
	21	20 40	17 50	7	18	18	46.69	44.99	0 .28	10 .82	10 .83	☾
	21	21 00	18 10	6	12	12	55.44	45.51	1 .65	10 .84		
	25	20 20	19 10	7	18	18	46.51	43.44	0 .51	11 .05	11 .05	
	27	21 57	18 40	7	12	12	47.16	43.19	0 .66	11 .20	11 .21	
	27	22 27	19 10	7	12	12	49.33	45.15	0 .69	11 .23		
	29	22 00	18 36	7	18	18	49.57	45.83	0 .62	11. 16	11 .16	nuvole
ovembre	1	22 00	19 25	7	18	18	48.05	44.20	0. 64	11. 18	11 .20	
	1	22 00	19 25	6	18	18	56.44	44.20	2 .03	11. 22		
	3	21 35	17 46	7	18	18	47.06	44.62	0 .41	10 .95	10 .89	
	3	21 35	17 46	6	18	18	54.52	44.62	1 .64	10 .83		
	4	22 26	18 39	7	18	18	48.25	44.67	0 .59	11 .13	11 .13	
	4	22 26	18 39	6	18	18	56.41	44.67	1 .94	11 .13		
	6	22 02	18 06	7	18	18	48.61	45.14	0 .58	11 .12	11 .12	
	7	22 03	18 03	7	15	15	49.28	45.41	0 .64	11 .18	11 .18	
	8	22 30	18 27	7	18	18	49.61	45.63	0 .66	11. 20	11 .07	
	8	22 30	18 27	6	18	18	56.27	45.63	1. 76	10 .95		
	11	22 00	17 45	7	15	15	45.54	43.56	0 .33	10 .87	10 .87	☾ nubi
	13	22 22	18 00	7	18	18	46.64	43.36	0 .54	11. 08	11 .09	☾
	13	22 22	18 00	6	18	18	54.91	43.36	1 .91	11 10		
	15	22 30	17 55	7	24	24	46.55	42.34	0 .70	11. 24	11 .24	☾
	16	22 30	17 55	7	12	12	47.85	44.30	0 .59	11. 13	11 .13	☾ ☾
	18	22 01	17 20	7	18	18	47.31	43.21	0 .68	11 .22	11 .13	☾ ☾
	18	22 01	17 20	6	18	18	54.44	43.21	1 .86	11 .05		
	25	23 00	17 48	7	18	18	46.37	42.30	0. 68	11. 22	11 .00	nubi
	25	23 00	17 48	6	18	18	53.21	42.30	1 .81	11 .00		

Segue: TABELLA II.

Data 1945	t_s	T. U.	*	Cfr. *	Cfr. N	Lett. fot. m. *	Lett. fot. m. N	Δm	Mag.	Medie	Note
Dicembre 1	23^h40^m	18^h05^n	7	18	18	48.38	43.49	$0^m.81$	$11^m.35$	$11^m.31$	
1	23 40	18 05	6	18	18	56.02	43.49	2 .08	11 .27		
5	0 00	18 05	7	18	18	47.07	42.72	0 .72	11 .26	11 .23	
5	0 00	18 05	6	18	18	54.86	42.72	2 .02	11 .21		
11	23 40	17 25	7	12	12	47.82	42.28	0 .92	11 .46	11 .45	C
11	23 40	17 25	6	12	12	55.85	42.28	2 .25	11 .44		
12	23 40	17 20	7	18	18	46.85	42.03	0 .80	11 .33	11 .29	C
12	23 40	17 20	6	18	18	54.45	42.03	2 .06	11 .25		
14	23 48	17 20	7	18	18	43.53	37.99	0 .92	11 .46	11 .45	C C
14	23 48	17 20	6	18	18	51.59	37.99	2 .26	11 .45		
16	0 00	17 25	7	12	12	41.77	37.30	0 .74	11 .38	11 .38	C C vapori

Le osservazioni sono state fatte generalmente nelle medesime sere di quelle in luce normale, e al solito in duplice serie comprendenti tra esse quelle in luce normale. Nella Tabella III, che contiene i risultati delle misure, è stata pertanto omessa l'indicazione dell'ora, giacchè questa è sensibilmente uguale a quella della Tabella II. L_G e L_V sono le letture al fotometro con ognuno dei due filtri giallo e violetto, K il valore del rapporto $\frac{\text{i. c.}}{L_G - L_V}$, in cui al numeratore sono gli indici di colore delle stelle di confronto ricavato da una mia precedente taratura dei filtri [12], C è l'indice di colore concluso per la Nova. Delle stelle di confronto, però, ho potuto fare uso soltanto fino a tutto l'ottobre, e cioè finchè l'indice di colore della Nova si è mantenuto negli ordini di grandezza di quello delle stelle. Dopo tale epoca, in effetti, le differenze $L_G - L_V$ si sono eccezionalmente ridotte, e poi son diventate addirittura negative, la Nova apparendo più luminosa in luce violetta che in luce gialla, con perfetta analogia (per quanto in misura un po' minore) con quanto da me stesso era stato messo in evidenza nella precedente *Nova Puppis 1942* [13]. I valori dell'indice di colore sono stati allora ricavati per extrapolazione, risultando dell'ordine di -1^m. Per maggiore evidenza i risultati sono pure riportati nella figura, dove la curva superiore rappresenta le variazioni dell'indice di colore e quella inferiore le variazioni della grandezza.

(12) L. GIALANELLA, *Indici di colore di ammassi globulari e nebulose, e ricerche sull'assorbimento della luce nello spazio interstellare.* « Acc. Italia », vol. 2°, 1940.

(13) *Memorie Società Astronomica Italiana*, vol. XVI, 1943 e vol. XVII, 1946.

TABELLA III.

Indici di colore della « Nova Aquilae 1945 ».

Data 1945		L_G	L_V	$L_G - L_V$	K	Stelle di confronto	C
Agosto	31	48.95	47.61	1.34	$-0^m.001$	2–3–4	$0^m.00$
Settembre	1	49.21	47.51	1.70	+ 0 .012	3–4	+ 0 .02
	3	47.85	45.73	2.12	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .11
	5	49.00	46.64	2.36	+ 0 .091	3–4–5–6	+ 0 .21
	7	44.21	41.57	2.64	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .31
	8	40.18	37.74	2.44	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .29
	11	43.40	41.62	1.78	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .10 :
	12	45.66	43.01	2.65	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .31
	13	41.71	39.61	2.10	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .11 :
	14	41.87	39.31	2.56	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .30
	20	38.89	36.11	2.78	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .32
Ottobre	3	37.01	34.96	2.05	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .10
	5	36.37	34.87	1.50	+ 0 .012	3–4	+ 0 .01
	6	44.39	42.79	1.60	+ 0 .012	3–4	+ 0 .01
	8	44.92	43.31	1.61	+ 0 .012	3–4	+ 0 .01
	9	44.91	42.36	2.55	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .30
	10	42.28	39.79	2.49	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .29
	11	43.24	40.65	2.59	+ 0 .117	3–4–5–6–7	+ 0 .30
	13	41.51	39.33	2.18	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .12
	16	39.03	36.91	2.12	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .11
	17	39.61	37.54	2.07	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .10
	21	38.09	35.99	2.10	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .11
	27	38.36	36.11	2.25	+ 0 .055	3–4–5	+ 0 .12
	29	36.49	35.00	1.49	+ 0 .012	3–4	+ 0 .02
Novembre	1	39.80	38.79	1.01	—	extrapolato	— 0 .4
	3	39.99	38.27	1.72	+ 0 .012	3–4	+ 0 .02

Segue: TABELLA III.

Data 1945		L_G	L_V	$L_G - L_V$	K	Stelle di confronto	C
Novembre	4	36.47	38.73	— 2.26	—	extrapolato	— 1^m.
	5	37.85	40.03	— 2.18	—	»	— 1 .
	7	36.83	39.20	— 2.37	—	»	— 1 .
	8	37.88	39.83	— 1.95	—	»	— 1 .
	13	33.22	35.42	— 2.20	—	»	— 1 .
	16	33.68	34.73	— 1.05	—	»	— 1 .
	18	31.93	32.74	— 0.81	—	»	— 0 .5
	25	32.06	34.88	— 2.82	—	»	< — 1 .
Dicembre	1	34.86	36.62	— 1.76	—	»	— 1 .
	5	32.60	34.88	— 2.28	—	»	— 1 .
	11	33.27	35.09	— 1.82	—	»	— 1 .
	12	31.82	34.92	— 3.10	—	»	< — 1 .

Astronomia. — *Una conferma del ciclo solare ventiduennale dedotta dalle oscillazioni dei diametri solari.* Nota di M. CIMINO, presentata [1] dal Socio G. ARMELLINI.

1. Sulla durata media del ciclo di attività solare non sono mancate le discussioni. Mentre per quanto riguarda la frequenza delle macchie, o della loro area totale, delle protuberanze e dei floculi può fissarsi un periodo medio di 11.5 anni, il periodo corrispondente all'intervallo tra due successive comparse di macchie ad alta latitudine *e con la stessa polarità magnetica* deve, secondo Hale, considerarsi di doppia durata, e cioè di 22-23 anni circa. Una conferma di questo periodo di doppia durata sarebbe data, secondo un'analisi di Turner [2] sui numeri relativi di Wolf, da una certa dissimmetria nei cicli undecennali successivi, la quale farebbe susseguire, in generale, un *massimo alto* dei numeri relativi ad un *massimo basso*; ma la legge non sembra immune da obbiezioni. Ora è riuscito allo scrivente di portare,

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) H. TURNER, *Simple Method of detecting discontinuities in Series of Recorded Observations.* « Monthly Notices », vol. 74, 1914, p. 94.

per via del tutto indipendente, una nuova conferma del ciclo ventiduennale solare, ricavandola da un'analisi periodale (3) della curva di variazione dei diametri solari osservati nel R. Osservatorio Astronomico di Roma a partire dal 1876 ad oggi.

Per la mia analisi mi sono valso delle misure dei diametri orizzontali del Sole iniziate nel 1876 da L. Respighi, Direttore dell'Osservatorio del Campidoglio, e continuate *con lo stesso metodo e strumento* sotto la direzione dei suoi successori A. Di Legge e G. Armellini. Al momento del passaggio in meridiano il disco solare veniva proiettato su di uno schermo bianco, posto dietro l'oculare del cannocchiale meridiano, e sul quale si proiettavano pure i fili del micrometro applicato all'oculare dello strumento. Più osservatori, dapprima tre e poi anche quattro, con l'aiuto di un cronometro, potevano determinare gli istanti in cui il bordo anteriore e quello posteriore del Sole toccava i fili verticali del micrometro, deducendone subito la durata del passaggio del diametro solare. Come si vede, questo metodo consente a più osservatori insieme di osservare i passaggi in meridiano della stessa immagine solare, contemporaneamente allo stesso strumento, in condizioni atmosferiche assolutamente identiche, e permette perciò anche l'immediata determinazione degli errori personali relativi. Si può senza dubbio affermare che, distinguendosi direttamente dalle altre del genere, le osservazioni capitoline hanno il pregio di costituire una serie di misure che, pur essendo estese per oltre un sessantennio, si conservano assolutamente omogenee tra loro e sono perciò direttamente confrontabili.

2. Rimandando alla mia citata Memoria per tutte le informazioni sui dati di osservazione e per il metodo seguito nell'analisi, mi limito ora a riassumere, nella tavola fuori testo, i risultati fondamentali da me ottenuti. La curva tratteggiata rappresenta le medie annuali dei diametri orizzontali solari osservati, con una perequazione biennale. La curva a tratto pieno è ottenuta invece sommando all'*asse medio* di quota 931″.30 (che rappresenta perciò un *valore medio del raggio solare*) le due curve I e II che ho indicato come *oscillazione fondamentale* ed *oscillazione secondaria*. È veramente sorprendente come con queste due sole curve si riesca ad approssimare la curva dei dati in modo che può ben dirsi soddisfacente, quando si pensi che nella curva osservata sono certamente presenti variazioni più o meno irregolari derivanti da insufficiente compensazione degli errori di osservazione e dalla irradiazione.

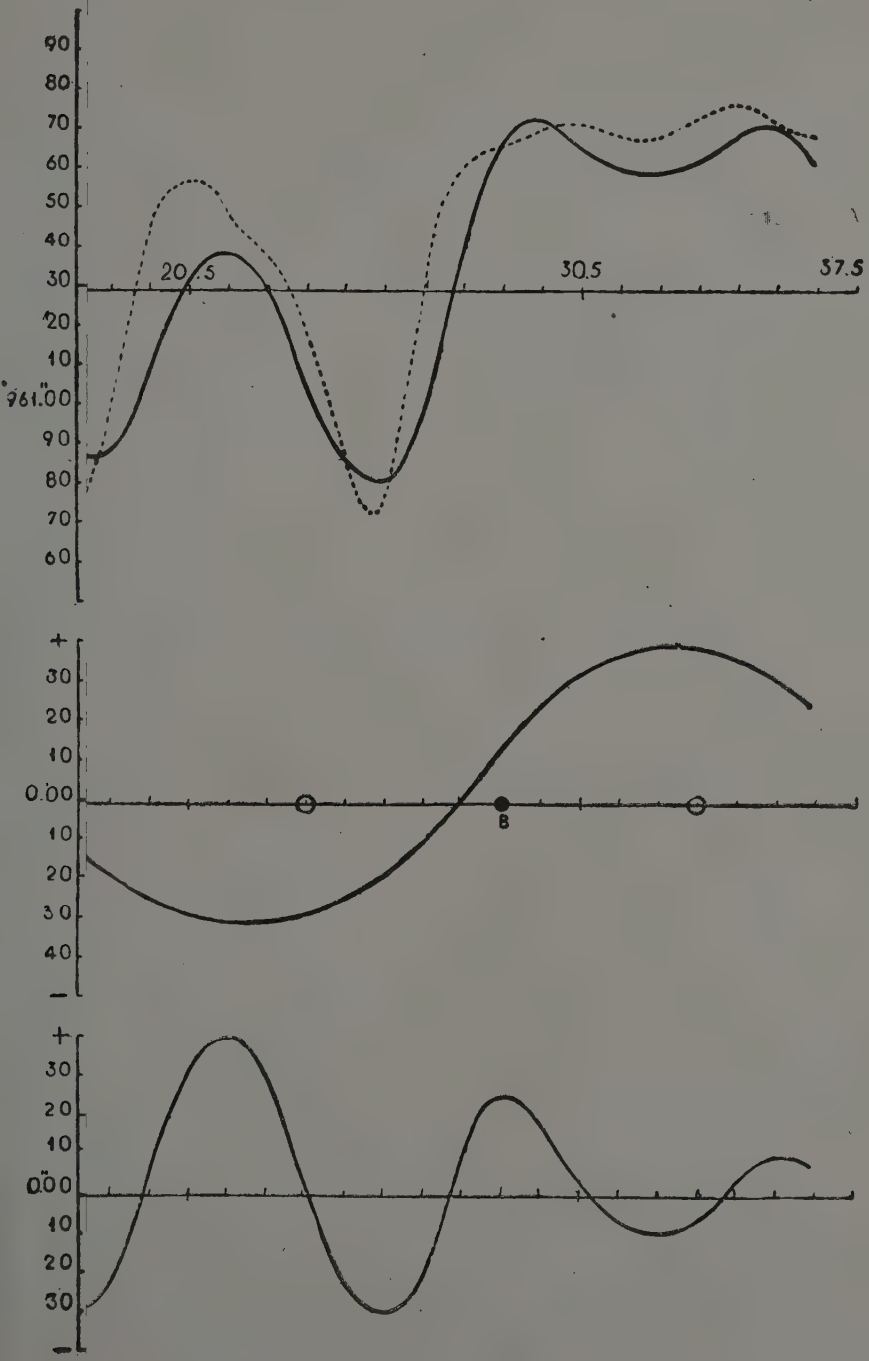
L'oscillazione fondamentale ha un periodo compreso tra i 22 e i 23 anni; quella secondaria un periodo compreso tra i $6\,^1/_2$ e $8\,^1/_2$ anni, e presenta il carattere di un'onda smorzata e amplificata. All'oscillazione secondaria

(3) M. Cimino, *Un'oscillazione ventiduennale nel diametro solare*. « Pont. Ac. Scientiarum, Commentationes », vol. VIII (1944), n. 17, pp. 485-504. Ivi la bibliografia.

sono dovuti quei massimi e minimi *acuti* della curva dei dati i quali hanno fino ad oggi mascherato l'oscillazione fondamentale. Quanto alla realtà delle due oscillazioni, mi sembra difficile negarla per l'oscillazione ventiduennale, che, come dimostrerò tra breve, è strettamente legata per il valore del periodo e per la fase al ciclo solare. L'unica alternativa sarebbe quella di attribuire l'oscillazione ad una variazione della irradiazione; ma in tal caso, tenendo presente che la curva tratteggiata è costruita con medie annuali e con compensazione biennale, bisognerebbe ammettere una *veramente stretta dipendenza* del valore medio annuale dell'irradiazione col ciclo, ciò che non è giustificato da nessuna delle ricerche fino ad oggi eseguite. In altri termini, poichè l'irradiazione dipende dalle condizioni climatiche (specialmente dal grado di umidità atmosferico), queste dovrebbero avere col ciclo solare un legame tanto stretto, che è veramente strano che non sia stato fino ad oggi direttamente e sicuramente precisato.

3. L'oscillazione ventiduennale del diametro solare posta in luce porta, a mio avviso, una conferma delle idee di Hale e di Turner sulla durata ventiduennale del ciclo solare. Esaminando infatti l'oscillazione fondamentale possiamo riscontrare i seguenti fatti: 1) *che i massimi e i minimi dell'oscillazione hanno luogo da circa 1 a 3 anni (al più) prima* dell'*epoca dei* MINIMI *dei numeri relativi;* 2) *che i massimi dell'attività maculare si verificano poco dopo – un anno circa –, dell'epoca in cui la velocità di espansione o quella di contrazione della fotosfera raggiunge il valore massimo* (circa 200 m. al giorno).

Ora, le macchie solari sono, con grande probabilità, degli immensi vortici i quali debbono, a loro volta, riguardarsi come delle pertubazioni nel movimento più regolare di scorrimento orizzontale dei vari strati di materia solare, fotosferica ed atmosferica. Non vediamo perciò nulla di troppo ardito nell'ipotesi, che ora noi avanziamo, che il movimento di pulsazione solare possa essere una delle cause determinanti di quelle pertubazioni, la frequenza delle quali sarà tanto maggiore quanto più grande è la velocità con la quale gli strati di materia solare si espandono o si contraggono. D'altra parte, è noto che le macchie che appartengono ad un nuovo ciclo undecennale cominciano a comparire alle alte latitudini eliografiche *più di un anno prima* del verificarsi del minimo dei numeri di Wolf, ed hanno polarità magnetica invertita rispetto alle macchie del vecchio ciclo. La correlazione tra la pulsazione solare ed il ciclo di attività maculare sembra dunque assai evidente. Un ciclo maculare avrebbe inizio nel momento in cui il Sole comincia a contrarsi o a dilatarsi (massimo o minimo dell'oscillazione fondamentale), e subito comparirebbero le macchie del nuovo ciclo con la nuova polarità magnetica, mentre le macchie del vecchio ciclo andrebbero esaurendosi. Mano a mano che la velocità di contrazione o di espansione aumenta, aumenterà anche la frequenza delle macchie, che raggiun-


90
80
70
60
50
40
30
20
10
961.00
90
80
70
60
20.5
30.5
37.5
+
30
20
10
0.00
10
20
30
40
−
B
+
30
20
10
0.00
10
20
30
−

gerà un massimo intorno all'epoca della massima velocità, per poi tornare o diminuire fino al momento in cui la fase di contrazione o di espansione ha termine. Da questo istante ha inizio un nuovo ciclo undecennale, con macchie di polarità opposta, e così via, con un susseguirsi di *cicli di espansione* e *cicli di contrazione*, ciascuno undecennale, *mentre il ciclo completo sarebbe di ventidue anni*. I due cicli undecennali sono caratterizzati dalla opposta polarità magnetica e, – se si vuole accettare l'analisi fatta dal Turner, – anche da una differente intensità. Precisamente, dalla curva da me disegnata, risulterebbe che *i cicli undecennali che abbiamo chiamato di contrazione darebbero luogo ad una attività maculare complessivamente maggiore di quella dei cicli di espansione*. Se, come si suppone, il campo magnetico delle macchie è generato da cariche elettriche trasportate nel giro vorticoso della materia solare, è verosimile ammettere che la tendenza degli strati solari ad espandersi o a contrarsi possa annoverarsi tra le cause che determinano l'uno o l'altro senso nella rotazione del vortice, e quindi l'uno o l'altro senso nella direzione del campo magnetico.

4. Quanto alla *oscillazione secondaria*, che si presenta con intensità variabile e periodo oscillante tra i $6\,^1/_2$ e $8\,^1/_2$ anni, non è possibile una induzione precisa sulla sua realtà, mancando una correlazione diretta e sicura con qualche ciclo di attività solare. A favore della realtà depone la sua persistenza e il fatto che il suo periodo medio è $\frac{1}{3}$ di quello dell'oscillazione fondamentale, della quale potrebbe essere perciò una armonica. Quanto alla sua maggiore irregolarità, deve farsi presente che in ogni analisi di curve sperimentali gli elementi a corto periodo sono quelli che maggiormente risentono delle irregolarità derivanti da insufficiente compensazione degli errori di osservazione.

A causa della meno stretta correlazione dell'onda secondaria con il ciclo solare, noi potremmo verosimilmente supporre – una volta ammessa la realtà dell'oscillazione – che mentre l'oscillazione principale debba investire profondamente tutti gli strati della fotosfera solare, l'oscillazione secondaria possa riguardare, col suo carattere di perturbazione, soltanto gli strati più superficiali. Da questo punto di vista sarebbe interessante vedere fino a qual punto l'oscillazione secondaria possa correlarsi con le variazioni di altezza della cromosfera solare.

Astronomia. *Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario eseguita in primo verticale.* Nota III di M. Cimino, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

Seguito della Nota II dallo stesso titolo [2].

Segue: Tabella III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1943				+		**41°55′**	**41°55′**
7	27-IV	S	$0^h59^m49^s.36$	$0^h19^m52^s.32$	41° 47′ 15″.21	+ 0″.20	20″.63	20″.40
			0 57 38 .87	0 25 27 .55			20 .42	20 .18
			0 55 45 .71	0 29 21 .68			20 .46	20 .23
			0 53 56 .99	0 32 33 .23			20 .39	20 .16
			0 48 43 .26	0 39 58 .60			20 .63	20 .40
			0 46 09 .23	0 42 52 .67			20 .25	20 .02
7	30-IV	N	1 01 27 .25	0 13 55 .83	41 47 15 .67	+ 0 .18	20 .63	20 .41
			0 59 26 .70	0 20 46 .69			20 .06	19 .83
			0 57 38 .05	0 25 22 .22			20 .13	19 .90
			0 55 40 .20	0 29 29 .15			20 .56	20 .33
			0 48 02 .14	0 40 42 .54			20 .20	19 .97
7	4-V	S	0 59 48 .92	0 19 36 .28	41 47 16 .18	+ 0 .06	20. 04	19 .83
			0 57 38 .47	0 25 14 .97			19 .87	19 .67
			0 55 44 .13	0 29 10 .26			19 .45	19 .24
			0 53 56 .61	0 32 18 .94			19 .23	19 .03
			0 48 41 .50	0 39 52 .07			20 .04	19 .83
			0 46 09 .31	0 42 44 .47			19 .66	19 .45

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.
(2) Cfr. questi «Rendiconti», vol. I, fasc. 3-4.

Segue: TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1943				+		**41°55′**	**41°55′**
7	8–V	N	$1^h01^m25^s.75$	$0^h13^m44^s.21$	41° 47′ 16″.51	—0″.13	20″.13	19″.92
			0 59 25 .41	0 20 41. 52			19 .87	19 .66
			0 57 37 .58	0 25 17 .85			20 .09	19 .88
			0 55 37 .96	0 29 24 .08			19 .96	19 .76
			0 50 37 .40	0 37 25 .11			20. 49	20 .28
			0 48 00 .73	0 40 40. 52			20 .11	19 .90
7	11–V	S	0 59 45 .21	0 19 38 .02	41 47 16 .77	+ 0 .18	19 .99	19 .79
			0 57 34 .52	0 25 17 .26			19 .85	19 .64
			0 55 40 .35	0 29 13 .55			19 .83	19 .62
			0 53 52 .51	0 32 25 .83			19 .94	19 .74
7	12–V	N	1 01 22 .62	0 13 38 .18	41 47 16 .88	+ 0 .02	19 .55	19 .32
			0 59 22 .88	0 20 42 .87			19 .85	19 .63
			0 57 33 .34	0 25 20 .14			19 .85	19 .63
			0 55 34 .73	0 29 24 .03			19 .76	19 .53
			0 50 31 .84	0 37 23. 87			19 .26	19 .04
			0 47 55 .85	0 40 40 .93			19 .76	19 .53
8	17–V	S	1 14 38 .14	0 43 33 .11	41 40 06 .61	—0 .18	19 .44	19 .15
			1 12 58 .58	0 46 18 .20			19 .80	19 .50
			1 11 14 .11	0 48 56 .52			19 .89	19 .59
			0 09 41 .18	0 51 04 .32			19 .30	19 .00
			1 08 15 .91	0 52 59 .63			19 .82	19 .52
			1 04 12 .64	0 57 50 .74			19 .99	19 .69
			1 02 18 .07	0 59 53. 35			19 .87	19 .57

Segue: TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1948				+		**41°55′**	**41°55′**
8	18–V	N	$1^h15^m48^s.61$	$0^h41^m30^s.20$	41° 40′ 06″.81	— 0″.03	20. 04	19. 72
			1 14 20 .92	0 44 03 .91			20 .09	19 .77
			1 12 40 .40	0 46 45 .24			19 .90	19 .58
			1 11 12 .93	0 48 57 .33			20 .09	19 .77
			1 09 35 .92	0 51 11 .17			19 .62	19 .30
			1 05 40 .29	0 56 10 .27			20 .19	19 .86
			1 03 41 .13	0 58 22 .69			19 .71	19 .39
8	19–V	S	1 12 59 .77	0 46 14 .10	41 40 07 .00	+ 0 .06	20″.04	19″.72
			1 11 13 .86	0 48 54 24			20 .01	19 .69
			1 08 16 .53	0 52 57 .02			20 .08	19 .76
			1 04 12 .41	0 57 48 .29			19 .99	19 .67
			1 02 18 .41	0 59 51 .55			20 .15	19 .83
8	20–V	N	1 15 46 .96	0 41 27 .75	41 40 07 .14	+ 0 .26	19 .74	19 .42
			1 14 19 .37	0 43 59 .97			19 .74	19 .42
			1 12 40 .12	0 46 43 .75			20 .17	19 .85
			1 11 09 .66	0 48 56 .93			19 .67	19 .35
			1 09 33 .64	0 51 12 .14			19 .79	19 .47
			1 05 37 .18	0 56 08 .23			19. 48	19 .16
			1 03 38 .70	0 58 21 .98			19 .50	19. 19
8	25–V	S	1 14 37 .76	0 43 27. 13	41 40 07 .81	+ 0 .39	20 .04	19 .74
			1 12 57 .25	0 46 12 .07			20 .01	19 .72
			1 11 11 .63	0 48 51 .76			20 .01	19 .72
			1 09 39 .73	0 51 00 .71			19 .92	19 .62
			1 08 14 .76	0 52 54 .17			20 .11	19 .81

Segue: TABELLA III.

N.	Data		$t_4 - t_1$	$t_3 - t_2$	δ (*F. K.* 3)	i	φ_F	φ_N
	1948						**41°55′**	**41°55′**
8	26-V	N	$1^h15^m44^s.54$	$0^h41^m25^s.75$	41° 40′ 07″.98	+ 0″.29	19″.51	19″.22
			1 14 18 .29	0 43 59 .31			19 .91	19 .62
			1 12 37 .73	0 46 40 .83			19 .75	19 .45
			1 11 09 .26	0 48 55 .53			20 .15	19 .85
			0 09 34 .09	0 51 09 .78			20 .27	19. 97
			1 05 36 .57	0 56 06 .87			19 .87	19 .57
			1 03 37 .86	0 58 19 .77			19 .63	19 .33
8	28-V	S	1 14 40 .07	0 43 23 .70	41 40 08 .33	— 0 .10	20 .14	19 .84
			1 12 58 .82	0 46 09 .31			20 .02	19 .72
			1 11 12 .64	0 48 49 .43			19 .85	19 .56
			1 09 40 .65	0 50 58 .84			19 .81	19 .51
			1 08 15 .69	0 52 50 .94			19 .71	19 .41
			1 04 11 .39	0 57 44 .71			20 .02	19 .72
			1 02 16 .62	0 59 47 .34			19 .83	19 .53
8	29 V	N	1 15 44 .77	0 41 24 .79	41 40 08 .51	+ 0 .35	20 .04	19 .72
			1 14 17 .19	0 43 57 .31			19 .85	19 .53
			1 12 37 .28	0 46 38 .67			19 .81	19 .49
			1 11 08 .35	0 48 53 .07			19 .97	19 .65
			1 09 31 .94	0 51 07 .84			19 .85	19 .53
			1 05 35 .76	0 56 06 .75			20 .00	19 .68
			1 03 37 .51	0 58 19 .37			20 .04	19 .72

TABELLA IV.

N.	Data	Fili	φ_F	φ_N	$\bar{\varphi}_F$	$\bar{\varphi}_N$
	1943		**41° 55′**	**41° 55′**	**41° 55′**	**41°55′**
1	6-II	5	19″.46	19″.23		
	20-II	7	19 .83	19 .62		
	22-II	5	19 .84	19 .64		
	24-II	7	20 .04	19 .84	**19″.82 ± 0″.04**	**19″.61 ± 0″.04**
2	6-II	5	19 .45	19 .58		
	20-II	3	19 .67	19 .83		
	22-II	6	19 .23	19 .35	**19 .40 ± 0 .06**	**19. 54 ± 0 .06**
3	23-II	2	19 .50	19 .53		
	24-II	5	19 .62	19 .65		
	25-II	5	19 .42	19 .46		
	1-III	5	19 .71	19 .74	**19 .58 ± 0 .04**	**19 .61 ± 0 .04**
4	3-III	5	19 .83	19 .98		
	4-III	5	19 .48	19 .63	**19 .66 ± 0 .06**	**19 .80 ± 0 .06**
5	5-III	6	19 .84	19 .77	**19 .84 ± 0 .09**	**19 .77 ± 0 .09**
6	26-III	7	19 .59	19 .44		
	7-IV	6	19 .82	19 .66		
	10-IV	7	20 .14	19 .99		
	13-IV	7	19 .81	19 .66		
	16-IV	7	19 .80	19 .65		
	17-IV	7	20 .12	19 .99		
	19-IV	7	19 .82	19 .69	**19 .87 ± 0 .02**	**19 .73 ± 0 .02**

Segue: TABELLA IV.

N.	Data	Fil	φ_F	φ_N	$\bar{\varphi}_F$	$\bar{\varphi}_N$
	1943		**41° 55′**	**41° 55′**	**41° 55′**	**41° 55′**
7	26–IV	5	20″.26	20″.05		
	27–IV	6	20 .46	20 .23		
	30–IV	5	20 .32	20 .09		
	4–V	6	19 .71	19 .51		
	8–V	6	20 .11	19 .90		
	11–V	4	19 .90	19 .70		
	12–V	6	19 .67	19 .45	**20″.06 ± 0″.04**	**19″.84 ± 0″.04**
8	17–V	7	19 .73	19 .43		
	18–V	7	19 .95	19 .63		
	19–V	5	20 .05	19 .72		
	20–V	7	19 .73	19 .41		
	25–V	5	20 .02	19 .72		
	26–V	7	19 .87	19 .57		
	28–V	7	19 .91	19 .61		
	29–V	7	19 .94	19 .62	**19 .89 ± 0 .02**	**19 .58 ± 0 .02**

Fisica. — *Sul meccanismo di formazione dell'immagine latente negli strati fotografici* [1]. Nota di M. G. FRACASTORO, presentata [2] dal Socio G. ABETTI.

Data l'assoluta mancanza di notizie su riviste italiane riguardanti la teoria del processo fotografico, la quale tuttavia attinge largamente dalla fisica teorica e dalla chimica fisica, oltre che dai risultati di recenti esperienze, crediamo necessario dare un cenno secondo un criterio moderno di tale teoria, tanto più che essa costituisce la premessa sulla quale si basano le nostre proprie considerazioni.

(1) Lavoro eseguito nell'Osservatorio astrofisico di Arcetri, Firenze.
(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

È noto che la fotolisi, da un punto di vista puramente fisico, consiste nella scissione di una molecola a causa della liberazione dell'elettrone di legame, eseguita appunto a spese dell'energia del fotone o dei fotoni assorbiti. Nel caso particolare della molecola di bromuro d'argento il processo della fotolisi si può formulare secondo le relazioni quantistiche:

$$(1) \qquad \begin{cases} AgBr + h\nu \rightarrow Ag^+ + Br^- \rightarrow Ag^+ + Br + e^- \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Ag^+ + e^- \rightarrow Ag_{met}. \end{cases}$$

Il processo che avviene comunemente nella fotografia non è però così semplice e la reazione fotochimica (1) non costituisce che il punto di partenza di altre trasformazioni che avvengono in parte subito dopo l'esposizione, in parte durante la riduzione del granulo di bromuro d'argento durante l'operazione di sviluppo dello strato fotografico.

L'argento fotolitico, cioè quello risultante dalla reazione (1), infatti non è che una minima parte di quello che verrà a formare, dopo lo sviluppo, l'immagine fotografica, la quale è costituita da argento proveniente dalla riduzione di tutto il granulo fotografico.

È di fondamentale importanza il fatto che vengono attaccati da uno sviluppatore che abbia un'azione riducente adeguata, soltanto i granuli impressionati preventivamente dalla radiazione (a meno di non prolungare eccessivamente la durata del bagno). È ormai dimostrato che diventano in questo senso sviluppabili quei granuli i quali, dopo aver assorbito un numero adeguato di fotoni di frequenza sufficientemente elevata ($\lambda \leq 0{,}5$ micron), vengono a possedere una traccia di argento fotolitico, estranea al reticolo spaziale ionico, di dimensioni sufficienti perchè il granulo diventi molto più facilmente (rispetto agli altri non impressionati) suscettibile di attacco da parte del riduttore.

Ricerche sperimentali sull'argomento hanno dimostrato che l'azione del riduttore si diparte effettivamente da particolari zone alla superficie del granulo [3].

Una teoria che rappresenta molto bene i fatti osservati, e che è stata capace di prevederne altri e di darne una spiegazione convincente, è quella enunciata da Gurney e Mott [4]. Essi studiano le proprietà elettroniche dei cristalli nel loro insieme e non quelle di una singola molecola di AgBr.

Il cristallo di AgBr è cubico e in esso gli ioni Ag^+ e Br^- sono posti alternatamente alla distanza di 5,78 Angstrom l'uno dall'altro. In un cristallo di AgBr il diagramma energetico del potenziale, per un elettrone che si

(3) A. I. Rabinovitch, *Sulla teoria dell'adsorbimento nello sviluppo fotografico* «Trans. Fadaray Society», 1938 (2), *34*, p. 20.

(4) R. W. Gurney e N. F. Mott, *La teoria della fotolisi del bromuro d'argento e l'immagine latente fotografica.* «Proc. Roy. Soc.», 1938, *164 A*, p. 151.

muove entro il reticolo cristallino, è quello riprodotto nel caso unidimensionale, cui si può limitare per semplicità la teoria, nella fig. 1 *b*.

Nell'atomo isolato di argento il livello 5 S conteneva un elettrone debolmente vincolato il quale nella molecola di AgBr si trasferisce nel livello 4 P del bromo, e il livello 5 S rimane vùoto.

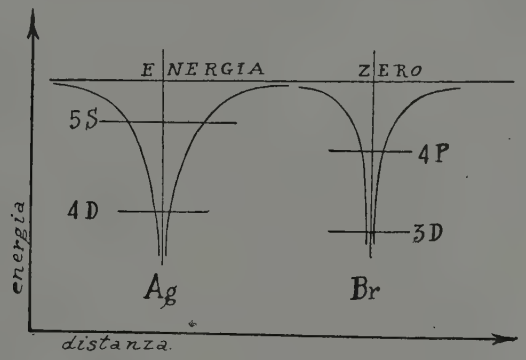


fig. 1 *a*.

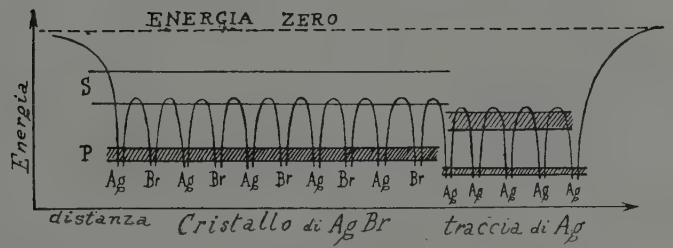


fig. 1 *b*.

Mentre per un singolo atomo (fig. 1 *a*) i livelli energetici sono discreti, in una serie di joni alternatamente Ag^+ e Br^- le curve di potenziale si alterano e i livelli 5 S e 4 P, che nell'atomo isolato hanno energia definita, nel reticolo ionico sono rappresentati da una banda energetica di larghezza finita, come dimostra la meccanica ondulatoria. Per analogia con quanto avviene nella molecola isolata, la banda 4 P conterrà tanti elettroni da risultarne satura e la banda 5 S sarà vuota. Questo è vero allo zero assoluto, a rigore; alla temperatura ambiente vi saranno alcuni elettroni portati nella banda superiore per agitazione termica. Sono questi elettroni, e quelli portati nella banda 5S dalla radiazione assorbita dal cristallo, che possono dar origine a fenomeni di conduzione nei cristalli di AgBr, comportandosi come gli elettroni liberi di un metallo conduttore. In condizioni normali, il cristallo di AgBr non è conduttore. La separazione fra le bande 4 P e

5 S è di circa 3 eV e soltanto i fotoni che posseggono un'energia e quindi una frequenza adeguata possono produrre tali fenomeni di fotoconduttività.

La capacità dei granuli di AgBr di alterarsi sotto l'azione della radiazione, rendendo possibile il processo fotografico, è intimamente connessa con tali fenomeni di fotoconduttività. L'immagine latente fotografica infatti si forma in due tempi. In una prima fase del fenomeno si ha il sollevamento di un elettrone dalla banda 4 P alla banda 5 S, ad opera della radiazione. Questa prima parte del processo si completa con la cattura del fotoelettrone da parte di tracce di impurezze del reticolo cristallino, le quali dispongono di un livello di energia più basso della banda 5 S e più alto della banda 4 P, ove c'è posto per i fotoelettroni. La seconda parte del fenomeno consiste in una migrazione di ioni di Ag^+ i quali, movendosi attraverso il cristallo sotto l'attrazione degli elettroni catturati nelle tracce, vanno a formare argento metallico che costituisce l'immagine latente da cui si parte l'azione del rivelatore durante l'operazione di sviluppo. Occorre mettere in evidenza fin d'ora che il processo primario (sollevamento dell'elettrone dal livello 4 P al livello 5 S e cattura nelle tracce di impurezze) è indipendente dalla temperatura; invece la migrazione degli ioni Ag^+ è resa molto difficile a temperature molto basse.

L'immagine latente così formata ha caratteri di stabilità ben collaudati dall'esperienza.

Si può dire che nelle sue linee generali la descrizione teorica dei fenomeni, attraverso gli studi di Gurney e Mott, di Webb e di altri, sia giunta a questo punto.

Per uno studio del meccanismo di formazione dell'immagine latente si deve tener conto del comportamento degli ioni Ag^+ e dei fotoelettroni durante il processo secondario. Il risultato finale del fenomeno dipenderà dalla velocità della reazione quantistica che rappresenta la liberazione degli elettroni e dalla velocità con cui avviene la combinazione fra tali elettroni e gli ioni Ag^+. Inoltre, non si deve trascurare la possibilità che qualche elettrone già catturato dalle tracce ritorni per effetto termico attraverso la banda 5 S alla banda 4 P normale.

È proprio tenendo presenti queste considerazioni che si spiega l'importanza che ha – sulla formazione dell'immagine latente – la velocità con cui avviene la liberazione dei fotoelettroni destinati ad essere catturati dalle tracce e quindi l'andamento con cui arrivano i fotoni sullo strato sensibile. Tale andamento è misurato dalla densità di flusso energetico, in unità energetiche, oppure dall'illuminamento, in unità fotometriche, e cioè rispettivamente in erg $\cdot$ sec^{-1} cm^{-2}, e in *lux*. Infatti è stato accertato in base a numerose esperienze che l'effetto della radiazione sullo strato sensibile non dipende semplicemente dal numero dei fotoni che esso ha ricevuto per cm^2 durante il tempo di posa, cioè dell'esposizione $E = H \cdot t$, dove H è la densità di flusso energetico e t la durata della posa. Variando H

entro un ampio intervallo, e conseguentemente t in modo che E rimanesse costante, si è trovato che l'effetto della radiazione, cioè la percentuale di granuli resi sviluppabili da una certa E, è massimo per $H = H_{opt}$. Dato che le H rappresentano in fondo il numero di fotoni ricevuti nell'unità di tempo da ogni granulo, ciò significa che se i fotoni arrivano troppo numerosi nell'unità di tempo (forti intensità, $H \gg H_{opt}$), i fotoelettroni che essi liberano dànno origine spontaneamente ad una reazione antagonista che tende a distruggere l'immagine latente.

Un risultato simile si ha anche nel caso opposto che i fotoni arrivino troppo radi (deboli intensità, $H \ll H_{opt}$). In questo caso la reazione antagonista può non essere la stessa rispetto a quella che si ha nel caso precedente, ma ha ugualmente il risultato di eliminare gli elettroni liberati dalla radiazione, dopo che essi sono stati catturati dalla traccia di impurezza. Bisogna pensare in questo caso che l'immagine latente sia instabile fino a quando non ha assunto proporzioni sufficienti.

Questa è l'interpretazione moderna di un complesso di esperienze cominciate 50 anni or sono da Abney e Schwarzschild, alle quali hanno dato importanti contributi Jones e i suoi collaboratori e fra gli altri recentemente, Webb [5].

Un trattamento originale di questo problema è quello dovuto a Blair e Leighton [6]. Essi assumono che la formazione dell'immagine latente sia il risultato di un'azione chimica; che durante l'azione della luce avvengano due processi, il primo tendente a formare l'immagine latente e l'altro a distruggerla. Inoltre la prima reazione sarebbe autocatalitica, cioè l'argento formato accrescerebbe la sua velocità; infine la velocità della reazione inversa sarebbe funzione della massa di immagine latente già prodottasi. In base a queste ipotesi Blair e Leighton concludono che la densità D ottenibile dallo sviluppo dell'immagine latente formatasi nel tempo t è data dall'espressione

$$(2) \qquad \frac{dD}{dt} = K_1 (D_{max} - D) \sqrt{D} - K_2 D$$

dove D_{max} è la massima densità sviluppabile e K_1 e K_2 rappresentano le costanti che caratterizzano l'andamento progressivo e regressivo del fenomeno di formazione dell'immagine latente.

(5) W. De W. Abney, *La non validità di una legge fotografica con luce molto intensa* « Photogr. Journ. », 1894, *18*, p. 302. K. Schwarzschild, *Sulla legge di non reciprocità nella gelatina a bromuro d'argento* « Astrophys. Journ. », 1900, *11*, p. 89. L. A. Jones e collaboratori, *Sulla relazione fra tempo e intensità nell'esposizione fotografica.* « Journ. of the Opt. Soc. of America », 1923, 7, p. 1079; 1925, *11*, p. 319; 1926, *13*, p. 443; 1927, *14*, p. 223. J. H. Webb, *La non validità della legge di reciprocità alle basse intensità.* « Journ. Opt. Soc. of America », 1938, *28*, p. 431.

(6) J. M. Blair e P. A. Leighton, *Una nuova equazione della velocità di formazione dell'immagine latente fotografica.* « Journ. of physical Chemistry », 1932, *36*, p. 1649.

Da questo punto di vista la teoria di Blair e Leighton in certo qual modo diceva di più di quella posteriormente elaborata da Gurney e Mott. Ma non ci sembra chiaro il nesso fra il meccanismo di formazione dell'immagine latente (cui si riferiscono le loro ipotesi) e la densità presa in considerazione della loro equazione, la quale densità è il prodotto finale del processo fotografico dopo lo sviluppo. Il numero maggiore o minore di fotoni che arrivano nel tempo t può contribuire a rendere o no sviluppabile ognuno dei granuli che costituiscono l'emulsione, ma non si comprende come il tempo t stesso possa influire sulla densità finale. Le reazioni diretta e retrograda debbono avvenire nell'interno di ogni granulo e non debbono rappresentare interazioni fra i granuli stessi, a meno che t non rappresenti la durata dello sviluppo.

Che la reazione dello sviluppo abbia un andamento simile a quello descritto dalla (2), quando appunto t abbia quest'ultimo significato, era già noto fino dalle ricerche classiche di Hurter e Driffield. Così come sta, invece, il significato dell'espressione (2) non appare molto chiaro, e di questo parere debbono essere stati gli autori successivi, poichè le conclusioni di Blair e Leighton sono state piuttosto trascurate nella elaborazione dei modelli più recenti.

Tuttavia la teoria di Blair e Leighton ha il pregio di porre il fenomeno della formazione dell'immagine latente nel quadro delle teorie della cinetica chimica. A nostro parere, il concetto che anche la formazione dell'immagine latente in un singolo granulo sia un fenomeno che va considerato come un problema di concentrazioni si inquadra bene nell'interpretazione quantistica che oggi si dà del fenomeno stesso. Ci sembra verosimile che il gas elettronico, che ad un certo istante viene a formarsi entro il granulo, obbedisca a leggi analoghe a quelle che si osservano nei gas atomici, in ciò che concerne la concentrazione e l'azione di massa. Vien fatto di ricordare come, nel campo astrofisico, l'idea di Saha di considerare la reazione atomo $\rightleftarrows$ ione + elettrone alla stregua di una reazione chimica e lo studio delle condizioni di equilibrio in un miscuglio di questo tipo, abbia portato a brillanti successi, anche prima che esso venisse aggiornato secondo i procedimenti della meccanica quantistica [7].

L'analisi di alcune curve di annerimento, ottenute da Webb ed Evans [8] in particolari condizioni sperimentali che descriveremo brevemente, ci ha fornito degli elementi concreti degni di considerazione per la chiarificazione di questo punto di vista.

(7) J. Eggert, *Sullo stato di dissociazione dei gas stellari* « Physik. Zeitschr. », 1919, *20*, p. 570; M. N. Saha, *L'ionizzazione della cromosfera solare* « Philosoph. Mag. », 1920, *40*, p. 472.

(8) J. H. Webb e C. H. Evans, *Studio sperimentale della formazione dell'immagine latente mediante pose interrotte e tipo Herschel a bassa temperatura. Misura della non reciprocità a bassa temperatura.* « Journ. Opt. Soc. America », 1938, *28*, p. 249.

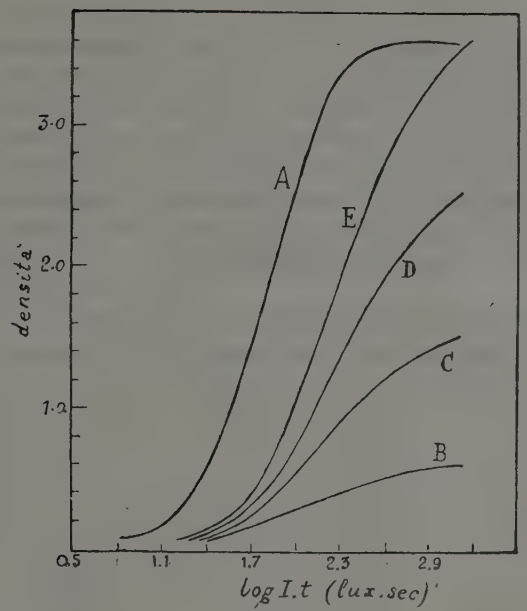


fig. 2.

Webb ed Evans hanno pubblicato varie curve caratteristiche di annerimento per una certa emulsione. Una curva normale si aveva dando allo strato una serie di esposizioni alla temperatura di 20° C (fig. 2, curva A). Una curva molto più schiacciata (curva B) invece si aveva mantenendo lo strato durante l'esposizione e fino al momento dello sviluppo alla temperatura di — 186° C. Ciò significa che, in confronto con quanto avviene alla temperatura ambiente, la stessa esposizione, cioè lo stesso numero di fotoni, rende sviluppabile un numero molto minore di granuli. La spiegazione di un comportamento così diverso non può essere ricercata in quel processo primario di formazione dell'immagine latente che, come abbiamo visto, è indipendente dalla temperatura; ma piuttosto nel fatto che i fotoelettroni, caduti nella buca di potenziale in corrispondenza delle irregolarità del reticolato, non possono unirsi agli ioni Ag^+ che praticamente sono bloccati nella loro posizione entro il cristallo. Ne consegue un riassorbimento parziale degli elettroni stessi, che ritornano nella banda 4 P dopo essere sfuggiti dalle tracce.

Le curve intermedie C, D ed E sono state ottenute esponendo a — 186° C, ma dividendo l'esposizione rispettivamente in 2, 4 ed 8 rate e portando negli intervalli lo strato sensibile a temperatura ambiente. Il risultato di questo procedimento è che per una certa esposizione un numero sempre maggiore di granuli diventa sviluppabile al crescere del numero

degli intervalli. Ciò significa che la suddivisione delle esposizioni, cioè dei fotoni in arrivo, permette agli ioni Ag^+ in un numero sempre maggiore di casi di emigrare durante i periodi di permanenza alla temperatura ambiente verso le tracce di impurezze e di formarvi un'immagine latente sufficiente per rendere sviluppabile il granulo. Anche la densità massima cresce col numero delle rate in cui è divisa l'esposizione, e per $n = 8$ essa risulta almeno uguale a quella ottenibile in condizioni normali. Ciò significa che la formazione dell'immagine latente non è danneggiata, purchè i fotoni siano in numero molto maggiore del normale e convenientemente razionati.

Noi abbiamo esaminato l'andamento delle curve (D , n) densità–numero di rate, per diversi valori dell'illuminamento, cioè la relazione fra il numero

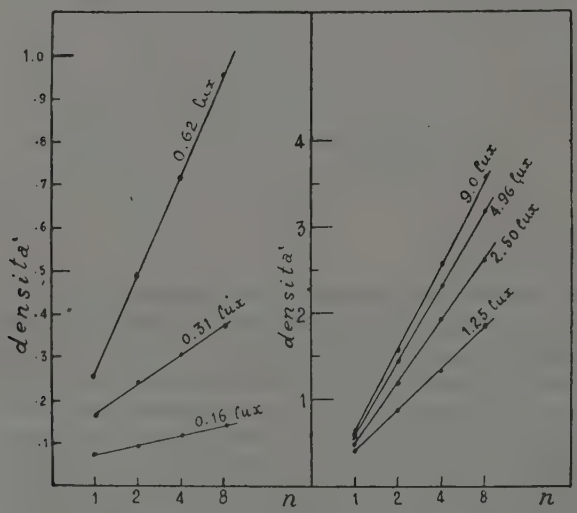


Fig. 3.

di granuli resi sviluppabili e il numero di rate in cui viene diviso l'arrivo di un certo numero di fotoni.

Se si riportano le densità in funzione del log n, per E = 0,16 ; 0,31 ; 0,62 ; 1,25 ; 2,50 ; 4,96 ; 9,0 lux, si ottengono sempre dei tratti rettilinei (fig. 3), ognuno dei quali ha una pendenza maggiore del precedente. Ciò significa in primo luogo che, data una certa esposizione a temperatura molto bassa, il numero dei granuli resi sviluppabili va crescendo a mano a mano che questa esposizione viene suddivisa in un numero sempre maggiore di rate, l'aumento essendo sempre di carattere logaritmico. In secondo luogo si può dedurre dalle rette della fig. 3 che l'aumento della densità ΔD, ottenuto dalla suddivisione delle esposizioni, è piccolo se l'illumina-

mento dello strato è basso, cioè se vi arrivano soltanto pochi fotoni nell'unità di tempo. Invece il ΔD diventa sempre maggiore a mano a mano che l'afflusso dei fotoni diventa più affollato. Ciò significa che, pur non avvenendo a $-186°$ C la reazione $Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$ a causa dell'immobilità degli ioni, tuttavia gli elettroni rimangono nella traccia e in secondo luogo che, alla temperatura ambiente, la migrazione degli ioni Ag^+ attraverso il cristallo avviene più rapidamente del processo di eliminazione dei fotoelettroni. La reazione $Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$ è tanto più facilitata quanto maggiore è il numero di fotoni e quindi di elettroni che ad ogni rata vengono a trovarsi nella traccia.

Un'ulteriore considerazione si può fare riportando la pendenza delle rette della fig. 3 in funzione dell'illuminamento. È molto notevole che si

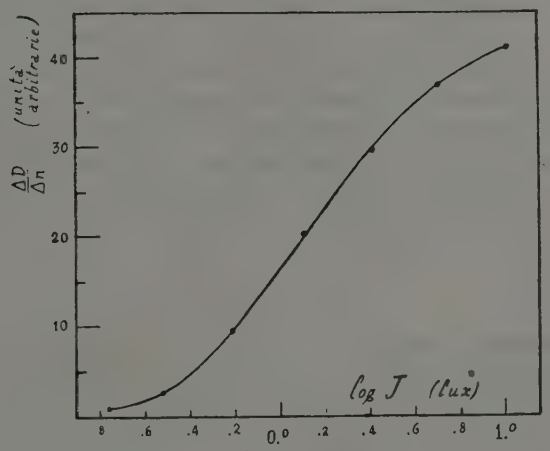


Fig. 4.

ritrova una curva del tipo delle solite curve caratteristiche (fig. 4). Questa volta però la relazione trovata si riferisce al fenomeno che avviene nell'interno del granulo, senza implicare l'operazione dello sviluppo.

La curva della fig. 4 significa che, dato un certo numero di rate, la suddivisione dei fotoni arrivati su ogni granulo è tanto più vantaggiosa quanto più grande è il numero stesso dei fotoni, cioè l'illuminamento. Tuttavia il vantaggio conseguito è piccolo per deboli illuminamenti (quando il granulo può collocare più facilmente i pochi fotoelettroni), diventa maggiore per illuminamenti intermedi e finalmente tende ad un limite quando i fotoni sono troppi.

Il fatto che la curva E ($n = 8$) sale fino ad una D_{max} non inferiore a quella normale della curva A, dimostra che un rateamento sufficiente dei fotoni permette di rendere tutti i granuli sviluppabili. Tuttavia la curva E è spostata verso le maggiori esposizioni e ciò significa che il processo di

formazione dell'immagine latente, alle basse temperature, ha un rendimento quantistico più basso e la differenza è da attribuire non già al processo primario, ma a quella reazione retrograda di cui Blair e Leighton avevano parlato pur da un altro punto di vista. Ancora una volta si deve precisare che i nostri ragionamenti si riferiscono al processo che avviene nell'interno del granulo, e non alla reazione di sviluppo.

Come si osserva nella curva della fig. 4, l'incremento di densità ΔD ottenuto dalla suddivisione dell'esposizione in un certo numero di pose, cioè la facilitazione che ne deriva agli effetti della formazione dell'immagine latente, tende ad un massimo che deve verificarsi quando ad ogni rata la velocità di formazione dei fotoelettroni è uguale alla somma fra la velocità con cui avviene il riassorbimento nelle bande normali di potenziale e la velocità con cui avviene la combinazione con gli ioni di argento.

Se N_f è il numero di fotoni, N_e il numero dei fotoelettroni che essi liberano, N_e' il numero dei fotoelettroni che si combina con gli ioni d'argento, N_e'' il numero dei fotoelettroni che viene riassorbito dal granulo, avremo, per le velocità delle rispettive reazioni, in condizioni di equilibrio

$$a \cdot H = b \frac{dN_f}{dt} = \frac{dN_e}{dt} = \frac{dN_e'}{dt} + \frac{dN_e''}{dt} \qquad (4)$$

(A) (B) (C)

dove H è ancora la densità di flusso energetico, ed a e b dei coefficienti di proporzionalità.

La velocità della reazione (A) non dipende dalla temperatura, quella della reazione (B) cresce al crescere della temperatura, quella della reazione (C) dipende dalla temperatura soltanto per quella frazione di elettroni che ritornano per effetto termico nella banda 4 P, mentre cresce con N_e per la repulsione elettrostatica fra gli elettroni concernenti nella traccia.

Se le esposizioni che Webb ed Evans riportano fossero state date in unità energetiche, invece che fotometriche, sarebbe stato interessante di tentare di dare una forma quantitativa a tali considerazioni, dalle quali si sarebbe forse potuto trarre un'espressione numerica per la velocità di riassorbimento dei fotoelettroni alla temperatura di — 186° C per l'emulsione considerata, cioè il valore di $\frac{dN_e''}{dt}$.

Ad ogni modo le deduzioni tratte dall'esame dell'andamento della curva di cui alla fig. 4 confermano le nostre considerazioni e definiscono il comportamento delle due reazioni antagoniste che hanno luogo nel granulo. Tali reazioni, come le ordinarie reazioni chimiche, vanno inquadrate nelle teorie della cinetica chimica, fatti gli opportuni adattamenti per tener conto delle particelle che entrano in giuoco.

Resta da aggiungere che, quando si abbiano flussi energetici molto deboli, per esempio nella fotografia delle stelle più deboli, la formazione dell'immagine latente avviene molto lentamente, a mano a mano che arrivano fotoelettroni nelle tracce. La reazione $\frac{dN''}{dt}$ vale in questo caso non tanto per la repulsione fra gli elettroni stessi, quanto per l'eventualità che essi ritornino spontaneamente alla banda 4 P per effetto termico. Per questo Webb ed Evans suggeriscono di mantenere lo strato fotografico a temperature molto basse durante la fotografia di sorgenti debolissime che richiedono molte ore di posa.

Oltre alla dimostrazione di alcuni aspetti del fenomeno di formazione dell'immagine latente, quale ci è stata permessa dall'interpretazione della curva di cui alla fig. 4, la presente Nota tende a conciliare le ipotesi di Blair e Leighton, interpretate da un nuovo punto di vista, con la teoria di Gurney e Mott e coi risultati di altre esperienze più recenti.

Abbiamo motivo di credere che da un coordinamento dei vari risultati sperimentali e dei criteri che hanno portato da parte dei vari autori alla pubblicazione di formule che collegano la densità ottenuta da uno strato fotografico con l'esposizione da esso ricevuta, si possano trarre altre interessanti chiarificazioni, sulle quali ci riserbiamo di ritornare a suo tempo.

Chimica (Chimica Biologica). — *Il meccanismo dell'inibizione da florizina sul sistema enzimatico di riduzione dell'acido ossalacetico* [1]. Nota di A. Ruffo e C. Cennamo, presentata [2] dal Socio G. Quagliariello.

In ricerche precedenti [3], basandoci sul fatto che durante la riduzione dell'acido ossalacetico operato da poltiglie di fegato di cavia, gli adenilpolifosfati diminuiscono notevolmente, mentre durante l'ossidazione dell'acido malico essi aumentano in proporzione pressocchè equimolecolare con l'acido malico che si ossida, abbiamo avanzato l'ipotesi che la reazione:

$$\text{acido ossalacetico} \rightleftarrows \text{acido malico},$$

decorra attraverso un intermediario fosforico di elevato contenuto energetico, e precisamente attraverso il fosfoenolossalacetato.

Per portare un'altra prova in favore di questa supposizione riferiamo le seguenti ricerche con le quali abbiamo cercato di chiarire il meccanismo

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica biologica dell'Università di Napoli.
(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.
(3) Ruffo e Cennamo, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *20*, 1945; *21*, 1946 (in stampa).

con cui la florizina inibisce la riduzione dell'acido ossalacetico e l'ossidazione dell'acido malico. Da un lavoro di Breusch [4] si ricava, infatti, che la florizina inibisce circa dell'80 % la riduzione dell'acido ossalacetico e l'ossidazione dell'acido malico: siccome da più recenti osservazioni di Kaplan e Greenberg [5] e di Ruffo e Imperato [6] è apparso che questo veleno impedisce il trasporto dei radicali fosforici fra acilfosfati ed adenilpolifosfati, noi abbiamo voluto vedere se anche in questo caso il meccanismo di inibizione fosse lo stesso.

Esperimenti e Risultati. – Per mettere in evidenza l'azione esercitata dalla florizina sulle reazioni in esame abbiamo prima determinato la distribuzione delle varie frazioni fosforiche acidosolubili durante la riduzione dell'acido ossalacetico in presenza o meno di florizina, e poi abbiamo ripetuto gli stessi esperimenti durante l'ossidazione dell'acido malico.

Per tale scopo abbiamo allestito quattro miscele di incubazione contenenti ciascuna 6 gr. di poltiglia di fegato di cavia preparato subito dopo la morte dell'animale, e le abbiamo agitate a 38° per venti minuti per provocare la sintesi degli adenilpolifosfati che, come è noto dalle ricerche di Lehniger [7], si idrolizzano pressocchè completamente durante la preparazione della poltiglia. Dopo questa incubazione preliminare abbiamo aggiunto alla prima miscela 8 cc di acqua, alla seconda florizina nella concentrazione 0,02 mol, alla terza acido ossalacetico in concentrazione 0,05 mol., ed alla quarta abbiamo aggiunto insieme florizina ed acido ossalacetico (volume finale di ogni miscela circa 20 cc). Abbiamo ancora agitato tutte le prove per circa 15 minuti a 38° e poi le abbiamo deproteinizzate a freddo con acido tricloroacetico (concentrazione finale 4 %), le abbiamo filtrate, e ciascuno dei filtrati lo abbiamo diviso in due aliquote: sulla prima si determina la distribuzione delle varie frazioni fosforiche seguendo la tecnica di Kaplan e Greenberg, già descritta nei suoi particolari in un lavoro precedente [8]; sulla seconda aliquota si dosa l'acido malico formatosi, con la tecnica polarimetrica di Straub [9].

I risultati di queste esperienze sono riferiti nella tabella I, dove per brevità abbiamo riportato solo i dati relativi alla variazione del fosforo inorganico e del fosforo dell'ac. adenosintrifosforico (ATP), in relazione all'acido malico formatosi in ogni singola prova (cioè in 6 gr. di poltiglia) in presenza o meno di florizina.

(4) Breusch, « Enzymol. », *10*, 165, 1942.
(5) Kaplan e Greemberg, « J. Biol. Chem. », *156*, 511; 525, 1944.
(6) Ruffo e Imperato, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *20*, 400, 1945.
(7) Lehniger, « J. Biol. Chem. », *157*, 363 (1945).
(8) Ruffo e Cennamo, questi « Rendiconti », 1946 (in stampa).
(9) Straub, « Zeit. physiol. Chem. », *226*, 215 (1936).

TABELLA I.

Azione della florizina sulla distribuzione del P *inorganico e del* P *dell'*ATP *durante la riduzione dell'acido ossalacetico.*

	Frazione				Inibizione %	Acido malico formatosi		Inibizione %
	P inorganico		P dell'ATP					
	mg.	μ mol.	mg.	μ mol.		mg.	μ mol.	
1) Dopo 20' a 38°	2,88	93	0,41	13	—	—	—	—
2) Dopo ancora 15' a 38°	2,76	90	0,50	16	—	—	—	—
3) Id. id. + florizina	2,85	92	0,42	13	99	—	—	—
4) Id. id. + acido ossalacetico (senza florizina) . . .	3,13	101	0,12	4	—	2,6	19	—
5) Id. id. + acido ossalacetico + florizina	2,86	92	0,40	13	98	0	0	100

I dati esposti in questa tabella, mostrando chiaramente che in presenza di florizina l'acido ossalacetico non viene ridotto, confermano i precedenti risultati di Breusch e mostrano inoltre come contemporaneamente si arresta il trasporto dei radicali fosforici dal sistema degli adenilpolifosfati. Infatti si vede che mentre nella prova in bianco (esperimento n. 2) l'ATP continua a sintetizzarsi, durante il secondo periodo di incubazione nella prova addizionata con florizina (esperienza n. 3), tale sintesi è soppressa completamente; ed esaminando i dati che si riferiscono alle prove addizionate con acido ossalacetico si vede come mentre in assenza di florizina gli adenilpolifosfati si idrolizzano contemporaneamente alla formazione dell'acido malico (esperimento n. 4), l'aggiunta della florizina arresta tutte e due le reazioni praticamente con la stessa intensità (esperimento n. 5). Il che in altre parole significa che la diminuzione degli adenilpolifosfati che si verifica durante la riduzione dell'acido ossalacetico non avviene in presenza di florizina.

Abbiamo poi ripetuto la stessa esperienza durante lo svolgersi della reazione inversa, e cioè abbiamo determinato la distribuzione delle varie frazioni fosforiche acido solubili durante l'ossidazione dell'acido malico in presenza o meno di florizina.

Anche in questo caso abbiamo preparato quattro miscele di incubazione contenenti questa volta 4 gr. di poltiglia, e 6 cc di una soluzione di arsenito di sodio 0,16 %, onde impedire la riduzione dell'acido ossalacetico che si origina dall'acido malico. Le abbiamo lasciate per cinque minuti a temperatura ambiente, e poi a tutte le prove abbiamo aggiunto 2 cc di acqua contenenti

50 mg. di solfato di idrazina ed 1 cc di una soluzione satura di bicarbonato: infine, una delle prove si addiziona con 2 cc di acqua distillata, la seconda con florizina in concentrazione 0,02 mol., la terza con 20 mg. di acido malico sciolti in 2 cc di acqua, e la quarta con florizina ed acido malico insieme (volume finale di ogni prova circa 15 cc). Abbiamo quindi agitato tutte le prove per circa venti minuti a 38°, le abbiamo poi deproteinizzate a freddo con acido tricloroacetico (concentrazione finale del 4 %), abbiamo filtrato ed abbiamo diviso in due aliquote tutti i filtrati. Su ogni aliquota, come nelle esperienze precedenti, abbiamo determinato la distribuzione delle varie frazioni fosforiche e dell'acido ossalacetico formatosi con il metodo colorimetrico di Straub (loc. cit. in (9)).

Nella tabella II sono riportati i risultati di questi esperimenti.

TABELLA II.

Azione della florizina sulla distribuzione del P *inorganico e del* P *dell'*ATP *durante l'ossidazione dell'acido malico.*

	Frazione				Inibizione %	Ac. ossalacetico formatosi		Inibizione %
	del P inorganico		del P dell'ATP					
	mg.	μ mol.	mg.	μ mol.		mg.	μ mol.	
1) Dopo 20' a 38°	1,91	61	0,30	10	—	—	—	—
2) Id. id. + florizina	2,14	69	0,09	3	98	—	—	—
3) Id. id. + acido malico (senza florizina)	1,55	50	0,64	21	—	1,58	12	—
4) Id. id. + acido malico + florizina	2,12	68	0,10	3	98	0	0	100

I risultati riportati in questa tabella sono perfettamente paragonabili a quelli riportati nella tabella precedente. Anche questi dati mostrano, infatti, che la florizina aggiunta alla poltiglia epatica incubata per venti minuti a 38° inibisce quasi del cento per cento la sintesi degli adenilpolifosfati (esperimento n. 2), e che aggiunta alle poltiglie incubate con acido malico (esperimento n. 4) inibisce con la stessa intensità sia la sintesi degli adenilpolifosfati sia la formazione dell'acido malico. Il che, in altre parole, significa che la sintesi degli adenilpolifosfati che si verifica durante l'ossidazione dell'acido malico non avviene più in presenza di florizina.

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI. – I risultati ottenuti nei nostri esperimenti mostrano che la florizina inibisce pressocchè con la stessa intensità, da una parte l'idrolisi degli adenilpolifosfati e la riduzione dell'acido ossalacetico,

dall'altra l'ossidazione dell'acido malico e la sintesi degli adenelpolifosfati che ad essa si accompagna.

Per il fatto ormai ben chiarito, secondo cui gli adenilpolifosfati reagiscono reversibilmente con gli acilfosfati, e per il fatto da noi osservato sperimentalmente da cui appare che la florizina inibisce contemporaneamente il trasporto di idrogeno ed il trasferimento dei radicali fosforici, ci sembra logico affermare che il trasporto di idrogeno sul sistema della riduzione dell'acido ossalacetico sia in diretto rapporto con il trasferimento dei radicali fosforici. Il che significa, secondo noi, che la riduzione dell'acido ossalacetico e l'ossidazione dell'acido malico sono reazioni accoppiate al trasporto di radicali fosforici.

Acquista in tal caso nuovo valore l'ipotesi da noi enunciata in precedenza secondo cui un acilfosfato, precisamente il fosfoenolossalacetato, rappresenta il composto fosforico intermediario della reazione:

$$\text{acido ossalacetico} \rightleftarrows \text{acido malico.}$$

Questa reazione, secondo il nostro modo di vedere, si svolgerebbe nel seguente modo: l'acido ossalacetico (in forma enolica) reagirebbe con l'ATP dando origine ad ADP ed a fosfoenolossalacetato; questo, per azione della diidrocodeidrasi II viene ridotto ad acido fosforico e fumarico, che a sua volta, appena formatosi, rapidamente si trasforma in acido malico fino allo stabilirsi dell'equilibrio. Per l'ossidazione dell'acido malico evidentemente si dovrebbero svolgere le reazioni inverse.

Da quanto finora abbiamo riferito si deducono due considerazioni principali: da un lato risulta che il primo prodotto che si ottiene nella riduzione dell'acido ossalacetico non è l'acido malico ma il fumarico (e viceversa non è l'acido malico ma il fumarico che viene ossidato ad acido ossalacetico). Da un altro lato appare che la codeidrasi II non agisce più al livello dell'acido ossalacetico bensì al livello del fosfoenolossalacetato.

La codeidrasi II, quindi, non si dovrebbe più considerare il coenzima dell'ossalacetico–idrogenasi, ma piuttosto di un nuovo tipo di enzima che potremo indicare come fosfoenolossalacetico–idrogenasi, cui sarebbero attribuite tutte le proprietà finora caratteristiche dell'ossalacetico–idrogenasi, e cioè l'estrema labilità, l'inibizione specifica da $CaCl_2$ ecc.

Un'ultima osservazione ci resta a fare, data la notevole velocità con cui si compiono le reazioni di ossidoriduzione e quella di trasferimento dei radicali fosforici. Analogamente a quanto sostiene Ochoa [10] per la chetoglularico–deidrogenasi si potrebbe pensare che anche la deidrogenasi in questione appartenga a quella specie di enzimi facilmente dissociabili costituiti da una sola proteina che si può coniugare successivamente con vari gruppi prostetici (codeidrasi ed acido adenilico nel nostro caso) formando complessi enzimatici di elevata specificità.

(10) Ochoa, « J. Biol. Chem. », 87, 155 (1944).

Biologia. — *Ricerche comparative sulla struttura delle ossa dei Vertebrati* [1]. Nota di R. Amprino e G. Godina, presentata [2] dal Socio G. Levi.

Abbiamo voluto prendere in esame la struttura della sostanza compatta di varie ossa lunghe in un grande numero di specie di vertebrati (dagli anfibi ai mammiferi), nella speranza di interpretare il significato delle considerevoli differenze strutturali fra le ossa di animali diversi, già illustrate in parte da pregevoli ricerche di precedenti AA.

Abbiamo visto che il tessuto osseo nei bassi vertebrati ha struttura più «semplice», nei vertebrati più alti più «complessa»; per struttura «complessa» intendiamo l'esistenza nella compatta di un insieme di frammenti cementati, variamente disposti e distribuiti (sistemi di Havers e gusci), ognuno dei quali è, a sua volta, costituito da strati di materiale con fasci di fibrille collagene ad orientamento particolare; «semplice», invece, è la struttura della compatta non suddivisa in frammenti e con disposizione più uniforme del materiale costruttivo (fibre, fasci di fibrille) nelle sue varie parti; perciò, nell'impiego di questi termini, semplice e complesso, ci riferiamo al significato convenzionale che intendiamo di dar loro.

Nelle ossa a struttura più semplice – ad esempio nella diafisi di ossa lunghe di anfibi urodeli (vedi anche Froboese, v. Eggeling) – la compatta è interamente formata da sostanza fondamentale a grossolani fasci di fibre collagene che si intrecciano fra di loro, mantenendo nell'insieme un orientamento parallelo all'asse longitudinale della diafisi; essa è attraversata da scarsi canali vascolari, in gran parte radiali. La compatta ha aspetto «massivo» (Gross) senza speciali addensamenti dei fasci di fibre (osteoni) e senza particolare orientamento attorno ai canali vascolari delle cellule ossee e dei loro prolungamenti, i quali si anastomizzano a rete in tutti i piani; un esile strato di osso, nettamente demarcato dal resto della sostanza fondamentale, riveste la parete del cavo midollare (osteone midollare). Negli urodeli tutta la compatta è dunque costituita da osso formatosi per apposizione dal periostio, *osso periostale primario*; questo materiale persiste per tutta la vita dell'animale e aumenta di quantità finchè dura l'apposizione di sostanza fondamentale a spese del periostio; l'esile strato che tappezza il cavo midollare è costituito da osso che si indica come *secondario*, dato che si è formato secondariamente, previa erosione di materiale preesistente.

In grossi anuri adulti (Calyptocephala, Bufo) si apprezzano in piccolo numero cavità perivascolari (a decorso longitudinale) in seno alla compatta,

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia Umana Normale e nell'Istituto di Anatomia Normale Veterinaria dell'Università di Torino.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

in prossimità del cavo midollare e in continuità materiale con questo; esse non appena si formano, vengono colmate da tessuto osseo a disposizione concentrica, a struttura identica a quella del materiale che riveste la parete del cavo midollare; si costituiscono in tal modo sistemi concentrici, separati dal materiale preesistente mediante una linea cementante; negli anuri di grande mole, dunque, oltre all'osso periostale primario anche sistemi concentrici di Havers (*osteoni secondari*) concorrono a costituire la compatta; cioè una parte, non estesa, dell'osso periostale primario è sostituita da altro materiale, di formazione più tardiva.

Più «complessa» è la struttura delle ossa in rettili di grossa mole, mentre è più semplice – cioè più simile a quella descritta – nei piccoli rettili (specialmente nei sauri e nei loricati di minor mole); la maggiore complessità strutturale dipende non solo dal numero talora considerevole di osteoni secondari che si formano nelle cavità d'erosione della zona profonda della compatta ma anche dall'esistenza, in seno all'osso periostale primario, di numerosi canali vascolari longitudinali, la cui parete è formata da un addensamento dei fasci di fibre collagene della sostanza fondamentale, i quali, nella compatta degli anfibi erano, come si è detto, uniformemente distribuiti (*osteoni primari*).

Il numero degli osteoni primari e secondari è rilevante nei grossi loricati e sopratutto nei cheloni; le ossa di grandi tartarughe di età inoltrata possiedono un gran numero di sistemi concentrici secondari; essi risiedono nella metà interna della compatta e sono costituiti da robusti fasci di fibre a decorso parallelo a quello del lume che delimitano; anche l'osso primario, che persiste negli intervalli fra gli osteoni secondari, e forma la metà esterna della compatta, ove i sistemi di Havers mancano, è formato da fasci grossolani di fibre a decorso per lo più parallelo; commisti a questi decorrono altri fasci che si intrecciano fra di loro, ed altri ancora disposti a strati, che s'incrociano sotto angoli vari negli strati successivi.

Le ossa degli uccelli sono caratterizzate, rispetto alle precedenti, da una più fitta rete di canali vascolari a varia orientazione; negli animali adulti, nella maggior parte delle ossa, prevalgono i tratti longitudinali, circondati da addensamenti di fasci robusti di fibre collagene a decorso parallelo al lume (osteoni primari); gli osteoni secondari mancano o sono eccezionali nelle ossa di piccoli uccelli di giovane età; sono abbondanti, invece, tanto da costituire talvolta la più gran parte della compatta, sia negli uccelli di grande mole (uccelli corridori, pellicaniformi, ecc.), sia anche nelle ossa distali degli arti di uccelli di proporzioni corporee modeste, nell'età adulta o inoltrata (pappagalli, rapaci).

Nelle ossa dei mammiferi si vedono strutture assai varie; più complessa, in genere, la struttura delle ossa nei mammiferi di grande mole, nelle quali grandissimo è il numero degli osteoni secondari; negli animali al termine dell'accrescimento ed ancor più ad età inoltrata, essi prevalgono

quantitativamente sull'osso primario periostale. Con una certa approssimazione si può dire che la struttura dell'osso dei primati è più complessa di quella dei carnivori e quest'ultima più di quella di sdentati, roditori, insettivori; più semplice ancora è la struttura nelle ossa dei chirotteri; una struttura assai peculiare presentano le ossa dei pinnipedi, analoga a quella di cetacei e sirenidi. Su queste differenze incidono in modo sensibile le disparità di mole somatica e di durata della vita.

La struttura delle ossa dei monotremi (particolarmente di *Echidna*) si avvicina nel complesso a quella di insettivori e piccoli roditori; abbastanza semplice è la struttura dell'osso dei marsupiali, se si considera la loro notevole mole somatica.

Considerando complessivamente, nei loro tratti comuni e in quelli differenziali, la struttura delle ossa dei vertebrati, si può affermare che le ossa di tutti i vertebrati subiscono dei processi fondamentalmente analoghi di accrescimento, e di trasformazione strutturale più tardiva.

In singole specie, prevalentemente di piccola mole ma appartenenti a tutte le classi, i mutamenti riguardano in via esclusiva l'aumento in spessore della compatta e le modificazioni nella distribuzione e nel decorso delle fibrille collagene (struttura di 3° ordine); essa è più regolare negli strati di più tardiva deposizione. In queste specie tutta la compatta è costituita soltanto da osso periostale primario; un esile strato di osso secondario riveste la parete del cavo midollare, a partire dal momento in cui l'erosione è cessata; manca in queste specie, dunque, un rimaneggiamento interstiziale della compatta.

In altre specie, invece, assai più numerose - tanto in rettili quanto in uccelli e mammiferi – il materiale, che si depone per attività del periostio durante il periodo di più attivo accrescimento, è gradualmente sostituito durante un periodo vario di tempo, per erosione interstiziale e rideposizione di nuova sostanza fondamentale: osso secondario. Quest'osso secondario può presentare struttura identica a quello preesistente, ma in genere presenta una struttura più fine e complessa.

Molte specie (interi ordini di animali), nelle quali si riteneva che non esistessero osteoni secondari, se non come reperto d'eccezione, presentano invece, con grande costanza, sistemi di Havers: è quanto noi abbiamo potuto dimostrare negli uccelli, nei rettili, in singoli anfibi e Gross in pesci fossili.

È evidente che soltanto in individui di età adulta o inoltrata avviene anche in questi animali una sostituzione di osso secondario all'osso primario periostale; la pretesa di istituire una distinzione fra la struttura dell'osso in specie animali differenti, fondandosi sul criterio della presenza o meno di osteoni secondari potrebbe condurre a errate valutazioni, se non si è sicuri di aver esaminato individui di età inoltrata. Sta il fatto che la sostituzione di osso primario con osso secondario può avvenire in quasi tutte le specie di qualsiasi classe.

Per quanto, in via di massima, l'osso secondario sia quantitativamente più abbondante, rispetto a quello primario, sopratutto negli alti vertebrati e più scarso nei bassi vertebrati, non si può dire che la sostituzione dell'un materiale coll'altro segua nei vari vertebrati un andamento progressivamente crescente nelle classi successive; basti ricordare che in singoli rettili ed uccelli (cheloni, struzionidi, certi rapaci) la compatta di molte ossa lunghe è prevalentemente costituita da osteoni secondari, mentre invece gli osteoni sono scarsi in singoli monotremi e sopratutto nei chirotteri e in piccoli roditori.

Osso primario ed osso secondario non devono essere intesi come materiali diversi; si tratta, invece, sempre dello stesso tessuto, il quale si depone in tempi successivi ed in sede diversa.

Un processo che si instaura in tutte le ossa di vertebrati, nei quali prima e dopo il termine dell'accrescimento somatico ha luogo un rinnovamento del materiale primario periostale, è l'*osteoporosi senile*, la quale è la conseguenza di differenze quantitative fra i processi di erosione e deposizione, con prevalenza dei primi; quando l'erosione prevale sulla deposizione, le cavità che si scavano nella compatta persistono come tali, oppure sono rivestite soltanto da esili strati incompleti di tessuto osseo neoformato.

Differenze di alto grado nella fine struttura del tessuto osseo (struttura di 3° ordine) nelle varie classi sono note da tempo. In base a tali differenze si distinguono, in modo forse eccessivamente schematico: osso a fibre intrecciate, osso a fibre parallele, osso lamellare (Schaffer), oppure, secondo Weidenreich: osso a fibre grossolane intrecciate e osso a fibre fini (*Schalenknochen*), con due varietà a fibre parallele e lamellare. Generalmente si fa una schematica, e in parte inesatta, attribuzione dell'osso intrecciato ai pesci e agli anfibi, e in parte ai rettili, dell'osso a fibre parallele agli uccelli e di quello lamellare ai mammiferi; nell'ontogenesi nei mammiferi si succederebbero in ordine di tempo questi tre tipi di tessuto o, almeno, l'osso fibroso e l'osso lamellare dell'adulto.

In realtà, nessuna classe è caratterizzata da tessuto osseo esclusivamente dell'uno o dell'altro tipo, come già Foote osservò; nè d'altra parte il tessuto osseo a fibre intrecciate e parallele, che compare durante lo sviluppo nelle ossa dei grandi mammiferi e dell'uomo, è identico a quello che si riscontra nelle ossa di vertebrati inferiori ai mammiferi; esso infatti presenta solo qualche analogia strutturale con quello. Non solo; in certe specie la struttura dell'osso si può ricondurre a quella di uno dei tre tipi fondamentali considerati, soltanto con difficoltà; ad esempio il tessuto osseo primario dei marsupiali e l'osso di molti rettili: il primo, infatti, non ha i caratteri dell'osso lamellare, e neppure di quello a fibre parallele (se mai di una varietà tutta speciale), il secondo perchè non ha i caratteri dell'osso fibroso, nè di quello a fibre parallele e neppure di quello lamellare vero e proprio. Dalle nostre ricerche risulta che vi sono un gran numero di varietà diverse

dei singoli tipi di tessuto osseo caratterizzate dal vario spessore dei fasci collageni e dai rapporti quantitativi mutevoli fra osteomucoide e fibre. I tre tipi fondamentali (e le loro varietà) sono spesso, così, intimamente commisti, continuandosi l'uno nell'altro, al punto che talora è impossibile stabilirne i limiti reciproci nello stesso preparato. Infine, come già si è detto, ogni tipo non è peculiare di una classe o di gruppi di specie: troviamo infatti tessuto a fibre intrecciate e a fibre parallele nell'osso primario di anfibi, rettili, uccelli, mammiferi; in singole specie di uccelli, di rettili, di anfibi, abbiamo visto osso lamellare (a fasci di fibre relativamente grossolane) mentre sinora questo tipo di tessuto era considerato tipico dei mammiferi. D'altra parte, nell'ambito dei mammiferi (il cui osso sarebbe, secondo gli AA., caratterizzato, come si è detto, dalla struttura lamellare) l'osso lamellare regolare si trova in singole specie di grande mole in età adulta e spesso manca nelle altre; l'osso dei piccoli mammiferi, infatti, non è sempre formato da lamelle a fasci di fibrille regolarmente alternati, e tale struttura si apprezza talora soltanto in soggetti di età inoltrata, persino in certi mammiferi di grande mole (canguridi).

Solamente negli uccelli la compatta è caratterizzata da una maggiore uniformità delle strutture di 3° ordine; negli individui adulti, si riscontra pressochè esclusivamente osso a fibre parallele e la sua struttura non muta sensibilmente fra specie anche lontane. Tuttavia, anche negli uccelli il tessuto osseo subisce in animali di mole diversa e, nello stesso individuo, nelle età successive, delle peculiari e costanti trasformazioni; nell'età adulta, infatti, i fasci di fibre sono più esili e l'osteomucoide meno abbondante e distribuito in modo più uniforme che in animali di età giovane; assai sottili sono i fascetti che costituiscono l'osteone midollare o che tappezzano le più grandi cavità d'erosione, le quali si costituiscono in singole specie in vicinanza del cavo midollare; questi fascetti, inoltre, decorrono paralleli fra di loro, ma in senso perpendicolare a quelli della restante sostanza fondamentale, e cioè trasversalmente all'asse longitudinale della diafisi.

Noi abbiamo dunque posto in luce che rilevanti differenze strutturali della compatta sono carattere proprio non soltanto della classe e specie alla quale l'animale appartiene, ma sono in rapporto alla grandezza corporea e all'età dell'individuo; come succintamente abbiamo esposto, le ossa subiscono in tutti gli animali prima e dopo la nascita delle incessanti modificazioni di ordine qualitativo e quantitativo, le quali si manifestano per l'azione di processi strettamente analoghi in tutti i vertebrati e sono di grande entità.

Lo studio delle relazioni intercorrenti fra mole somatica e struttura dell'osso non è semplice; salvo eccezioni, animali di grossa mole hanno anche lunga vita e non è possibile scindere quanto nella struttura delle ossa è connesso piuttosto all'una che all'altra variabile. Negli individui di grande mole la struttura è più complessa che in quelli della stessa specie o di

specie affini di mole più piccola. È interessante che, sia in relazione al variare dell'età come della mole somatica, si apprezzano nella struttura dell'osso delle caratteristiche dello stesso ordine (aumento quantitativo del materiale secondario, deposizione di strati di sostanza fondamentale a struttura più fine), per cui in animali di età inoltrata, anche se di piccola mole, si rintracciano talora strutture paragonabili a quelle riscontrabili in animali molto più giovani, ma di mole somatica rilevante; valga per tutti l'esempio della struttura relativamente complessa - considerata la mole somatica modesta – delle ossa lunghe distali dell'arto pelvico di psittaciformi di età adulta o senile. In animali di grande mole e lunga vita le modificazioni che si istituiscono in relazione all'età e alla mole corporea, per così dire, si sommano: la complessità strutturale delle ossa di tali animali è grandissima.

Sotto un altro punto di vista ancora età e grandezza del corpo presentano grande interesse; animali di specie diversa possono, infatti, raggiungere la stessa mole in periodi di tempo variamente estesi, essi hanno cioè velocità diversa d'accrescimento; poichè l'osso subisce durante l'accrescimento delle incessanti e vistose trasformazioni strutturali, a velocità d'accrescimento diverse corrispondono strutture di varia complessità. Anche per la varia durata del periodo d'accrescimento si determinano tra specie e specie differenze della struttura dell'osso. Infine, dato che le trasformazioni strutturali non cessano al termine dell'accrescimento somatico, ma continuano - evidentemente con diversa intensità – durante tutto il successivo periodo che in molti animali, e tra questi i mammiferi e gli uccelli, intercede tra il termine dell'accrescimento e la morte (periodo di stato), anche la diversa durata del periodo di stato si ripercuote sulla struttura delle ossa negli animali ad accrescimento limitato. Ma i dati relativi a queste variabili, se sono ben noti per la specie umana e per alcuni mammiferi domestici, sono ignorati o quasi per molte altre specie di vertebrati.

Inoltre, anche a parità delle suaccennate condizioni, furono riscontrate variazioni individuali rilevanti, che forse sono in rapporto con la costituzione di ogni singolo individuo.

Per l'intrecciarsi in modo diverso da specie a specie di tutte queste variabili, le quali rappresentano, a parer nostro, soltanto una parte di tutte quelle che normalmente sono connesse con modificazioni della struttura dell'osso, la struttura delle ossa in ogni specie presenta delle caratteristiche peculiari: struttura « specifica », che si edifica, per così dire, su di un disegno strutturale fondamentale, caratteristico per ogni classe.

Non riteniamo probabile che, come vari AA. suppongono, si attui un progressivo perfezionamento di struttura del tessuto osseo dai più bassi vertebrati dell'uomo. Noi abbiamo visto, infatti, strutture complesse anche in bassi vertebrati; per citare un solo esempio: la presenza di sistemi concentrici di Havers a struttura lamellare – simili a quelli della compatta dei grandi mammiferi adulti e ritenuti dai più caratteristici di questa classe –

descritta da noi in ossa di anfibi anuri e da Gross (1934) in ossa di sauri fossili di grossa mole, dimostra che nelle ossa di animali appartenenti a qualsiasi classe possono edificarsi strutture complesse («perfette» funzionalmente, come correntemente si afferma), se si realizzano certe condizioni interne ed esterne, allo stato attuale delle nostre conoscenze, imponderabili.

In conclusione, il materiale che forma il primo abbozzo dello scheletro osseo nel periodo prenatale è costituito secondo un piano strutturale comune, molto simile nei vari vertebrati; il che dipende, a nostro avviso, dalla circostanza che gli elementi mesenchinali, i quali producono la sostanza fondamentale dell'osso, si trovano in condizioni esterne ed interne simili in tutte le classi. Nel periodo postnatale, invece, alcune di queste condizioni mutano in modo caratteristico per ogni singola specie; in relazione a tali mutamenti, il tessuto osseo che si depone presenta struttura diversa nei vari animali; e le differenze strutturali sono tanto più accentuate quanto più differenti qualitativamente e quantitativamente sono i fattori che influiscono sull'istofisiologia del tessuto osseo.

Biologia. — *Un interessante tipo di butteratura parassitaria delle mele* [1]. Nota di G. Goidànich, presentata [2] dal Corrisp. L. Petri.

Numerosi sono i micromiceti – specialmente imperfetti – che vivono sulle frutta alterandone più o meno ampiamente i tessuti superficiali e più o meno profondamente quelli interni. Una buona parte di essi, appartenenti alla classe degli Sferossidali, rientrano in generi tra di loro molto simili quali *Phoma*, *Phomopsis*, *Dendrophoma* ed *Ascochyta* [3] e per di più la loro differenziazione specifica si basa su caratteri imprecisamente distintivi sì che la identificazione di esse richiede un accurato esame morfologico e culturale [4]. Alcune di tali specie al contrario sono dotate di caratteristiche strutturali tali che permettono un immediato riconoscimento: si tratta di fomacee a picnidi isolati che differenziano nel ciclo di sviluppo vegetativo delle strutture clamidosporiche che ricordano da vicino le fruttificazioni conidiche degli

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia Vegetale di Roma.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(3) B. A. Kidd and B. A. Beaumont, *Apple rot fungi in storage*. «Trans. Brit. Myc. Soc.», *10*, 1924, pp. 98–118; A. S. Horne, *Champignons isolés de pommes atteintes de «spotting» (tachelure) en Grande-Bretagne*. «Bull. Renseign. agr. et d. mal. d. pl.», *11*, 1920, pp. 1591–1602.

(4) H. W. Wollenweber und H. Hochapfel, *Beiträge zur Kenntnis parasitärer und saprophytischer Pilze. I. «Phomopsis», «Dendrophoma», «Phoma» und «Ascochyta» und ihre Beziehung zur Fruchtfäule*. «Ztschr. f. Paras.», *8*, 1936, pp. 561–605.

ifali *Alternaria*, con le quali sono state anzi da molti autori scambiate e come tali classificate. La esistenza di simili fomacee ad « habitat » frutticolo è stata constatata, si rileva dalla bibliografia (5), con una certa frequenza ed in diverse regioni del vecchio e del nuovo continente, il che fa pensare che, almeno alcuna di esse, trovi nei frutti un ambiente, se non obbligato, per lo meno preferenziale di sviluppo.

È stato perciò con vivo interesse che alcuni anni or sono riuscii ad isolare da frutti alterati uno sferossidale del tipo ora accennato e che mi risultò poi l'agente della alterazione stessa. Il materiale consisteva in mele

Fig. 1. - Mela *Calvilla bianca* affetta da « butteratura parassitaria » provocata da *Peyronellaea veronensis* G. Goid.
(Fot. del prof. E. Malenotti).

di varietà « Calvilla Bianca », prodotte nell'annata 1939, le quali nel novembre del medesimo anno mi furono sottoposte all'esame dal prof. E. Malenotti, Direttore del R. Osservatorio fitopatologico di Verona. I frutti erano affetti da « vaiolatura » o « butteratura » (v. fig. 1), termine col quale si suole indicare quella alterazione costituita da tacche rotondeggianti, di ampiezza limitata, diffuse con una certa regolarità sulla superfice, in corrispondenza delle quali i tessuti appaiono vistosamente alterati assumendo una tinta anche molto cupa e di solito si deprimono in modo marcato; tacche che pur non compromettendo in maniera sensibile l'integrità del frutto ne causano, deturpandone l'aspetto, un grave deprezzamento commerciale. Butteratura che può essere non parassitaria o parassitaria.

(5) F. T. Brooks and G. O. Searle, *An investigation of some tomato diseases*. « Trans. brit. myc. Soc. », 7, 1921, pp. 173–197; H. W. Wollenweber und H. Hochapfel, loc. cit.

L'esame del materiale in campo faceva di già supporre come cosa molto probabile che si trattasse di un caso di quest'ultimo tipo potendosi rilevare con una semplice lente e con notevole frequenza che nel fondo delle tacche esistevano microscopiche fruttificazioni funginee rotondeggianti. L'esame microscopico confermò la supposizione poichè tutti i tessuti interessati dall'alterazione erano permeati da un micelio il cui intreccio si intensificava in corrispondenza delle cellule degli strati superficiali ove si erano differenziati dei corpi fruttiferi riconoscibili come picnidi, costantemente accompagnati da elementi clamidosporici alternarioidi; l'esame culturale poi dava con assoluta costanza delle colonie di un microrganismo morfologicamente identico a quello visto in natura (v. fig. 2). Conferma decisiva della natura

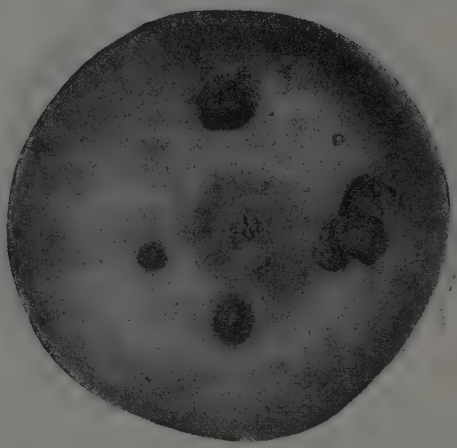


Fig. 2. – Riproduzione della « butteratura » con l'inoculazione di conidi di *Peyronellaea veronensis* G. Goid.

parassitaria della butteratura in parola si è avuta coi risultati delle inoculazioni artificiali su mele sane; essi furono non solo positivi, ma riprodussero con una sufficiente precisione le caratteristiche delle alterazioni naturali (v. fig. 3).

Le particolarità morfologiche più salienti di questo parassita si riscontrano nel micelio e nel corso di differenziazione del picnidio. Il primo si origina in seguito ad una rapida divisione cellulare che ha luogo in un punto apparentemente indeterminato di un'ifa vegetativa [6] che produce una massa tendenzialmente isodiametrica di aspetto pseudoparenchimatico (v. fig. 2); ad essa partecipano fino dai primissimi stadi di sviluppo anche un certo numero di ife nate dalle cellule stesse della zona fertile o da elementi mice-

(6) È forse anche del micelio derivante direttamente dalla germinazione del picnoconidio come avviene in *P. conidiogena* (Schnegg, Benham nei lavori citati più avanti).

liali da questa distanti e distinti; le quali dopo essersi sviluppate in lunghezza convergono verso il corpo fruttifero in via di differenziazione e mescolandosi alle cellule del tessuto pseudoparenchimatico contribuiscono al suo rapido evolversi (7). Il picnidio matura velocemente ed emette un'abbondantissima quantità di conidi ialini unicellulari a plasma omogeneo o biguttati che fuori escono riunendosi in un agglomerato mucoso attorno all'ostiolo. Altri picnidi prendono origine dalle clamidospore: queste emettono apicalmente una

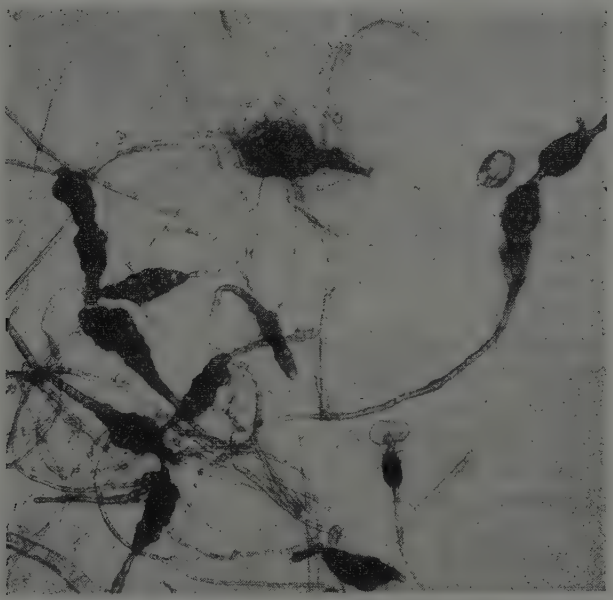


Fig. 3. - Microfot. dell'apparato vegetativo e riproduttivo di *Peyronellaea veronensis* G. Goid. Si distinguono le clamidospore alternariodi, isolate e catenulate, una delle quali ha emesso la masserella protoplasmatica da cui trarrà origine il picnidio. In alto, al centro, è visibile un primordio picnidiale in uno stadio avanzato di differenziazione.

masserella protoplasmatica da prima rotondeggiante, unicellulare (v. fig. 2), via via segmentantesi, che assume in breve un'aspetto simile a quello dei primordi picnidiali del micelio e da cui in effetto si evolvono poi corpi fruttiferi fertili.

(7) W. B. Mercer, *On the morphology and development of « Phoma Richardiae » n. sp.* « Myc. Ztbl. », 2, 1913, pp. 244–253; H. Schnegg, *Zur Entwiklunggeschichte und Biologie der Pycniden, sowie der Schlingenmycelien und Hyphenknäuel. Studien an einem häufigen Brauerei–Saprophyten.* « Centrbl. f. Bakt., Paras., usw. », *43*, 1915, pp. 326-364; R.W. Benham, *« Phoma conidiogena », an excitant of asthma; some observations on the development and cultural characteristics.* « Bull. Torrey Bot. Cl. », *55*, 1931, pp. 203–214.

Contemporanea alla differenziazione del picnidio è la formazione, sulle ife vegetative, delle già ricordate clamidospore: sono queste degli elementi di norma pluricellulari, di struttura irregolare, di forma tendenzialmente clavata, isolati ed, ancor più spesso, riuniti in catena; la loro membrana è fortemente ispessita, opaca, di contenuto protoplasmatico uniforme; esse si disarticolano con relativa facilità dall'ifa che le porta e, quando in catena, l'una dall'altra. La produzione di tali clamidospore è, in certi substrati, talmente abbondante da dare alla colonia l'aspetto tipico di un ifale. È questa la ragione per cui – come ho già detto – diversi micologi le hanno interpretate come fruttificazioni di *Alternaria* [8] con cui hanno indubbia similitudine, sebbene che – a rigore – dovrebbero piuttosto avvicinarsi ai *Coniothecium*, la cui diagnosi generica è più corrispondente alla irregolare struttura di tali clamidospore considerate come conidi; cosa quest'ultima che – sia detto per incidenza – non è così errata come a prima vista potrebbe apparire, se si considera come sia tenue la linea di demarcazione fra i conidi di certe demaziacee e le clamidospore [9].

Altra caratteristica dell'apparato vegetativo è la tendenza che mostrano di tanto in tanto le ife di ravvolgersi su se stesse a forma di spirale o di gomitolo.

Considerazioni di natura sistematica, che esporrò in un'altra Nota [10] ed ancor meglio in un dettagliato lavoro in cui sono state assoggettate ad uno studio comparativo diversi ceppi di sferossidali di questo tipo, mi hanno portato alla conclusione che in base alle accennate particolarità morfologiche – cui forse sono connesse una comunanza di proprietà biologiche e matricali – sia opportuno riunirli in un genere a sé stante che ho denominato *Peyronellina*; in esso il parassita agente della butteratura delle mele rientra come *P. veronensis sp. n.*, in attesa che l'esame diretto di altre specie similari già descritte – e che per le ancora persistenti difficoltà di scambio di materiale scientifico con l'estero non permettono per il momento di avere a disposizione – renda possibile stabilire con esattezza la sinonimia dei rappresentanti del nuovo genere *Peyronellaea*. Evidentemente andrà ravvicinato al gruppo di specie che Wollenweber ed Hochapfel (l. c.) avevano riunito con la denominazione di *Phoma glomerata* (Corda) n. c. (= *Peyr. glomerata*).

(8) E. Planchon, *Influences des divers milieux chimiques sur quelques Champignons du groupe des Dematiées* « Ann. sc. nat. », sér. 9, *8*, 1900, pp. 1-65; Mercer, loc. cit.; Schnegg, loc. cit.; G. Pollacci, *Sopra una nuova specie di micete commensale (« Phoma hominis » Ag. et Tr.) isolata da forme cliniche del derma.* « Atti R. Ist. Bot. Univ. Pavia », ser. IV, *6*, 1936, pp. 153-155; G. K. Filipopulos, *Azione di alcuni composti venefici sopra la fumaggine dell'olivo.* « Boll. R. Staz. Pat. Veg. », n. s., 7, 1927, pp. 330-346.

(9) Cfr. E. W. Mason, *Annotated account of fungi received at the imperial mycological Institute.* List II, fasc. 2. « The imp. myc. Inst. Kew », 1933, 67 pp.

(10) Goidànich G., « Peyronellaea », *nuovo genere di deuteromiceti.* « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis. mat. nat., 1946 (in corso di stampa).

Il ceppo denominato *P. veronensis* non è l'unico che sia stato ritrovato in Italia. Io stesso ebbi occasione negli anni passati di isolarne più volte altri da germogli di pero e da corteccia di pesco provenienti dall'Alta Italia. Philipopulos nel 1926 riscontrava [11] una *Peyronelliaea* fra i componenti della fumaggine dell'olivo nell'Italia Meridionale che veniva battezzata come *Phoma fumaginoides* Peyr. Il prof. Peyronel stesso ne ha avuto in cultura, antecedentemente al 1938, diversi ceppi derivanti da materiale vegetale vario [12] a Firenze. Una *Peyronellina* è il micete che Petri ha brevemente illustrato nel 1936 [13] e che viveva nelle gemme necrosate di rametti di pero e di melo affetti da degenerazione del cambio in Alto Adige. È pure una *Peyronellaea* il *Phoma hominis* che Agostini e Tredici isolarono [14] due volte dall'uomo nel 1935 e che Pollacci riconosceva, sempre nel 1935, in altri otto casi di micosi umana [15] quattro dei quali localizzati nell'apparato respiratorio [16]; come anche un micete che Nannizzi (secondo informazioni di Peyronel) ha ottenuto da culture della micro-flora di un dente cariato.

Le *Peyronellaea* sono quindi abbastanza diffuse in Italia; l'osservazione che una di esse si trovi nel Veronese sulle mele, come è stato altrove rilevato, è un contributo interessante per la conoscenza della distribuzione matricale e geografica di questo gruppo di microrganismi – di cui è evidente l'importanza microbiologica e patogena – e la constatazione del suo comportamento parassitario determinante una tipica alterazione è un reperto fitopatologico degno di rilievo.

Fisiologia. — *Comportamento di un riflesso condizionato motorio sotto l'azione dell'acetilcolina* [1]. Nota di A. Alibrandi, presentata [2] dal Corrisp. C. Ciaccio.

Il riflesso condizionato dell'ammiccamento, secondo la dottrina della nostra Scuola, essenzialmente dipende da un fenomeno di agevolazione che ha luogo, per effetto degli eccitamenti generati dalla stimolazione condizionale, a livello del centro sensitivo-motore corticale che controlla l'attività del muscolo orbicolare palpebrale. Questo fenomeno di facilitazione si rende

(11) G. K. Filipopulos, loc. cit.

(12) Per comunicazione epistolare.

(13) L. Petri, *Degenerazione e necrosi del cambio dei peri e dei meli nel Trentino e in Alto Adige*. « Boll. R. Staz. Pat. Veg. », n. s., *14*, 1934, pp. 281-326.

(14) A. Agostini e V. Tredici, *Su di un « Phoma » isolato da due casi clinici*. « Atti R. Ist. Bot. Univ. Pavia », ser. IV, *9*, 1937, pp. 179-189.

(15) G. Pollacci, loc. cit.

(16) R. Motta, *I miceti delle cavità nasali e della gola negli ozenatosi*. « Il Valsalva », 1929, 35 p.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

palese col notevole aumento dell'eccitabilità del suddetto centro che la semplice applicazione del segnale condizionale è capace di provocare (Martino e Alibrandi [3]).

Dalle ricerche di Moruzzi è noto come l'azione esplicata sull'attività elettrica corticale da eccitamenti facilitanti possa essere riprodotta mediante l'opportuna somministrazione di acetilcolina [4]. Pertanto mi è sembrato interessante studiare il comportamento della reazione condizionata sotto l'azione di questa sostanza.

In un giovane cane a completo sviluppo, normale dal punto di vista neurologico ed in buone condizioni di salute e di nutrizione, elaborammo un riflesso condizionato dell'ammiccamento (contrazione del m. orbicolare palpebrale destro). Il segnale condizionale era rappresentato dalla nota musicale *mi* prodotta mediante un corista ad ancia; lo stimolo assoluto era invece rappresentato dalla faradizzazione della rispettiva zona riflessogena. A tale scopo, in corrispondenza della regione sopracciliare destra erano fissati due leggeri morsetti a mascelle di coccodrillo ognuno dei quali stringeva tra due striscioline di garza inumidita con soluzione al 5 °/₀₀ di cloruro di sodio un ciuffettino di peli, in antecedenza sgrassati assieme alla loro zona d'impianto con etere etilico. La corrente era portata ai morsetti a mezzo di due sottili fili fissati ad un sostegno situato in prossimità della zona sottoposta alla stimolazione faradica. Le manovre dello sperimentatore connesse colla chiusura del circuito che portava la corrente alla predetta zona non potevano in alcuna maniera essere scorte dall'animale e trasformarsi pertanto in segnali condizionali.

Durante il periodo di addestramento si ebbe cura di iniettare ogni giorno sotto la cute della faccia esterna della coscia di uno degli arti posteriori dell'animale un cc. di soluzione isotonica di cloruro di sodio contenente il 4 °/₀₀ di acido acetico. Acciocchè l'iniezione non provocasse nell'animale reazioni dovute agli stimoli dolorifici connessi colla infissione e colla estrazione dell'ago questo veniva infisso prima che si iniziasse la seduta e ritirato solo alla fine di questa, allorchè l'animale stava per essere rimosso dal tavolo di contenzione.

Come indice di efficacia del segnale condizionale considerammo il rapporto fra il numero degli ammiccamenti prodotti da poche stimolazioni sonore non seguite dallo stimolo assoluto ed il numero di queste. In ogni seduta non si eseguì mai più di una determinazione dell'efficacia del segnale sonoro con questo metodo ed il numero dei segnali condizionali applicati a questo scopo in assenza della stimolazione faradica fu sempre eguale (dieci).

L'azione dell'acetilcolina venne studiata iniettando al posto della summenzionata soluzione acetica un mg. del cloruro dell'estere per ogni Kg. di peso

(3) Martino e Alibrandi, « Arch. Fisiol. », 1937, *37*, 533.
(4) Moruzzi, « Arch. internat. Physiol. », 1939, XLIX.

dell'animale in un volume complessivo di acqua distillata corrispondente ad un cc. La misura dell'efficacia del segnale (effettuata mediante il metodo suddetto) era eseguita dopo 90" dalla fine della iniezione. Tra le sedute nelle quali veniva praticata l'iniezione di acetilcolina si continuarono ad eseguire, a scopo di controllo, sedute in cui si iniettava la summenzionata soluzione acetica; ciò avveniva senza alcun ordine costante.

Si cominciò dapprima a misurare, sotto l'azione dell'acetilcolina, l'efficacia del segnale condizionale allorchè questa era ancora bassa, essendosi il riflesso condizionato stabilito da pochi giorni. Successivamente, si studiò l'effetto dell'acetilcolina in un periodo di recente estinzione del riflesso; a tale scopo a partire dal 28° giorno non vennero più applicati nè stimoli condizionali (5) nè stimoli assoluti, sebbene l'animale continuasse ad essere giornalmente legato sul tavolo di contenzione e gli venissero colle modalità suddescritte praticate le iniezioni di soluzione acetica.

I risultati sono riassunti nella seguente tabella:

Età del riflesso	Media dei rapporti d'efficacia determinati in sei sedute (6) previa iniezione di soluzione acetica	Media dei rapporti d'efficacia determinati in sei sedute previa iniezione di acetilcolina
tra i 6 ed i 18 giorni	$\frac{5,3}{10}$	$\frac{9,8}{10}$
tra i 35 ed i 47 giorni . . .	$\frac{0,3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Risulta pertanto chiaramente in entrambi i casi l'aumentata efficacia del segnale condizionale sotto l'azione dell'acetilcolina. Evidentemente l'azione facilitante degli eccitamenti prodotti mediante la stimolazione condizionale sommandosi coll'azione simile, se pure non identica, esercitata secondo Moruzzi dalla acetilcolina, tende maggiormente a concentrarsi sul centro sensitivo-motore corticale dell'orbicolare. È noto infatti come la tendenza alla concentrazione degli eccitamenti da stimolazione condizionale sia – entro certi limiti – in diretto rapporto colla loro intensità.

(5) Tranne naturalmente quelli destinati alla misura dell'efficacia del segnale.
(6) Di controllo, intercalate fra quelle in cui si iniettava l'acetilcolina.

Commemorazione del Socio Benedetto Morpurgo

letta dal Socio P. Rondoni nella seduta del 18 maggio 1946

Nato a Trieste da famiglia italiana nel 1861, Benedetto Morpurgo si laureò a Vienna nel 1884; ben tosto Egli, di sentimenti italianissimi, ottenne la cittadinanza italiana e nel 1885 si laureò a Padova, restando qualche tempo in quel centro universitario come assistente del grande clinico costituzionalista Achille De Giovanni. Ma bentosto il giovane Morpurgo sentì affermarsi in sè la inclinazione allo studio della patologia sperimentale ed abbandonò così la via, ben più ricca di vantaggi materiali, della clinica per dedicarsi alla pura e severa ricerca scientifica. Si recò così nel 1888 a Torino, richiamato dalla chiara fama della scuola di Giulio Bizzozzero; e di tale insigne Maestro Egli può dirsi allievo e continuatore. A Torino fu direttore per qualche tempo del laboratorio patologico del Manicomio e di un laboratorio ospitaliero; fece un breve soggiorno a Roma per studi di bacteriologia presso l'Istituto di Sanità pubblica. La sua carriera universitaria si iniziò nel 1892 nell'allora Università libera di Ferrara: ivi egli anzi fondò l'Istituto di patologia generale. Coprì poi la cattedra di patologia generale successivamente nelle Università di Siena (come incaricato), Cagliari (straordinariato nel 1897), poi ancora Siena (ordinariato nel 1900) e quindi dal 1903 a Torino, ove successe al suo maestro Bizzozzero. Andò in riposo nel 1935 per limiti di età. Gli eventi che attorno al 1937–38 turbarono gli animi di alcuni degnissimi italiani e condussero ad ingiuste ed assurde differenziazioni di razza, lo indussero ad emigrare con la famiglia in Argentina. Morì nell'agosto del 1944. Noi dell'alta Italia, allora tagliati fuori dal mondo libero, solo un anno dopo abbiamo appreso la notizia della scomparsa di Morpurgo nell'esilio. Ma, se i potenti od i prepotenti di questo mondo possono esiliare materialmente le persone, essi non possono esiliare lo spirito che vive al di sopra dei confini territoriali e si afferma tanto più quanto più esso è conculcato e perseguitato. Benedetto Morpurgo è stato sempre presente fra noi, i suoi insegnamenti sono stati e sono ancora guida sicura e luminoso incoraggiamento; e ci è caro ricordarlo con affetto devoto qui, nell'Accademia dei Lincei, cui Egli apparteneva dal 1915 ed alla quale Egli dette tanto dell'opera sua di scienziato e di organizzatore. Non fui suo allievo diretto; ed allievi diretti e completi nel senso universitario della parola Egli non lascia; circostanze di ambiente, lo stesso suo attaccamento esclusivo alla ricerca, che talora lo estraniava dalle competizioni accademiche, non hanno consentito una filiazione universitaria specifica. Ma tutti i giovani passati alla sua Scuola ed i numerosi medici di Siena, Ferrara e sopratutto di Torino che hanno lavorato per periodi più o meno lunghi sotto di lui, per seguire poi la carriera clinica od ospitaliera

o per emigrare in lontani paesi, riportando una nobile eredità di cultura e di addestramento al serio lavoro sperimentale, formano una folta schiera di veri allievi riconoscenti. Ed anche chi, come me, non ha lavorato nel suo laboratorio, ha appreso dallo studio dei suoi lavori magistrali ed anche dallo scambio vivace ed estremamente interessante di idee con Lui, il metodo severo della ricerca e sopratutto la critica acuta e profonda dei reperti sperimentali. Sicché ben può dirsi che Morpurgo è stato davvero un grande maestro, esempio mirabile di indefesso amore alla ricerca, che non si spense neppure nella tarda età e dopo il collocamento a riposo, esempio tanto più apprezzabile in Italia, ove purtroppo, in parte per umilianti ragioni economiche e per una deplorevole incomprensione dell'ambiente politico–sociale ed in parte in dipendenza dell'indole spesso soverchiamente versatile e quindi poco costante dell'ingegno, i professori universitari, anche dotati di ottime attitudini, abbandonano precocemente lo studio ed il lavoro di ricerca e vivaci ingegni si insabbiano spesso sulle secche di attività secondarie, di nullo o scarso rendimento per il progresso della scienza e per la cultura nazionale.

Non è possibile riassumere nei limiti concessi a questa commemorazione l'opera scientifica dell'insigne patologo; essa è tutta solida e durevole, non ci sono nei suoi lavori esperimenti non riproducibili privi di conferme ulteriori. Fu essenzialmente opera di morfologo; ma con frequenti ed importanti riferimenti funzionali. Nè esclusivamente morfologici furono i metodi da lui adottati, se anche è vero che perfetto Egli fu nella applicazione delle più fini tecniche istologiche. Egli ebbe la mente aperta a vasti problemi biologici e li attaccò sempre con mirabile destrezza sperimentale, mentre trasse sempre le sue conclusioni con somma probità, criticismo equilibrato e penetrante, obiettività assoluta. Del resto il Morpurgo ha dato la prova come anche i metodi morfologici siano tutt'altro che esauriti e possano anzi molto contribuire ancora al progresso della patologia; ed io ritengo anzi che oggi come ieri ed anche in avvenire una seria, precisa, onesta base morfologica occorra per il patologo generale, che vuole sviscerare la natura e le leggi dei fenomeni morbosi. Le forme non sono che stadi funzionali sorpresi e fissati nel loro divenire; ed i processi biologici devono essere studiati con tutti i metodi possibili, morfologici come chimici e fisici, per fornirci una visione integrale del loro svolgimento. Nulla c'è di invecchiato o di superato nell'opera di Morpurgo, dalle vecchie ricerche concernenti la influenza della iperemia, del digiuno e della nutrizione sulla rigenerazione o attinenti alla fisiopatologia dei muscoli (ipertrofia ed atrofia, accrescimento coll'età, ecc.), da quelle pure antiche ed ormai classiche col Canalis sulla influenza della inanizione sulla resistenza alle infezioni fino alle osservazioni di questi ultimi anni sulla patologia sperimentale dei tumori. In un campo poco battuto allora dai patologi generali Egli fu davvero un pioniere; nello studio delle ossa e relative distrofie (osteomalacia, rachitismo), da lui analizzate sperimentalmente ben prima che tali argomenti entrassero nel dominio sicuramente e correntemente sperimentale attraverso la vitaminologia e la biochimica. Un gruppo di esperimenti

(col suo allievo Satta) sulla autolisi delle ossa normali e malaciche e sui relativi processi di solubilizzazione del calcio prova che l'indirizzo chimico non era estraneo davvero alla mentalità del Nostro e potrebbe anzi oggi essere ripreso ed allargato con sommo frutto. Di grande importanza sono le ricerche sulla « greffe siamoise », secondo l'espressione di P. Bert, o *parabiosi*, ossia affrontamento di due animali della stessa specie, per lo più mediante celostomia o messa in comunicazione delle due cavità addominali, di guisa che si attui uno scambio di umori fra i due elementi della coppia. Prima di Morpurgo gli insuccessi erano frequenti; ma Egli ricorse (1908) alla specie più adatta per tali esperimenti, il ratto, la quale fu poi adottata quasi esclusivamente dagli autori successivi. Il Nostro perfezionò le tecniche operatorie, inventò speciali ingegnosi dispositivi per il mantenimento delle coppie e per lo studio del metabolismo dei singoli partner; e riescì a prolungare per molti mesi la vita dei ratti in parabiosi ed a studiare così una quantità di nuovi ed importanti problemi. Dimostrò che scambi umorali si hanno bensì fra i due parabionti, ma che pur tuttavia ciascuno ha un certo grado di comportamento egoistico e tende a conservare la sua costituzione. Un partner privato dei reni può vivere approfittando dei reni dell'altro; e perfino una coppia può viverę talora dopo estirpazione di tre reni, l'unico rene superstite ipertrofizzandosi molto e sopperendo a tutti i bisogni di eliminazione urinaria dei due soggetti. Ma si hanno coppie armoniche e coppie disarmoniche, nelle quali ultime un soggetto prospera a spese ed a danno dell'altro; e per molti lati la individualità si afferma perfettamente. Così Morpurgo dimostrò che anche due ratti di sesso diverso possono vivere in coppia siamese; ed il parabionte femmina può essere fecondato e partorire senza speciali modificazioni nel parabionte maschio. Se un tumore trapiantabile (sarcoma del ratto) è innestato sul ponte che unisce i due individui, e se questi appartengono a due razze pure, una ricettiva e l'altra no, il tumore si sviluppa bene nel soggetto ricettivo e non nell'altro; prova elegante che i fattori umorali poco contano per la immunità naturale ai tumori da trapianto ma che questa è una caratteristica costituzionale, come oggi meglio sappiamo per altri dati, su base genotipica. Sia notato che una recente osservazione di C. Foà e Monteiro conferma questo fatto per un tumore spontaneo insorto in un individuo di una coppia in parabiosi. In numerosi e tecnicamente ineccepibili esperimenti fu studiata la rigenerazione del nervo di un parabionte nell'organismo e sulla guida del nervo omonimo discontinuato dell'altro; Morpurgo fu il primo a cimentarsi in questo tipo di esperienze ed a dimostrare la possibilità di quella rigenerazione, che sembra provare una meno spiccata differenziazione individuale della parte conduttrice del neurone.

Ad una questione di fisiopatologia di grande attinenza pratica ed anzi sportiva, Morpurgo, che fu di spirito e di corpo giovanile fino all'ultimo, dedicò un bello studio: alla acclimatazione alla montagna dell'organismo in via di senescenza.

Da molti anni Morpurgo si occupava prevalentemente di tumori: Egli fondò e diresse il Centro per la diagnosi precoce del cancro presso l'Ospedale di

S. Giovanni a Torino, istruì nella diagnostica istologica numerosi medici, si acquistò una straordinaria competenza in questa branca di istopatologia di tanta importanza pratica. Publicò numerosi articoli illustrativi di straordinaria chiarezza ed efficacia; ricordo le osservazioni sulla mastopatia cistica, sui rapporti fra cancro e tabacco, sui mieloblastomi, sulle neoformazioni connettivali a carattere ambiguo (epulidi, tumori bruni delle ossa, granulomi lipofagici, ecc.). Non sono le osservazioni casistiche frammentarie su uno o pochi casi, care purtroppo a molti anatomo–patologi odierni; ma sintesi precise ed organiche sopra una casistica numerosa, frutto di esperienza personale di anni. Sono importanti le più antiche osservazioni sperimentali sulla azione accelerante di autolisati di tumori (insieme all'allievo A. Donati) sulla crescita neoplastica: questa fu una delle prime osservazioni precise sul contenuto di vere sostanze di crescita nel tessuto neoplastico. Morpurgo dimostrò poi che l'iperemia dell'organo di impianto di un tumore promuove la crescita di questo, così come fino dal 1890 aveva dimostrato che l'iperemia favorisce la rigenerazione di un tessuto normale; mentre l'anemizzazione dell'animale ostacola la crescita tumorale. Riuscì a produrre un mioblastoma nella lingua del ratto con infuso di tabacco. Altri argomenti di cancerologia sperimentale furono attaccati con frutto nel laboratorio torinese; ed anche nell'opera più personale degli allievi si riflette lo spirito critico e la serietà di impostazione sperimentale del Maestro.

Benedetto Morpurgo fu uomo di elevati sentimenti umanitari e patriottici: la sua ultima pubblicazione in Italia fu una relazione ad un Convegno della Lega italiana per la lotta contro i tumori, nel 1938: per le note ragioni politiche purtroppo la relazione non potè essere letta e discussa pubblicamente; ma fu stampata. Essa verte sull'assistenza e sul trattamento dei cancerosi poveri ed incurabili, i più miseri fra tutti i sofferenti: argomento profondamente pietoso e che Morpurgo svolge con elevato senso di umanità, quasi direi di religiosità, sciogliendo un inno alla grande anima misericordiosa del Santo Cottolengo.

Egli non era facile a concedere la sua amicizia; pur correttissimo nei rapporti sociali, era spesso caustico e pungente nei giudizi, sempre pacatissimi e perfettamente adeguati, su uomini ed eventi. Ma con coloro che stimava ed a cui si sentiva spiritualmente vicino per l'amore della scienza ed il culto della verità, dava libero sfogo al suo carattere arguto e faceva brillare i tesori della sua saggezza e della sua cultura. Ed un saggio Egli fu oltre che un dotto, che occupa un posto importante nelle scienze medico–biologiche, apprezzato largamente in Italia e fuori; modello di equilibrio morale ed intellettuale, esempio indimenticabile di dedizione assoluta ai più nobili ideali che rendono la vita degna di essere vissuta.

PERSONALE ACCADEMICO

Nella seduta del 18 aprile 1946 il Presidente prof. Guido Castelnuovo ricorda i soci recentemente scomparsi con le seguenti parole:

« Dopo la nostra riunione del gennaio, tre gravi perdite ha subìto la nostra Accademia.

« Primo in ordine di tempo è scomparso il 19 dello scorso febbraio Michele De Franchis professore di Geometria all'Università di Palermo, nostro Socio Corrispondente dal 1935. Acuto ed elegante cultore di Geometria algebrica a lui dobbiamo la classificazione completa delle superficie irregolari dei primi ordini, un bel teorema sui piani doppi irregolari, uno studio (contemporaneo ad uno del Severi) sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve o di una sola curva. Nella seconda parte della sua carriera scientifica egli si occupò (in collaborazione con un altro nostro socio, il Bagnera, morto prematuramente) della classificazione delle superficie iperellittiche. Un lavoro comune su questo argomento ottenne nel 1909 il Premio Bordin dall'Accademia delle Scienze di Parigi.

« Lo scorso mese di marzo ci giunse inattesa, e perciò tanto più dolorosa, la notizia della morte di Leonida Tonelli, colpito nel pieno fervore della sua attività scientifica e del suo apostolato didattico che svolgeva dalla cattedra di Analisi dell'Università di Pisa. Il Tonelli era nostro Socio Corrispondente dal 1922, ma noi lo consideravamo già come Socio Nazionale perchè fu da noi eletto a tale grado nel 1935 sebbene la sua nomina non fosse stata ratificata non avendo egli la tessera fascista e perchè, se le sedute dell'Accademia indette per il gennaio scorso non fossero state rimandate, egli avrebbe avuto allora quella nomina a cui molto teneva. Per quanto ambìto il titolo ben poco avrebbe aggiunto ai meriti di Tonelli quale matematico di fama mondiale.

« A lui si devono perfezionamenti essenziali nel Calcolo delle variazioni, al quale egli dedicò un'opera in due volumi divenuta rapidamente classica.

« Un'altra opera molto pregevole del Tonelli riguarda le serie trigonometriche e contiene nella seconda parte, concernente le serie doppie di Fourier, molti e importanti risultati originali. Egli ha pure dato una dimostrazione, al sicuro da ogni obbiezione, della nota proprietà isoperimetrica della sfera, ha dedicato acute considerazioni alla definizione e misura dell'area di una superficie, ed ha trattate altre questioni di Analisi delle funzioni di variabili reali con finissimo spirito critico e costruttivo. Maestro efficace e suggestivo, lascia una numerosa scuola che ci auguriamo possa colmare il vuoto prodotto dalla scomparsa del grande scienziato ».

« Il 1° aprile è morto a Bologna, dove insegnava in quella Università, Giovanni Boeris, nostro Socio Nazionale dal 1928, valoroso cultore di Mine-

ralogia che si era occupato in particolare di cristallografia chimica, e di mineralogia descrittiva ed aveva scoperto un nuovo minerale.

« A tutti questi colleghi scomparsi inviamo un reverente saluto.

Nella seduta del 18 maggio 1946 il Presidente Castelnuovo comunica la morte del Corrispondente Lionello Petri, con le seguenti parole:

« Si è spento il 20 aprile il nostro Socio Corrispondente prof. Lionello Petri, Direttore della Stazione di Patologia vegetale di Roma. Illustre cultore della materia, studiò in particolare le malattie delle piante dovute a pericolosi funghi o a cause inorganiche, e suggerì i mezzi di difesa recando all'agricoltura immensi benefici.

« Particolarmente pregiate sono le Sue ricerche sul *mal dell'inchiostro* del castagno e sul *mal secco* degli agrumi.

« Lascia numerosi e valenti allievi che continuano la Sua opera ».

Comunica quindi ai Colleghi le lettere di ringraziamento inviate dai Soci Nazionali di nuova nomina: Guido Bargellini, Angelo Bianchi, Luigi Lombardi, Antonio Pensa, Eligio Perucca, Mauro Picone, Francesco Vercelli, e le lettere di adesione e di felicitazione per la rinascita dell'Accademia, inviate dai Soci Stranieri Borel, Cartan, De la Vallée Poussin Dobell, Hadamard Harrison, Hill, Lacroix, Nördlund e Whittaker.

NOTE PRESENTATE NELLA SEDUTA DEL 18 MAGGIO 1946 E CHE SARANNO PUBBLICATE NEL PROSSIMO FASCICOLO

Note di Soci.

Sergi S., « I processi alveolari e la dentizione nel 2° paleantropo di Saccopastore ».

Note presentate da Soci.

Barducci I., « Effetto della viscosità e della conduzione termica in un risuonatore acustico » (pres. dal Socio U. Bordoni).

Cortini G. e Molina F., « Determinazione del numero medio di urti che un neutrone termico subisce in acqua prima della cattura » (pres. dal Corrisp. G. C. Trabacchi).

D'Ancona U., « Ancora una volta in tema di fibre muscolari, miofibrille e strie » (pres. dal Socio G. Gola).

GHIZZETTI A., « Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito » (pres. dal Corrisp. E. BOMPIANI).

LOMBARDO-RADICE L., « Gli automoduli primitivi delle algebre legate a gruppi abeliani di ordine finito » (pres. dal Corrisp. E. BOMPIANI).

PETTINEO B., « Estensione di una classe di serie divergenti » (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

SACCHETTI A., « L'orientamento fisiologico del femore umano nelle sue normali condizioni morfomeccaniche » (pres. dal Corrisp. S. SERGI).

SACCHETTI A., « Sulla variabilità nelle normali condizioni morfomeccaniche del femore umano » (pres. dal Corrisp. S. SERGI).

SUCCI F., « Osservazioni sulla R. « Coronae Borealis » (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

VINACCIA G., « Sull'effetto antieliotermico delle superfici curve » (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

VIOLA T., « Sulla definizione della lunghezza d'una curva » (pres. dal Socio M. PICONE).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 18 maggio 1946.

GUTIERREZ NOVOA Lino. — *Relatividad grafica en dos dimensiones*. Estr. da « Boletín Matemático » (Buenos Aires), a. XVIII, 1945, n. 5.

SISPÁNOV Sergio. — *Cálculo algebrico del endecágono regular*. Estr. dalla « Revista de la Unión Matemática Argentina » (Buenos Aires), vol. IX, a. 1943.

— *Cálculo de una integral múltiple*. Estr. dal « Boletín Matemático », a. XI, 1938, n. 9.

— *Complemento al artículo « sobre la ecuación indeterminada* $ax^n + by^n + cz^n = 0$ ». Estr. dal « Boletín Matemático », a. XVI 1943, n. 7.

— *Determinación del volumen de un sólido*. Estr. dalla « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. X, a. 1944.

— *Ecuación funcional* $f(x^m) : f(x) = ax^\alpha$. Estr. dalla « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol, IX, a. 1943.

— *Ecuaciones diferenciales análogas a las de Clairaut*. Estr. dalle « Publicaciones del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral » (Rosario), vol. V, 1943.

— *Ejemplos de desarrollos reales mediante series de variables complejas*. Estr. dalla « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. IX, a. 1943.

— *La criba de Eratóstenes y la integral logarítmica de Echebysheff*. Estr. dal « Boletín Matemático », a. XV, 1942, n. 10.

— *Problemas resueltos*. Estr. da « Mathematicae notae », a. II, 1942, fasc. 4; a. III, 1943, fasc. 3; a. III, 1943, fasc. 4; a. IV, 1944. fasc. 1 e da « Boletín Matemático », a. XVIII, 1945, n. 9.

SISPÁNOV Sergio. — *Sobre la ecuación indeterminada* $ax^n + by^n + cz^n = 0$. Estr. dal « Boletín Matemático », a. XVI, 1943, n. 6.

— *Sobre las ecuaciones trinomias de quinto grado*. Estr. dal « Boletín Matemático », a. XVI, 1943, n. 12-13.

— *Sobre un problema de Malfatti*. Estr. dal « Boletín Matemático », a. XI, 1938, n. 13.

— *Sobre una ecuación diferencial de 2º orden*. Estr. dalla « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. IX, anno 1943.

— *Un complemento al método de Adam Kochansky*. Estr. dal « Boletín Matemático », a. XIV, 1941, n. 14.

— *Un problema de análisis indeterminado*. Estr. dalla « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. IX, a. 1943.

— *Una cuestión de máximo*. Estr. dalla « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. X, a. 1944.

— *Una generalización de las ecuaciones diferenciales homogéneas*. Estr. dal « Boletín Matemático », a. XI, 1938, n. 15.

VARELA ADORNO Daniela. — *Acotación inferior de la suma de las medianas*. Estr. dal « Boletín Matemático », anno XVIII, 1945, nn. 4 e 6-8.

— *Problemas resueltos*. Estr. da « Boletín Matemático », a. XVIII, 1945, nn. 3, 4, 6-8.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 15 giugno 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

Il Presidente, aperta la seduta, pronuncia le seguenti parole:

Cari Colleghi,

Con l'animo profondamente commosso vi comunico una tristissima notizia. Il nostro Collega Enriques è spirato quasi improvvisamente nella notte dal 13 al 14 giugno. Aveva compiuto i settantacinque anni e soffriva da tempo di disturbi cardiaci ma nessuno avrebbe potuto prevedere una così rapida fine.

Qual perdita rappresenti per la scienza, anzi per la cultura italiana e per la nostra Accademia, la morte di Federigo Enriques voi tutti sapete. La sua opera matematica, filosofica, storica è così vasta che non è possibile esaminarla oggi in modo particolareggiato sotto l'impressione della fulminea sventura. Ne discorreremo in seguito con l'animo più tranquillo. Vi dirò oggi poche parole.

Tra i matematici sono specialmente noti i suoi lavori nella geometria algebrica. Le sue ricerche in questo campo si iniziano nel 1892, quando Egli era poco più che ventenne, con una Memoria fondamentale sulle superficie algebriche, ove una teoria sino allora appena abbozzata trova una sistemazione organica e viene arricchita di nuovi sostanziali risultati. Le ricerche proseguono per tutta la sua vita con lo scopo di caratterizzare i principali invarianti di una superficie algebrica rispetto alle trasformazioni birazionali e classificare le superficie stesse in base ai valori dei detti invarianti.

Mentre Egli stava preparando questa grande opera, lo spirito critico, che era nell'Enriques altrettanto vivo quanto l'intuito e la fantasia creativa, gli presenta altri problemi. Egli si accorge che nella costruzione assiomatica della geometria proiettiva sussisteva ancora qualche lacuna, e riesce ad eliminarla dando a quel ramo della matematica un carattere che oserei dire definitivo. L'opera critica prosegue in un articolo storico–critico sui principî della geometria, scritto per l'Enciclopedia tedesca delle scienze matematiche, e si manifesta

pure nei quattro volumi dei *Collectanea* redatti in parte da Lui, in parte da collaboratori sotto la Sua guida, volumi destinati ad attrarre l'attenzione degli studiosi, e in particolare dei professori delle scuole medie, sui legami che passano fra le matematiche elementari e superiori.

Lo stesso spirito critico si rivela nei Suoi scritti di carattere filosofico e storico. Con l'interesse vivissimo che Egli portava ai problemi della filosofia scientifica, ha impresso su questo terreno meno solido delle orme che hanno attratto e per molto tempo ancora fermeranno l'attenzione dei cultori delle varie scienze. In particolare, nel libro intitolato *Problemi della scienza* e a proposito dei principî della meccanica, Egli espone delle idee che si riattaccano a quel largo movimento di pensiero donde è uscita la teoria della relatività.

La critica non è mai disgiunta dalla veduta storica. Convinto dell'importanza che la storia della scienza ha nel progresso del nostro sapere, l'Enriques aveva formulato il progetto di un'opera grandiosa in cui venisse esposta la *Storia del pensiero scientifico* dagli inizi fino al giorno d'oggi. Di questa opera è uscito soltanto il primo volume dedicato al mondo antico e scritto in collaborazione col Santillana. Gli altri due volumi che dovevano trattare del medioevo e del mondo moderno non sono mai comparsi. Per riparare in parte a questa lacuna Egli pubblicò, sempre con lo stesso collaboratore, un *Compendio della storia del pensiero scientifico*, che ha scopi prevalentemente didattici. Altri suoi volumi di carattere critico, storico e filosofico riguardano l'influenza delle matematiche nella cultura, la *Storia della logica*, o contengono vari saggi sopra *Scienza e razionalismo*.

Per dare un'idea della vastità della cultura e della mente di Federigo Enriques mi basterà dire che sul suo tavolo si trovano oggi due manoscritti, fortunatamente pronti per la stampa. Il primo è un trattato di geometria delle superficie algebriche, ove vengono rielaborate le lezioni da lui esposte precedentemente in due volumi, uno litografato, l'altro a stampa, redatti con la collaborazione del prof. Campedelli. Il secondo manoscritto è destinato al filosofo greco Democrito, di cui l'Enriques, con ricerche originali sulle fonti, cerca di ricostruire il pensiero e l'influenza sullo sviluppo della scienza antica.

L'Enriques fu un grande animatore. Egli sapeva circondarsi di giovani egregi ai quali assegnava temi di ricerca nel campo della matematica o della storia, per poi assisterli con suggerimenti e consigli. Questi giovani piangono oggi la scomparsa della loro guida intellettuale.

Alla rinnovata Accademia dei Lincei Egli si proponeva, come voi già sapete, di dar vita più intensa provocando discussioni sopra argomenti di alto interesse scientifico. Due giorni fa, quando nè Egli nè io eravamo presaghi della fine imminente, Egli mi aveva incaricato di invitare alcuni colleghi ad andarlo a vedere per parlare di uno di quegli argomenti che erano stati scelti come tema di discussione: « fino a qual punto il secondo principio della termodinamica si applichi agli organismi viventi ». Senza la Sua presenza il nostro programma di discussioni dovrà esser riveduto, e le discussioni stesse perderanno quella anima-

zione che il Suo spirito sempre sveglio di acuto critico e vivace polemista avrebbe portato.

Rivedendo l'opera immensa di Federigo Enriques comprendiamo quale perdita irreparabile abbiano subìto con la sua morte la matematica, la filosofia, la storia della scienza nel nostro paese. E mentre rivolgiamo un reverente pensiero alla Sua memoria, ci auguriamo che i giovani ispirandosi all'opera di Lui e dei grandi nostri scienziati che via via ci abbandonano, provvedano a colmare i vuoti e a dar vita nuova ed intensa alla scuola scientifica italiana.

Propongo che in segno di lutto la seduta sia sospesa.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. – *Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazioni.* Nota II [1] di C. Birindelli, presentata dal Socio M. Picone.

Viene qui proseguita la trattazione degli argomenti relativi alla Nota I pubblicata nel precedente fascicolo.

3. Sia assegnata in $S_{(r)}$ una funzione $\Phi(P)=\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ periodica rispetto a ciascuna delle r variabili coi periodi rispettivi $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r$. La $\Phi(P)$ sia quasi-continua e sommabile nel senso di Lebesgue in qualunque insieme misurabile e limitato di $S_{(r)}$. Posto, per semplificare le notazioni, $\Phi(mP)=\Phi(mx_1,mx_2,\cdots,mx_r)$ si ha il seguente notevole

Teorema III. – *Se una funzione* $f(P)$ *è quasi continua in un insieme* E *limitato e misurabile di* $S_{(r)}$ *e per due numeri* α *e* β *reali positivi tali che* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ *le* $|f(P)|^\alpha$, $|f(P)|^\beta$ *sono sommabili in* E *e la* $\Phi(P)$ *è hilbertiana in qualsiasi insieme misurabile e limitato di* $S_{(r)}$, *si ha che*

$$\lim_{m\to\infty}\int_E f(P)\cdot\Phi(mP)\cdot d\tau = \left[\frac{1}{\omega_1\cdot\omega_2\cdot\cdots\cdot\omega_r}\int_{\lambda_1}^{\lambda_1+\omega_1}\int_{\lambda_2}^{\lambda_2+\omega_2}\cdots\int_{\lambda_r}^{\lambda_r+\omega_r}\Phi(P)\cdot d\tau\right]\cdot\int_E f(P)\,d\tau. \tag{2}$$

Per la dimostrazione premettiamo i seguenti lemmi:

a) Lemma I'. – *Se una* $f(P)$ *è tale che per due numeri positivi* α,β *tali che* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ *le* $|f(P)|^\alpha$, $|f(P)|^\beta$ *siano sommabili secondo Lebesgue*

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946

in un insieme E *misurabile, limitato o no, con misura finita, allora la successione* $f_n(P)$ *converge in media, in* E, *verso la* $f(P)$. Infatti pel Teorema II risultano sommabili in E le $[f(P)]^2$, $f_n(P)\cdot f(P)$ e vale la (1), vale a dire è $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(P)\cdot f(P)\cdot dT = \int_E [f(P)]^2\cdot dT$.

D'altra parte la $f_n(P)$ è costante in ogni $E\cdot T^{(n)}_{h,k,l,\ldots}$ e di conseguenza ha significato l'$\int_{E\cdot T^{(n)}_{h,k,l,\ldots}} [f_n(P)]^2\cdot dT$. Si ha poi

$$\int_{E\cdot T^{(n)}_{h,k,l,\ldots}} [f_n(P)]^2\cdot dT = \frac{1}{\mathrm{Mis}\left(E\cdot T^{(n)}_{h,k,\ldots}\right)}\left[\int_{E\cdot T^{(n)}_{h,k,l,\ldots}} f(P)\,dT\right]^2 = \int_{E\cdot T^{(n)}_{h,k,l,\ldots}} f_n(P)\cdot f(P)\cdot dT.$$

Esiste dunque l'$\int_E [f_n(P)]^2\cdot dT = \int_E f_n(P)\cdot f(P)\cdot dT$ ed è

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f_n(P)]^2\cdot dT = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(P)\cdot f(P)\cdot dT = \int_E [f(P)]^2\cdot dT.$$

È, di conseguenza,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f_n(P)-f(P))^2\cdot dT = \lim_{n\to\infty}\int_E \{[f_n(P)]^2 - f_n(P)\cdot f(P)\}\,dT + \\ + \lim_{n\to\infty}\int_E \{[f(P)]^2 - f_n(P)\cdot f(P)\}\,dT = 0,$$

il che equivale a dire che la successione delle $f_n(P)$ converge in media verso la $f(P)$ in E.

Il lemma vale, in particolare, per $\alpha=\beta=2$ e possiamo quindi affermare che *se la* $f(P)$ *è hilbertiana in* E *con* E *misurabile, limitato o no, con misura finita, allora la successione* $f_n(P)$ *converge in media verso la* $f(P)$ *in* E.

b) Lemma II'. - *Sotto l'unica condizione di essere* $\Phi(P)$ *sommabile secondo Lebesgue in qualsiasi insieme misurabile e limitato di* $S_{(r)}$, *il Teorema III sussiste sempre quando* $f(P)=c$ *e se* $E\equiv R(P', P'')$. Siccome mediante r opportune trasformazioni lineari delle variabili $x_1, x_2, \cdots, x_r$, si possono ridurre eguali gli r periodi della $\Phi(P)$, è chiaro che per giustificare il lemma basta limitarsi a considerare il caso di $\Phi(P)=\Phi(x,y)$ sommabile secondo Lebesgue in ogni insieme misurabile e limitato di $S_{(2)}$ con $\Phi(P)$ periodica rispetto ad x e ad y, coi rispettivi periodi entrambi eguali ad ω $(\omega>0)$. Il dominio rettangolare R abbia $P'(a,c)$, $P''(b,d)$ come punti estremi.

Si scelga m tale che $|m|\geq \frac{\omega}{b-a}$, $|m|\geq\frac{\omega}{d-c}$, ($m$ reale con $|m|$ opportunamente grande) e siano N_1 ed N_2 i massimi interi verificanti le

$|m| \cdot \frac{b-a}{\omega} \geqq N_1$, $|m| \cdot \frac{d-c}{\omega} \geqq N_2$. Posto $\varepsilon = \frac{\omega}{|m|}$, si suddividano gli intervalli (a, b) e (c, d) negli intervalli parziali: $(a, a+\varepsilon), \cdots, (a+(N_1-1)\varepsilon, a+N_1\varepsilon)$, $(a+N_1\varepsilon, b)$; $(c, c+\varepsilon), \cdots, (c+(N_2-1)\varepsilon, c+N_2\varepsilon)$, $(c+N_2\varepsilon, d)$. Mediante il cambiamento di variabili $t_1 = mx$, $t_2 = my$, si ha

$$\int_R \Phi(mP)\,dT = \sum_h^{0,N_1-1} \sum_k^{0,N_2-1} \int_{a+h\varepsilon}^{a+(h+1)\varepsilon} \int_{c+k\varepsilon}^{c+(k+1)\varepsilon} \Phi(mP)\,dT + \sum_k^{0,N_2-1} \int_{a+N_1\varepsilon}^{b} \int_{c+k\varepsilon}^{c+(k+1)\varepsilon} \Phi(mP)\,dT +$$

$$+ \sum_h^{0,N_1-1} \int_{a+h\varepsilon}^{a+(h+1)\varepsilon} \int_{c+N_2\varepsilon}^{d} \Phi(mP)\,dT + \int_{a+N_1\varepsilon}^{b} \int_{c+N_2\varepsilon}^{d} \Phi(mP)\,dT = \frac{N_1 \cdot N_2}{m^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_1+\omega} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+\omega} \Phi(P)\,dT +$$

$$+ \frac{N_2}{m^2} \int_{m\cdot(a+N_1\varepsilon)}^{mb} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+\omega} \Phi(P)\,dT + \frac{N_1}{m^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_1+\omega} \int_{m\cdot(c+N_2\varepsilon)}^{md} \Phi(P)\,dT + \frac{1}{m^2} \int_{m\cdot(a+N_1\varepsilon)}^{mb} \int_{m\cdot(c+N_2\varepsilon)}^{md} \Phi(P)\,dT.$$

Essendo

$$0 \leqq \left| \begin{matrix} \frac{b-a}{\omega} - \frac{N_1}{|m|} \\ \frac{d-c}{\omega} - \frac{N_2}{|m|} \end{matrix} \right| < \frac{1}{|m|},$$

si vede subito che gli intervalli $(m(a+N_1\varepsilon), mb)$, $(m(c+N_2\varepsilon), md)$ hanno ampiezze minori del periodo ω e che $\frac{N_1 \cdot N_2}{m^2}$ tende, per $m \to \infty$, ad $\frac{(b-a)(d-c)}{\omega^2}$. Da ciò segue che

$$\lim_{m\to\infty} \int_R \Phi(mP)\,dT = \lim_{m\to\infty} \int_a^b \int_c^d \Phi(mP)\,dT =$$

$$= \frac{(b-a)(d-c)}{\omega^2} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_1+\omega} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+\omega} \Phi(P)\,dT = \frac{R}{\omega^2} \int_{\overline{\omega}^2} \Phi(P)\,dT.$$

c) Sia assegnata in un insieme E misurabile limitato o no, di misura finita o infinita, una $f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ sommabile secondo Lebesgue in E. Posto, per semplicità, che la solita $\Phi(P)$ mediante opportune trasformazioni lineari sia stata già ridotta tale da avere gli r periodi tutti eguali ad ω, si decomponga l'intero spazio $S_{(r)}$ nella rete dei soliti domini quadrati $T^{(m)}_{h,k,l,\ldots}$ di comune lato $\frac{\omega}{|m|}$ e si ponga in $T^{(m)}_{h,k,l,\ldots}$ $f_m(P) = \frac{1}{(\text{Mis } T^{(m)}_{h,k,l,\ldots})} \int_{T^{(m)}_{h,k,l,\ldots}} f(P)\,dT$, ove s'intende d'aver posto $f(P) = 0$

pei P di $T^{(m)}_{h,k,l,\ldots}$ non appartenenti ad $E \cdot T^{(m)}_{h,k,l,\ldots}$. Supponendo la $\Phi(P)$ sommabile in $\overline{\omega}^r$, si ha il

LEMMA III'. – *Se la* $f(P)$ *è funzione sommabile in* E *misurabile, limitato o no, di misura finita o infinita è* $\int_{S_{(r)}} f_m(P) \cdot \Phi(mP) \cdot dT = \left\{ \frac{1}{\omega^r} \int_{\overline{\omega}^r} \Phi(P)\, dT \right\} \cdot \int_E f(P)\, dT$,

ove con $\overline{\omega}^r$ *s'intende il dominio quadrato di lato* ω. Per semplicità supponiamo $r = 2$. Sia ha, per essere $f_m(P)$ costante in $T^{(m)}_{h,k}$,

$$\int_{T^{(m)}_{h,k}} f_m(P) \cdot \Phi(mP)\, dT = f_m(P) \cdot \int_{T^{(m)}_{h,k}} \Phi(mP)\, dT = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{T^{(m)}_{h,k}} f(P)\, dT \right] \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_1+\omega} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+\omega} \Phi(P)\, dT =$$

$$= \left[\frac{1}{\omega^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_1+\omega} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2+\omega} \Phi(P) \cdot dT \right] \cdot \int_{T^{(m)}_{h,k}} f(P)\, dT = \left[\frac{1}{\omega^2} \int_{\overline{\omega}^2} \Phi(P)\, dT \right] \cdot \int_{E \cdot T^{(m)}_{h,k}} f(P)\, dT,$$

e di qui segue appunto che $f_m(P) \cdot \Phi(mP)$ è sommabile in $S_{(2)}$ e che il lemma è vero.

Passando ora alla dimostrazione del Teorema III, si consideri per semplicità il caso di $r = 2$ e si mantengano le condizioni fatte in *c*). Per essere $f(P)|^\alpha$, $|f(P)|^\beta$ sommabili in E, lo stesso avviene in tutto $S_{(2)}$ e di conseguenza $|f(P)| \cdot |f(P)|$ è sommabile in $S_{(2)}$ e la $f(P)$ è hilbertiana in $S_{(2)}$. Siccome altrettanto avviene, per ipotesi, per la $\Phi(P)$ in qualsiasi insieme misurabile limitato di $S_{(2)}$, si può dire che scelto un arbitrario dominio misurabile limitato contenente E, ad esempio quello costituito dalla somma di tutti quelli $T'^{(m)}_{h,k}$ dei domini quadrati $T^{(m)}_{h,k}$ contenenti punti di E (i $T'^{(m)}_{h,k}$ sono in numero finito, per essere E limitato), risulta, dato che fuori dei $T'^{(m)}_{h,k}$ è $f(P) = f_m(P) = 0$, che al secondo membro della

$$\int_{S_{(2)}} [f(P) - f_m(P)]\, \Phi(mP)\, dT = \sum_{h,k} \int_{T'^{(m)}_{h,k}} [f(P) - f_m(P)]\, \Phi(mP)\, dT$$

è applicabile la disuguaglianza di Schwartz poichè oltre alla $\Phi(mP)$ è certo hilbertiana anche la $f(P) - f_m(P)$ in $\sum_{h,k} T'^{(m)}_{h,k}$ e ciò per il lemma di *a*). Se Q è un dominio quadrato contenente, per ogni valore di m, tutti gli $T'^{(m)}_{h,k}$ è

$$\left| \int_{S_{(2)}} [f(P) - f_m(P)]\, \Phi(mP)\, dT \right| \leq \int_{\sum_{h,k} T'^{(m)}_{h,k}} |[f(P) - f_m(P)]\, \Phi(mP)|\, dT \leq$$

$$\leq \int_Q |[f(P) - f_m(P)]\, \Phi(mP)|\, dT \leq \sqrt{\int_Q |f(P) - f_m(P)|^2\, dT} \cdot \sqrt{\int_Q |\Phi(mP)|^2\, dT}$$

e qui l'ultimo membro tende a 0 per $m \to \infty$ poichè in Q la successione $f_m(P)$ converge in media verso $f(P)$ e ciò per il lemma di *a*); d'altra parte, per il lemma di *b*), è

$$\lim_{m \to \infty} \int_Q |\Phi(mP)|^2 \, dT = \frac{Q}{\omega^2} \cdot \int_{\bar{\omega}^2} |\Phi(P)|^2 \cdot dT,$$

poichè evidentemente la $|\Phi(P)|^2$ sommabile in Q gode delle stesse proprietà della $\Phi(P)$ espresse dal lemma di *b*). Il Teorema III resta con ciò completamente giustificato.

4. Sia ora E misurabile non limitato ma di misura finita e tale che FE sia di misura nulla. Per due numeri α e β positivi tali che $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ le $|f(P)|^\alpha$, $|f(P)|^\beta$ siano sommabili in E e la $\Phi(P)$ solita sia hilbertiana in qualsiasi insieme misurabile e limitato di $S_{(r)}$ e si mantenga tale pure in E. Per semplicità supponiamo $r = 2$, e sia al solito $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. In corrispondenza alla scelta di un m arbitrario, la totalità dei domini quadrati $T^{(m)}_{h,k}$ contenenti qualche punto di E + FE si può scindere in due parti e precisamente quella costituita dai $T^{F(m)}_{h,k}$ contenenti punti di FE, e l'altra costituita dai $T''^{(m)}_{h,k}$ non contenenti punti di FE. Se si denomina con $E^{(m)}$ l'insieme somma dei domini quadrati $T''^{(m)}_{h,k}$ possiamo dire che $E^{(m)}$ è costituito di punti interni di E ed è misurabile. Ripetendo per il solo insieme $E^{(m)} = \sum_{h,k} T''^{(m)}_{h,k}$ quel che si è fatto al n. 3 in *c*) si perviene alla

$$\int_{E^{(m)}} f_m(P) \cdot \Phi(mP) \, dT = \left[\frac{1}{\omega^2} \int_{\bar{\omega}^2} \Phi(P) \, dT\right] \cdot \int_{E^{(m)}} f(P) \, dT$$

e qui il secondo membro tende a $\left[\frac{1}{\omega^2} \int_{\bar{\omega}^2} \Phi(P) \, dT\right] \cdot \int_E f(P) \, dT$ quando $m \to \infty$. Ricordando la

$$\int_{T''^{(m)}_{h,k}} [\Phi(mP)]^2 \, dT = \frac{1}{m^2} \cdot \int_{\bar{\omega}^2} [\Phi(P)]^2 \, dT$$

e che in $E^{(m)}$, parte di E, sono hilbertiane la $f(P) - f_m(P)$ e la $\Phi(mP)$ si ha, per la relazione di Schwartz, che $\left| \int_{E^{(m)}} [f(P) - f_m(P)] \cdot \Phi(mP) \cdot dT \right| \leq$

$$\leq \sqrt{M \cdot \frac{1}{m^2} \int_{\bar{\omega}^2} [\Phi(P)]^2 \, dT} \cdot \sqrt{\int_E [f(P) - f_m(P)]^2 \, dT}$$ se con M si indica il numero dei domini quadrati $T''^{(m)}_{h,k}$. Ricordando che il lato comune dei $T''^{(m)}_{h,k}$

è $\varepsilon = \frac{\omega}{|m|}$ si ha che $\text{Mis}\, T''^{(m)}_{h,k} = \omega^2 \frac{1}{m^2}$, $\text{Mis}\, E^{(m)} = M \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \omega^2 \leq \text{Mis}\, E$ e che quindi $M \cdot \frac{1}{m^2} \leq \frac{\text{Mis}\, E}{\omega^2}$. Se ne deduce che

$$\left| \int_{E^{(m)}} [f(P) - f_m(P)]\, \Phi(mP)\, dT \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\text{Mis}\, E \cdot \frac{1}{\omega^2} \cdot \int_{\bar{\omega}^2} [\Phi(P)]^2\, dT} \cdot \sqrt{\int_E [f(P) - f_m(P)]^2\, dT},$$

e qui il secondo membro tende a zero per $m \to \infty$ in conseguenza della convergenza in media verso la $f(P)$ della successione $f_m(P)$ in E. Se ne conclude che è

$$\lim_{m \to \infty} \int_{E^{(m)}} f(P) \cdot \Phi(mP) \cdot dT = \left[\frac{1}{\omega^2} \int_{\bar{\omega}^2} \Phi(P)\, dT \right] \cdot \int_E f(P) \cdot dT.$$

Soffermiamoci al caso in cui $\Phi(P)$ sia limitata in tutto il quadrato fondamentale $\bar{\omega}^2$. Si ha che $\left| \int_{\Gamma_E E^{(m)}} f(P) \cdot \Phi(mP) \cdot dT \right| \leq \int_{\Gamma_E E^{(m)}} |f(P) \cdot \Phi(mP)|\, dT \leq$

$\leq L \cdot \int_{\Gamma_E E^{(m)}} f(P)|\, dT$ che tende a zero per $m \to \infty$ poichè $\lim_{m \to \infty} \text{Mis}\, \Gamma_E E^{(m)} = 0$.

Ne segue che

$$\lim_{m \to \infty} \int_E f(P) \cdot \Phi(mP) \cdot dT = \lim_{m \to \infty} \left[\int_{E^{(m)}} f(P) \cdot \Phi(mP)\, dT + \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_E E^{(m)}} f(P) \cdot \Phi(mP) \cdot dT \right] = \left[\frac{1}{\omega^2} \int_{\bar{\omega}^2} \Phi(P)\, dT \right] \cdot \int_E f(P)\, dT.$$

Vale dunque il seguente

Teorema IV. – *Se in* E, *misurabile non limitato ma di misura finita con* FE *di misura nulla, è definita la* $f(P)$ *quasi-continua tale che per due numeri positivi* α, β *con* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ *siano* $|f(P)|^\alpha$, $|f(P)|^\beta$ *sommabili in* E *secondo Lebesgue e se la solita* $\Phi(P)$ *è quasi-continua limitata e periodica coi periodi* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$, *allora vale la solita*

$$\lim_{m \to \infty} \int_E f(P) \cdot \Phi(mP) \cdot dT =$$

$$= \left[\frac{1}{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_r} \int_{\lambda_1}^{\lambda_1 + \omega_1} \int_{\lambda_2}^{\lambda_2 + \omega_2} \cdots \int_{\lambda_r}^{\lambda_r + \omega_r} \Phi(P)\, dT \right] \cdot \int_E f(P)\, dT.$$

§ 3.

5. In relazione alle condizioni segnalate al § 1 per la validità della (1) è opportuno indicare il contributo che può portare in questa questione il complesso dei teoremi del prof. Picone [2] sulla uniforme sommabilità. Tenendo presenti questi teoremi si gistificano subito le seguenti proposizioni:

1) *Supposte sommabili in* E *le* $f(P)$, $g(P)$ *e posto al solito* $g_n(P) = \frac{1}{\text{Mis}\left[E \cdot T^{(n)}_{h,k,\dots}\right]} \int_{E \cdot T^{(n)}_{h,k,\dots}} g(P)\, dT$, *se nell'insieme* E *di misura finita o infinita la successione* $\{g_n(P) \cdot f(P)\}$ *è costituita di funzioni sommabili ed è* $\lim_{n\to\infty} \int_E |g_n(P) \cdot f(P)|\, dT = 0$ *allora vale la* (1).

2) *Se* $\{\Psi^{(n)}(P)\}$ *è una successione di funzioni uniformemente sommabili nel solito insieme* E *e se riesce* $\lim_{n\to\infty} \int_E |g_n(P) \cdot f(P) - \Psi^{(n)}(P)|\, dT = 0$, *allora vale ancora la* (1).

3) *Se la successione solita* $\{g_n(P) \cdot f(P)\}$ *è costituita di funzioni quasi-continue, sempre in* E, *e se sono verificate le condizioni seguenti allora vale la* (1):

a) Esista una successione $\{\Psi^{(n)}(P)\}$, *con le* $\Psi^{(n)}(P)$ *quasi-continue non negative e quasi-ovunque positive in* E *e per una successione di numeri reali* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ *maggiori di* 1 *e minori di un numero* α, *la successione* $\{(\Psi^{(n)}(P))^{-\alpha_n}\}$ *sia di funzioni uniformemente sommabili in* E,

b) Sia, qualunque sia n, *in* E, *sommabile il prodotto* $[|g_n(P) \cdot f(P)| \cdot \Psi^{(n)}(P)]^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1}}$ *e si abbia* $\left\{\int_E [|g_n(P) \cdot f(P)| \cdot \Psi^{(n)}(P)]^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1}}\right\}^{\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n}} < L$, *con* L *numero fisso indipendente da* n.

Particolarizzando le condizioni della proposizione 3) si possono ottenere varie proposizioni, casi particolari, per i cui enunciati basterebbe passare in rivista i corrispondenti teoremi del citato lavoro di [2] ed esprimere i risultati di questi per la particolare successione $\{g_n(P) \cdot f(P)\}$ e conclusane la uniforme sommabilità in E per l'ultima successione, ricavare la (1) quale conseguenza del teorema di Lebesgue-Vitali (poichè la $g_n(P) \cdot f(P)$ oltre che uniformemente sommabile in E è pure convergente in quasi-tutto E).

4) *Se* U *è un insieme arbitrario misurabile contenuto in* E, *ove* E *è misurabile con misura finita o infinita, e in* E *risulta sommabile la* $g(P)$, *allora*,

(2) G. Fichera, *Intorno al passaggio al limite sotto il segno di integrale.* Nota inclusa nel Corso *Teoria dell'integrazione Lebesguiana* del prof. M. Picone, Anno Acc. 1941-42. Dispense Universitarie «D. U. S. A.», Roma,

posto, per ogni P *di* $T^{(n)}_{h,k,\ldots} \cdot U$, $g_n(P) = \frac{1}{\mathrm{Mis}\left(E \cdot T^{(n)}_{h,k,\ldots}\right)} \int_{E \cdot T^{(n)}_{h,k,\ldots}} g(P)\, dT$, *se* $f(P)$ *è una funzione quasi-continua in* E, *condizione necessaria e sufficiente affinchè sussista la* (1) *e uniformemente rispetto ad* U *è che le* $g_n(P) \cdot f(P)$ *siano sommabili in* E *per tutti gli* n *e che dato* ε *pos. arb. esistano in corrispondenza un numero positivo* M_ε *e un dominio quadrato* Q_ε *con centro nell'origine* O, *tali che, detto* E_n *l'insieme dei punti di* E *per cui* $|g_n(P) \cdot f(P)| > M_\varepsilon$, *risulti, qualunque sia* n, $\int_{E_n} |g_n(P) \cdot f(P)|\, dT < \varepsilon$, $\int_{E - Q_\varepsilon} |g_n(P) \cdot f(P)|\, dT < \varepsilon$.

5) *Ogni qualvolta vale la* (1), *uniformemente al variare di* U *in* E, *allora la* $g_n(P) \cdot f(P)$ *converge in misura alla* $g(P) \cdot f(P)$.

Ne segue che sotto le condizioni indicate nelle varie precedenti proposizioni di questo paragrafo la successione $\{g_n(P) \cdot f(P)\}$ converge in misura in E.

6) *Se la* $g(P)$ *quasi-continua in* E *è limitata in* E *e la* $f(P)$ *è sommabile in* E *e hilbertiana, si ha che la successione* $\{g_n(P) \cdot f(P)\}$ *converge in media verso la* $g(P) \cdot f(P)$ *in* E. Infatti dalla $|g(P)| \leq L$ segue che $|g_n(P)| \leq L$ e $|g_n(P) \cdot f(P) - g(P) \cdot f(P)|^2 \leq 4 \cdot L^2 \cdot [f(P)]^2$.

La successione $\{|g_n(P) \cdot f(P) - g(P) \cdot f(P)|^2\}$ è, di conseguenza, uniformemente sommabile in E mentre, come è ben noto, essa converge puntualmente in quasi-tutto E verso la funzione costante data dallo zero, per $n \to \infty$. Applicando il teorema di Lebesgue-Vitali si ha appunto che è $\lim_{n \to \infty} \int_E |g_n(P) \cdot f(P) - g(P) \cdot f(P)|^2\, dT = 0$.

Matematica. — *Estensione di una classe di serie divergenti.* Nota [1] di B. Pettineo, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

Di fondamentale importanza nella teoria delle serie numeriche si presenta il seguente teorema, dovuto ad Abel: « Sia

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

una serie divergente a termini positivi e U_n denoti la somma $\sum_{i=1}^{n} u_i$.

Se la successione u_n è limitata, la serie

$$\sum \frac{u_n}{U_n} = \frac{u_1}{U_1} + \frac{u_2}{U_2} + \cdots + \frac{u_n}{U_n} + \cdots$$

è pure divergente e diverge come $\log U_n$ ».

(1) Pervenuta all'Accademia il 2 marzo 1946. Presentata nella seduta del 18 maggio 1946.

L'applicazione reiterata di tale teorema permette di costruire una successione di serie:

$$(\alpha) \qquad \sum u_n \ , \ \sum \frac{u_n}{U_n} \ , \ \sum \frac{u_n}{U_n \log U_n} \ , \ \sum \frac{u_n}{U_n \log U_n \log\log U_n} , \cdots$$

tutte divergenti e ciascuna meno divergente delle precedenti; con ciò si rende possibile stabilire la divergenza di molte serie a termini positivi, conoscendo qualche altra serie *più divergente* (il cui studio si presenta, generalmente, meno dfficoltoso).

Fissato ad arbitrio un numero h intero non negativo, definiamo la successione

$$\overset{h}{\log} U_1 \ , \ \overset{h}{\log} U_2 \ , \cdots , \overset{h}{\log} U_n \ , \cdots$$

ponendo, in generale:

$$\overset{h}{\log} U_n = \begin{cases} U_n & \text{per} \quad h = 0 \\ \log \overset{h-1}{\log} U_n & \text{per} \quad h > 0 \end{cases}$$

e consideriamo una successione h_n di numeri interi non negativi, tali che si abbia:

$$(1) \qquad \overset{h_n}{\log} U_n > 0 \ .$$

La serie

$$(2) \qquad \sum \frac{u_n}{U_n \log U_n \cdots \overset{h_n}{\log} U_n}$$

si mantiene allora a termini positivi ed inoltre, nell'ipotesi che la successione h_n sia divergente e si abbia:

$$\overset{h_n}{\log} U_n \geqq 1 \ ,$$

il rapporto fra il termine generale della serie (2) e quello di una qualsiasi delle serie (α) tende manifestamente a zero. La serie (2), qualora fosse divergente, risulterebbe per conseguenza meno divergente delle (α) ed anzi rappresenterebbe la serie meno divergente finora conosciuta; assumendola allora come serie di riferimento, si verrebbe ad estendere notevolmente il campo di applicazione dei noti criteri di confronto dell'Analisi e di tutti quelli che ne derivano (quali, per esempio, taluni notevoli criteri di Kummer e Dini).

È stato da noi recentemente dimostrato che la serie (2) diverge sempre, qualunque sia la successione h_n di numeri interi non negativi, tali che abbia luogo la (1); ma abbiamo dovuto supporre che la successione u_n non sia mai crescente [2].

(2) B. Pettineo, *Una classe di serie divergenti.* « Annali di Mat. pura e applic. ». vol. XXIV, 4ª serie.

Ci proponiamo adesso di eliminare quest'ipotesi restrittiva, dimostrando, più in generale, che la serie (2) diverge, qualunque sia la successione u_n, purchè esista un numero positivo K minore di 1, tale che si abbia:

$$\frac{u_n}{U_n} < K \tag{3}$$

da un certo valore dell'indice n in poi.

Denotiamo con $f(x)$ la funzione $x - \log(1+x)$ ed osserviamo che la sua derivata si annulla solo per $x = 0$. A destra del punto $x = 0$ la data funzione sarà allora sempre crescente o sempre decrescente e poichè si ha, per esempio: $f(e-1) = e-2 > 0$ ed inoltre: $f(0) = 0$, si conclude che $f(x)$ è crescente in ogni intervallo di numeri positivi. Ha luogo pertanto la seguente relazione:

$$x > \log(1+x) \tag{4}$$

per ogni $x > 0$.

Ciò premesso, riprendiamo la serie divergente $\sum u_n$ sopra considerata e supponiamo dapprima che si abbia:

$$\log^{h_{n+1}} U_n \geqq 1 . \tag{5}$$

In tale ipotesi, la successione

$$\prod_{r=0}^{h_{n+1}} \frac{\log^r U_n}{\log^r U_{n+1}} \tag{6}$$

non ha per valor limite lo zero.

Si ha infatti (tenuto conto della (3)):

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} = 1 - \frac{u_{n+1}}{U_{n+1}} > 1 - K \tag{7}$$

da un certo valore dell'indice n in poi; dunque la successione

$$\frac{U_n}{U_{n+1}}$$

non ha per valor limite lo zero e ciò permette di supporre che nella (6) l'intero h_{n+1} non sia nullo e l'indice r vari fra 1 ed h_{n+1}.

Dall'ipotesi (5) si ricava allora:

$$\log U_n \geqq 1$$

e poichè si ha, in virtù della (4):

$$\frac{u_{n+1}}{U_n} > \log\left(1 + \frac{u_{n+1}}{U_n}\right),$$

si deduce:

$$1 + \frac{u_{n+1}}{U_n} > 1 + \frac{\log\left(1 + \frac{u_{n+1}}{U_n}\right)}{\log U_n}$$

e quindi:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} > \frac{\log U_{n+1}}{\log U_n}.$$

Ne segue:

$$\frac{\log U_{n+1}}{\log U_n} > \frac{\log^2 U_{n+1}}{\log^2 U_n} > \cdots > \frac{\log^{h_{n+1}} U_{n+1}}{\log^{h_{n+1}} U_n}$$

ed a maggior ragione:

$$\prod_{r=1}^{h_{n+1}} \frac{\log^r U_{n+1}}{\log^r U_n} \leq \left(\frac{\log U_{n+1}}{\log U_n}\right)^{h_{n+1}}. \tag{8}$$

Poniamo adesso:

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} 1 & \text{per } h = 0 \\ e^{\varepsilon(h-1)} & \text{per } h > 0 \end{cases}$$

e dimostriamo la relazione:

$$h + 1 \leq \varepsilon(h). \tag{9}$$

Essa ha luogo, per definizione, se $h = 0$; ed allora, supposto $h > 0$ ed ammessa vera la (9) per $h - 1$, basta dimostrare che essa è vera per h.

Ciò è quasi immediato, giacchè dall'ipotesi

$$h \leq \varepsilon(h-1)$$

si ricava:

$$e^h \leq e^{\varepsilon(h-1)} = \varepsilon(h),$$

da cui, osservando che $[1 + (e-1)]^h$ non è minore di $1 + (e-1)h$ e perciò di $1 + h$, si trae infine la (9).

Dalla (5), tenuta presente la definizione di $\varepsilon(h)$, si ricava intanto:

$$\varepsilon(h_{n+1} - 1) \leq \log U_n,$$

da cui segue, in virtù della (9):

$$h_{n+1} \leq \log U_n.$$

La (8), pertanto, fornisce la relazione:

$$\prod_{r=1}^{h_{n+1}} \frac{\log^r U_{n+1}}{\log^r U_n} \leq \left(\frac{\log U_{n+1}}{\log U_n}\right)^{\log U_n}$$

ed il nostro assunto resterà dimostrato provando che la successione

$$\left(\frac{\log U_{n+1}}{\log U_n}\right)^{\log U_n}$$

è *limitata*.

A tal fine, denotiamo con brevemente con ϑ_n il termine *n–imo* della detta successione ed osserviamo che si ha:

$$\log \vartheta_n = \log U_n \log\left(1 + \frac{\log \frac{U_{n+1}}{U_n}}{\log U_n}\right)$$

Ne segue, tenuto conto della (4):

$$\log \vartheta_n < \log \frac{U_{n+1}}{U_n},$$

quindi:

$$\vartheta_n < \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

ed infine, in virtù della (7):

$$\vartheta_n < \frac{1}{1 - K}.$$

Dunque, la successione (6) non ha per valor limite lo zero.

Ciò premesso, poniamo:

$$u_{11} = u_1.$$

Denotiamo con τ_2 il minimo numero intero per cui occorre dividere u_2 affinchè il quoziente non superi u_{11}, e poniamo:

$$u_{21} = u_{22} = \cdots = u_{2\tau_2} = \frac{u_2}{\tau_2}.$$

Denotiamo quindi con τ_3 il minimo numero intero per cui occorre dividere u_3 affinchè il quoziente non superi $u_{2\tau_2}$, e poniamo:

$$u_{31} = u_{32} = \cdots = u_{3\tau_3} = \frac{u_3}{\tau_3}.$$

Pensando di ripetere l'accennato procedimento per tutti i termini della successione u_n, veniamo così a costruire una nuova successione:

$$u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{2\tau_2}, \cdots, u_{n1}, \cdots, u_{n\tau_n}, \cdots$$

nella quale ogni termine non è minore del successivo. Ed allora, detta U_{ni} la somma dei termini di tale successsione dal primo u_{11} ad u_{ni}, la serie:

$$\frac{u_{11}}{\prod_{r=0}^{h_1} \log^r U_{11}} + \frac{u_{21}}{\prod_{r=0}^{h_2} \log^r U_{21}} + \cdots + \frac{u_{2\tau_2}}{\prod_{r=0}^{h_2} \log^r U_{2\tau_2}} + \cdots$$

$$+ \frac{u_{n1}}{\prod_{r=0}^{h_n} \log^r U_{n1}} + \cdots + \frac{u_{n\tau_n}}{\prod_{r=0}^{h_n} \log^r U_{n\tau_n}} + \cdots$$

risulta divergente [3] e la serie:

$$\sum \sum_{i=1}^{\tau_n} \frac{u_{ni}}{\prod_{r=0}^{h_n} \log^r U_{ni}}$$

ottenuta dalla precedente per associazione di termini, è, per conseguenza, pure divergente.

Si ha intanto (per ogni $n > 1$):

$$\frac{u_n}{\prod_{r=0}^{h_n} \log^r U_n} \leq \sum_{i=1}^{\tau_n} \frac{u_{ni}}{\prod_{r=0}^{h_n} \log^r U_{ni}} < \frac{u_n}{\prod_{r=0}^{h_n} \log^r U_{n-1}}$$

e poichè il rapporto (6) fra il primo e l'ultimo membro di tale relazione non ha per valor limite lo zero (come abbiamo precedentemente dimostrato), nemmeno il rapporto fra il primo ed il secondo membro ammetterà lo zero come punto limite; pertanto, in virtù di un noto criterio di confronto, la serie (2) è pure divergente.

Si riconosce poi facilmente che tale serie continua a divergere anche quando la successione

$$\overset{h_{n+1}}{\log} U_n$$

non sia limitata inferiormente da 1, sicchè, in conclusione, possiamo enunciare il seguente teorema:

« Sia

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

una serie divergente a termini positivi e U_n denoti la somma dei suoi primi n termini.

Se esiste un numero positivo K minore di 1, tale che abbia luogo la limitazione (3) (da un certo valore dell'indice n in poi), allora la serie (2) è divergente, qualunque sia la successione h_n di numeri interi non negativi, purchè la successione

$$\overset{h_1}{\log} U_1 , \overset{h_2}{\log} U_2 , \cdots , \overset{h_n}{\log} U_n , \cdots$$

si mantenga a termini positivi ».

(3) B. Pettineo, loc. cit.

Matematica. — *Gli automoduli primitivi delle algebre legate a gruppi abeliani di ordine finito.* Nota di L. LOMBARDO-RADICE, presentata [1] dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Il gruppo G di ordine n, con gli elementi:

$$\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \cdots, \bar{\gamma}_s$$

sia abeliano.

L'algebra A legata ad esso in un corpo Γ sarà commutativa: in A, per definizione, esisteranno n elementi atti a generare l'algebra e formanti un gruppo isomorfo a G: siano:

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n$$

$$(\bar{u}_i \bar{u}_j = \bar{u}_l \text{ se } \gamma_i \gamma_j = \gamma_l)$$

Il gruppo G (il gruppo generato dalle $\bar{u}_i$) sia il prodotto diretto di s gruppi ciclici, di ordine rispettivamente $n_1, n_2, \cdots, n_s$ ($n \times_1 n_2 \times \cdots \times n_s = n$) generati da $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ (da $u_1, u_2, \cdots, u_s$). Tutte le $\bar{u}_i$ si potranno perciò scrivere come prodotti di potenze delle u_i: per l'elemento corrente x dell'algebra A si avrà quindi:

$$x = \sum_0^{n_1-1} \sum_0^{n_2-1} \cdots \sum_0^{n_s-1} \alpha_{i_1, \ldots, i_s} u_1^{i_1} \times \cdots \times u_s^{i_s}.$$

Per giungere alla determinazione degli automoduli primitivi [2] di A, ci proponiamo innanzitutto di trovare, se esistono, gli automoduli primitivi aventi la caratteristica 1: tali cioè che il primo sistema di Peirce legato ad essi sia un'algebra (primitiva) di ordine 1 [3].

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento x di A abbia la caratteristica 1 è che il prodotto $u_j \times x$ sia un multiplo, $k_j x$, della x (qualsiasi sia il valore di j) come si vede immediatamente per la definizione stessa di caratteristica.

In $u_j x$ il coefficiente di $u_j^{i_j}$ (che indicheremo per un momento con α_{i_j}) non è altro che il coefficiente di $u_j^{i_j-1}$ in x. Se dev'essere quindi:

$$u_j \cdot x = k_j \cdot x$$

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) Un automodulo (cioè un elemento che è uguale al suo quadrato), si dice primitivo quando in A non esistono automoduli diversi da esso che abbiano in esso un modulo.

(3) La caratteristica sinistra (destra) di un elemento x in un'algebra A è l'ordine di xA (di Ax): le due caratteristiche coincidono evidentemente in un'algebra commutativa. Il primo sistema di Peirce legato all'automodulo u_1 è l'insieme degli elementi che hanno in u_1 un modulo. (Vedi, per esempio G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre*, p. 272 sgg. Principato, Messina, 1921).

si avrà:

$$\bar{\alpha}_{n_j} = k_j \bar{\alpha}_{n_j - 1}$$

$$\bar{\alpha}_{n_j - 1} = k_j \bar{\alpha}_{n_j - 2}$$

$$\bar{\alpha}_j = k_j \bar{\alpha}_0 = k_j \bar{\alpha}_{n_j} \; (u_j^{n_j} = u_j^0 = \text{elemento identico})$$

Quindi:

$$\bar{\alpha}_n = k_j^2 \bar{\alpha}_{n_j - 2} = \cdots = k_j^{n_j} \bar{\alpha}_0 = k_j^{n_j} \bar{\alpha}_{n_j}$$

cioè:

$$\bar{\alpha}_{n_j} (k_j^{n_j} - 1) = 0 .$$

Nell'ipotesi fatta, e cioè che x sia un elemento di caratteristica 1, è facile vedere che non può essere $\bar{\alpha}_{n_j} = 0$ senza che si annullino contemporaneamente tutti gli altri coefficienti delle $u^{i_1} \cdots u^{i_s}$ in x, senza cioè che x stesso sia uguale a zero. Poichè noi vogliamo che x sia automodulo, l'ipotesi $\bar{\alpha}_{n_j} = 0$ può essere scartata. Dovrà essere allora:

$$k_j^{n_j} - 1 = 0 . \tag{1}$$

Supponiamo ora che il corpo Γ nel quale è definita A:

1° sia a caratteristica p 0 a caratteristica p (p *primo con* n);

2° contenga le radici n_1–me, $\cdots$, n_s–me dell'unità [4].

Allora, per la (1), in un elemento x di caratteristica 1 il coefficiente $\bar{\alpha}_{i_j}$ di $u_j^{i_j}$ dev'essere:

$$\varepsilon_{k_j}^{i_j} \cdot \alpha$$

(essendo α il coefficiente dell'elemento identico, ε_{k_j} una delle n_j radici n_j–me dell'unità – tutte distinte – esistenti in Γ). Con lo stesso procedimento si trova che il coefficiente di $u_j^{i_j} \cdot u_i^{i_i}$ in un elemento x di caratteristica 1 dev'essere:

$$\alpha \cdot \varepsilon_{k_j}^{i_j} \varepsilon_{k_i}^{i_i}$$

e in fine che il coefficiente in x di $u_1^{i_1} \cdot u_2^{i_2} \cdots u_s^{i_s}$ dev'essere:

$$\alpha \cdot \varepsilon_{k_1}^{i_1} \cdot \varepsilon_{k_2}^{i_2} \cdots \varepsilon_{k_s}^{i_s} .$$

Abbiamo così intanto che ogni elemento x di caratteristica 1 è del tipo:

$$x = \alpha \left(\sum_0^{n_1 - 1} \sum_0^{n_2 - 1} \cdots \sum_0^{n_s - 1} \varepsilon_{h_1}^{i_1} \cdots \varepsilon_{h_s}^{i_s} u_1^{i_1} \cdots u_s^{i_s} \right). \tag{2}$$

Se si vuole che x sia automodulo, cioè che $x^2 = x$, uguagliando il coefficiente del modulo in x^2 al coefficiente del modulo in x si trova che (omettiamo per brevità il semplice calcolo):

$$n\alpha^2 = \alpha$$

(4) Interessa notare che, nell'ipotesi fatta, tali radici sono tutte distinte: perchè, essendo $n_i \neq 0$, l'equazione: $x^{n_i} - 1 = 0$ e la sua derivata: $n_i x^{n_i - 1} = 0$ non hanno radici in comune.

cioè, per $x = 0$:

$$\alpha = \frac{1}{n}.$$

Viceversa, preso nella (2) per α il valore $\frac{1}{n}$, si verifica facilmente che x è effettivamente un automodulo. Otteniamo così n automoduli:

$$(2) \qquad v_{h_1,h_2,\ldots,h_s} = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n_1-1} \sum_{0}^{n_2-1} \cdots \sum_{0}^{n_s-1} \varepsilon_{h_1}^{t_1} \cdot \varepsilon_{h_2}^{t_2} \cdots \varepsilon_{h_s}^{t_s} \cdot u_1^{t_1} \cdots u_s^{t_s}$$

facendo variare h_1 da 1 a $n_1, \ldots, h_s$ da 1 a n_s: combinando cioè in tutti i modi possibili i diversi valori delle radici n_1-me, $\ldots, n_s$-me dell'unità. Questi n automoduli sono – si badi bene – tutti distinti, perchè abbiamo supposto che nel corpo Γ le n_i radici n_i-me fossero tutte distinte. Inoltre un semplice calcolo dimostra che gli n automoduli primitivi trovati sono due a due mutuamente nullifici. Essi saranno allora anche indipendenti e la loro somma sarà il modulo u dell'algebra $A^{(5)}$. Ciò si vede anche direttamente esprimendo le unità $u_1^{t_1} \times \cdots \times u_s^{t_s}$, che formano una base dell'algebra, mediante le $v_{h_1,h_2,\ldots,h_s}$.

Si ha infatti (come non è difficile verificare):

$$(4) \qquad u_1^{t_1} \times \cdots \times u_s^{t_s} = \sum_{1}^{n_1} \cdots \sum_{1}^{n_s} \varepsilon_{h_1}^{-t_1} \times \cdots \times \varepsilon_{h_s}^{-t_s} v_{h_1,\ldots,h_s}.$$

L'algebra A si spezza così nella somma diretta di n algebre regolari di ordine 1:

$$(5) \qquad A = \sum_{1}^{n_1} \cdots \sum_{1}^{n_s} A_{h_1,\ldots,h_s}$$

(dove $A_{h_1,\ldots,h_s}$ è l'algebra regolare di ordine 1 avente per modulo l'automodulo primitivo $v_{h_1,\ldots,h_s}$).

Chiamiamo $x_{h_1,\ldots,h_s}^{(t_1,\ldots,t_s)}$ la componente di $u_1^{t_1} \times \cdots \times u_s^{t_s}$ in $A_{h_1,\ldots,h_s}$.

Si vede subito che le x, al variare di $t_1, \ldots, t_s$ dànno una rappresentazione del gruppo G su un gruppo di matrici del primo ordine. Infatti

$$\left(u_1^{t_1} \times \cdots \times u_s^{t_s}\right)\left(u_1^{t_1'} \times \cdots \times u_s^{t_s'}\right) = \left(\sum x_{h_1,\ldots,h_s}^{(t_1,\ldots,t_s)}\right)\left(\sum x_{h_1,\ldots,h_s}^{(t_1',\ldots,t_s')}\right) =$$

$$= \sum x_{h_1,\ldots,h_s}^{(t_1,\ldots,t_s)} \times x_{h_1,\ldots,h_s}^{(t_1',\ldots,t_s')}$$

cioè le $x_{h_1,\ldots,h_s}^{(t_1,\ldots,t_s)}$ al variare di $t_1, t_2, \ldots, t_s$ formano un gruppo omomorfo a G. Ma sviluppando i ragionamenti di una ben nota Memoria di Giuseppe

(5) Vedi, per esempio, G. Scorza, loc. cit. in (3), n. 161, p. 266.

Fichera [6] si trova anzi che in questo modo si hanno proprio le n rappresentazioni irriducibili in un gruppo abeliano su gruppi di sostituzioni in un corpo in cui è $n \neq 0$. Dalla (4) si ha:

$$x^{(t_1,\cdots,t_s)}_{h_1,\cdots,h_s} = \varepsilon_{h_1}^{-t_1} \times \cdots \times \varepsilon_{h_s}^{-t_s} \cdot v_{h_1,\cdots,h_s}$$

Ed essendo l'algebra regolare generata da $v_{h_1,\cdots,h_s}$ isomorfa all'algebra delle matrici d'ordine 1, si ritrova così il noto risultato relativo alle rappresentazioni irriducibili di un gruppo abeliano su gruppi di matrici, nel caso in cui la caratteristica del corpo nel quale sono definite le matrici non divide l'ordine del gruppo.

Possiamo riassumere così questi primi risultati:

Le algebre legate a gruppi abeliani di ordine n in un corpo Γ *di caratteristica p (p primo con n) contenente le radici* p_i*-me dell'unità (*p_i *divisore di n), sono tutte isomorfe fra loro ed isomorfe all'algebra (unica di fronte alla relazione di isoformismo) somma diretta di n algebre regolari di ordine* 1.

Infatti gli n elementi (indipendenti) di A:

$$u_1^{t_1} \times \cdots \times u_s^{t_s} = \sum_1^{n_1}{}_{h_1} \cdots \sum_1^{n_s}{}_{h_s} \varepsilon_{h_1}^{-t_1} \times \cdots \times \varepsilon_{h_s}^{-t_s} v_{h_1,\cdots,h_s}$$

(dove le $v_{h_1,\cdots,h_s}$ *rappresentano, al variare di* h_1 *da* 1 *a* $n_1, \cdots$, *di* h_s *da* 1 *a* n_s, *gli n automoduli primitivi di* A *che sono moduli delle n algebre regolari di ordine* 1 *nella cui somma si spezza* A*) formano un gruppo isomorfo al gruppo abeliano* G *avente per base gli elemeuti*:

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$$

di ordine rispettivamente $n_1, n_2, \cdots, n_s$ $(n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_s = n)$.

Le coordinate delle componenti di questi elementi rispetto al modulo di una delle n algebre regolari di ordine 1 *nella cui somma diretta si spezza* A *dànno una delle n rappresentazioni irriducibili del gruppo* G *su gruppi di matrici in* Γ.

Sia ora A′ l'algebra legata a G in un corpo Γ' ancora di caratteristica o o di caratteristica p (p primo con n), ma *non* contenente tutte le radici n_i-me dell'unità (almeno per un valore di i). Sia x un automodulo primitivo di A′. Se si indica, come poc'anzi, con A l'algebra legata a G nel corpo Γ che si ottiene da Γ' aggiungendo a Γ' quelle radici n_i-me dell'unità che in esso mancano, x, che è un elemento anche di A, sarà anche in A un automodulo (non più però necessariamente primitivo). Ma in A ogni

(6) Vedi G. Fichera, *I caratteri di un gruppo e le sue rappresentazioni sopra un gruppo di sostituzioni lineari*. « Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », ser. 5ª, vol. XIII, anno 1921.

automodulo è somma di un certo numero degli automoduli primitivi $v_{h_1,\ldots,h_s}$ or ora determinati [7].

Gli automoduli primitivi di A′ si ottengono quindi da quelli di A considerando gli automoduli:

$$x = \sum v_{h_1,\ldots,h_s} \tag{6}$$

appartenenti ad A′ oltre che ad A *e tali che la somma di una parte soltanto delle v che compaiono a secondo membro della* (6) *non sia un elemento di* A [8].

Resta infine il caso in cui il corpo Γ nel quale è definita l'algebra A legata al gruppo abeliano G sia a caratteristica p, *con* p *divisore di* n. Ma in questo caso, l'algebra legata al gruppo è somma di un'algebra semisemplice A_2 di ordine q e della sua sottoalgebra eccezionale E di ordine $(p^t - 1)q$ (essendo $p^t \cdot q = n$ l'ordine del gruppo G, – p e q primi fra di loro – essendo inoltre G il prodotto diretto di due gruppi abeliani G_1 e G_2, il primo di ordine p^t, il secondo di ordine q, A_2 l'algebra legata in Γ al gruppo abeliano G_2 di ordine q [9]).

In tal caso, gli automoduli primitivi di A sono tutti e soli gli automoduli primitivi di A_2. *Si hanno così* q *automoduli primitivi, che determinano lo spezzamento di* A *nella somma diretta di* q *algebre irriducibili* [10]. Ma anche su questo caso, e sul legame di questa ultima parte della nostra Nota con uno studio di R. Brauer [11], torneremo in una ulteriore Nota che farà seguito alla presente ed a quella preannunciata in (8).

(7) Vedi G. Scorza, loc. cit. in (3), n. 178, p. 278.

(8) Il caso in cui Γ′ è il corpo razionale sarà oggetto di un'altra Nota, che comparirà quest'anno nei « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università degli Studi di Roma », dal titolo: *Il numero delle componenti irriducibili delle algebre legate a gruppi abeliani di ordine finito nel corpo razionale*. Si vedrà, tra l'altro, come solo per i gruppi abeliani di ordine 2^m prodotto di m gruppi ciclici di ordine 2 la decomposizione di A in somma diretta di algebre irriducibili è identica tanto nel corpo razionale quanto in quello complesso.

(9) Vedi: *Intorno alle algebre legate ai gruppi di ordine finito*. Nota 1ª, di L. Lombardo-Radice, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Roma », ser. IV, vol. II, fasc. 4, 1938, p. 318.

(10) Vedi, per esempio, G. Scorza, *Sulle algebre riducibili*. « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Roma », vol. I, fasc. III, gennaio 1937, p. 5.

(11) Vedi R. Brauer, *Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern* (Hermann–Paris, « Actualités scientifiques et industrielles », 195, anno 1935).

Matematica. — *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito* [1]. Nota di A. Ghizzetti, presentata [2] dal Corrisp. E. Bompiani.

In questa Nota espongo alcuni risultati contenuti in una mia Memoria, con lo stesso titolo, attualmente in corso di stampa nei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni dell'Università di Roma e dell'Istituto di Alta Matematica ». In essa dò una nuova interpretazione del metodo, ideato da M. Picone, dalla trasformazione parziale di Laplace ad intervallo finito di integrazione, per la risoluzione di problemi al contorno relativi ad equazioni differenziali alle derivate parziali, lineari, a coefficienti costanti, di tipo ellittico, in un assegnato dominio T. Tale interpretazione, oltre a dare una completa sistemazione teorica del metodo sopradetto, mette in evidenza un altro metodo applicabile anche ad equazioni a coefficienti variabili, tutte le volte che si conosce la funzione di Green del problema considerato, posto però *in un dominio* T' *contenente* T *ed avente una parte della sua frontiera in comune con la frontiera di* T.

Le mie ricerche si sono per ora limitate a problemi in due dimensioni; qui le esporrò brevemente riferendomi al problema di Dirichlet per l'equazione

$$(1) \qquad E[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda^2 u = F(x, y)$$

in un dominio T normale rispetto all'asse x, che supporrò definito dalle

$$(2) \qquad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \text{ [3]}.$$

Nella Memoria sopracitata ho anche trattato, nel medesimo dominio T, il problema di Neumann per la (1) e quello dell'equilibrio di una piastra incastrata. Di ciò non parlo in questa Nota; considero invece alla fine di essa un altro problema (per un'equazione a coefficienti variabili) che serve a mettere in evidenza il metodo a cui ho sopra accennato.

1. Consideriamo il problema di Dirichlet nel dominio (2) per l'equazione (1) (con λ reale), precisando le condizioni al contorno nel modo seguente:

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(3) Si suppone $\alpha(x) < \beta(x)$ per $0 < x < 1$, potendo eventualmente verificarsi una o entrambe delle $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$. Porremo nel seguito $\alpha(0) = \alpha_0$, $\beta(0) = \beta_0$, $\alpha(1) = \beta_1$, $\beta(1) = \beta_1$.

(3) $\quad u[x, \alpha(x)] = \varphi(x) \quad , \quad u[x, \beta(x)] = \psi(x) \quad$ (per $0 \leq x \leq 1$)

(4) $u(0, y) = a(y)$ (per $\alpha_0 \leq y \leq \beta_0$) , $u(1, y) = b(y)$ (per $\alpha_1 \leq y \leq \beta_1$).

Applichiamo formalmente il metodo della trasformazione di Laplace. Considerata dell'incognita $u(x, y)$ la seguente trasformata parziale

$$(5) \qquad u^*(x, q) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} e^{qy} u(x, y)\, dy ,$$

dalle (1), (3) segue facilmente che la $u^*(x, q)$ deve verificare l'equazione differenziale

$$(6) \qquad \frac{d^2 u^*}{dx^2} + (q^2 - \lambda^2) u^* = V(x, q)$$

ove si è posto

$$(7) \quad V(x, q) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} e^{qy} F(x, y)\, dy + \frac{d}{dx}\{e^{q\beta(x)} \psi(x) \beta'(x) - e^{q\alpha(x)} \varphi(x) \alpha'(x)\} +$$
$$+ q\{e^{q\beta(x)} \psi(x) - e^{q\alpha(x)} \varphi(x)\} + e^{q\beta(x)} \Psi(x) + e^{q\alpha(x)} \Phi(x) ,$$

indicando $\Phi(x)/\sqrt{1 + \alpha'^2(x)}$, $\Psi(x)/\sqrt{1 + \beta'^2(x)}$ i valori *incogniti* della derivata normale $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ sui due tratti $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$ della frontiera di T:

$$(8) \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{y=\alpha(x)} = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{1 + \alpha'^2(x)}} \quad , \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{y=\beta(x)} = \frac{\Psi(x)}{\sqrt{1 + \beta'^2(x)}} .$$

La (6) va accompagnata dalle condizioni ai limiti

$$(9) \quad u^*(0, q) = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} e^{qy} a(y)\, dy = a^*(q) \quad , \quad u^*(1, q) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{qy} b(y)\, dy = b^*(q)$$

che seguono dalle (4).

La soluzione del problema ordinario ai limiti (6), (9) ha l'espressione

$$(10) \qquad u^*(x, q) = \frac{\operatorname{sen} p(1 - x)}{\operatorname{sen} p} a^*(q) + \frac{\operatorname{sen} p x}{\operatorname{sen} p} b^*(q) +$$
$$+ \int_0^1 H(x, \xi, q) V(\xi, q)\, d\xi ,$$

ove i simboli p, H hanno i seguenti significati:

$$p = \sqrt{q^2 - \lambda^2},$$

$$H(x, \xi, q) \begin{cases} = -\dfrac{\operatorname{sen} p\xi \operatorname{sen} p(1-x)}{p \operatorname{sen} p} & (\text{per } \xi \leq x), \\ = -\dfrac{\operatorname{sen} px \operatorname{sen} p(1-\xi)}{p \operatorname{sen} p} & (\text{per } \xi \geq x). \end{cases}$$

La $u^*(x, q)$ data dalla (10) contiene le due funzioni incognite $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ che compaiono nella $V(x, q)$. Secondo un'osservazione di M. Picone si può tentare la loro determinazione osservando che la (10) rappresenta una funzione $u^*(x, q)$ *meromorfa* della variabile complessa q, con gli infiniti poli del 1° ordine $\pm \sqrt{n^2\pi^2 + \lambda^2} = \pm q_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, mentre la (5) prescrive che essa sia una funzione *intera* di q. Ne segue che è *necessario* l'annullarsi dei residui dei predetti poli, e ciò conduce facilmente alle equazioni

$$(11) \qquad \int_0^1 V(\xi, \pm q_n) \operatorname{sen}(n\pi\xi)\, d\xi = n\pi [a^*(\pm q_n) - (-1)^n b^*(\pm q_n)], \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Di qui, sostituendo a V, a^*, b^* le rispettive espressioni [vedi le (7), (9)] e separando i due casi del $+$ e del $-$, si arriva in fine al seguente sistema di infinite *equazioni integrali di Fischer-Riesz* nelle due funzioni incognite Φ, Ψ:

$$(12) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 e^{q_n \alpha(\xi)} \operatorname{sen}(n\pi\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi + \int_0^1 e^{q_n \beta(\xi)} \operatorname{sen}(n\pi\xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi - c_n = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 e^{-q_n \alpha(\xi)} \operatorname{sen}(n\pi\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi + \int_0^1 e^{-q_n \beta(\xi)} \operatorname{sen}(n\pi\xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi - d_n = 0 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ove c_n, d_n indicano quantità note di cui, per brevità, omettiamo l'espressione (4).

A questo punto, si presentano due questioni: la prima è quella di dimostrare rigorosamente le (12) che sono state dedotte formalmente; la seconda è di provare che, oltre ad essere *necessarie*, esse sono anche *sufficienti*.

Seguendo un ordine di idee recentemente introdotto da L. Amerio (5), ho potuto risolvere le due questioni così poste ricorrendo alle formule di

(4) Si noti che nella (7) i valori al contorno $\varphi(x)$, $\psi(x)$ assegnati dalla (3) compaiono derivati; ma ciò non accade più nelle espressioni di c_n, d_n qualora, dopo la sostituzione di (7) in (11), si eseguisca un'integrazione per parti.

(5) Vedi L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi.* («Rendiconti Istituto Lombardo», vol. LXXVIII, 1944-45).

Green relative all'operatore $E[u]$. Però, siccome il calcolo precedente introduce i valori della $\frac{\partial u}{\partial n}$ soltanto sui due tratti $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$ della frontiera FT del dominio T, non si devono considerare dette formule scritte con la soluzione fondamentale $v(r)$ dell'equazione $E[u] = 0$, ma bensì con una funzione che abbia la stessa singolarità della $v[r]$ ed elimini i valori della $\frac{\partial u}{\partial n}$ sui due tratti $x = 0$, $x = 1$ di FT. Una tale funzione è fornita dalla *funzione di Green* del problema di Dirichlet per la $E[u] = F$, posto nella striscia $S\ (0 \leq x \leq 1)$ che contiene il dominio T ed è espressa dalla

$$(13)\quad G(P, Q) = G(x, y, \xi, \eta) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} e^{-q_n\,|y-\eta|} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi\xi).$$

Le formule di Green su cui occorre fissare la nostra attenzione sono pertanto le seguenti:

$$(14)\quad \int_{FT} \left\{ u(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - \frac{\partial u(Q)}{\partial n} G(P, Q) \right\} ds_Q - \int_T F(Q)\, G(P, Q)\, dT_Q \Bigg\} \begin{cases} = 2\pi u(P) & \text{(se P è interno a T)} \\ = 0 & \text{(se P è esterno a T ed interno a S)} \end{cases}$$

che esplicitamente si scrivono

$$(15)\quad \int_0^1 \varphi(\xi) \{ -G_\xi[x, y, \xi, \alpha(\xi)]\, \alpha'(\xi) + G_\eta[x, y, \xi, \alpha(\xi)] \}\, d\xi +$$

$$+ \int_0^1 \psi(\xi) \{ G_\xi[x, y, \xi, \beta(\xi)]\, \beta'(\xi) - G_\eta[x, y, \xi, \beta(\xi)] \}\, d\xi +$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{\beta_0} a(\eta)\, G_\xi(x, y, 0, \eta)\, d\eta - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} b(\eta)\, G_\xi(x, y, 1, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^1 \Phi(\xi)\, G[x, y, \xi, \alpha(\xi)]\, d\xi - \int_0^1 \Psi(\xi)\, G[x, y, \xi, \beta(\xi)]\, d\xi -$$

$$- \iint_T F(\xi, \eta)\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \Bigg\} \begin{cases} = 2\pi u(x, y) \\ = 0. \end{cases}$$

Valendosi delle (13), (15) si risolvono completamente le due questioni di cui sopra, giacchè, facendo opportune ipotesi sulla funzione nota $F(x, y)$ e sulle funzioni $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$ che definiscono il dominio T, e consi-

derando una classe Γ assai generale di soluzioni del nostro problema [6], si dimostrano i seguenti teoremi:

I. – *Se il posto problema di Dirichlet ammette una soluzione* $u(x, y)$ *della classe* Γ, *allora le corrispondenti funzioni (incognite)* $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ *verificano necessariamente le infinite equazioni integrali* (12).

II. – *Se per certe funzioni* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, $a(y)$, $b(y)$ *sussiste la seconda delle* (15) *per ogni punto* $P(x, y)$ *esterno al dominio* T *ed interno alla striscia* S, *allora la funzione* $u(x, y)$ *definita all'interno di* T *dalla prima delle* (15) *risulta essere una soluzione di classe* Γ *dell'equazione* (1) *per la quale valgono quasi ovunque le* (3), (4), (8) (*ed è l'unica possibile.*)

III. – *Scritto, in corrispondenza ad assegnate* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $a(y)$, $b(y)$ *il sistema di equazioni integrali* (12) *nelle due funzioni incognite* $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, *ogni sua eventuale soluzione* Φ, Ψ *è tale da verificare, assieme alle precedenti funzioni, la seconda delle* (15) *per ogni punto* $P(x, y)$ *esterno a* T *e interno a* S. *Perciò* (teor. II) *in corrispondenza a detta coppia* Φ, Ψ *esiste una e una sola soluzione* $u(x, y)$ *di classe* Γ *del nostro problema di Dirichlet per la quale siano verificate le* (8). *Essa è espressa all'interno di* T *dalla prima delle* (15).

Il teor. I prova la necessità delle (12), col minimo di ipotesi; i teorr. II e III provano la loro *sufficienza*. La risoluzione del considerato problema di Dirichlet equivale dunque perfettamente a quella del sistema (12) di Fischer-Riesz; una volta risolto quest'ultimo (e sono ben noti i metodi con i quali ciò si può ottenere) la $u(x, y)$ è data dalla prima delle (15).

E limitandoci a considerare soluzioni $u(x, y)$ di una classe Γ' (più ristretta di Γ) in cui sia assicurato, per il nostro problema, il teorema di unicità (per esempio quella delle funzioni biregolari in T) resta anche provata la *chiusura* delle (12) (per esempio nella classe delle $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ continue in $(0, 1)$).

2. Nel problema del n. precedente, il metodo derivante dalla considerazione delle (13), (15) sostituisce completamente l'uso delle trasformate di Laplace; mostriamo, su un semplice esempio, che esso è applicabile anche in casi in cui non si può usare quello delle trasformate.

Siano ρ, θ coordinate polari nel piano, T il dominio polarmente normale definito dalle $0 \leq \theta \leq \omega$, $\alpha(\theta) \leq \rho \leq \beta(\theta)$ (ove supponiamo $\alpha(\theta) \geq m > 0$). Vogliamo risolvere in T il problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u = F(\rho, \theta)$, ossia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = F(\rho, \theta). \tag{16}$$

(6) Rinunciamo qui, per brevità, ad esporre dettagliatamente queste ipotesi, rinviando alla Memoria citata. Ci limitiamo a dire che le funzioni $\varphi(x)\sqrt{1+\alpha'^2(x)}$, $\psi(x)\sqrt{1+\beta'^2(x)}$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ devono essere sommabili in $(0,1)$ e le $a(y)$, $b(y)$ sommabili rispettivamente in (α_0, β_0), (α_1, β_1). Nei tre enunciati che seguono queste ipotesi di sommabilità sono sottintese.

Essendo la (16) a coefficienti funzioni di ρ, non è possibile applicare il metodo delle trasformate lungo le semirette $\theta = \text{cost}$. Purtuttavia, introducendo le incognite

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\rho=\alpha(\theta)} = \frac{\Phi(\theta)}{\sqrt{\alpha^2(\theta)+\alpha'^2(\theta)}} \quad , \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\rho=\beta(\theta)} = \frac{\Psi(\theta)}{\sqrt{\alpha^2(\theta)+\alpha'^2(\theta)}}$$

ed usando le formule di Green (14), ove si intenda per $G(P, Q)$ la funzione di Green dell'angolo $S\,(0 \leq \theta \leq \omega)$ ossia (a meno di un fattore costante)

$$(17) \qquad G(P,Q) \equiv G(\rho,\theta,r,\tau) \begin{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{n\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\omega}\operatorname{sen}\frac{n\pi\tau}{\omega} & (\text{per } r \leq \rho), \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\omega}\operatorname{sen}\frac{n\pi\tau}{\omega} & (\text{per } r \geq \rho), \end{cases}$$

si arriva facilmente a dimostrare un teorema simile al teor. I [7] e cioè che le incognite $\Phi(\theta)$, $\Psi(\theta)$ devono necessariamente verificare le infinite equazioni integrali di Fischer–Riesz:

$$(18) \quad \begin{cases} \int_0^{\omega} [\alpha(\tau)]^{\frac{n\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{n\pi\tau}{\omega}\Phi(\tau)\,d\tau + \int_0^{\omega} [\beta(\tau)]^{\frac{n\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{n\pi\tau}{\omega}\Psi(\tau)\,d\tau - c_n = 0, \\ \int_0^{\omega} [\alpha(\tau)]^{-\frac{n\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{n\pi\tau}{\omega}\Phi(\tau)\,d\tau + \int_0^{\omega} [\beta(\tau)]^{-\frac{n\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{n\pi\tau}{\omega}\Psi(\tau)\,d\tau - d_n = 0, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

essendo c_n, d_n costanti note. Successivamente si prova la sufficienza delle (18) dimostrando teoremi analoghi ai teorr. II e III. Risolte le (18), la soluzione $u(x, y)$ è data dalla prima delle (14).

(7) Ecco un cenno della dimostrazione. Sia $0 < m \leq \alpha(\theta) \leq \beta(\theta) \leq M$; si applichi la seconda delle (14) una volta per un punto $P(\rho, \theta)$ con $\rho > M + \sigma$, $0 < \theta < \omega$ $(\sigma > 0)$ [usando per G la prima delle (17)] ed una seconda volta con $0 < \rho < m - \sigma$, $0 < \theta < \omega$ $(0 < \sigma < m)$ [usando per G la seconda delle (17)]. Le serie (17) sono allora totalmente convergenti e si può, nella seconda delle (14), integrare termine a termine; risultano due formule del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\rho^{\pm\frac{n\pi}{\omega}} \operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\omega}\{\cdots\} = 0,$$

le espressioni fra { } coincidendo coi primi membri delle (18).

Matematica (Topologia). — *A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni.* Nota di G. Scorza Dragoni, presentata [1] dal Socio G. Castelnuovo.

Le dimostrazioni del teorema di Brouwer sulle traslazioni piane generalizzate, cioè sugli autoomeomorfismi del piano che conservino l'indicatrice e non abbiano punti uniti, e dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré, secondo l'indirizzo di v. Kerékjártó [2], si basano su alcune proprietà fondamentali [3] dei segmenti di traslazione [4] di quegli autoomeomorfismi.

Anche lo studio degli autoomeomorfismi di una superficie chiusa, orientabile, conservanti il senso delle rotazioni e dotati di un numero finito di punti uniti, si può ricondurre a quello delle traslazioni piane generalizzate [5]; e la riduzione mostra che è opportuno approfondire le nostre conoscenze su queste ultime. In questa direzione ho già sviluppato alcune ricerche [6]. Nella Nota presente mi propongo di ampliare la portata del teorema dimostrato in loc. cit. [2], pp. 94-96 e nel § 9 della Memoria I, citata in [3].

1. Ipotesi, notazioni e posizione del problema. — Si fissi nel piano ambiente un sistema di assi cartesiani ortogonali. E sia t una traslazione del piano generalizzata. Se λ è un arco di traslazione (di t), $\sigma(\lambda) = \cdots + t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda) + \cdots$ è la traiettoria generata da λ e dalle immagini di λ nelle diverse potenze di t. Come è noto, $\sigma(\lambda)$ è una linea semplice.

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(2) B. v. Kerékjártó, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* [« Acta litterarum ac Scientiarum Universitatis Hungaricae Francisco Josephinae », tomo IV (1928), pp. 86-102].

(3) Una esposizione completa di una catena di proprietà sufficienti allo scopo si trova, per esempio, in G. Scorza Dragoni, *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IV (1933), pp. 159-212]. Nel seguito questa Memoria è citata con la sigla M. I.

(4) Mi valgo della terminologia usata in M. I. Una esposizione riassuntiva dei termini introdotti e dei risultati esposti in M. I si trova anche in G. Scorza Dragoni, *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., tomo IV (1933), pp. 213-269], § 2.

(5) B. v. Kerékjártó, *Note on the general translation theorem of Brouwer* [« Atti del Congresso internazionale dei Matematici del 1928 », Zanichelli, Bologna, vol. 4, pp. 235-238], n. 5.

(6) G. Scorza Dragoni, *Sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano e sulle loro curve di accumulazione* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), pp. 1-75]; *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo piano* [questi « Rendiconti », ser. 8ª, vol. 1 (1946), pp. 156-161].

Ciò premesso, ecco il teorema che mi propongo di dimostrare:

Sia λ *un arco di traslazione, costituito da una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno parallelo a uno degli assi, e sia* $\Sigma(\lambda)$ *uno dei due campi adiacenti a* $\sigma(\lambda)$, *allora:*

o esiste uno pseudoarco di traslazione di prima specie τ, *che gode delle seguenti proprietà:* τ *è una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno parallelo a uno degli assi; l'arco di traslazione contenuto in* τ *è un segmento; l'origine* L *di* τ *è interna a* λ; $\tau - \mathrm{L}$ *è interno a* $\Sigma(\lambda)$;

oppure esiste una semilinea semplice aperta l, *costituita da un numero finito di segmenti e da un raggio* [7], *ciascuno parallelo a uno degli assi, che gode delle seguenti proprietà:* l *non incontra la propria immagine* $t(l)$; *l'origine* L *di* l *è interna a* λ; $l - \mathrm{L}$ *appartiene a* $\Sigma(\lambda)$.

Il teorema del § 9 di M. I dice in sostanza che la proposizione da dimostrare è vera, se λ è un segmento di traslazione, cioè se il numero m dei *lati* di λ è *uno*. Sicchè si è tentati di ammettere vero il teorema per $m < n$ e far vedere che esso è vero anche per $m = n$. E così faremo, tolti alcuni casi relativi ai primi valori di n.

2. Lemmi. - Conviene premettere alcune proposizioni, sostanzialmente già note in parte.

I) *Il teorema del n. 1 è vero, se esiste una semiretta* k, *con l'origine in un punto* K *interno a* λ, *parallela a uno degli assi, che penetri inizialmente in* $\Sigma(\lambda)$ *- cioè: rivolta verso* $\Sigma(\lambda)$ -, *che non incontri* $t^{-1}(\lambda)$ *e* $t(\lambda)$ *e abbia in comune con* λ *soltanto* K.

Basta procedere in maniera analoga a quella seguita nel n. 30 di M. I. Se k non incontra nemmeno $\sigma_i(\lambda) = t^{-1}(\lambda) + t^{-2}(\lambda) + \cdots$ e $\sigma_f(\lambda) = t(\lambda) + t^2(\lambda) + \cdots$, $k - \mathrm{K}$ appartiene a $\Sigma(\lambda)$, cfr. M. I, n. 9; quindi, se $k \cdot t(k) = 0$, k fornisce una semilinea quale la l. Se $k \cdot t(k) \neq 0$, poichè nelle ipotesi poste $k \cdot t(\mathrm{K}) = \mathrm{K} \cdot t(k) = 0$, k contiene (cfr. M. I, n. 16) uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine K, che risolve il problema.

Se k incontra $\sigma_i(\lambda)$ o $\sigma_f(\lambda)$, anzi, se k incontra $\sigma_f(\lambda)$, tanto per fissare le idee, sia a il più piccolo numero positivo tale che $k \cdot t^a(\lambda)$ sia diversa da zero. Per le ipotesi riesce $a > 1$. Spostiamoci su k a partire da K fino al primo punto A di $k \cdot t^a(\lambda)$. A norma di un teorema fondamentale di Brouwer [8] e in virtù della $a > 1$, KA taglia la propria immagine (nella t). Sicchè ci troviamo ricondotti al seguente lemma:

(7) Raggio = semiretta.

(8) L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes* [« Mathematische Annalen », vol. 72 (1912), pp. 35-57], p. 44 teorema 6; v. Kerékjártó, loc. cit. (2), p. 92, teorema II'); G. Scorza Dragoni, *Criteri per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [in corso di stampa negli « Annali di Matematica pura ed applicata], § 6.

II) *Il teorema del n. 1 è vero, se esiste un segmento* $s = KA$, *parallelo a uno degli assi, con l'estremo* K *interno a* λ, *rivolto verso* $\Sigma(\lambda)$ *e tale che:* $s - A$ *abbia solo* K *su* λ *e non incontri* $t^{-1}(\lambda)$ *e* $t(\lambda)$; s *e* $t(s)$ *abbiano dei punti interni a entrambi comuni.*

Allora, infatti, se A_1 è un punto interno di s abbastanza prossimo ad A, $s_1 = KA_1$ e $t(s_1)$ hanno punti comuni; s_1 non passa per $t(K)$ e K non appartiene a $t(s_1)$; quindi s_1 contiene (cfr. M. I, n. 16) uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine K, il quale, a meno di K, è interno a $\Sigma(\lambda)$ (cfr. M. I, n. 18).

Nei ragionamenti svolti, è implicito che:

III) *Il teorema del n. 1 è vero, se esiste una semiretta* k, *con l'origine* K *interna a* λ, *rivolta verso* $\Sigma(\lambda)$, *parallela a uno degli assi, che, a partire da* K, *incontri* $\sigma_i(\lambda) + \sigma_f(\lambda) - [t^{-1}(\lambda) + t(\lambda)]$ *prima di avere eventualmente incontrato* $t^{-1}(\lambda)$, $t(\lambda)$ *e* λ, *a prescindere da* K *naturalmente.*

È anche facile dimostrare che:

IV) *Il teorema del n. 1 è vero, se esiste un segmento* $s = KA$ *che abbia entrambi gli estremi su* $\sigma(\lambda)$, *con* K *interno a* λ; *che sia rivolto verso* $\Sigma(\lambda)$; *che sia parallelo e uno degli assi; che non abbia punti interni su* $t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda)$; *che abbia punti comuni con* $t(s)$, *ma soltanto punti che non siano interni sia a* $t(s)$ *che ad* s.

Infatti, nelle ipotesi poste s non può incontrare un $t^a(\lambda)$, con $|a| \geqq 2$, perchè altrimenti s dovrebbe tagliare $t(s)$ [a norma del teorema di Brouwer già sfruttato a proposito del lemma I), e la cosa si riconoscerebbe con lo stesso ragionamento svolto in quell'occasione]; e questo è contro l'ipotesi sull'intersezione $s \cdot t(s)$. Quindi (cfr. M. I, n. 9) i punti interni ad s sono interni a $\Sigma(\lambda)$.

Se A appartiene a λ, $t(s)$ ha entrambi gli estremi su $t(\lambda)$; è di qui e dall'essere K interno a λ, è facile dedurre che s e $t(s)$ non hanno, in queste condizioni, punti comuni. Ora ciò è assurdo. Dunque, A è esterno a λ; epperò appartiene o a $t^{-1}(\lambda)$ o a $t(\lambda)$; anzi, o è interno a $t^{-1}(\lambda)$, o è interno a $t(\lambda)$, dato che non può appartenere a $t^{-2}(\lambda)$ o $t^2(\lambda)$.

Tanto per fissare le idee, A sia interno a $t(\lambda)$. Allora s ha un estremo interno a λ e uno a $t(\lambda)$; $t(s)$ ha un estremo interno a $t(\lambda)$ e l'altro interno a $t^2(\lambda)$. Inoltre i punti interni a s sono interni a $\Sigma(\lambda)$, e così pure quelli interni a $t(s)$. Ma uno degli estremi di s o $t(s)$ deve appartenere a $t(s)$ o s; inoltre $\sigma(\lambda)$ è semplice; quindi è $A = t(K)$. Ed s è un segmento di traslazione, il cui interno appartiene a $\Sigma(\lambda)$. E poichè il teorema del n. 1 è vero per i segmenti di traslazione, il lemma IV) è un caso particolare del seguente:

V) *Il teorema del n. 1 è vero, se esiste un arco di traslazione* ν *che goda delle seguenti proprietà:* 1) ν *è costituito da un numero finito di segmenti, ciascuno parallelo a uno degli assi;* 2) *l'intersezione* $\lambda \cdot \nu$ *non è vuota e contiene punti interni a* λ, *mentre gli eventuali punti di* $\lambda \cdot \nu$ *interni* ν *sono interni a* λ;

3) ν *è contenuto in* $\sigma(\lambda)' + \Sigma(\lambda)$, *di guisa che uno,* $\Sigma(\nu)$, *dei due campi adiacenti a* $\sigma(\nu)$ *non contiene punti di* $\sigma(\lambda)$; 4) ν *verifica il teorema del n. 1 nei riguardi di* $\Sigma(\nu)$.

Infatti $\sigma(\lambda)$ e $\Sigma(\lambda)$ sono invarianti nella t, quindi $\sigma(\nu)$ appartiene a $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$; epperò $\sigma(\nu)$ e $\sigma(\lambda)$ non si tagliano mai. Inoltre $\sigma(\lambda)$ ha dei punti su $\sigma(\nu)$; quindi (cfr. M. I, n. 9) tutti i punti di $\sigma(\lambda)$ esterni a $\sigma(\nu)$ appartengono a uno stesso campo adiacente a $\sigma(\nu)$. L'esistenza di $\Sigma(\nu)$ è provata. Sia ω lo pseudoarco quale τ o la semilinea quale l, di cui nel teorema del n. 1, relativamente a ν e $\Sigma(\nu)$; e sia L' l'origine di ω. Se L' appartiene a λ, L' è interno a λ; e ω verifica le condizioni richieste anche rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$. Nel caso contrario sia, L un punto di λ e ν interno a λ, tale che il sottoarco ρ di ν, di estremi L' e L, abbia solo L su λ. Allora è facile riconoscere [9] che $\rho + \omega$ verifica le condizioni desiderate per λ e $\Sigma(\lambda)$.

3. Il caso $n = 2$: la prima alternativa. — *L'arco di traslazione* λ *sia costituito da due segmenti ortogonali non nulli* PQ_1 *e* $Q_1 t(P)$. *Si supponga che* $\Sigma(\lambda)$ *contenga i punti vicini a* Q_1 *interni all'angolo retto individuato da* λ.

In queste ipotesi il nostro teorema è stato implicitamente riconosciuto vero anche da v. Kerékjártó [10]. Ma non è inopportuno darne una dimostrazione dettagliata.

Sia R il punto corrente di PQ_1, estremi inclusi; r il raggio di origine R normale a PQ_1 e rivolto rispetto a PQ_1 dalla stessa banda di $Q_1 t(P)$. Se R è interno a PQ_1, r è rivolto verso $\Sigma(\lambda)$.

1) Se per una particolare posizione di r risulta $r \cdot t^{-1}(\lambda) = r \cdot t(\lambda) = 0$, R è interno a λ. E in questo caso il nostro teorema segue subito dal lemma I).

Se quella circostanza non si presenta mai, per ogni R diciamo S il primo punto di $t^{-1}(\lambda)$ o $t(\lambda)$, che si incontri su r a partire da R. Se $R \neq P$ e se S appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, indichiamo con α l'arco di $t^{-1}(\lambda)$ di estremi S e P e con j_α la curva semplice e chiusa $PR + RS + \alpha$; in questo caso $t(P)$ non appartiene a j_α. Se $R \neq Q_1$ e se S appartiene a $t(\lambda)$, indichiamo con β l'arco di $t(\lambda)$ di estremi S e $t(P)$ e con j_β la curva semplice e chiusa $SR + RQ_1 + Q_1 t(P) + \beta$; il punto P non appartiene a j_β.

2) Ciò premesso, se per un certo R, *interno* a PQ_1, S appartiene a $t^{-1}(\lambda)$ e j_α separa $t(P)$ e l'infinito, j_α deve incontrare la semilinea illimitata (cfr. M. I, n. 9) $\sigma_f(\lambda) = t(\lambda) + t^2(\lambda) + \cdots$ Poichè $\sigma(\lambda)$ è semplice e poichè $RS \cdot t(\lambda) = 0$, si ha quindi che dei punti interni a RS appartengono a $\sigma_f(\lambda) - t(\lambda)$. Donde il teorema, attesi il lemma III) e la $RS \cdot t^{-1}(\lambda) = S$.

3) In modo analogo si procede, se per un certo R, *interno* a PQ_1, S appartiene a $t(\lambda)$ e j_β separa P dall'infinito.

(9) Si vedano i ragionamenti svolti in loc cit. (4), § 3 e nota (58) a piè di p. 248.

(10) Loc. cit. (2), p. 96 § 2, n. 3.

Esclusi i sottocasi 2) e 3), se per un certo R_0, interno a PQ_1, il punto, diciamo, S_0 appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, lo stesso accade per ogni R di PR_0; analogamente nei riguardi di R_0Q_1, se S_0 appartiene a $t(\lambda)$. Sicchè ci rimane da considerare il sottocaso: il segmento PQ_1 contiene un punto K tale, che se $R(\neq K)$ è in PK, S appartiene a $t^{-1}(\lambda)$; se $R(\neq K)$ è in KQ_1, S appartiene a $t(\lambda)$.

Sia k il raggio cui si riduce r per $R = K$; H il punto S corrispondente a $R = K$.

4) Se H appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, K è diverso da Q_1 (ma può coincidere con P); k si può approssimare indefinitamente mediante semirette r, che contengono punti di $t(\lambda)$, epperò l'intersezione $k \cdot t(\lambda)$ non è vuota (e i suoi punti sono esterni al segmento KH). Spostiamoci su R a partire da K, fino al primo punto H_1 di $k \cdot t(\lambda)$. Qui giunti, torniamo indietro fino al primo punto H_0, comune a $t^{-1}(\lambda)$ e HH_1. A norma del teorema di Brouwer, ricordato nella nota [8], H_0H_1 taglia la propria immagine nella t. Se si hanno presenti le cose dette in M. I, nn. 32 e 33, si riconosce subito che RS taglia la propria immagine, se R è interno a KQ_1 ed è abbastanza prossimo a K. E la conclusione voluta segue subito dal lemma II).

5) Se H appartiene a $t(\lambda)$, K è diverso da P (ma può coincidere con Q_1). In questo caso, si procede in maniera analoga alla precedente. Il lemma II) conduce alla stessa conclusione.

4. Le prime alternative dei casi $n = 3$, $n = 4$. – *Sia* $\lambda = PQ_1 + Q_1Q_2 + Q_2t(P)$. *I segmenti (non nulli)* PQ_1 *e* $Q_2t(P)$ *siano normali al segmento (non nullo)* Q_1Q_2 *e siano rivolti dalla stessa banda di questo. Si supponga che* $\Sigma(\lambda)$ *contenga i punti vicini a* Q_1 *e quelli vicini a* Q_2 *rispettivamente interni ai due angoli retti coi vertici in* Q_1 *e* Q_2 *individuati dai lati di* λ [11].

Anche in questo caso il teorema è stato già riconosciuto vero da v. Kerékjártó [12]. Lo si dimostra con lo stesso ragionamento del n. 3, applicato ai raggi con le origini in Q_1Q_2, normali a Q_1Q_2 e rivolti dalla stessa banda di PQ_1 rispetto a Q_1Q_2.

Sia $\lambda = PQ_1 + Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3t(P)$, *dove* $PQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3t(P)$ *sono quattro segmenti non nulli, ciascuno normale al precedente. Inoltre* PQ_1 *e* Q_2Q_3 *siano rivolti rispetto a* Q_1Q_2 *dalla medesima banda; lo stesso si dica per* Q_1Q_2 *e* $Q_3t(P)$ *nei riguardi di* Q_2Q_3. *Si supponga che* $\Sigma(\lambda)$ *contenga i punti vicini a* Q_1, *quelli vicini a* Q_2 *e quelli vicini a* Q_3 *interni agli angoli retti individuati da* λ.

(11) La condizione imposta ai punti di $\Sigma(\lambda)$ vicini a Q_2 è conseguenza delle altre ipotesi. L'osservazione vale anche nel caso successivo (e in quello del n. 5), relativamente ai punti di $\Sigma(\lambda)$ vicini a Q_2 e Q_3 (a Q_2, Q_3 e Q_4).

(12) Loc. cit. (5), n. 3, primo capoverso.

1) Se $Q_3\, t(P)$ è più corto di $Q_1 Q_2$, sia P' la proiezione ortogonale di $t(P)$ su $Q_1 Q_2$. Allora il teorema in questo caso si dimostra con lo stesso ragionamento del n. 3, applicato ai raggi con le origini su $Q_1 P'$, normali a $Q_1 P'$ e rivolti, rispetto a $Q_1 P'$, dalla stessa banda di $Q_1 P$.

2) Se $Q_3\, t(P)$ non è più corto di $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$ è più lungo di PQ_1. Se adesso P' è la proiezione ortogonale di P su $Q_2 Q_3$, il teorema si dimostra con lo stesso ragionamento del n. 3, applicato ai raggi con le origini su $P'Q_3$, normali a $P'Q_3$ e rivolti, rispetto a $P'Q_3$, dalla stessa banda di $Q_3\, t(P)$.

5. La prima alternativa del caso $n \geqq 5$. – Introduciamo una convenzione, implicitamente seguita finora: P e $t(P)$ siano gli estremi di λ, di guisa che P è individuato in modo unico, perchè $\sigma(\lambda)$ non ha punti multipli; e $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ siano i vertici di λ, nell'ordine con cui si incontrano, se si percorre λ da P a $t(P)$.

Si supponga $n \geqq 5$; λ *abbia* n *lati;* PQ_1 *e* $Q_2 Q_3$, $Q_1 Q_2$ *e* $Q_3 Q_4$, $Q_2 Q_3$ *e* $Q_4 Q_5$ [$Q_5 = t(P)$, *se* $n = 5$] *siano rispettivamente rivolti dalle medesime bande di* $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_4$; $\Sigma(\lambda)$ *contenga i punti vicini a* Q_1, Q_2, Q_3 *e* Q_4 *interni agli angoli retti individuati da* λ.

Sia R il punto corrente *interno* a $Q_2 Q_3$; r la semiretta di origine R, normale a $Q_2 Q_3$ e rivolta verso $\Sigma(\lambda)$; S il primo eventuale punto di λ, diverso da R, che si incontri su r a partire da R. Allora è facile riconoscere che esiste un punto K, *interno* a $Q_2 Q_3$, per il quale si presentano le seguenti circostanze:

a) la lunghezza di $Q_2 K$ non supera quella di PQ_1;

b) se R è interno a $Q_2 K$, S esiste e appartiene a PQ_1;

c) se $R = K$, S esiste e, se non è uguale a P, appartiene a $Q_5 Q_6 \cup \cdots \cup Q_{n-1}\, t(P)$; quest'ultima circostanza si verifica sempre se $Q_2 K$ è più corto di PQ_1.

Si indichi con H il punto S corrispondente a K. Si percorra KH a partire da K e sia A il primo punto diverso da K di $t^{-1}(\lambda) \cup \lambda \cup t(\lambda)$, che si incontri. Si ponga $s = KA$. Allora:

1) Se s incontra $\sigma_f(\lambda) + \sigma_i(\lambda) - [t^{-1}(\lambda) + t(\lambda)]$, il teorema segue dal lemma III);

2) Se s e $t(s)$ hanno punti a entrambi interni comuni, il teorema segue dal lemma II);

3) Se $s \cdot t(s)$ non è vuota, ma è contenuta in $K \cup A \cup t(K) \cup t(A)$, si applichi il lemma IV);

4) Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a λ, l'arco ν che si ottiene da λ sostituendo s al posto del tratto compreso fra K e A, è ancora un arco di traslazione, *che ha meno lati di* λ *in virtù delle a), b), c)*; quindi il teorema è vero anche in questo caso, per l'ipotesi alla base del procedimento di induzione e per il lemma V), certamente applicabile.

5) Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a $t(\lambda)$, $t^{-1}(A)$ appartiene a $PQ_1 + Q_1Q_2 + Q_2K$, atteso il teorema di Brouwer ricordato in [8], ma in queste condizioni è facile riconoscere che l'arco ν costituito da s e dal sottoarco di λ di estremi K e $t^{-1}(A)$ è un arco di traslazione *con al più quattro lati* [13]; quindi si può concludere come nel caso precedente.

6) Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, $t(A)$ appartiene all'arco di λ di estremi K e $t(P)$, atteso il teorema di Brouwer ricordato in [8]; ma in queste condizioni è facile riconoscere che l'arco ν costituito da s e dal sottoarco di λ di estremi K ed A è un arco di traslazione che ha almeno un lato di meno di λ (il tratto $PQ_1 + Q_1Q_2 + Q_2K$ è sostituito da s); quindi si può concludere come negli ultimi due sottocasi.

6. Compimento della dimostrazione. – Rimane da considerare il caso seguente: *è* $n \geqq 2$ *e fra i primi (eventuali) quattro vertici* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 *di* λ *ve ne è almeno uno,* Q_i, *tale che i punti di* $\Sigma(\lambda)$ *vicini ad esso, siano interni a quello dei due angoli individuati da* λ *in* Q_i, *che sia uguale a tre retti.*

Per determinare i supponiamo che esso sia il più piccolo possibile dei numeri 1, 2, 3, 4. Naturalmente è sempre $i < n$.

Per uniformità di scrittura, se $i = 1$, poniamo $Q_{i-1} = P$; se $i = n - 1$, poniamo $Q_{i+1} = t(P)$.

Ciò premesso, sia q_i la semiretta di origine Q_i, normale a Q_iQ_{i+1}, rivolta rispetto a Q_iQ_{i+1} dalla banda opposta di $Q_{i-1}Q_i$; di guisa che q_i è anche rivolta verso $\Sigma(\lambda)$.

1) Se $q_i - Q_i$ non incontra $t^{-1}(\lambda)$, λ e $t(\lambda)$, il teorema segue dal lemma I);

Nel caso contrario, sia A il primo punto di $t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda)$, diverso da Q_i, che si incontri su q_i a partire da Q_i; si ponga $s = Q_iA$.

2) Se s e $t(s)$ hanno punti a entrambi interni comuni, si applichi il lemma II);

3) Se $s \cdot t(s)$ non è vuota, ma è contenuta nell'insieme costituito dagli estremi di s e $t(s)$, si applichi il lemma IV).

4) Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a λ, l'arco ν ottenuto da λ colla sostituzione di s al tratto compreso fra Q_i e A, è ancora un arco di traslazione, *che ha meno lati di* λ. Quindi il teorema è vero anche in questo caso, per l'ipotesi alla base del procedimento di induzione e per il lemma V), certamente applicabile.

5) Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a $t(\lambda)$, $t^{-1}(A)$ appartiene all'arco di λ di estremi P e Q_i, atteso il teorema di Brouwer ricordato in [8].

(13) Se si vuole, è facile riconoscere che ν e $\Sigma(\nu)$, – cioè il campo adiacente a $\sigma(\nu)$ che non contiene punti di $\sigma(\lambda)$ –, sono tali che ad essi si possono applicare le considerazioni dei nn. 3 e 4.

In queste ipotesi l'arco ν costituito da s e dal sottoarco di λ di estremi $t^{-1}(A)$ e Q_i *ha meno lati di* λ. Quindi vale la conclusione precedente.

6) Se $s \cdot t(s) = 0$ e se A appartiene a $t^{-1}(\lambda)$, $t(A)$ appartiene all'arco di λ di estremi Q_i e $t(P)$, a norma del solito teorema di Brouwer e l'arco ν costituito da s e dalla porzione di λ compresa fra Q_i ed $t(A)$ è ancora un arco di traslazione, contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$. *Però non si può dire che* ν *abbia meno lati di* λ. Occorre approfondire l'analisi.

Intanto è evidente che $t(A)$ è diverso da Q_i, perchè $s \cdot t(s)$ è vuota; quindi ν ha un vertice nel punto Q_i.

Inoltre è evidente che:

α) il campo $\Sigma(\nu)$, adiacente a $\sigma(\nu)$, che non contiene nessun punto di $\sigma(\lambda)$, contiene i punti prossimi a Q_i e interni all'angolo retto col vertice in Q_i individuato da ν.

Ciò premesso:

a) Se è $n = 2$, anche ν ha due lati; però per ν e $\Sigma(\nu)$ il nostro teorema è vero, in virtù della α) e di quanto si è detto nel n. 3; quindi, in questo sottocaso, il teorema è vero anche per λ e $\Sigma(\lambda)$, a norma del lemma V);

b) Se è ($n > 2$ e) $i > 1$, ν *ha meno lati di* λ; quindi in questo caso il teorema è vero, per l'ipotesi alla base del procedimento di induzione e per il lemma V);

c) Se è $n > 2$ e $i = 1$ e se (ν ha lo stesso numero di lati di λ o, anche, se) ν ha più di due lati, per ν e $\Sigma(\nu)$ il numero analogo al numero i è maggiore di 1, in virtù della α), oppure per ν si presenta uno dei casi contemplati nn. 3, 4, 5. Ma allora per ν e $\Sigma(\nu)$ il teorema è vero, per quanto si è detto in *b*), e nei nn. 3, 4, 5. E di qui e dal lemma V) segue la validità incondizionata del nostro asserto.

Matematica. — *Un criterio per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio.* Nota di M. Volpato, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

Il teorema di Brouwer sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni dell'elemento a più dimensioni è ormai classico. Da esso discende come corollario che:

Una trasformazione topologica t del cerchio G, *delimitato dalla circonferenza g, nell'insieme* Γ, *delimitato dalla curva* γ, *ammette almeno un punto unito se* G *appartiene a* Γ (o se G contiene Γ).

Numerosi altri criteri che si apparentano a questo sono stati dati da v. Kerékjártó, Sperner e Scorza Dragoni, per tacere di uno implicitamente

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

dato da Brouwer nel dimostrare che una traiettoria di una traslazione piana secondo Brouwer non ha punti doppi [2].

In questa Nota mi propongo di indicare un criterio dello stesso tipo di quelli di Sperner e Scorza Dragoni, affinando ulteriormente le considerazioni di questi autori. Nel n. 4 indico un esempio, diretto a mostrare che il mio teorema non rientra in quelli già noti.

Nelle mie considerazioni suppongo senz'altro che $G \cdot \Gamma$ non coincida nè con G nè con Γ; in sostanza escludo i casi in cui o $G \subset \Gamma$, o $\Gamma \subset G$, nei quali l'esistenza del punto unito è assicurata dal teorema di Brouwer.

1. Chiamo *arco generalizzato suteso a g* ogni curva semplice aperta C avente gli estremi P e Q sulla circonferenza g, che non tagli mai g [3] ed abbia almeno un punto esterno al cerchio G.

Si noti che C non possiede punti interni a G, e che oltre agli estremi, può avere altri punti su g. Segue che C contiene al più una infinità numerabile di archi sutesi a g (nel senso di Scorza Dragoni) [4], potendosi ridurre anche a uno solo di questi archi, e che g contiene dei punti che non si possono congiungere con l'infinito senza incontrare ulteriormente o C o la g stessa [5]. Dimostriamo che:

I) *La g contiene dei punti che si possono congiungere con l'infinito mediante una semilinea semplice* [6], *che abbia su g la sola origine e che non incontri* C [7].

Si consideri infatti la curva semplice e chiusa ζ costituita da C e dal segmento $\overline{PQ}$, $\zeta = \overline{PQ} + C$, e l'insieme chiuso e limitato Z, delimitato da ζ. Evidentemente G e Z hanno dei punti interni comuni. Allora esiste una ed una sola curva semplice chiusa j, l'involucro di Jordan di g e ζ [8], contenuta in $g + \zeta$, che separa dall'infinito tutti i punti di $Z + G$ che non le appartengono, mentre non separa dall'infinito tutti e solo i punti del piano che si possono congiungere con l'infinito mediante una semilinea semplice priva di punti comuni con ζ e g, a meno, eventualmente, dell'origine. Questa curva non può coincidere con ζ, perchè ζ ha dei punti

(2) Per le indicazioni bibliografiche rimando alla Memoria di G. Scorza Dragoni, *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e le loro applicazioni.* In corso di stampa sugli « Annali di matematica pura ed applicata ».

(3) La nozione di taglio e contatto viene intesa nel senso precisato da G. Scorza Dragoni, *Sugli archi di traslazione di un automorfismo piano e sulle loro curve d'accumulazione.* [« Reale Accademia d'Italia », Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. IX, pp. 1-75], § 2, n. 7, p. 10.

(4) Ved. G. Scorza Dragoni, loc. cit. in (2), § 1, n. 2.

(5) Ved. G. Scorza Dragoni, loc. cit. in (2), § 1, n. 2, lemma I.

(6) Per semilinea semplice, va intesa l'immagine univoca e continua di una semiretta. non privata dell'origine, la quale dà luogo all'origine della semilinea.

(7) Confronta H. Terasaka, *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes*, [« Japanese Journal of mathematics », vol. VII (1930), pp. 61-69], p. 64.

(8) Ved. G. Scorza Dragoni, loc. cit. in (2), § 1, n. 3.

interni a G; quindi contiene dei punti di g esterni a χ. In virtù di fatti noti (loc. cit. (8), n. 3), si conclude che j contiene degli archi di g sutesi a χ, i punti interni dei quali sono esterni a Z e d'accumulazione dei punti del piano, che si possono congiungere con l'infinito senza incontrare $\chi + g$ (9). Da qui segue facilmente l'asserto.

Sia R un punto di g, verificante la condizione espressa in I); sia r l'arco di g, di estremi P e Q, contenente R; questo arco non taglia c e quindi χ ed ha il punto R esterno a Z. Quindi:

II) *I punti di r sono non interni a* Z.

Si consideri ora l'arco s di g, avente per estremi P e Q e diverso da r; dimostriamo che:

III) *L'arco s è contenuto in* Z.

Infatti, per definizione, c ha dei punti esterni a G; ma i punti interni a $\overline{PQ}$ sono interni a G; quindi la curva χ taglia g e reciprocamente g taglia χ; viene come conseguenza che g ha almeno un punto S interno a Z.

Per la II), il punto S appartiene a s. Ma s non taglia c e quindi χ. Pertanto s è contenuto in Z, come si voleva.

Ne segue che ogni punto di s, che non appartenga a χ, è interno a Z ed all'involucro di Jordan di G e Z, cioè all'insieme chiuso e limitato J, delimitato dall'involucro j di g e χ, e quindi che:

IV) *Ogni punto di s, che non appartenga a* χ, *è contenuto in un arco di g sotteso a* C (nel senso di Scorza Dragoni, loc. cit. (4)).

Tale arco s verrà ricordato in seguito col nome di *arco generalizzato di g sotteso a* C. Gli archi s e c verranno detti *archi generalizzati corrispondenti*.

Si consideri, ora, l'insieme Σ, contenuto in Z, costituito da tutti i punti di Z non interni a G. Si noti che a tale insieme Σ appartengono anche tutti i punti di s.

L'insieme Σ *verrà ricordato col nome di lunula generalizzata corrispondente alla curva* $s + c$.

2. Poichè si è escluso che sia $\Gamma \subset G$, γ ha dei punti esterni a g. Sia L un punto di γ esterno a g.

A partire da L percorriamo γ in un determinato verso fino a fermarci al primo punto Q che appartenga ad un arco (eventualmente nullo, cioè uguale ad un punto) in cui g e γ si tagliano.

Poi, sempre a partire dallo stesso punto L di γ, percorriamo γ nel verso contrario al precedente fino al primo punto P, che appartenga ad un arco (eventualmente nullo) in cui g e γ si tagliano.

Sia c l'arco di γ di estremi P e Q, contenente L. Evidentemente si tratta di un arco generalizzato suteso a g. Diremo che esso è un arco generalizzato

(9) G. Scorza Dragoni ha chiamato *massimi* questi archi *sutesi* per distinguerli da altri eventuali archi sutesi i cui punti non sono d'accumulazione dei punti del piano che si possono congiungere con l'infinito (loc. cit. in (2), § 1, n. 4) senza incontrare g e γ.

di γ suteso a g. Sia s il corrispondente arco generalizzato sotteso di g, e sia Σ la lunula generalizzata corrispondente ad $s \dotplus c$.

Dalla definizione segue subito che:

I) *Due archi generalizzati di γ sutesi a g non possono avere punti comuni, senza coincidere;*

II) *Gli archi generalizzati di γ sutesi a g sono al più una infinità numerabile.*

Siano $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ gli archi generalizzati di γ sutesi a g; $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ gli archi generalizzati sottesi di g ad essi corrispondenti; $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n, \cdots$ le lunule generalizzate corrispondenti alle curve $s_1 \dotplus c_1, s_2 \dotplus c_2, \cdots; s_n \dotplus c_n, \cdots$.

Gli archi $c_1, c_2, \cdots, c_n \cdots$ formano una successione di curve semplici aperte, prive a due a due di punti comuni ed appartenenti ad una medesima curva semplice chiusa γ; perciò:

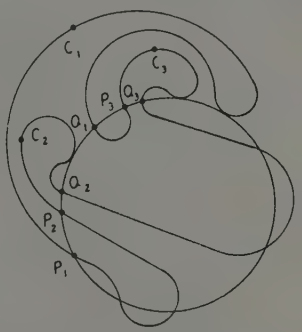


Fig. 1.

III) *Il diametro di c_n è infinitesimo per n infinitamente grande*

e di conseguenza

IV) *Il diametro delle lunule Σ_n è infinitesimo per n infinitamente grande.*

Notiamo inoltre che:

V) *Due eventuali archi generalizzati di g sottesi a γ, non coincidenti, o sono completamente privi di punti comuni, oppure uno conveniente dei due è interno all'altro* (estremi inclusi).

Nella fig. 1, per esempio, tutti i punti dell'arco $s_2 = P_2 Q_2$ (corrispondente di $c_2 = P_2 C_2 Q_2$) sono interni all'arco $s_1 = P_1 Q_1$ (corrispondente di $c_1 = P_1 C_1 Q_1$).

Ne segue che:

VI) *Le lunule Σ_m, Σ_n $(m \neq n)$ o non hanno punti comuni oppure una conveniente di esse è completamente interna all'altra.*

Dal lemma IV, segue subito che:

VII) *È finito il numero delle lunule $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$ che possono contenere (internamente) una determinata delle Σ_n medesime.*

Quindi esistono fra le $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n, \cdots$ delle lunule generalizzate che non sono contenute in nessun'altra delle Σ_n medesime. Lunule siffatte verranno dette *lunule generalizzate massime relative a g e γ.*

Le lunule generalizzate massime relative a g e γ sono quindi al più una infinità numerabile: $\Sigma_{n_1}, \Sigma_{n_2}, \cdots, \Sigma_{n_i}, \cdots$. Le curve $c_{n_1}, c_{n_2}, \cdots, c_{n_i}, \cdots$ saranno dette gli *archi generalizzati massimi di γ sutesi a g* (10); le curve

(10) Nella fig. 1, per esempio, è un arco generalizzato massimo di γ suteso a g l'arco $c_1 = P_1 C_1 Q_1$, mentre non lo è l'arco $c_2 = P_2 C_2 Q_2$.

$s_{n_1}, s_{n_2}, \cdots, s_{n_i}, \cdots$ saranno gli *archi generalizzati massimi di g sottesi a* γ; le curve $c_{n_i}, s_{n_i}, c_{n_i} + s_{n_i}$ e la lunula Σ_{n_i} saranno sempre dette *corrispondenti* fra di loro.

3. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema:

La trasformazione topologica t del cerchio G, *delimitato dalla circonferenza g, nell'insieme* Γ, *delimitato dalla curva* γ, *ammette almeno un punto unito se* G *e* Γ *hanno punti interni comuni e se le immagini, nella t, dei punti che appartengono ad uno qualunque degli eventuali archi generalizzati massimi di g sottesi a* γ, *non appartengono mai alle rispettive lunule generalizzate massime corrispondenti.*

Manteniamo i simboli introdotti nel numero precedente.

Basta ripetere un ragionamento analogo a quello di Sperner.

Sia t'_{n_i} una trasformazione univoca e continua di Σ_{n_i} in s_{n_i}, che subordini l'identità su s_{n_i} (a questo scopo basta considerare una trasformazione univoca e continua di tutto il piano in s_{n_i}, che si riduca all'identità su s_{n_i}).

Essendo P il punto corrente di G, sia T la trasformazione di G in sè, definita dalla:

$$T(P) = \begin{cases} t(P) & \text{se } t(P) \text{ appartiene a G} \\ t'_{n_i}[t(P)] & \text{se } t(P) \text{ appartiene a } \Sigma_{n_i} \text{ ed è esterno a G.} \end{cases}$$

La trasformazione T è univoca e continua (11). Quindi ammette un punto unito $P_o = T(P_o)$.

Se proviamo che $t(P_o)$ non è esterno a G, P_o risulta unito anche per la t e il teorema è dimostrato.

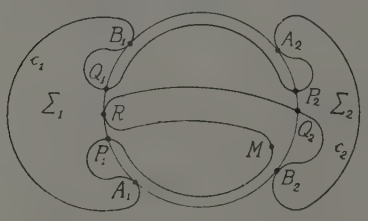


Fig. 2.

Se $t(P_o)$ fosse esterno a G, e cadesse, per esempio, nella lunula Σ_{n_o}, $P_o = T(P_o)$ sarebbe contenuto nell'arco s_{n_o} corrispondente, cioè si avrebbe che l'immagine, nella t, di un punto di s_{n_o} sarebbe portata nella lunula Σ_{n_o}, contrariamente all'ipotesi. Con ciò il teorema è provato.

4. Facciamo ora vedere che, in certi casi, il teorema stabilito dice qualcosa di diverso dagli analoghi teoremi di Sperner e di Scorza Dragoni cui ho fatto cenno all'inizio di questa Nota.

Riferiamoci al caso della fig. 2. Qui la curva γ ha due soli archi generalizzati massimi sutesi a g, e precisamente l'arco $P_1 A_1 C_1 B_1 Q_1 = c_1$

(11) G. Scorza Dragoni, *Un'osservazione sull'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio.* [« Annali di matematica pura ed applicata », vol. XIX; n. 2].

e l'arco $P_2 A_2 C_2 B_2 Q_2 = c_2$. I corrispondenti archi generalizzati massimi di g sottesi a γ sono: $P_1 RQ_1 = s_1$ e l'arco $P_2 Q_2 = s_2$ che non contiene A_2. Siano Σ_1 e Σ_2 le lunule generalizzate massime rispettivamente corrispondenti alle curve $c_1 + s_1$ e $c_2 + s_2$. Il nostro teorema esige che le immagini dei punti di s_1 non siano in Σ_1 e quelle dei punti di s_2 non siano in Σ_2. La diversità del nostro teorema da quello di Sperner e dal primo teorema di Scorza Dragoni (il III° del loc. cit. in (2)) è evidente. Per quanto riguarda gli altri teoremi osserviamo che:

il secondo teorema di Scorza Dragoni (il IV° del loc. cit. in (2)) esige che appartengano a G le immagini dei punti degli archi s_1 ed s_2;

il terzo teorema di Scorza Dragoni (il V° del loc. cit. in (2)) esige che le immagini dei punti dell'arco $A_1 B_1$ (che contiene s_1) non siano in $\Sigma_1 - s_1$ e che quelle dei punti dell'arco $A_2 B_2$ (che contiene s_2) non siano in $\Sigma_2 - s_2$;

il quarto teorema di Scorza Dragoni (il VI° del loc. cit. in (2)) esige che le immagini dei punti dell'arco $P_1 R$ (contenuto in s_1) appartengano all'insieme limitato, delimitato dalla curva semplice chiusa $P_1 R + RMP_1$, oppure che le immagini dei punti dell'arco RQ_1 (contenuto in s_1) non appartengano all'insieme limitato, delimitato dalla curva semplice chiusa $c_1 + Q_1 R + RMP_1$ privato dei punti interni all'arco $Q_1 R$ e che le immagini dei punti dell'arco s_2 non siano in $\Sigma_2 - s_2$.

Matematica. — *Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche.* Nota di José Sebastião e Silva (1), presentata (2) dal Socio M. Picone.

1. Nella presente Nota mi propongo di esporre, in forma riassuntiva e prescindendo dalle dimostrazioni, i principali risultati contenuti in una mia Memoria, che spero venga prossimamente pubblicata, e con la quale mi lusingo di potere, in qualche modo, contribuire alla chiarificazione e allo sviluppo di un ramo particolarmente bello e importante della moderna Analisi: la teoria, cioè, dei funzionali definiti in insiemi di funzioni analitiche.

È ormai a tutti noto come, in tale campo, si stiano svolgendo da parecchi anni le indagini del prof. Luigi Fantappiè. Nella sua più recente sistemazione della teoria dei funzionali analitici (3), un cambiamento notevole si è verificato col passaggio dal concetto di *funzione analitica nel senso classico* (di Weierstrass) al concetto di *funzione localmente analitica*, tendente

(1) Borsista dell' « Instituto para a Alta Cultura » di Lisbona, presso l' Istituto di Alta Matematica di Roma.

(2) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(3) L. Fantappiè, *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici.* « Atti dell'Accad. d'Italia », Scienze Fis. Mat. e Nat., vol. XII, 1941.

non solo ad eliminare certe complicazioni provenienti dai fatti di polidromia, ma anche ad estendere le stesse possibilità d'applicazione della teoria. (Per fissare le idee, mi limito alle funzioni di una sola variabile, dato che l'estensione dei risultati al caso delle funzioni di più variabili non presenta difficoltà sostanziali). Secondo il nuovo punto di vista, il campo di esistenza di una funzione $f(z)$ – elemento generico dello *spazio funzionale analitico* – non è più il *naturale* dominio di regolarità, quello cioè determinato da tutti i possibili prolungamenti analitici a partire da una data serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$; ma bensì un dominio aperto [4] D, del piano sfera, Ω, soddisfacente la sola condizione che la $f(z)$ sia univocamente definita e analitica in ogni suo punto; sicchè, data una funzione $f^*(z)$, il cui dominio di esistenza, D*, contenga D, senza coincidere con questo, può avvenire che si abbia $f^*(z) = f(z)$ per ogni $z \in D$, ma le funzioni $f(z), f^*(z)$ non saranno allora considerate *identiche*. Nè sarà da escludersi che il dominio D sia sconnesso, formato da componenti [5] $D_1, D_2, \cdots$ (il cui numero può essere addirittura infinito); e che siano *indipendenti* fra di loro quelle funzioni $f_1(z), f_2(z), \cdots$ che, sui domini $D_1, D_2, \cdots$, separatamente, definiscono la funzione $f(z)$. Conviene infine supporre (per ragioni che si palesano nello svolgimento della teoria) che, se il dominio D contiene il punto improprio, la $f(z)$ si annullerà in questo punto.

Avvertiamo subito che, per quanto bizzarro possa a prima vista sembrare un simile concetto di funzione analitica, esso si è già presentato, in modo naturale, senza per altro avere ricevuto nessuna denominazione specifica, nel corso di importanti ricerche di Runge, Painlevé, Hilbert, Montel, ecc., riguardanti gli sviluppi di funzioni analitiche in serie di polinomi o di funzioni razionali fratte [6].

Ora, mi è sembrato che tale concetto potesse ancora essere modificato, in modo da consentire una più agevole trattazione della teoria e stimolarne l'ulteriore sviluppo. Così, per esempio, per poter parlare di *somma* o di *prodotto* di due funzioni localmente analitiche (senza cadere nel puro arbitrio), bisogna ammettere che i loro domini di esistenza abbiano punti comuni, il che induce naturalmente a indirizzare le ricerche sulle classi di funzioni localmente analitiche i cui domini di esistenza contengano uno stesso insieme.

(4) Chiamo *dominio aperto* ogni insieme aperto, e *dominio chiuso*, la chiusura di ogni dominio aperto. Chiamo inoltre *connesso* ogni insieme tale che, dati comunque due suoi punti, sia sempre possibile unirli con un arco di curva continua interamente contenuto nell'insieme stesso.

(5) Si chiama *componente* di un insieme A ogni sotto-insieme connesso massimo di A, cioè ogni sotto-insieme connesso di A che non possa più essere ampliato in nessun altro sotto-insieme connesso di A. Le componenti di un insieme sono, naturalmente, *staccate* fra di loro.

(6) Vedi, per esempio, P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes a une variable complesse*, Paris, Gauthier-Villars, 1910, pp. 93-100.

Sia allora C un insieme di punti di Ω, *chiuso*, *non vuoto* e *non coincidente con* Ω; all'insieme di tutte le funzioni localmente analitiche definite in dominî (aperti) contenenti C, dà il prof. Fantappiè il nome di *regione funzionale lineare*, e lo rappresenta con (C). (Per evitare inutili complicazioni, conviene escludere dall'insieme (C) quelle funzioni, i cui dominî abbiano almeno una componente interamente staccata da C; allora, per brevità, chiamo *intorno aperto* [*chiuso*] dell'insieme C, ogni dominio aperto [chiuso], tale che ciascuna delle sue componenti contenga almeno una componente di C nel suo interno). È tuttavia manifesto che, dovendo assegnare alla somma (o al prodotto) di due date funzioni appartenenti a (C) un determinato dominio di esistenza – per esempio, l'intersezione dei dominî delle funzioni date – l'insieme (C) non può, in nessun modo, costituire un *gruppo* rispetto all'addizione, e, quindi, non può neanche costituire uno *spazio lineare*, rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per numeri complessi $\alpha, \beta, \ldots$[7]. Ma questa è, naturalmente, una questione piuttosto formale.

Un'altra difficoltà, meno trascurabile della precedente, si presenta invece col problema della definizione di una conveniente struttura topologica nell'insieme delle funzioni localmente analitiche. Invero, il concetto di *intorno* che vi ha introdotto il prof. Fantappiè, essendo certamente il più adatto al concetto di funzione localmente analitica, non sembra tuttavia facilmente utilizzabile: in particolare, esso non consente di stabilire un concetto di *limite*, per le successioni di funzioni.

Ebbene, se ci vogliamo limitare ad una data regione funzionale (C), una soluzione mi è parsa la più naturale, per superare le suddette difficoltà: quella, cioè, di considerare come rappresentazioni di *uno stesso ente* (che chiamo *funzione analitica legata all'insieme* C) tutte le funzioni appartenenti a (C), che siano prolungamenti di una *stessa funzione*, anch'essa appartenente a (C)[8]. Con $\mathfrak{f}[C]$ rappresento l'insieme delle funzioni analitiche legate a C, e chiamo altresì *dominio di olomorfia* di una funzione φ appartenente a $\mathfrak{f}[C]$ ogni intorno aperto o chiuso dell'insieme C, sul quale la φ riesca univocamente definita e analitica.

2. È ora facile vedere come, nell'insieme $\mathfrak{f}[C]$, si possano definire, naturalmente, *un'addizione* e una *moltiplicazione*; e come lo stesso insieme costituisca uno spazio lineare rispetto all'addizione e al corpo di scalari

(7) Sul concetto di *spazio lineare*, vedi per esempio, J. v. Neumann, *Matematische Grundlagen der Quantenmechanik*, p. 19; M. Picone, *Fondamenti di analisi funzionale lineare*, corso dell'Istituto di Alta Matematica, 1943, p. 267.

(8) Se, invece di una determinata regione funzionale (C), volessimo considerare la totalità delle funzioni localmente analitiche, la questione non si potrebbe risolvere così facilmente. Bisognerebbe, per esempio, considerare soltanto le funzioni che sono definite in tutto il piano sfera, tranne su di un insieme *senza punti interni*. Ma di questo mi occuperò più innanzi.

rappresentato dai numeri complessi. In modo altrettanto naturale vi si può definire un concetto di limite: « Data una successione $\varphi_n\,[n = 0, 1, 2, \cdots]$ di elementi di $\mathfrak{f}[C]$, diremo che essa ha come *limite* un determinato elemento φ di $\mathfrak{f}[C]$, quando esista almeno un intorno di C che sia un comune dominio di olomorfia delle funzioni $\varphi, \varphi_n\,[n = 0, 1, \cdots]$, e sul quale la funzione $\varphi_n(z)$ *tenda uniformemente* alla $\varphi(z)$ per $n \to \infty$ ». Con tali concetti, l'insieme $\mathfrak{f}[C]$ diventa uno spazio $(\mathfrak{L})$ vettoriale, che chiamo *spazio vettoriale analitico, determinato dall'insieme* C [9].

Vien subito fatto di domandare se questi spazi siano metrizzabili. Ecco il massimo che, su tale questione, mi è riuscito di stabilire: *Gli spazi vettoriali analitici sono spazi* $(\mathfrak{S})$ *separabili* [10]. L'espressione dello scarto, $\varepsilon(\varphi, \psi)$, tra due funzioni φ, ψ, può essere data come segue: rappresentiamo con D_n l'insieme di tutti i punti di Ω la cui distanza *sferica* da C sia $\leq \frac{1}{n}\,[n = 0, 1, \cdots]$, e poniamo:

$(\varphi, \psi)_n = \mathrm{Max}\,|\varphi(z) - \psi(z)|$ sul dominio chiuso D_n – se questo è un dominio di olomorfia di $\varphi - \psi$;

$(\varphi, \psi)_n = \infty$ – nel caso opposto.

Porremo $\varepsilon(\varphi, \psi) = \prod_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\varphi, \psi)_n}{1 + (\varphi, \psi)_n}\right]^{\frac{1}{n!}}$. Tuttavia questo *scarto* non soddisfa la disuguaglianza triangolare e credo che non sia neanche regolare [11].

3. Consideriamo due spazi $(\mathfrak{L})$ vettoriali, $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*$, e sia F una trasformazione univoca di $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}^*$, un operatore, cioè, che ad ogni $u \in \mathfrak{S}$, faccia corrispondere un $Fu \in \mathfrak{S}^*$. Diremo che l'operatore F è *distributivo*, se riesce, identicamente: $F(u + v) = F(u) + F(v)$, $F(\alpha u) = \alpha F(v)$; e che è *continuo*, se si ha sempre: $\lim_n F u_n = F \lim_n u_n$. In particolare, $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*$ possono essere, tutt'e due, spazi vettoriali analitici (distinti o coincidenti), e F sarà allora un operatore che trasforma *funzioni in funzioni*. Se, invece, il primo è uno spazio vettoriale analitico, e il secondo è la retta euclidea complessa, S_1, allora F sarà, nella terminologia del prof. Fantappiè, un *funzionale puro:* trasforma, cioè, *funzioni in numeri complessi* [12].

(9) Sul concetto di spazio $(\mathfrak{L})$ vedi Fréchet, *Espaces abstraits*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 163. Chiamo *spazio* $(\mathfrak{L})$ *vettoriale* ogni spazio $(\mathfrak{L})$ lineare nel quale siano continue le operazioni fondamentali.

(10) Sul concetto di spazio $(\mathfrak{S})$, vedi Fréchet, op. cit., p. 213.

(11) Se fosse regolare, lo spazio sarebbe metrizzabile, secondo un teorema di Chittenden (vedi Fréchet, op. cit. p. 219).

(12) Il prof. Fantappiè risale dai funzionali puri agli operatori che trasformano funzioni in funzioni, mediante i *funzionali misti*, ma senza riferimento ad un secondo spazio.

Sia ora u_α un punto variabile dello $\mathfrak{S}$, spazio dipendente dalla variabile scalare complessa, α; o, come diremo anche, una *punto–funzione di codominio* $\mathfrak{S}$, *definita in un sotto-insieme del piano-sfera*, Ω_α [13]. I concetti di *limite*, *continuità*, *derivata*, ecc., vi si estendono agevolmente, a partire dal concetto di *limite di una successione*; così anche il concetto di *analiticità*, il quale, tuttavia, preferisco di introdurre secondo l'indirizzo corrispondente a quello di Weierstrass [14]: « La punto–funzione u_α si dirà *analitica* in un punto α_0, quando esista una successione u_n di elementi di $\mathfrak{S}$, tale che, in ogni punto α di un conveniente intorno di α_0, si abbia: $u_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^{n} (\alpha - \alpha_0)^i u_i$, se α_0 è proprio; $u_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\alpha^i} u^i$, se α_0 è improprio. Diremo altresì che la funzione u_α è analitica in un insieme A, se lo è in tutti i punti di A ». È chiaro che, anche in questo caso, si potrà parlare di *prolungamento analitico, dominio di regolarità, uniformità, pluriformità*, ecc. In particolare, si potrà introdurre il concetto di *operatore analitico*:

« Diremo che una data trasformazione F di $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}^*$ è *analitica*, se, e soltanto se, trasforma le punti–funzioni analitiche di codominio $\mathfrak{S}$, in punti funzioni analitiche di codominio $\mathfrak{S}^*$; cioè, usando un linguaggio intuitivo: se, ad ogni punto u_α che si muova analiticamente sopra $\mathfrak{S}$, fa corrispondere un punto $F u_\alpha$ che si muove anch'esso analiticamente sopra $\mathfrak{S}^*$ ».

4. Consideriamo ora una punto–funzione analitica φ_α avente per codominio uno spazio vettoriale analitico, $\mathfrak{f}[C]$. Ho potuto dimostrare che: *Dato comunque un insieme chiuso* Γ *contenuto nel dominio di regolarità della punto–funzione* φ_α, *esiste un intorno* D *di* C *che è un comune dominio di olomorfia di tutte le funzioni di* ζ, $\varphi_\alpha(\zeta)$, *quando* α *descrive* Γ. Sia allora D_1 un dominio chiuso di Ω_α sul quale la punto–funzione φ_α riesca regolare, e sia D_2 un corrispondente intorno C, sul quale tutte le funzioni $\varphi_\alpha(\zeta)[\alpha \in D_1]$ riescano olomorfe; poniamo inoltre: $\varphi_\alpha(\zeta) = \varphi(\alpha, \zeta)$, per ogni (α, ζ) tale che $\alpha \in D_1$, $\zeta \in D_2$. Ebbene: *Possiamo dire allora che la funzione di due variabili* $\bar{\varphi}(\alpha, \zeta)$ *è analitica in tutta la parte interna del prodotto cartesiano* $D_1 \times D_2$. *Reciprocamente, se la* $\varphi(\alpha, \zeta)$ *è analitica nell'interno di* $D_1 \times D_2$, la φ_α *sarà una punto–funzione analitica nell'interno di* D_1.

5. Siano dati uno spazio vettoriale analitico $\mathfrak{f}[C]$ e un sistema lineare $\mathfrak{S}$, che supporremo sia *normale* [15] (per esempio, uno spazio euclideo S_n,

(13) Se $\mathfrak{S}$ rappresenta lo spazio ordinario (fissata un'origine), e se invece della variabile complessa α consideriamo la variabile reale t (tempo), la punto–funzione u_t rappresenterà il *moto* di un punto.

(14) Non è detto che i due indirizzi – quello basato sul concetto di *serie di potenze* (Weierstrass) e quello basato sul concetto di *derivata* (Cauchy) – siano equivalenti in qualsiasi spazio ($\mathfrak{L}$) vettoriale.

(15) Sul concetto di *spazio lineare normale*, vedi p. es. Picone, op. cit., p. 339.

lo spazio hilbertiano H, ecc.) oppure un secondo spazio vettoriale analitico $\mathfrak{f}[C^*]$. Partendo da tali premesse, ho potuto dimostrare la seguente proposizione, una delle più importanti qui enunciate: *Vi è identità fra la classe delle trasformazioni distributive continue di* $\mathfrak{f}[C]$ *in* $\mathfrak{S}$ *e la classe delle trasformazioni distributive analitiche di* $\mathfrak{f}[C]$ *in* $\mathfrak{S}$. Si ha inoltre quest'altro risultato, che generalizza il teorema fondamentale della teoria dei funzionali analitici:

La totalità delle trasformazioni distributive analitiche (e quindi continue) di $\mathfrak{f}[C]$ *in* $\mathfrak{S}$ *è data dall'espressione*

$$F_\zeta[\varphi(\zeta)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma}} \varphi(\alpha)\, u_\alpha\, d\alpha,$$

dove $\overrightarrow{\gamma}$ *rappresenta la frontiera di un conveniente dominio di olomorfia della* φ, *orientata in modo da lasciare a sinistra i punti di* C, *e* $u_\alpha = F_\zeta\left(\frac{1}{\alpha - \zeta}\right)$ *rappresenta una qualsiasi punto-funzione analitica di codominio* $\mathfrak{S}$, *univocamente definita e analitica almeno nel complementare dell'insieme* C, *e che si annulla per* $\alpha = \infty$, *se* C *non contiene questo punto.*

6. Le convenzioni e i risultati precedenti consentono di semplificare notevolmente, e di presentare sotto forma che mi sembra particolarmente suggestiva, la giustificazione del calcolo simbolico [16]. Tenendo ferme le notazioni e le ipotesi del numero precedente, rappresentiamo con $T_{\mathfrak{S}}$ l'insieme delle trasformazioni *distributive* dello spazio $\mathfrak{S}$ in se stesso, e supponiamo che C non contenga il punto improprio. Allora, dato $F \in T_{\mathfrak{S}}$, ci proponiamo di risolvere questo problema: Coordinare ad ogni $\varphi \in \mathfrak{f}[C]$ un'altro operatore $\varphi(F) \in T_{\mathfrak{S}}$, per guisa che si abbia: 1) Se $\varphi(\zeta) = \alpha\zeta + \beta$, allora $\varphi(F) = \alpha F + \beta$; 2) $(\alpha\varphi + \beta\psi)(F) = \alpha\varphi(F) + \beta\psi(F)$; 3) $(\varphi\cdot\psi)(F) = \varphi(F)\cdot\psi(F)$; 4) $(\lim_n \varphi_n)(F) = \lim_n \varphi_n(F)$ [17].

Ebbene: *Condizione necessaria e sufficiente perchè tale problema sia risolubile è che l'operatore* $(\alpha - F)^{-1}$ *sia una funzione di* α *univocamente definita e analitica nel complementare di* C; *e la soluzione del problema sarà data allora dalla formula*

$$\varphi(F) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\gamma}} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - F}\, d\alpha$$

(16) Su questo punto, vedi FANTAPPIÈ, *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione dell'equazione a derivate parziali.* «Mem. Acc. Italia», vol. I, 1930.

(17) Diremo che è $\lim_n F_n = F$, quando riesca $\lim_n (F_n u) = Fu$, per ogni $u \in \mathfrak{S}$. Analogamente si definisce l'espressione «*operatore* F_α *dipendente analiticamente dal parametro* α».

dove $\vec{\gamma}$ *rappresenta la frontiera debitamente orientata di un conveniente dominio di olomorfia della* φ.

7. Altre categorie di spazi vettoriali analitici si possono presentare ancora. Sia A un dominio aperto di Ω, e rappresentiamo con $\mathfrak{f}[A]$ l'insieme di tutte le funzioni localmente analitiche aventi A come dominio di esistenza. Date $\varphi, \varphi_n \in \mathfrak{f}[A]$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, diremo che si ha $\lim_n \varphi_n = \varphi$, se, comunque si prenda un dominio chiuso D contenuto in A, la funzione $\varphi_n(\zeta)$ tende uniformemente alla $\varphi(\zeta)$ su D, per $n \to \infty$. D'altra parte, posto $C = \Omega - A$, diremo che lo spazio $\mathfrak{f}[A]$ (il quale, inoltre, riesce metrizzabile) è il *duale* dello spazio $\mathfrak{f}[C]$ [18].

Rappresentiamo ora con $\mathfrak{f}^*[A]$ l'insieme di tutte le funzioni *generalmente analitiche* in A, dicendo che una funzione è generalmente analitica in A, quando è univocamente definita e analitica in questo insieme, *tranne in una sua parte senza punti interni*. Allora, date $\varphi, \varphi_n \in \mathfrak{f}^*[A]$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, diremo che si ha $\lim_n \varphi_n = \varphi$, quando, rappresentato con C l'insieme di tutte le singolarità delle funzioni φ, φ_n, e preso comunque un dominio chiuso D contenuto in $A - C$, la $\varphi_n(\zeta)$ tende uniformemente alla $\varphi(\zeta)$ su D, per $n \to \infty$. Allo spazio $\mathfrak{f}^*[A]$, anch'esso metrizzabile, si possono estendere i risultati esposti nei numeri precedenti.

Altre estensioni si prospettano ancora.

Matematica. — *Sull'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie* [1]. Nota di G. Aquaro, presentata [2] dal Socio M. Picone.

In una sua Memoria, in corso di pubblicazione, L. Amerio ha mostrato come l'indirizzo del prof. Picone, che inquadra i problemi al contorno per le equazioni della Fisica-Matematica in una veduta unitaria poggiata sulla classica formula di Green, porta alla effettiva costruzione di un metodo di integrazione delle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico con prefissate condizioni al contorno.

Tale metodo, che è intimamente legato alla linearità delle equazioni considerate da L. Amerio, è stato da me applicato ai sistemi differenziali ordinarii, per la ricerca delle loro soluzioni soddisfacenti a prefissate condizioni lineari.

(18) Un esempio è lo spazio delle funzioni intere, nel quale il prof. Fréchet ha introdotto una metrica che mi ha suggerito l'espressione dello «scarto» precedentemente indicata (ved. Fréchet, op. cit., p. 87).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 15 giugno 1946.

Espongo, in questa breve Nota, i principali risultati conseguiti, riferendomi per maggior chiarezza al caso, cui, del resto, ci si può sempre ricondurre, dei sistemi di equazioni differenziali lineari del I° ordine in forma normale.

Un sistema di p equazioni siffatte, nelle p funzioni incognite $u_1(x)$, $u_2(x), \cdots, u_p(x)$, che interpreto come componenti di un vettore $\boldsymbol{u}(x)$, si può porre nella forma:

$$(1) \qquad E_h[\boldsymbol{u}] \equiv \frac{du_h}{dx} + \sum_{k=1}^{p} a_{hk} u_k = \varphi_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

dove le funzioni $a_{hk}(x)$ e le $\varphi_h(x)$ sono definite e continue nell'intervallo $I(x_1, x_2)$.

In relazione a tale sistema, ci proponiamo per esempio il seguente problema

(P) – *Determinare le p funzioni* $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_p(x)$ *continue con le loro derivate prime in* I, *ivi soddisfacenti le* (1) *e verificanti le p condizioni*

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{p} \alpha_{hk} u_k(x_1) + \sum_{k=1}^{p} \beta_{hk} u_k(x_2) = \gamma_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

dove le costanti $\alpha_{hk}, \beta_{hk}, \gamma_h$ sono assegnate in maniera che le forme lineari a primo membro nelle indeterminate $u_k(x_1), u_k(x_2)$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$ siano linearmente indipendenti.

L'idea fondamentale del prof. Picone è quella di tradurre l'indicato problema in quello della risoluzione di un sistema di equazioni integrali di Fischer–Riesz, ad esso equivalente. Seguendo L. Amerio, è proprio alla costruzione di un sistema di equazioni integrali siffatto, che io riconduco il problema enunciato, previa dimostrazione di due proposizioni di cui passo ad esporre il contenuto.

Supposto A un intervallo contenente I nel suo *interno*, prolunghiamo, come è sempre possibile, le funzioni $a_{hk}(x)$ in modo che risultino in A ovunque continue.

Considerato col sistema (1) quello *omogeneo*

$$(1)_0 \qquad E_h[\boldsymbol{u}] = 0, \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

introduciamo il sistema *omogeneo aggiunto*

$$(1)_0^* \qquad E_h^*[\boldsymbol{v}] \equiv -\frac{dv_h}{dx} + \sum_{k=1}^{p} a_{kh} v_k = 0. \qquad (h = 1, 2, \cdots, p)$$

Siano x e ξ, due valori indipendentemente variabili in A. Poichè il sistema $(1)_0^*$ è anche esso in forma normale, si può costruire la matrice quadrata di ordine p:

$$\| F_{rs}(x, \xi) \|$$

i cui elementi sono funzioni continue al variare di x e ξ in A, *tranne* che per $x = \xi$ dove ammettono una discontinuità di prima specie, con

salto uguale $a-1$, con la condizione che i vettori $\mathbf{F}^{(s)}(x,\xi)$ di componenti:

$$F_{1s}(x\xi) \quad , \quad F_{2s}(x,\xi),\cdots,F_{ps}(x,\xi) \qquad (s=1,2,\cdots,p)$$

per ogni $x \neq \xi$ verifichino le[3]:

$$E^{*}_{h\xi}[\mathbf{F}^{(s)}(x,\xi)] = 0 \qquad (h=1,2,\cdots,p)$$

ed i vettori $\mathbf{F}_r(x,\xi)$ di componenti:

$$F_{r1}(x,\xi) \ , \ F_{r2}(x,\xi),\cdots,F_{rp}(x,\xi) \qquad (r=1,2,\cdots,p)$$

soddisfino alle

$$E_{hx}[\mathbf{F}_r(x,\xi)] = 0 \quad x \neq \xi \ (h=1,2,\cdots,p).$$

Si dimostra allora che, se $(u_1(x),u_2(x),\cdots,u_p(x))$ è un vettore, di componenti continue con le loro derivate prime, in I, ed ivi soddisfa alle (1), deve necessariamente essere:

$$(3) \qquad u_s(x) = \sum_{h=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{2}(-1)^{2-\nu}u_{h\nu}F_{hs}(x,x_\nu) - \int_{x_1}^{x_2}\sum_{h=1}^{p}F_{hs}(x,\xi)\varphi_h(\xi)\,d\xi$$

per ogni x *interno ad* I, laddove per ogni y *contenuto in* A — I risulta:

$$(4) \qquad 0 = \sum_{h=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{2}(-1)^{2-\nu}u_{h\nu}F_{hs}(y,x_\nu) - \int_{x_1}^{x_2}\sum_{h=1}^{p}F_{hs}(y,\xi)\varphi_h(\xi)\,d\xi$$

essendosi posto:

$$(5) \qquad \begin{cases} u_{h1} = u_h(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1^{+}} u_h(x), \\ u_{h2} = u_h(x_2) = \lim\limits_{x\to x_2^{-}} u_h(x). \end{cases}$$

In virtù delle (3) e (4), che chiameremo formule di Green, resta stabilito, come condizione *necessariamente soddisfatta* da ogni soluzione $\boldsymbol{u}(x)$ della (1) e dai suoi valori agli estremi (5), un classico teorema del quale ho dimostrato l'inverso, pervenendo alla proposizione:

I. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il vettore* $\boldsymbol{u}(x)$, *le cui componenti sono continue con le loro derivate prime in* I, *soddisfi le* (1) *all'interno di* I *con le condizioni* (5), *è, che esso e le costanti* $u_{h\nu}$ $(\nu=1,2)$ *verifichino le* (3) (4).

Consideriamo ora il sistema dei vettori $[\boldsymbol{v}^{(r)}(x)]$ le cui componenti si ottengono come segue.

Posto

$$r = mp + i \qquad i = 1,2,\cdots,p$$

sia

$$v_{r1}(x) = \delta_{i,1}x^m \quad , \quad v_{r2}(x) = \delta_{i,2}x^m,\cdots,v_{rp}(x) = \delta_{i,p}x^m$$

(3) Per maggior chiarezza indichiamo con $E^{*}_{h\xi}$, E_{hx} l'operatore differenziale E^{*}_{h}, E_h operante rispettivamente sulle variabili ξ ed x.

con

$$\delta_{i,h} = \begin{cases} 1 & i = h \\ 0 & i \neq h . \end{cases}$$

Vale allora, il seguente teorema:

II. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il vettore* $\boldsymbol{u}(x)$ *di componenti sommabili (secondo Lebesgue), soddisfi quasi ovunque le* (3) *in* I, *e le costanti* $u_{kv}(v = 1, 2; k = 1, 2, \cdots, p)$ *verifichino le* (4), *è che siano soddisfatte le:*

$$(6) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \sum_{h=1}^{p} u_h(\xi)\, \mathrm{E}_h^* [\boldsymbol{v}^{(r)}]\, d\xi = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{h=1}^{p} \varphi_h(\xi)\, v_{rh}(\xi)\, d\xi - \\ - \sum_{h=1}^{p} \sum_{v=1}^{2} (-1)^{2-v}\, u_{hv}\, v_{rh}(x_v),$$

per ogni r.

Se ne trae il preannunciato metodo di risoluzione del problema (P), [cfr. pg. 2]. Basta notare infatti che, ogni vettore $\boldsymbol{u}(x)$ soddisfacente al sistema (1) con le condizioni (2), verifica il sistema (c) insieme alle $u_{kv}(v = 1, 2; k = 1, 2, \cdots, p)$. Viceversa, ogni vettore $\boldsymbol{u}(x)$ il quale insieme alle costanti u_{kv} soddisfi al sistema (6), le costanti u_{kv} essendo legate dalle (2), risulta necessariamente (ove se ne alteri i valori al massimo in un insieme di misura nulla) una soluzione del problema (P).

D'altra parte il sistema delle (6) (2) si sostituisce, eliminando le costanti $u_{kv}(2)$, con un sistema di equazioni integrali di Fischer-Riesz, nel vettore incognito $\boldsymbol{u}(x)$, ad esso perfettamente equivalente, del tipo:

$$(7) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \sum_{h=1}^{p} \psi_{vh}(\xi)\, u_h(\xi)\, d\xi = c_v \qquad v = 1, 2, \cdots$$

dove è

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{h=1}^{p} \psi_{rh}(\xi)\, \psi_{sh}(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s \\ 0 & \text{per } r \neq s \end{cases}$$

e le costanti c_v risultano esplicitamente date.

Richiamata (4) la teoria relativa ai sistemi del tipo (7), dal teorema II segue che: *condizione necessaria sufficiente affinchè il problema* (P) *ammetta soluzione è che converga la serie*:

$$\sum_{h=1}^{\infty} c_v^2 .$$

(4) M. Picone, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica-Matematica.* « Annales Scientifiques de l'Université de Jassy », to. XXVI, section I, année 1940.

Il teorema di Fischer-Riesz, applicato al sistema (7), ci permette, per ciò, di enunciare, sotto forma di condizione necessaria e sufficiente, il teorema di esistenza per il problema (P).

Ed anzi la soluzione di tale problema sarà univocamente determinata, quando e solo quando risulti chiuso nella classe dei vettori a p componenti di quadrato sommabile, il sistema dei vettori $[\psi_\nu(\xi)]$ di componenti

$$\psi_{\nu 1}(\xi) \quad , \quad \psi_{\nu 2}(\xi), \cdots, \psi_{\nu p}(\xi) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, p).$$

Geometria. — *Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti.* Nota II di G. Pompilj, presentata [1] dal Socio F. Enriques.

Questa Nota è la continuazione di un'altra già apparsa, con lo stesso titolo, nel precedente fascicolo di questi « Rendiconti ». La numerazione prosegue quella della Nota precedente.

6. Il sistema $|\overline{T}_n|$. – Sia T_n una trasformazione cremoniana d'ordine n tra piani sovrapposti che muta la rete omoloidica $|f|$ nella rete $|r|$ delle rette. La T_n appartiene ad un sistema lineare ∞^8 $|\overline{T}_n|$ di trasformazioni dello stesso ordine che ancora mutano la rete $|f|$ nella rete $|r|$; una trasformazione del sistema è individuata quando è assegnata la proiettività che intercorre tra le due reti; la generica $\overline{T}_n$ è legata alla particolare T_n dalla relazione

$$\overline{T}_n = \pi \cdot T_n \tag{11}$$

dove π è una generica trasformazione proiettiva del piano in sè.

Indicando con r_1, r_2, r_3 tre generiche rette di $|r|$ e con f_1, f_2, f_3 tre generiche curve di $|f|$, l'equazione della generica trasformazione $\overline{T}_n$ è:

$$\overline{T}_n \equiv \begin{cases} \rho r_1 = f_1 \\ \rho r_2 = f_2 \\ \rho r_3 = f_3 \end{cases} \tag{12}$$

il che, secondo usuali notazioni, significa che al punto P la $\overline{T}_n$ fa corrispondere quel punto P′ per cui:

$$\frac{f_1(P)}{r_1(P')} = \frac{f_2(P)}{r_2(P')} = \frac{f_3(P)}{r_3(P')}. \tag{13}$$

Se P non è un punto base della rete $|f|$ si dimostra facilmente che P′ è unico.

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

Dalla (13) segue che se Q è un punto unito deve essere

$$\frac{f_1(Q)}{r_1(Q)} = \frac{f_2(Q)}{r_2(Q)} = \frac{f_3(Q)}{r_3(Q)}, \tag{14}$$

e viceversa, se Q non è base per la rete $|f|$, il verificarsi della (14) ci assicura che Q è un punto unito.

7. Possiamo rappresentare le trasformazioni di $|\overline{T}_n|$ con i punti di un S_8. In questa rappresentazione le trasformazioni degeneri vengono rappresentate dai punti della nota varietà W_7^3 (d'ordine 3 e dimensione 7) immagine delle proiettività degeneri tra due forme di seconda specie.

8. Il sistema (L). - Consideriamo il sistema (L) formato dalle curve L definite analiticamente dall'equazione

$$L \equiv r\bar{f} - \bar{r}f = 0 \tag{15}$$

dove i polinomi $r, \bar{r}$ e $f, \bar{f}$, eguagliati a zero, sono rispettivamente le equazioni di due generiche rette e due generiche curve della rete $|f|$. *Il sistema* (L) *è lineare* perchè i parametri variabili che compaiono nei polinomi $r, \bar{r}, f, \bar{f}$ sono indipendenti e quindi i loro prodotti, a due a due, assumono valori qualunque. Le curve L, così definite, sono d'ordine $n+1$; ogni punto A_i base per il sistema (L) è anche base per la rete $|f|$ e viceversa; inoltre se la molteplicità di A_i come punto base di $|f|$ è r_i e come punto base di (L) è s_i sussiste la relazione:

$$s_i \geqq r_i .$$

9. *I due sistemi lineari* (L) *ed* $|f|$ *hanno gli stessi punti base con la stessa molteplicità.*

Basta (n. 8) dimostrare che è:

$$s_i = r_i . \tag{16}$$

Siccome $s_i \geqq r_i$, si ha:

$$\Sigma s_i r_i \geqq \Sigma r_i^2, \tag{17}$$

e quindi:

$$n(n+1) - \Sigma s_i r_i \leqq n(n+1) - \Sigma r_i^2; \tag{18}$$

ma, come è noto [2]:

$$n^2 - \Sigma r_i^2 = 1 ,$$

quindi:

$$n(n+1) - \Sigma s_i r_i \leqq n + 1 , \tag{19}$$

avendosi l'eguaglianza solo se è sempre $s_i = r_i$.

(2) Ved. per esempio loc. cit. (2) della Nota I.

D'altra parte il primo membro della (19) dà il numero delle intersezioni, fuori dei punti base, di una generica curva di (L) con una generica curva di $|f|$; e, per la (15), la curva L, fuori dei punti base, incontra la f negli n punti $(f \cdot r)$ e nel punto di $(f \cdot \bar{f})$ che non cade nei punti base, cioè complessivamente in $n+1$ punti. Da questo segue che nella (19) deve valere l'uguaglianza e che, di conseguenza, è $s_i = r_i$. c. v. d.

10. *La generica curva di* (L) *è irriducibile.* - Se la generica curva di (L) fosse riducibile, per il teorema di Bertini [3], il sistema o ammetterebbe una curva fissa D, oppure avrebbe le curve composte con quelle di un fascio $|E|$.

Se si verificasse il primo caso la (15) diverrebbe:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{L}' \equiv r\bar{f} - \bar{r}f = 0 \tag{20}$$

e quindi per il gruppo $(D \cdot r)$ dovrebbe passare la curva $\bar{r} + f$ e questo è assurdo dato che $r, \bar{r}, f$ sono generiche nelle rispettive reti e D è una curva fissa.

Se poi le curve di (L) fossero composte con le curve di un fascio $|E|$, fissato un punto P per cui passa la curva $\bar{E}$ del fascio, si avrebbe che le curve di (L) per P sarebbero del tipo $\bar{E} + L'$; d'altra parte si ottengono curve di (L) passanti per P imponendo ad $\bar{r}$ e ad $\bar{f}$ di passare per P e quindi la (15), in questo caso, diventerebbe:

$$\bar{\mathbf{E}}\,\mathbf{L}' \equiv r\bar{f} - \bar{r}f = 0\,; \tag{21}$$

dove le curve $\bar{r}$ ed $\bar{f}$ soddisfano alla sola condizione di passare per P; ne segue che la (21) è assurda per lo stesso motivo per cui è impossibile la (20).

Si è così dimostrato che è assurdo supporre che la generica curva di (L) sia riducibile. c. v. d.

11. Il calcolo della dimensione σ del sistema lineare (L) ci porterebbe ad una analisi minuta che non vale la pena di fare dato che per il seguito ci basta la disuguaglianza evidente:

$$\sigma > 2\,. \tag{22}$$

Si potrebbe però facilmente dimostrare che è:

$$5 \leq \sigma \leq 8\,. \tag{23}$$

12. *Due generiche curve di* (L) *si incontrano fuori dei punti base, in* $2n+2$ *punti distinti.*

(3) Ved. per esempio, F. Enriques-L. Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Cedam, Padova).

Il numero dei punti (semplici) comuni a due curve di (L), fuori dei punti base, è:

$$(24) \qquad (n+1)^2 - \Sigma r_i^2 = 2n+2.$$

Quindi la serie caratteristica su una curva generica è una $g^{\sigma-1}_{2n+2}$, senza punti fissi, il cui gruppo generico, come è noto (4), è formato da $2n+2$ punti distinti e non coincidenti con i punti base del sistema.

13. È chiaro che il sistema (L) è contenuto nel sistema lineare completo $|L|$ delle curve, d'ordine $n+1$ che passano per i punti A_i, base per la rete $|f|$, con la stessa molteplicità r_i con cui vi passano le curve f.

I caratteri del sistema $|L|$ sono i seguenti:

$$(25) \qquad \begin{cases} \text{grado} = 2n+2 \\ \text{genere} = n-1 \\ \text{dimensione} = n+4. \end{cases}$$

14. Le curve isologhe di $\overline{T}_n$. – Poniamo

$$(26) \qquad \begin{cases} L_1 \equiv r_1 f_2 - r_2 f_1 \\ L_2 \equiv r_3 f_1 - r_1 f_3 \\ L_3 \equiv r_2 f_3 - r_3 f_2 \end{cases}$$

dove i polinomi r_i, f_i $(i = 1, 2, 3)$, che qui compaiono, sono gli stessi che intervengono nell'equazione (12) della trasformazione $\overline{T}_n$ e pertanto risultano generici nelle rispettive reti. Possiamo quindi dire che le tre curve $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \overline{L}_3$ sono generiche entro (L), pur non essendo reciprocamente generiche.

La generica curva isologa della trasformazione $\overline{T}_n$ ha equazione:

$$(27) \qquad \lambda_1 \overline{L}_1 + \lambda_2 \overline{L}_2 + \lambda_3 \overline{L}_3 = 0$$

e possiamo dire che si comporta come la generica curva di (L), cioè: nel punto base A_i ha la stessa molteplicità r_i di una generica curva di $|f|$ (n. 9); è irriducibile (n. 10); è incontrata da una generica curva di (L), fuori dei punti base della rete $|f|$, in $2n+2$ punti distinti (n. 12).

I $2n+2$ punti comuni ad $\overline{L}_1$ ed $\overline{L}_2$, fuori dei punti base di $|f|$, si possono distribuire in due gruppi, e precisamente: n nel gruppo $(r_1 \cdot f_1)$ ed i rimanenti $n+2$ in un gruppo G_{n+2}.

15. *I punti del gruppo G_{n+2} sono propri, distinti e non coincidenti nè con punti base di $|f|$, nè con punti del gruppo $(r_1 \cdot f_1)$.*

(4) Ved. per esempio: F. Enriques-O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. (Zanichelli, Bologna), vol. I, p. 180..

Se fissiamo le rette r_1, r_2 e le curve f_1, f_2, f_3 mentre facciamo variare la retta r_3, la curva $\overline{L}_1$ rimane ferma e, al contrario, la curva $\overline{L}_2$ varia in un sistema lineare $|\overline{L}_2|$, di dimensione 3, che ha per punti base: quelli della rete $|f|$, il gruppo $(r_1 \cdot f_1)$ e il punto $\overline{P}$ del gruppo $(f_1 \cdot f_3)$ che non è base per $|f|$. La curva $\overline{L}_1$, non passando per $\overline{P}$, non appartiene al sistema $|\overline{L}_2|$ e quindi, fuori dei punti base di $|f|$ e del gruppo $(r_1 \cdot f_1)$, le curve di detto sistema segano su $\overline{L}_1$ una g^3_{n+2}.

Il gruppo G_{n+2} appartiene alla precedente serie lineare, anzi è generico entro detta serie; possiamo quindi dire[5] che è formato da $n+2$ punti propri, distinti e non coincidenti né con punti base di $|f|$, né con punti del gruppo $(r_1 \cdot f_1)$. c. v. d.

16. *Nessun punto del gruppo* G_{n+2} *può stare nella retta* r_1.

Infatti la retta r_1 incontra, fuori di $(r_1 \cdot f_1)$, la curva $\overline{L}_1$ nel punto $(r_1 \cdot r_2)$ e la curva $\overline{L}_2$ nel punto $(r_1 \cdot r_3)$, ed, evidentemente, questi due punti non possono coincidere perchè, se così fosse, le tre rette r_1, r_2, r_3 apparterrebbero ad un fascio, mentre, come si sa, si tratta di tre rette generiche.

17. *La curva* $\overline{L}_3$ *non contiene alcun punto del gruppo* $(r_1 \cdot f_1)$.

Dato che, per le (26), il polinomio $\mathbf{L}_3$ non dipende da $\boldsymbol{r}_1$ ed $\boldsymbol{f}_1$, se la curva $\overline{L}_3$ passasse per un punto P del gruppo $(r_1 \cdot f_1)$, lo stesso fatto dovrebbe accadere per tutte le curve del sistema (L) e quindi (n. 9) anche per la rete $|f|$; questo però è assurdo per la genericità della retta r_1.

Questo risultato ci assicura che le tre curve $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \overline{L}_3$ non appartengono allo stesso fascio.

18. *La curva* $\overline{L}_3$ *passa per il gruppo* G_{n+2}.

Sussiste infatti l'identità:

$$\boldsymbol{r}_3 \overline{\mathbf{L}}_1 + \boldsymbol{r}_2 \overline{\mathbf{L}}_2 + \boldsymbol{r}_1 \overline{\mathbf{L}}_3 \equiv 0 \tag{28}$$

e quindi per i punti comuni alle curve $\overline{L}_1$ ed $\overline{L}_2$ passa la curva $r_1 + \overline{L}_3$; ma (n. 16) nessun punto di G_{n+2} può stare nella retta r_1 quindi per questi punti deve passare la $\overline{L}_3$.

19. Segue, da quanto si è detto, che le curve isologhe formano una rete di curve, irriducibili, che passano per i punti base di $|f|$ con la stessa molteplicità della generica curva f, e hanno ancora come punti base (semplici) i punti del gruppo G_{n+2}.

I punti del gruppo G_{n+2} sono gli $n+2$ punti uniti semplici della trasformazione $\overline{T}_n$[6].

(5) Ved. loc. cit. (4).

(6) Ved. per esempio loc. cit. (2) della Nota I.

Possiamo quindi enunciare il seguente

TEOREMA. – *La generica trasformazione del sistema lineare* $|\mathrm{T}_n|$ *ha* $n+2$ *punti uniti semplici.*

20. Da questo punto si può ripetere il ragionamento di F. Severi [7], che ho riassunto nell'introduzione, e definire così l'equivalenza numerativa r_i ed s_j dei punti uniti Q_i e delle curve luogo di punti uniti $U^{(j)}$ della trasformazione cremoniana T_n.

Geometria. — *Sulla definizione della lunghezza d'una curva.* Nota di T. VIOLA, presentata [1] dal Socio M. PICONE.

1. È ben nota la definizione di lunghezza d'una curva, data da Peano e da Minkowski [2]. Si consideri l'intorno J_r della curva, cioè l'insieme (manifestamente aperto e internamente connesso) costituito da tutti i punti dello spazio, la cui distanza dalla curva è minore d'un certo numero positivo r. Indicato con V_r il volume di J_r (cioè la misura secondo Lebesgue), si calcoli il rapporto $\frac{V_r}{\pi r^2}$ e si faccia poi tendere r a zero. Se esiste il $\lim_{r\to 0} \frac{V_r}{\pi r^2}$, questo è, per definizione, la lunghezza della curva considerata, e la curva si dice « rettificabile » quando la sua lunghezza è finita.

Nella V edizione del *Formulario Matematico* (vol. V, fasc. 2, 1908, p. 386), il Peano affermava l'equivalenza di questa definizione con quella classica del Jordan, per una curva continua soggetta ad alcune condizioni restrittive e cioè: la curva abbia nulli sia il volume che l'area (o estensione superficiale) [3] e inoltre « nessun suo arco sia descritto due volte ». L'affermata equivalenza non venne però dimostrata dal Peano, nè lo è stata a tutt'oggi, ch'io sappia, da altri AA., se non in condizioni assai più restrittive [4]. In realtà l'enunciato del Peano è inesatto, per esser le condizioni, da lui poste, in certo senso troppo poco restrittive, come

(7) Ved. loc. cit. (3) della Nota I.

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) G. PEANO, *Additions au formulaire.* « Revue de Mathématique », vol. VII, 1900–1901, p. 109; H. MINKOWSKI, *Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche u. Volumen.* « Jahresbericht der Deut. Math. Ver. », 1901, pp. 115–121.

(3) Per le definizioni di volume e di area, si veda la citata V edizione del formulario, alle pp. 379 e 384.

(4) Ritengo per la prima volta dal prof. M. PICONE, nelle *Lezioni di Analisi Infinitesimale.* (Catania 1923) vol. II, pp. 734–735. Molti anni più tardi H. LEBESGUE (*Sur la mesure des grandeurs* in *Enseignement Mathematique*, to. XXXIII, 1934, p. 177) ritrovò, con analogo calcolo, il risultato del prof. M. PICONE.

mostrerò alla fine di questo lavoro (mentre, in altro senso, esse lo sono troppo). Ma prima dimostrerò che le due definizioni di lunghezza d'una curva effettivamente coincidono, nell'ipotesi (più comunemente ammessa) che la curva considerata sia del tutto priva di punti multipli.

2. È utile esaminare, in via preliminare, come varia il volume V racchiuso complessivamente in un gruppo finito e ordinato di n sfere d'ugual raggio ρ

$$S_1, S_2, \cdots, S_n,$$

al variare dei loro rispettivi centri

$$O_1, O_2, \cdots, O_n$$

comunque nello spazio, con la sola condizione che le $n-1$ distanze $\overline{O_1 O_2}, \overline{O_2 O_3}, \cdots, \overline{O_{n-1} O_n}$ non superino ciascuna un certo numero $\delta > 0$ prefissato.

Immaginiamo che le n sfere, partendo da una certa configurazione Ω, si portino in una nuova configurazione Ω', nella quale gli n centri risultino allineati, ma si mantengano invariate le dette $n-1$ distanze. Il volume complessivamente racchiuso da una coppia di sfere consecutive S_i, S_{i+1} $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$, è il medesimo nella configurazione Ω' che nella Ω, mentre quello racchiuso da una coppia di sfere *non* consecutive, è, nella Ω', maggiore o uguale che nella Ω. Si ha dunque $V \leq V'$ (volume complessivamente racchiuso dalle n sfere nella configurazione Ω'). E si riconosce che la configurazione che rende *massimo* il volume racchiuso dalle n sfere, è quella in cui gli n centri $O_1, O_2, \cdots, O_n$ sono allineati e le $n-1$ distanze $\overline{O_1 O_2}, \overline{O_2 O_3}, \cdots, \overline{O_{n-1} O_n}$ sono tutte uguali a δ.

3. Sia ora γ una qualunque curva continua e rettificabile (nel senso di Jordan), di lunghezza L. Prefissati a piacere un numero reale $r > 0$ e un intero $n > 0$, suddividiamo γ in $n-1$ archi uguali, di comune lunghezza $\delta = \dfrac{L}{n-1}$, mediante i punti $O_1, O_2, \cdots, O_n$ (intendendo che O_1 ed O_n siano gli estremi di γ), e consideriamo le n sfere di centri $O_1, O_2, \cdots, O_n$ e di comune raggio $\rho = r + \dfrac{\delta}{2}$. L'intorno J_r di γ è certo contenuto nel complesso delle n sfere e perciò $V_r \leq V$ (volume complessivamente racchiuso dalle n sfere). Per la configurazione Ω' di volume massimo delle n sfere, già esaminata al numero precedente, si ha $V' < \pi\rho^2 L + \dfrac{4}{3}\pi\rho^3$. Perciò è anche $V_r < \pi\rho^2 L + \dfrac{4}{3}\pi\rho^3$ e

$$\frac{V_r}{\pi r^2} < \frac{\rho^2}{r^2}\left(L + \frac{4}{3}\rho\right).$$

Ma $\lim_{n\to\infty} \rho = r$; dunque

$$\frac{V_r}{\pi r^2} \leq L + \frac{4}{3} r, \lim''_{r\to 0} \frac{V_r}{\pi r^2} \leq L .$$

4. Consideriamo nuovamente il gruppo di sfere di cui al n. 2 e supponiamo che esso passi dalla generica configurazione Ω alla nuova configurazione Ω'' che definiamo nel modo seguente. Teniamo fissi i due centri estremi O_1 ed O_n, mentre portiamo ogni altro centro $O_i (i=2,3,\cdots,n-1)$ nel punto O_i'' della semiretta $O_1 O_n$, che ha ugual distanza da O_1. Le distanze mutue $\overline{O_i'' O_j''}$ dei centri delle sfere nella Ω'', non superano quelle corrispondenti nella Ω, onde risulterà $V \geq V''$ (volume complessivamente racchiuso dalle n sfere nella Ω'').

Ciò posto, data una qualunque curva continua γ (rettificabile o no), prefissiamo ad arbitrio un $r > 0$ indi un $\delta > 0$, ed iscriviamo in γ una qualunque poligonale $O_1, O_2, \cdots, O_n$ i cui estremi cadano negli estremi A, B di γ (supposti distinti) e i cui lati abbiano tutti lunghezza $< \delta$. Portiamo poi le n sfere, di raggio r e di centri $O_1, O_2, \cdots, O_n$, nella configurazione Ω'' di cui sopra, onde risulterà $V'' > \overline{AB} \cdot \pi \left(r^2 - \frac{\delta^2}{4} \right)$ (5) e perciò anche $V_r > V > \overline{AB} \cdot \pi \left(r^2 - \frac{\delta^2}{4} \right)$.

Dunque

$$\frac{V_r}{\pi r^2} > \overline{AB} \left(1 - \frac{\delta^2}{4 r^2} \right)$$

e, per l'arbitrarietà di δ,

$$\frac{V_r}{\pi r^2} \geq \overline{AB}.$$

In modo del tutto analogo, si potrebbe dimostrare che il rapporto $\frac{V_r}{\pi r^2}$ non scende mai al disotto del diametro (o massima corda) di γ, questa limitazione valendo poi indipendentemente dal fatto che γ sia chiusa od aperta.

5. Teorema. – *Per una curva continua γ priva di punti multipli, le due definizioni di lunghezza date da Peano–Minkowski e da Jordan, coincidono.*

(5) Infatti, se $r \leq \frac{\delta}{2}$, è $r^2 - \frac{\delta^2}{4} \leq 0$. Se invece $r > \frac{\delta}{2}$, due sfere consecutive nella Ω'', di centri rispettivamente O_i'', O_{i+1}'', si compenetrano e contengono complessivamente il cilindro circolare retto avente per asse il segmento $O_i'' O_{i+1}''$, e raggio uguale a $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \overline{O_i'' O_{i+1}''}} > \sqrt{r^2 - \frac{\delta^2}{4}}$.

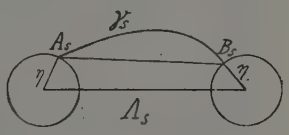
Dimostrazione. – Si tratta di dimostrare che

$$\lim_{r \to 0} \frac{V_r}{\pi r^2} = L ,$$

tanto se γ è rettificabile (cioè se la lunghezza L è finita), quanto se non lo è (cioè se $L = \infty$). In virtù del n. 3, basta far vedere che

$$(1) \qquad \lim'_{r \to 0} \frac{V_r}{\pi r^2} \geqq L .$$

Sia π una generica poligonale iscritta in γ e siano Λ la lunghezza di π, k il numero dei lati di π. Fissiamo, com'è certamente possibile, un numero $\eta > 0$ tanto piccolo, che le $k + 1$ sfere aventi comune raggio η ed aventi i centri nei vertici di π, siano tutte esterne l'una all'altra e inoltre la parte di γ che non penetra in nessuna di queste sfere, contenga k archi $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma^k$ (facilmente identificabili), ognuno dei quali colleghi una sfera alla sfera successiva: precisamente γ_s ($s = 1, 2, \cdots, k$) abbia il primo estremo A_s sulla sfera s–esima, il secondo estremo B_s sulla sfera $s + 1$-esima.



Questi k archi non hanno punti in comune due a due. Indicando con σ la minima distanza di due punti, appartenenti a due diversi di quegli archi [6], basta prendere $r < \frac{\sigma}{2}$, per esser sicuri che gli intorni di raggio r dei detti archi sono tutti estranei l'uno all'altro. Risulterà dunque (n. 4)

$$\frac{V_r}{\pi r^2} > \sum_1^k{}_s \overline{A_s B_s}$$

ed anche $\lim'_{r \to 0} \frac{V_r}{\pi r^2} \geqq \sum_1^k{}_s \overline{A_s B_s} \geqq \sum_1^k{}_s (\Lambda_s - 2\eta) = \Lambda - 2k\eta .$

Ma η è arbitrariamente piccolo, dunque

$$\lim'_{r \to 0} \frac{V_r}{\pi r^2} \geqq \Lambda .$$

Infine, ricordando che L è l'estremo superiore di Λ, al variare di π nell'insieme delle poligonali iscritte in γ, si ha appunto la (1) c. d. d.

6. All'enunciato del Peano (n. 1) è da osservare quanto segue.

È evidente che, se qualche arco della curva che si considera è descritto due o più volte, non può essere

$$(2) \qquad \lim_{r \to 0} \frac{V_r}{\pi r^2} = L ,$$

(6) Tale distanza è certo > 0, perchè ciascuno dei detti archi è un insieme chiuso e limitato di punti.

ma la condizione che la curva non possieda alcun arco descritto due volte, è ben lungi dall'esser sufficiente affinchè valga la (2).

Esempio. – Indichiamo con C un qualunque insieme chiuso e non denso, contenuto nell'intervallo $\overline{0\,1}$ dell'asse reale e la cui misura sia positiva. Sopra ciascuno degli intervalli contigui a C, assunto come diametro, costruiamo una semicirconferenza. Sommando a C tutte queste semicirconferenze, otteniamo un arco di curva semplice γ' la cui lunghezza è

$$\text{mis C} + \frac{\pi}{2}(1 - \text{mis C}).$$

La curva γ ottenuta percorrendo prima l'intero segmento $\overline{0\,1}$ e poi l'arco γ' nel senso delle ascisse decrescenti, la lunghezza

$$L = 1 + \text{mis C} + \frac{\pi}{2}(1 - \text{mis C}).$$

Tutti i punti di γ sono semplici, ad eccezione dei punti di C che son doppi, mentre un semplice calcolo mostra che

$$\lim_{r \to 0} \frac{V_r}{\pi r^2} = 1 + \frac{\pi}{2}(1 - \text{mis C}) < L.$$

Naturalmente tutte le cose dette si posson ripetere identicamente se, limitandosi a considerare una curva piana e indicando con J_r l'intorno di γ costituito dai punti del piano la cui distanza da γ è $< r$, con A_r l'area di J_r, si cerca il $\lim_{r \to 0} \frac{A_r}{2r}$. Il rapporto $\frac{A_r}{2r}$ dovrà, negli enunciati e nelle dimostrazioni, esser sostituito al rapporto $\frac{V_r}{\pi r^2}$, mentre alla considerazione di sfere aventi i centri in punti di γ, dovrà sostituirsi quella di cerchi appartenenti al piano della γ medesima.

Meccanica. — *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità.* Nota II di C. Cattaneo, presentata [1] dal Corrisp. A. Signorini.

Completo, in questa Nota, la discussione intorno a un noto criterio per l'esistenza di un ellissoide reale di propagazione. Per le premesse e il significato dei simboli mi riferisco senz'altro alla precedente Nota I [2]; anche la numerazione delle formule e dei paragrafi è fatta in continuazione.

2. Stabilità dell'equilibrio. Teorema dell'Hadamard. - Per assicurare alla Q il carattere di forma definita positiva basta, secondo l'Hadamard,

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) Cfr. questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. I, fasc. I, p. 66.

che lo stato di equilibrio C* sia stabile [3]. Come si esprima questa stabilità, nello spirito del teorema del Dirichlet, è noto: siano $\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ un generico spostamento (funzione di P*), $c_r (r = 1, 2, \cdots, 6)$ le corrispondenti caratteristiche linearizzate di deformazione

$$c_r = \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_r} \quad , \quad c_{r+3} = \frac{\partial \varphi_{r+1}}{\partial y_{r+2}} + \frac{\partial \varphi_{r+2}}{\partial y_{r+1}} \qquad (r = 1, 2, 3);$$

c'_r le differenze tra le caratteristiche esatte e le omologhe linearizzate

$$c'_r = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_r} \right)^2 \quad , \quad c'_{r+3} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_{r+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_{r+2}};$$

l'equilibrio di S in C* è stabile se in corrispondenza a qualsiasi scelta dello spostamento φ (P*), purchè *continuo* e con derivate prime *generalmente continue*, è verificata la relazione

$$(11) \qquad \mathfrak{I} = \int_{C^*} \left\{ \sum_1^6{}_{rs} M_{rs} c_r c_s - 2 \sum_1^6{}_s X_s^{(0)} c'_s \right\} dC^* \geqq 0,$$

il segno di uguaglianza essendo riservato al solo caso che φ rappresenti uno spostamento infinitesimo *rigido*. Non indugiamo a richiamare [4] la deduzione della (11); ci limitiamo a ricordare che l'integrale della prima sommatoria rappresenta, cambiato di segno, il lavoro delle forze intime aggiuntive, l'integrale della seconda sommatoria si riferisce invece al lavoro compiuto dalle tensioni interne preesistenti.

In qualche caso particolarmente semplice la verificazione del teorema dell'Hadamard è quasi immediata. Se, ad esempio, C* è uno stato di equilibrio naturale ($X_{rs}^{(0)} \equiv 0$), e il sistema elastico è ivi omogeneo (M_{rs} indipendenti da P*) basta assumere per φ un qualunque spostamento lineare omogeneo (pel quale le c_r e le c'_r si riducono a costanti arbitrarie) perchè dalla (11) si ricavi

$$C^* \sum_1^6{}_{rs} M_{rs} g_r g_s > 0,$$

in corrispondenza a valori arbitrari, non tutti nulli, delle g, ciò che significa essere definita positiva la forma $\sum_1^4{}_{rs} M_{rs} \xi_r \xi_s$. Poichè d'altra parte, in base alle relazioni (5) le e si annullano tutte simultaneamente allora e solo allora che sono nulle tutte le λ, traiamo che anche la forma Q è definita positiva.

Ma nel caso che le M_{rs} siano funzioni effettive, sia pur continue, del posto, ovvero che in C* esista uno stato di tensione iniziale provocato da

(3) J. HADAMARD, op. cit., cap. VI, p. 252 e sgg.

(4) Si veda ad esempio A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica Matematica*, Napoli, Anno accademico 1934-35, cap. VIII.

forze e costrizioni vincolari esterne o anche da una qualche distorsione termoelastica, il ragionamento precedente non è più applicabile. Ecco allora la dimostrazione data nel caso più generale dall'Hadamard, dimostrazione che costituisce appunto l'oggetto principale del presente lavoro.

Supponiamo, per assurdo, che in un certo punto $\Omega \equiv (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ di C^* e in corrispondenza a un determinato orientamento di $\mathbf{N}$ e a un determinato valore di λ, la forma quadratica Q sia negativa. Tale essa rimarrà, per la supposta continuità delle M_{rs} al variare di P*, in tutto un intorno di Ω, beninteso in corrispondenza alle medesime determinazioni di $\mathbf{N}$ e di λ. Anzi, indicata con q una conveniente costante positiva, esisterà una regione $\mathfrak{R}$ contenente Ω, sufficientemente piccola perchè in ogni suo punto, frontiera compresa, si abbia

$$Q(P^* \mid \lambda, N) < -q < 0 . \tag{12}$$

Entro $\mathfrak{R}$, e totalmente interno ad essa, costruiamo un cilindro circolare con le generatrici parallele ad $\mathbf{N}$ e la cui base contenga Ω, per esempio nel centro. La base, d'area σ, sia fissata una volta per tutte, mentre l'altezza ε si farà tendere a zero. Diremo c il dominio definito dal cilindro, frontiera compresa, e con la stessa lettera indicheremo il suo volume. Chiameremo poi $\mathfrak{R} - c$ la porzione di $\mathfrak{R}$ esterna a c.

Ciò premesso pensiamo di attribuire ad S uno spostamento φ che in c abbia componenti così definite:

$$\varphi_r = \lambda_r \sum_1^3{}_s N_s (y_s - \bar{y}_s) \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Nella zona $\mathfrak{R} - c$ poi si attribuiranno alle φ_r espressioni che sulla superficie di c si riattacchino con continuità a quelle ora indicate, sul contorno esterno di $\mathfrak{R}$ si annullino e siano inoltre tali che *le loro derivate parziali prime risultino ovunque dell'ordine di grandezza di* ε. Al di fuori di $\mathfrak{R}$ si porrà infine identicamente $\varphi_r \equiv 0$ $(r = 1, 2, 3)$.

Entro c si ha allora

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial y_s} = \lambda_r N_s \\ c_r = \lambda_r N_r = e_r \quad , \quad c_{r+3} = \lambda_{r+1} N_{r+2} + \lambda_{r+2} N_{r+1} = e_{r+3} \\ c'_r = \dfrac{1}{2} N_r^2 \sum_1^3{}_i \lambda_i^2 \quad , \quad c'_{r+3} = N_{r+1} N_{r+2} \sum_1^3{}_i \lambda_i^2 , \\ (r = 1, 2, 3) . \end{array}\right. \tag{14}$$

Come si vede, sia le caratteristiche linearizzate c_r che i rispettivi complementi c'_r risultano costanti in c e indipendenti da ε. È poi facile riconoscere in base a tali espressioni, che tutta la funzione integranda figurante nella (11) si riduce proprio alla $Q(P^*/\lambda, N)$. Tenendo conto di questo

fatto, nonchè della disuguaglianza (12), circa il contributo $\mathfrak{I}_c$ dato dalla regione c all'integrale $\mathfrak{I}$ può dirsi

$$(15) \qquad \mathfrak{I}_c = \int_c Q\,dC^* < -q\cdot\sigma\cdot\varepsilon < 0\,.$$

Per vagliare il contributo $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}-c}$ offerto dalla regione $\mathfrak{R} - c$ osserviamo che ivi per ipotesi

$$(16) \qquad \left|\frac{\partial\varphi_r}{\partial\varphi_s}\right| < L\varepsilon \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$

essendo L una quantità finita indipendente da ε.

D'altra parte, la funzione integranda (malgrado che ora non si riduca alla Q) è una forma quadratica nelle $\frac{\partial\varphi_r}{\partial y_s}$ con coefficienti limitati in C*. Si avrà quindi necessariamente, indicando con K una conveniente costante positiva,

$$(17) \qquad |\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}-c}| < K\varepsilon^2\,.$$

Ne consegue che per ε abbastanza piccolo dovrà essere

$$(18) \qquad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathfrak{R}-c} + \mathfrak{I}_c < 0\,,$$

in palese contraddizione coll'ipotesi di stabilità. Escluso allora che la Q possa assumere in qualsiasi punto di C* valore negativo, il teorema resta provato.

Di questa delicata dimostrazione, di cui non si può non ammirare la genialità, mostriamo ora il lato incerto, messo in evidenza dal Duhem, cui abbiamo accennato al principio di questa Nota. È possibile entro $\mathfrak{R} - c$ una scelta di spostamenti tale da soddisfare a *tutte* le condizioni assegnate? La risposta è negativa. Imposto alle φ_r di essere continue attraverso il confine con c, restano automaticamente imposte nei punti di $\mathfrak{R} - c$ infinitamente prossimi a questo confine le medesime derivate tangenziali che si hanno in punti infinitamente vicini ma posti all'interno di c. Di tali derivate quelle effettuate parallelamente alle basi di c, tanto sulle due basi medesime quanto sulla superficie laterale sono nulle, come è subito visto dalle (13); non altrettanto può dirsi invece, delle derivate calcolate sulla superficie laterale di c, parallelamente alle generatrici; assunta per esempio tale direzione come quella dell'asse y_3 si trova

$$\frac{\partial\varphi_r}{\partial y_3} = \lambda_r \qquad (r = 1, 2, 3);$$

si han quindi per alcune delle derivate parziali sul contorno interno di $\mathfrak{R} - c$ dei valori costanti non nulli *indipendenti* da ε, e non infinitesimi con ε come invece appare indispensabile nel ragionamento sopra riportato. Ecco perchè

la dimostrazione, almeno senza maggiori specificazioni sulla scelta di φ, appare incompleta. Non è affatto escluso che essa possa esser resa rigorosa con una scelta conveniente, ma esplicita, delle φ_r all'esterno di c, scelta capace, malgrado il vincolo di continuità, di rendere l'integrale $\mathfrak{I}_{C^*-c}$ infinitesimo d'ordine superiore rispetto ad $\mathfrak{I}_c$, come era nell'idea dell'Hadamard. Può anche darsi, come invece pensa il Duhem, che ciò possa ottenersi circondando completamente il cilindro con un involucro di volume v infinitesimo d'ordine superiore rispetto al volume c del cilindro medesimo e di scegliere ivi uno spostamento riattaccantesi con continuità allo spostamento in c, evanescente sul confine esterno e tale da ottenere l'infinitesimalità del rapporto $\frac{\mathfrak{I}_v}{\mathfrak{I}_c}$, anzichè coll'infinitesimalità delle derivate, impossibile a ottenersi, mediante l'infinitesimalità del rapporto $\frac{v}{c}$. Si noti tuttavia che anche questo è lontano dall'essere evidente, dato che il rapido tendere a zero delle φ_r dall'interno verso l'esterno, dovuto al tenue spessore dell'involucro, fa presumere la divergenza di qualche derivata parziale ciò che, *a priori*, eliminerebbe il vantaggio conseguito per altra via. È evidente perciò che la dimostrazione può essere completata solo a patto di precisare lo spostamento anche all'esterno di c e di passare poi al limite con tutto rigore.

Tuttavia qualche tentativo, infruttuoso, da noi fatto in proposito nell'uno e nell'altro senso ci ha suggerito simultaneamente di modificare un po' anche l'impostazione dimostrativa, senza peraltro alterarne lo spirito, nel modo che ora precisiamo.

Nella regione $\mathfrak{R}$ sopra considerata, nella quale per assurda ipotesi è supposto che, in corrispondenza a ben determinati valori di λ e di $\mathbf{N}$, la forma quadratica Q assuma valori negativi, soddisfacendo anzi alla disuguaglianza (12), si consideri ancora un cilindro circolare c con le generatrici parallele ad $\mathbf{N}$, di base $\sigma = \pi r^2$ e altezza 2ε. Questo cilindro si pensi poi di avvolgerlo lateralmente mediante un volume emitoroidale generato dalla rotazione completa, attorno all'asse del cilindro, di un semicerchio di raggio ε, situato in un piano per l'asse col centro sulla superficie laterale di c a mezza altezza, e avente come suo diametro limite una generatrice del cilindro stesso. Si viene così a costituire, complessivamente, un volume rotondo a superficie priva di punti angolosi. È sottinteso che tanto r che ε sono sufficientemente piccoli perchè il volume sia totalmente interno ad $\mathfrak{R}$, dopo di che r può mantenersi fisso mentre ε verrà fatto tendere a zero.

Per comodità fissiamo la terna di riferimento con l'asse y_3 coincidente con l'asse della figura e orientato come $\mathbf{N}$, l'origine a metà altezza e gli altri due assi, nel piano equatoriale, scelti a piacere. Nel volume ora costruito distingueremo quattro parti: la parte superiore ($y_3 > 0$) e la parte inferiore ($y_3 < 0$) del cilindro che indicheremo con c_1 e con c_2, rispettivamente; le due analoghe parti dell'emitoro che chiameremo τ_1 e τ_2.

Ciò posto, pensiamo di attribuire ai punti del nostro sistema i seguenti spostamenti

$$(19)\qquad \begin{cases} \varphi_i = \lambda_i(\varepsilon - y_3)\,(i = 1,2,3)\cdots \text{ in } c_1 \\ \varphi_i = \lambda_i(\varepsilon + y_3)\,(i = 1,2,3)\cdots \text{ in } c_2 . \end{cases}$$

Nello spazio anulare τ definiamo lo spostamento φ su ciascuna retta radiale, cioè incidente all'asse y_3 e ad esso normale, a partire dal suo valore sulla superficie laterale di c facendolo decrescere (in valore assoluto) parabolicamente fino ad annullarsi sulla sua superficie esterna. Posto

$$\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

ciò equivale a scrivere

$$(20)\qquad \begin{cases} \varphi_i = \lambda_i[\varepsilon - y_3]\left[1 - \dfrac{(\rho - r)^2}{\varepsilon^2 - y_3^2}\right] & (i = 1,2,3)\cdots \text{ in } \tau_1 \\ \varphi_i = \lambda_i[\varepsilon + y_3]\left[1 - \dfrac{(\rho - r)^2}{\varepsilon^2 - y_3^2}\right] & (i = 1,2,3)\cdots \text{ in } \tau_2 . \end{cases}$$

Al di fuori di c e di τ porremo identicamente in tutto C*

$$(21)\qquad \varphi_i \equiv 0 \qquad (i = 1,2,3).$$

Il sistema di spostamenti così definito è finito e continuo, senza eccezioni, in tutto C*.

Si ha poi

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \equiv 0 & \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_3} = -\lambda_i & (i = 1,2,3) \end{cases} \cdots \text{ in } c_1$$

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \equiv 0 & \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_3} = \lambda_i & (i = 1,2,3) \end{cases} \cdots \text{ in } c_2$$

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = -2\lambda_i \dfrac{(\rho - r)\,y_j}{(\varepsilon + y_3)\,\rho} & \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_3} = \lambda_i\left[\dfrac{(\rho - r)^2}{(\varepsilon + y_3)^2} - 1\right] & (i = 1,2,3) \end{cases} \cdots \text{ in } \tau_1$$

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} = 2\lambda_i \dfrac{(\rho - r)\,y_j}{(\varepsilon - y_3)\,\rho} & \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_3} = \lambda_i\left[1 - \dfrac{(\rho - r)^2}{(\varepsilon - y_3)^2}\right] & (i = 1,2,3) \end{cases} \cdots \text{ in } \tau_2$$

$$(26)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \equiv 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{pmatrix} \cdots \text{ in } C^* - c - \tau .$$

Come si vede, anche le nove derivate parziali $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\,(i,j=1,2,3)$ sono perfettamente regolari in ciascuna delle cinque regioni c_1, c_2, τ_1, τ_2, $C^* - c - \tau$, e presentano al più qualche discontinuità di prima specie sul confine tra l'una e l'altra regione, come ad esempio accade per le $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_3}$, attraverso il piano $y_3 = 0$ ovvero per le $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2}$ attraverso la superficie laterale di c.

Il sistema di spostamenti così scelto, che dati i suoi caratteri di regolarità non ha nulla di artificioso neppure da un punto di vista fisico, permette di completare la dimostrazione dell'Hadamard.

Si ha infatti, stante la (12),

$$\mathfrak{I}_c = -2q \cdot \pi r^2 \cdot \varepsilon ;$$

simultaneamente, indicato con K il massimo valore assoluto delle $\frac{\partial \varphi_r}{\partial y_s}$ in τ e con $\frac{M}{36}$ il massimo valore assoluto assunto in $\mathfrak{R}$ dai coefficienti della forma quadratica nelle $\frac{\partial \varphi_r}{\partial y_s}$ che figura sotto il segno di $\mathfrak{I}$, si ha ancora

$$|\mathfrak{I}_\tau| \leq \int_\tau MK^2\, dC^* = MK^2 \pi^2 r\varepsilon^2 .$$

Si trae subito che in corrispondenza allo spostamento prescelto, purchè ε sia sufficientemente piccolo, risulta

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\tau + \mathfrak{I}_c < 0 .$$

La dimostrazione del teorema dell'Hadamard ci sembra così completata in modo soddisfacente.

Alle stesse conclusioni si giunge se in luogo di onde d'accelerazione si considerano onde d'urto. Malgrado infatti la natura profondamente diversa della perturbazione ondosa, le relazioni identiche di Riemann–Jouguet verificate su ogni fronte d'urto, se sono applicate al sistema (1) conducono alle medesime condizioni di compatibilità (7) proprie delle onde di accelerazione e naturalmente a tutte le conseguenze relative (5). Quindi, anche per le onde d'urto la condizione di stabilità assicura, in corrispondenza ad ogni punto e ad ogni faccetta del mezzo di propagazione, l'esistenza di un ellisoide reale di polarizzazione.

(5) Questa circostanza fu fatta notare dal prof. Signorini nel precitato corso di lezioni.

Meccanica. — *Le tensioni caratteristiche per il guscio cilindrico.* Nota di P. Cicala, presentata [1] dal Corrisp. M. Panetti.

1. Si chiama guscio cilindrico una parete di piccolo spessore, superficie media cilindrica, rinforzata da *correnti* paralleli alle generatrici e da diaframmi (*ordinate*) normali a quelle.

La sezione sia doppiamente connessa, armata da m correnti. Siano i, r i numeri d'ordine del corrente e della ordinata generica. In corrispondenza dell'incrocio (i, r) dell'asse del corrente i col piano del diaframma r sia

$$S_{i,r} = F_i \sigma_{i,r} \tag{1}$$

lo sforzo assiale sopportato dalla sezione F_i del corrente i. Le ordinate reagiscano solo nel loro piano medio. La parete (fasciame) sopporti solo sforzi di taglio: sia quindi il flusso $t_{i,r}$ costante in tutto il pannello delimitato dai correnti $i-1$ e i, dalle ordinate $r-1$ e r. Si chiama spostamento medio lungo l'arco $(i-1, r)-(i, r)$ il rapporto

$$v_{i,r} = \frac{1}{c_i} \int v \, dl$$

fra l'integrale dello spostamento tangente v lungo quell'arco di direttrice e la corda c_i dell'arco stesso.

2. Diciamo che un tronco di guscio ha dimensioni uniformi se la sua sezione è costante e le ordinate, tutte uguali, hanno passo a costante. In tal caso si ha [2]

$$\frac{1}{6E}(4\sigma_{i,r} + \sigma_{i,r-1} + \sigma_{i,r+1} - 4\sigma_{i-1,r} - \sigma_{i-1,r-1} - \sigma_{i-1,r+1}) - \frac{\hat{c}_i}{Ga}(t_{i,r+1} - t_{i,r}) = \frac{c_i}{a^2}(2v_{i,r} - v_{i,r-1} - v_{i,r+1}) \tag{2}$$

essendo $\hat{c}_i$ il rapporto fra larghezza e spessore della striscia di fasciame compresa fra i correnti $i-1$ e i.

Fissato un sistema di riferimento solidale ad una sezione dell'ordinata, si indichi con $v'_{i,r}$ il valore di $v_{i,r}$ corrispondente al moto di trascinamento, con $v''_{i,r}$ lo spostamento relativo, che si esprime come combinazione delle differenze di flusso nel fasciame dalle due parti dell'ordinata: si scrive

$$\begin{cases} v_{i,r} = v'_i(\xi_r, \eta_r, \vartheta_r) + v''_i(t_{1,r+1} - t_{1,r}, \cdots, t_{m,r+1} - t_{m,r}) \\ v'_i(\xi_r, \eta_r, \vartheta_r) = (x_i - x_{i-1})\xi_r + (y_i - y_{i-1})\eta_r + 2\mathfrak{A}_i \vartheta_r \end{cases} \tag{3}$$

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(2) Le quantità distinte col solo indice i non dipendono da r e viceversa. Le uguaglianze valgono per $i = 1, 2, \cdots, m$ e per i valori di r delle ordinate comprese nel tronco di dimensioni costanti.

essendo x_i, y_i le coordinate della traccia del corrente i riferite agli assi ortogonali x, y per un punto G della sezione del guscio, $\mathcal{A}_i$ l'area delimitata dall'arco di parete avente gli estremi sui correnti $i-1, i$ e dai segmenti che da G proiettano gli estremi stessi, ξ_r, η_r le componenti di spostamento su x e y, ϑ_r la rotazione intorno all'asse normale z.

3. Per un tronco di guscio di dimensioni uniformi esistono sistemi nulli di tensioni (tali cioè che su qualunque sezione le σ e le τ abbiano risultante e momento nullo) per i quali è

$$S_{i,r} = \chi S_{i,r-1} \qquad t_{i,r} = \chi t_{i,r-1}$$

essendo χ costante di modulo $|\chi| < 1$. Una tale configurazione di sforzi può essere rappresentata dalle espressioni [3]

$$\sigma_{i,r} = A \chi^r \varphi_i \qquad t_{i,r} = \frac{A}{a\chi}(1-\chi)\chi^r \bar{t}_i \tag{4}$$

essendo A un fattore costante. Le quantità $\varphi_i, \bar{t}_i$ risultano definite dal sistema

$$\sum_1^m \bar{t}_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_1^m \bar{t}_i (y_i - y_{i-1}) = \sum_1^m \bar{t}_i \mathcal{A}_i = 0 \tag{5}$$

$$F_i \varphi_i = \bar{t}_{i+1} - \bar{t}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{6}$$

$$\frac{6-\bar{\chi}}{6E}(\varphi_i - \varphi_{i-1}) - \frac{\chi \hat{c}_i \bar{t}_i}{Ga^2} = v_i'(C_1, C_2, C_3) + \frac{\bar{\chi}^2}{a^3} v_i''(\bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_m) \tag{7}$$

$$\bar{\chi} = 2 - \chi - \frac{1}{\chi}.$$

Le (5) e (6) sono dedotte da considerazioni di equilibrio: le (7) sono ottenute sostituendo le (3), (4) nelle (2). Le (5)-(7) costituiscono un sistema di $2m + 3$ equazioni lineari omogenee in altrettante incognite

$$C_1, C_2, C_3, \varphi_1, \bar{t}_1, \cdots, \varphi_m, \bar{t}_m.$$

Perchè il sistema ammetta soluzione non nulla deve essere nullo il determinante dei coefficienti. Questa condizione si traduce in una equazione di grado $2(m-3)$ in $\bar{\chi}$: a ciascuna radice (autovalore) corrisponde un sistema di valori [4] $C_1, \cdots, \bar{t}_m$ e quindi una configurazione di tensioni, rappresentabili mediante le (4), ehe chiamiamo tensioni caratteristiche.

Se $\bar{\sigma}$ è la tensione che in un punto di una ordinata si genera quando questa sulla linea di giunzione al fasciame sia soggetta ad una distribuzione

(3) Ved. nota alla pagina precedente.

(4) Le quantità $\chi, \bar{\chi}, \varphi, t$ possono essere complesse: si hanno allora sistemi coniugati.

tangenziale di carichi di intensità $a\bar{t}$, nel punto a questo corrispondente sulla ordinata r, sussistendo le (1), è

$$\sigma = \frac{A\chi}{a^2}\chi^r\bar{\sigma}. \tag{8}$$

4. Si consideri nel piano della sezione un sistema η nullo di flussi. Sia $t_{\eta,i}$ il flusso nella lamiera che collega i correnti $i-1, i$. Sia

$$F_i\varphi_{\eta,i} = t_{\eta,i+1} - t_{\eta,i} \tag{9}$$

e si indichino con σ_η le tensioni indotte nell'ordinata da una distribuzione di carichi tangenziali at_η. Combinando le (7), per le (5), (6), (9) si ha

$$\frac{6-\bar{\chi}}{6E}\sum_1^m F_i\varphi_i\varphi_{\eta,i} + \frac{\bar{\chi}}{Ga^2}\sum_1^m \hat{c}_i\bar{t}_i t_{\eta,i} + \frac{\bar{\chi}^2}{Ea^5}\int_\Omega \bar{\sigma}\sigma_\eta\, dV = 0 \tag{10}$$

quando si supponga che le ordinate siano costituite da elementi soggetti a tensioni σ secondo il loro asse e si indichi con $\int_\Omega dV$ l'integrale esteso al volume di questi.

Per il sistema η si possono dare $m-3$ configurazioni indipendenti: possono quindi aversi tante equazioni (10), equivalenti alle (7) dopo la eliminazione di C_1, C_2, C_3.

5. Per talune strutture i sistemi caratteristici hanno a due a due le medesime $\varphi, \bar{t}, \bar{\sigma}$: i sistemi di ciascuna coppia differiscono solo nei valori del parametro $\bar{\chi}$ i quali sono le radici della

$$\frac{6-\bar{\chi}}{6}\Phi + \frac{\bar{\chi}}{a^2}\Psi + \frac{\bar{\chi}^2}{a^4}\Omega = 0$$

ponendosi

$$E\Phi = \sum_1^m F_i\varphi_i^2 \qquad G\Psi = \sum_1^m \hat{c}_i\bar{t}_i^2 \qquad E\Omega = \frac{1}{a}\int_\Omega \bar{\sigma}^2\, dV.$$

In tal caso le tensioni caratteristiche sono ortogonali: risultano cioè nulli i valori delle sommatorie contenute nella (10) quando si assuma per η un sistema caratteristico differente da quello a cui competono le $\varphi, \bar{t}$.

Detti χ_I, χ_{II} i valori di χ propri dei due sistemi in coppia, si ha

$$\begin{cases} \chi_I + \chi_{II} = L' = \left(2 + \dfrac{\alpha^2}{2\mu^2} - \dfrac{\alpha^4}{12\mu^2}\right)\left(1 - \sqrt{1-l}\right) \\ \chi_I\chi_{II} = L = \dfrac{1-\sqrt{1-l}}{1+\sqrt{1-l}} \\ \dfrac{1}{l} = 1 + \dfrac{\alpha^2}{4\mu^2} + \dfrac{\alpha^4}{12\mu^2} + \dfrac{\alpha^2}{4\mu^2}\sqrt{4\mu^2 + \alpha^2 + \dfrac{\alpha^4}{12}} \\ \alpha^2 = a^2\Phi/\Psi \qquad \mu^2 = \Phi\Omega/\Psi^2. \end{cases} \tag{11}$$

Le condizioni espresse si verificano per il guscio simmetrico rispetto ad ogni piano per z contenente l'asse di un corrente o la linea di mezzeria della striscia fra due correnti: in particolare per il guscio a direttrice circolare con ordinate di rotazione. Sia R il raggio del cilindro, F_1 la sezione di ognuno degli m correnti, $\hat{c}_1$ il rapporto fra larghezza e spessore di ciascuna striscia di fasciame, F_c la sezione delle ordinate (fatta con piani per z), J_c il momento d'inerzia di questa rispetto all'asse principale parallelo a z, R_m la distanza di questi assi, $\bar{y}_i$ l'angolo compreso fra un piano di simmetria prefissato e il piano per z e per il corrente i: e infine

$$\delta = \bar{y}_i - \bar{y}_{i-1} \qquad y'_i = \frac{1}{2}(\bar{y}_i + \bar{y}_{i-1}) \qquad d = R - R_m .$$

Indicando con β un numero intero da 2 fino a $(m-1)/2$ per m dispari, fino a $m/2$ per m pari, le espressioni

$$(12) \qquad F_1 \varphi_i = \cos \beta \bar{y}_i \qquad \bar{t}_i = \frac{\operatorname{sen} \beta y'_i}{2 \operatorname{sen} \gamma/2} \qquad \gamma = \beta\delta$$

valgono a rappresentare le tensioni per una coppia di sistemi caratteristici: così le analoghe

$$(13) \qquad F_1 \varphi_i = \operatorname{sen} \beta \bar{y}_i \qquad \bar{t}_i = -\frac{\cos \beta y'_i}{2 \operatorname{sen} \gamma/2} .$$

Corrispondentemente a ciascun valore di β si hanno due coppie di sistemi caratteristici (fatta eccezione per $\beta = m/2$, per il quale le (12) o le (13) perdono significato). Per le due coppie risulta

$$\frac{\Psi}{\Phi} = \frac{E F_1 \hat{c}_1}{2 G (1 - \cos \gamma)} .$$

Inoltre, se $\bar{M}$ è il momento delle $\bar{\sigma}$ rispetto a z, $\bar{N}$ la loro risultante, in corrispondenza del corrente i si ha

$$\bar{M} = \frac{R^2 F_1 a \delta}{2 (1 - \cos \gamma)} \varphi_i \qquad \bar{N} = \frac{R F_1 a \operatorname{sen} \delta}{2 (\cos \delta - \cos \gamma)} \varphi_i$$

e infine

$$\frac{\Omega}{\Phi} = \frac{\delta^3}{12} \frac{2 + \cos \gamma}{(1 - \cos \gamma)^2} \frac{R^3 F_1 \dot{a} k_c}{F_c}$$

$$k_c = \frac{R}{R_m} + \frac{1}{R R_m} \left(\frac{F_c R_m^2}{J_c} - 1 \right) (d - R_m f')^2 + \frac{R_m f''}{R} \left(\frac{F_c R_m^2}{J_c} - 1 \right)$$

$$f' = \frac{6}{\delta^3} \frac{\operatorname{sen}\delta - \delta\cos\delta + (\delta - \operatorname{sen}\delta)\cos\gamma}{2 + \cos\gamma} \frac{1 - \cos\gamma}{\cos\delta - \cos\gamma} - 1$$

$$f'' = \frac{3}{\delta^3} \frac{\delta - \operatorname{sen}\delta\cos\delta + (\operatorname{sen}\delta - \delta\cos\delta)\cos\gamma}{2 + \cos\gamma} \left(\frac{1 - \cos\gamma}{\cos\delta - \cos\gamma}\right)^2 - (1 + f')^2$$

quando si supponga la sezione dell'ordinata costituita da due aree concentrate uguali.

Come caso particolare, questi risultati sono applicabili alla parete piana rinforzata da correnti uguali ed equidistanziati e orlata da due correnti che possano ritenersi rigidi.

6. Quando si trascuri la deformabilità dei correnti o del fasciame o delle ordinate, le tensioni caratteristiche risultano sempre ortogonali.

Interessa particolarmente il caso di ordinate rigide, per il quale la (7), con diverso significato delle C, si scrive

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{E} + \dfrac{\Lambda\,\hat{c}_i\,\bar{l}_i}{G} = v_i'(C_1, C_2, C_3) \\ \Lambda = \dfrac{6\,\overline{\chi}}{(6 - \overline{\chi})\,a^2}. \end{cases}$$

Imponendo che le equazioni (5), (6), (14) ammettano soluzione non nulla si giunge ad una equazione secolare in Λ. Si hanno in questo caso $m - 3$ sistemi caratteristici, tutti reali.

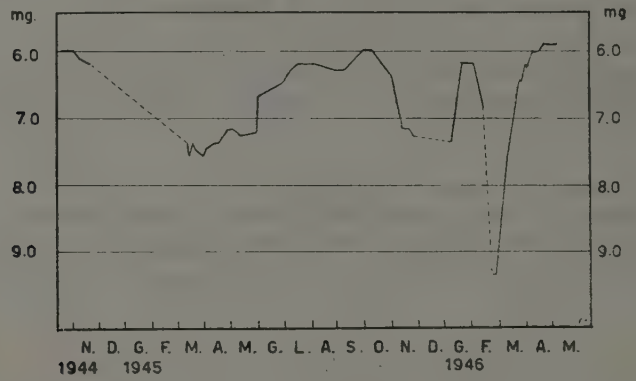
Astronomia. — *Osservazioni sulla R « Coronae Borealis »*. Nota di F. Succi, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

Da una serie di osservazioni da me eseguite sulla R *Coronae Bor.* dal 3 maggio 1943 al 7 maggio 1946, risulta che la variabile dopo un lungo periodo (maggio 1943, ottobre 1944) in cui si è mantenuta costantemente intorno alla 6ª grandezza [2], ha avuto un primo minimo di luminosità fra novembre 1944 e maggio 1945. Raggiunta in settembre-ottobre 1945 la luminosità usuale ($6^m,0$), in ottobre stesso è tornata a diminuire, e alla fine di novembre 1945 era ancora in diminuzione.

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) Come è noto, le variabili del tipo di R *Coronae Borealis* sono caratterizzate dal fatto di *trovarsi normalmente nello stato di massimo splendore* (Cfr. Armellini, *Astronomia Siderale*, vol. II, p. 308).

L'8 gennaio 1946, dopo la congiunzione eliaca durante la quale le osservazioni non sono evidentemente possibili, la R *Coronae* in aumento di splendore era della stessa grandezza alla quale l'avevo lasciata nel novembre, per cui è possibile supporre che durante il mese di dicembre 1945 sia scesa sino forse l'ottava grandezza.



Risalita rapidamente allo splendore pressochè normale (6,2) in gennaio 1946, in febbraio è di nuovo scesa altrettanto rapidamente, raggiungendo quasi la grandezza 9,5; grandezza mai osservata prima di allora.

Ritornata nella prima decade di aprile alla luminosità normale, vi è tuttora rimasta. Nella seguente tabella riporto dettagliatamente i dati delle osservazioni da me eseguite col metodo di confronto di Pickering, valendomi degli strumenti indicati:

Stelle di confronto usate.

		mg. (Harvard)
	π *Coronae* B.	5.60
	Harvard Rev. 5813	6.52
f:	B. D. 28° 2475	7.43
g:	B. D. 29° 2730	7.80
h:	B. D. 28° 2969	7.95
	B. D. 28° 2718	9.33
	B. D. 28° 2717	9.56
p:	B. D. 28° 2473	9.75

TABELLA.

Data	T. U.	mg.	Note	Data	T. U.	mg.	Note
943 maggio	3,85	6.1		1944 luglio	10,89	6.0-6.1	
	10,84	6.0			17,88	6.1	
	12,88	6.0			23,88	6.0	
	13,88	6.1			26,89	6.0	
giugno	20,87	6.1		agosto	4,87	6.0	
luglio	4,86	6.1			6,83	6.0	
	12,86	6.1			12,91	6.1	
	21,88	6.1			13,91	6.1	
agosto	9,86	6.1	(1)		16,84	6.0	
	18,85	6.0-6.1	(1)		19,91	6.1	
settembre	1,81	6.0			20,88	6.0	
	15,79	6.0	(1)		25,82	6.1	(1)
ottobre	8,77	6.1	(1)		27,90	6.0	(1)
	21,79	6.0		settembre	3,80	6.0	(1)
novembre	1,74	6.0			9,89	5.9	
	21,72	6.0	(5)		13,83	(6.0)	
944 gennaio	18,25	5.9	(1)		17,81	6.1	
febbraio	17,96	6.0			21,79	6.1	
marzo	12,90	5.9		ottobre	7,77	6.1	
	18,94	5.9			20,79	6.0	(5)
aprile	15,89	5.9		novembre	4,69	6.0	(4)
	20,85	5.9			10,71	6.0-6.1	
	28,88	5.8	(1)		18,72	6.2	(4)
maggio	11,87	5.8		1945 marzo	13,92	7.4	(7), (9)
	12,88	5.8			14,92	(7.6)	(7), (9)
	18,85	5.8-5.9			15,92	7.4	(8)
	21,92	6.0			17,90	7.4	(8)
	26,95	5.9	(6)		18,91	7.4	(8)
giugno	14,85	6.0			19,93	7.5	(8)
	22,04	6.0			30,00	7.6	(10), (9), (3), (11)
	30,90	6.0	(1)	aprile	2,91	7.5	(10)

Segue TABELLA.

Data	T. U.	mg.	Note	Data	T. U.	mg.	Note
1945 aprile	4,89	7.5	(10)	1946 gennaio	20,19	6.2	(7), (3), (11)
	13,90	(7.4)	(10)	febbraio	2,20	6.2	(7)
	16,89	7.4	(10), (1)		22,01	< 7.0	(1), (7), (8)
	25,8	7.2	(10), (3)		24,99	9.4	(11), (10), (13)
	29,84	7.2	(10)		26,98	9.4	(10)
maggio	2,84	7.2	(7)	marzo	11,95	7.6-7.7	(2), (10)
	12,85	7.3	(7)		16,93	7.2	(3), (10)
	31,81	(7.2-7.3)	(10), (12)		23,93	6.5	(7), (8), (11)
giugno	1,86	6.7	(7), (10)		25,88	6.5	(7), (8)
	29,92	6.5	(7)		27,90	6.4	(7)
luglio	9,90	6.3	(7)		28,94	6.4	(7)
agosto	3,88	(6.2)	(7)		30,90	6.3	(7)
	29,87	6.3	(7)	aprile	2,89	6.2-6.3	(7)
settembre	7,83	6.3	(7)		3,86	(6.3)	(7)
	30,80	6.0	(7)		7,88	6.1	(7), (1)
ottobre	8,81	6.0	(7)		9,86	6.0	(7), (2)
novembre	1,74	6.4	(7)		12,86	6.0	(7), (2)
	6,73	< 6.5	(7), (4)		19,87	6.0	(7)
	13,74	7.2	(8), (10), (2)		22,89	5.9	(7)
	18.72	7.2	(10), (3), (4)		30,88	5.9	(7)
	25,71	7.3	(10), (4)	maggio	7,87	5 9	(7), (1)
1946 gennaio	8,20	7.4	(10), (7)				

(1): Luna. (2): forte luce lunare. (3): fortissima luce lunare. (4): astro basso. (5): astro molto basso. (6): posizi di osservazione scomoda. (7): binocolo galileiano, 3 ingr. (8): binocolo prismatico, 8 ingr. (9): cannocchiale « Salmoiragi Ø = 67 mm., 50 ingr. (10): cannocchiale id. id., 15 ingr. (11): foschia. (12): forte luce crepuscolare. (13): cannocchiale id., 100 ingr.

I valori tra parentesi sono incerti.

Dal 3 maggio 1943 al 18 novembre 1944, le osservazioni sono state eseguite con il binocolo (7).

Con questi dati ho ottenuto la curva di luce disegnata nell'annessa figura.

Astronomia. — *Sull'effetto antieliotermico delle superficie curve.* Nota di G. Vinaccia, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

Come tutti sanno, la zona intertropicale, così estesa e così ricca di beni da cogliere, potrebbe ospitare e far vivere degnamente molti più uomini che non vi vivano, contribuendo a risolvere il grave problema demografico di molte nazioni, se il clima fosse meno inospitale.

Sono alte temperature ambientali che l'uomo non sopporta senza riduzione della sua capacità di lavoro e pregiudizio della sua salute.

L'uomo può trovare nella dimora una buona difesa dall'inclemenza climatica, specie se questa sarà sottratta agli effetti termici del soleggiamento.

La difesa eliotermica di una costruzione si realizza ordinariamente a mezzo di acconci spessori murari e con l'impiego di materiali isolanti.

Il primo mezzo non è sempre conveniente perchè una considerevole massa muraria può funzionare anche da accumulatore di calore, che riverbera inopportunamente nelle ore fresche notturne.

Il secondo non è economico e spesso non duraturo.

Sono stati usati sin dall'antichità materiali e colori riverberanti la radiazione solare, ma pur riconoscendo i pregi indiscussi di tali mezzi, è opportuno osservare la necessità di una continua manutezione per essere tenuti in efficienza (ad esempio rimbiancatura con latte di calce, rilucidatura di superfici metalliche brillanti ecc.)

Invece occorre realizzare una riduzione considerevole degli effetti termici del soleggiamento, in *modo permanente ed economico.*

In merito a tali ricerche, nate per risolvere economicamente il nostro problema coloniale, mi pregio di dare notizia all'Accademia di alcuni miei studi in proposito.

Sin dal 1930 iniziai uno studio sistematico del soleggiamento dei fabbricati per accertare oltre che la durata del soleggiamento e la sua penetrazione all'interno dei locali, la quantità di calore ricevuto alle varie latitudini dalle superfici variamente declinate ed inclinate.

In un primo tempo queste mie ricerche teoriche ebbero per obbiettivo le superfici piane poi quelle curve.

Allo scopo di facilitare i necessari calcoli di posizione del Sole, ideai un calcolatore solare che dà per lettura istantanea le coordinate solari per qualsiasi latitudine e momento dell'anno, che venne poi premiato dal Consiglio Nazionale delle Ricerche [2].

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) *Il calcolatore solare.* « L'Ingegnere ».

Costruii pure abachi per il calcolo dell'assorbimento atmosferico, della radiazione solare ricevuta dalle superfici piane supponendole corpo nero, vitree, ecc.

Da questo studio, così condotto, emerse la possibilità di ridurre il calore da soleggiamento mediante opportune forme convenientemente orientate.

Nei miei studi sull'insolazione edile intertropicale [3] ho mostrato sulla base di diagrammi termici costruiti all'uopo come in quelle regioni le pareti verticali siano meno intensamente insolate delle coperture orizzontali, perciò come sia consigliabile sotto questo aspetto, sviluppare in altezza le costruzioni più che diluirle nel piano [4], come d'altronde si pratica ad esempio nello Yemen [5].

Qui dò sommaria notizia della reale diminuzione dell'intensità dell'insolazione mediante l'adozione di superfici curve [6] segnatamente per le coperture, sistema d'altronde già largamente usato sin dall'antichità in queste terre supersolatie come pure nelle costruzioni degli indigeni [7,8,9].

Infatti una prerogativa delle superfici curve è quella di presentare per tutta la durata del soleggiamento solo un punto o una retta ortogonale alla direzione della radiazione solare e perciò ricevente l'intensità massima.

Ad esempio, quando il sole è allo zenit, un semicilindro ad asse orizzontale (copertura con volta a botte) presenta il piano tangente sulla sola generatrice di colmo ortogonale ai raggi solari, mentre i piani tangenti sulle altre generatrici si presentano sempre più inclinati sino a formare un angolo nullo con i raggi stessi. L'intensità della radiazione solare ricevuta dal semicilindro in base alla nota legge del coseno varierà da 1 a 0, la quantità di flusso ricevuto unitariamente dalla parete cilindrica in confronto di quello ricevuto dalla sua sezione orizzontale è di 640/1000, mentre l'irradiazione unitaria è la stessa.

Nel detto caso del soleggiamento zenitale di una semisfera solo un elemento di superficie si presenta ortogonalmente alla radiazione solare;

(3) *La casa coloniale e la difesa termica.* « La Casa », 1937; *La casa coloniale.* « Italia d'oltremare » 1947; *Per la razionalizzazione dell'edilizia nell'Africa Orientale. Gli effetti termici dell'insolazione all'equatore.* « L'ingegnere » 1940; *Note di architettura subtropicale. La casa col patio.* « L'Ingegnere » 1941.

(4) *Il corso del sole in urbanistica ed edilizia,* p. 195, Hoepli Editore, 1939.

(5) *Il corso del sole* ecc., p. 196.

(6) *Il corso del sole* ecc., p. 177; *Direttive solari ed eoliche per la razionalizzazione dell'urbanistica in A. I.* « Annali Ministero A. I. », 1942; *Il fattore solare nell'architettura e nell'urbanistica intertropicale.* « L'Ingegnere », 1944; *Per la città di domani,* vol. I, pp. 50–51 Palombi Editore, 1946.

(7) *Problemi di edilizia coloniale.* « Italia d'oltremare », 1937. *Il corso del sole,* ecc., p. 180; *Per la città di domani,* vol. I, p. 59.

(8) *Vers une nouvelle architetture tropicale.* « Le maître d'œuvre » avril 1946.

(9) *Per la città di domani,* vol. I, p. 48; *I problemi della colonizzazione. Le abitazioni degli indigeni in Africa Orientale.* « Rassegna sociale dell'Africa Italiana ».

l'intensità media è del 500/1000 di quella ricevuta dalla sua sezione orizzontale.

Inoltre, tanto nel cilindro come nella sfera l'obliquità della radiazione solare ne favorisce la riflessione, specie se la superficie si presenta per la natura del materiale, colore, levigatezza adatta allo scopo.

Lo studio teorico dei molteplici effetti del soleggiamento delle superfici curve (riflessione, aumento della temperatura, suo attraversamento e propagazione all'interno) può essere interessante, ma richiede il conforto dell'esperienza.

Per tal motivo, nell'estate del 1944 ho condotto una serie di esperienze, misurando le temperature interne di vari solidi diversamente foggiati ed orientati.

Sono state forzatamente esperienze grossolane, ma convincenti per la costanza dei risultati.

Ad esempio, sono state misurate le temperature interne di due cubi di uguale volume uno coperto con una lastra piana di vetro e l'altro con una semisfera di vetro di uguale spessore. Questi due cubi sono stati tenuti costantemente ortogonali alla direzione della radiazione solare.

La differenza di temperatura tra quello a copertura piana e l'altro semisferico è stato sino a circa 20°C, mentre la differenza tra la temperatura ambientale all'ombra e quella interna del cubo con copertura piana è stata di circa 30°C. Cioè, la temperatura interna del cubo coperto a cupola è salita rispetto a quella ambientale all'ombra di soli 10°C circa, mentre quella del cubo con copertura piana è salita di 30°C.

Ciò starebbe ad indicare una differenza di calorie trasmesse, superiore a quelle risultanti dal calcolo e potrebbe essere spiegato come conseguenza del movimento dell'aria che lambisce la sfera all'esterno in conseguenza della diversa intensità del soleggiamento paretale.

Geofisica. — *Onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso, stratificato.* Nota di P. Caloi, presentata [1] dal Socio F. Vercelli.

In una Nota precedente abbiamo considerato la propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso, indefinito. Consideriamo ora il caso di due strati solidi sovrapposti, con densità e coefficienti elastici e firmo-viscosi costanti.

Riferiamo lo strato superficiale, poggiante sopra un mezzo solido semi-infinito, ad un sistema di assi $x\zeta$, con l'asse x giacente sulla superficie di separazione dei due strati, nella direzione di propagazione delle onde, e l'asse ζ diretto normalmente verso l'alto.

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

Siano λ_1, μ_1, ρ_1 ; λ', μ' le costanti elastiche, la densità e le costanti firmo-viscose dello strato superficiale di spessore d, e λ_2, μ_2, ρ_2 ; λ'', μ'' le analoghe costanti proprie del mezzo sottostante.

Si sa che, nel caso bidimensionale, le componenti dello spostamento, determinato in un mezzo sollecitato da onde spaziali, possono essere espresse dalle relazioni

$$(1) \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

dove ψ è funzione caratteristica per le onde longitudinali e Φ per quelle trasversali. Le equazioni del moto nello strato superficiale sono pertanto

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = \left\{ \dfrac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1} + \dfrac{\lambda' + 2\mu'}{\rho_1} \dfrac{\partial}{\partial t} \right\} \Delta_2 \psi_1 , \\ \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\rho_1} \left(\mu_1 + \mu' \dfrac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_2 \Phi_1 . \end{cases}$$

Per lo strato superficiale, facciamo le posizioni

$$(3) \qquad \begin{aligned} \psi_1 &= \{ C \sinh r_1 z + D \cosh r_1 z \} e^{i(pt - fx)} , \\ \Phi_1 &= \{ E \sinh s_1 z + F \cosh s_1 z \} e^{i(pt - fx)} . \end{aligned}$$

Dalle (2), tenuto conto delle (3), si ha

$$p^2 = (f^2 - r_1^2) \frac{1}{\rho_1} [\lambda_1 + 2\mu_1 + ip(\lambda' + 2\mu')],$$

$$p^2 = (f^2 - s_1^2) \frac{1}{\rho_1} [\mu_1 + ip\mu'] .$$

Da cui, fatto

$$(4) \qquad h_1^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda_1 + 2\mu_1 + ip(\lambda' + 2\mu')} \quad , \quad k_1^2 = \frac{\rho p^2}{\mu_1 + ip\mu'} ,$$

consegue

$$(5) \qquad r_1^2 = f^2 - h_1^2 \quad , \quad s_1^2 = f^2 - k_1^2 .$$

Per le (1) si ha ancora

$$(6) \qquad \begin{cases} u_1 = \{ -if(C \sinh r_1 z + D \cosh r_1 z) - s_1 (E \cosh s_1 z + F \sinh s_1 z) \} e^{i(pt - fx)} \\ w_1 = \{ r_1 (C \cosh r_1 z + D \sinh r_1 z) - if (E \sinh s_1 z + F \cosh s_1 z) \} e^{i(pt - fx)} . \end{cases}$$

Relativamente al secondo mezzo, facciamo le posizioni

$$(7) \qquad \psi_2 = A e^{r_2 z} \cdot e^{i(pt - fx)} \quad , \quad \Phi_2 = B e^{s_2 z} \cdot e^{i(pt - fx)} .$$

Si deduce allora, tenuto conto dell'equazioni del moto, analoghe alle (2),

$$(8) \qquad r_2^2 = f^2 - h_2^2 \quad , \quad s_2^2 = f^2 - k_2^2 ,$$

dove

$$h_2^2 = \frac{\rho_2 p^2}{\lambda_2 + 2\mu_2 + ip(\lambda'' + 2\mu'')} \quad , \quad k_2^2 = \frac{\rho_2 p^2}{\mu_2 + ip\mu''} .$$

È inoltre

$$(9) \qquad \begin{cases} u_2 = -\{if A e^{r_2 z} + s_2 B e^{s_2 z}\} e^{i(pt - fx)} \\ w_2 = \{r_2 A e^{r_2 z} - if B e^{s_2 z}\} e^{i(pt - fx)}. \end{cases}$$

Le condizioni da soddisfare sulla superficie di discontinuità ($z = 0$) e sulla superficie esterna ($z = d$), sono: sulla superficie di discontinuità (uguaglianza degli spostamenti nei due strati e delle tensioni normale e tangenziale N_3, T_2 rispettivamente)

$$(I)_0 \qquad \begin{cases} u_1 = u_2 \quad , \quad w_1 = w_2 \\ \lambda_1 \vartheta_1 + 2\mu_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda' \vartheta_1 + 2\mu' \dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right) = \\ \qquad = \lambda_2 \vartheta_2 + 2\mu_2 \dfrac{\partial w_2}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda'' \vartheta_2 + 2\mu'' \dfrac{\partial w_2}{\partial z}\right) \\ \mu_1 \left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \mu' \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) = \\ \qquad = \mu_2 \left(\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \mu'' \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right), \end{cases}$$

e, sulla superficie esterna (per l'annullarsi delle tensioni normale e tangenziale)

$$(I)_d \qquad \begin{cases} \lambda_1 \vartheta_1 + 2\mu_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda' \vartheta_1 + 2\mu' \dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right) = 0 \\ \mu_1 \left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \mu' \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) = 0 , \end{cases}$$

dove le dilatazioni cubiche assumono l'espressione

$$\vartheta_1 = \Delta_2 \psi_1 \quad , \quad \vartheta_2 = \Delta_2 \psi_2 ,$$

essendo Δ_2 l'operatore di Laplace.

Ricordando che

$$(\Delta_2 + h_1^2)\psi_1 = 0 \quad , \quad (\Delta_2 + k_1^2)\Phi_1 = 0 ,$$

si ottiene

$$(\alpha) \qquad (N_3)_1 = (\mu_1 + ip\mu') \left\{ -k_1^2 \psi_1 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}\right)\right\}$$

$$(\beta) \qquad (T_2)_1 = (\mu_1 + ip\mu') \left\{ 2\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} - k_1^2 \Phi_1 - 2\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}\right\} .$$

Intanto, le prime delle $(I)_0$ dànno, sulla superficie di discontinuità,

$$(II) \qquad \begin{cases} -if \cdot D - s_1 \cdot E = -if A - s_2 \cdot B \\ r_1 \cdot C - if \cdot F = r_2 A - if \cdot B . \end{cases}$$

Dalla (α), tenendo presenti le espressioni di ψ_1, Φ_1, e prescindendo dal fattore $e^{i(pt-fx)}$,

$$(N_3)_1 = \rho_1 \frac{p^2}{k_1^2}(2f^2 - k_1^2)\cdot D - 2i\rho_1 \frac{p^2}{k_1^2} s_1 f\cdot E$$

e, analogamente,

$$(N_3)_2 = \rho_2 \frac{p^2}{k_2^2}(2f^2 - k_2^2)\cdot A - 2i\rho_2 \frac{p^2}{k_2^2} s_1 f\cdot B.$$

Per cui, dalla terza delle $(I)_0$,

$$(III) \qquad -(2f^2 - k_2^2)\cdot A + 2is_2 f\cdot B +$$

$$+ \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\{2f^2 - k_1^2\}\cdot D - 2i\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2} s_1 f\cdot E = 0.$$

Dalla (β), a meno del solito fattore, si ottiene per la superficie di discontinuità,

$$(T_3)_1 = \frac{p^2\rho_1}{k_1^2}\{-2ifr_1 C - (2f^2 - k_1^2)\cdot F\}$$

$$(T_3)_2 = \frac{p^2\rho_2}{k_2^2}\{-2ifr_2 A - (2f^2 - k_2^2)\cdot B\}.$$

Per la quarta delle $(I)_0$ consegue

$$(IV) \quad 2ifr_2\cdot A + (2f^2 - k_2^2)\cdot B - 2i\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2} fr_1\cdot C - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}(2f^2 - k_1^2)\cdot F = 0.$$

Sempre ricordando le (α), (β) e tenuto presente che

$$2s_1^2 + k_1^2 = 2f^2 - k_1^2,$$

per le $(I)_d$ si ha ancora, sulla superficie esterna,

$$(V) \qquad (2f^2 - k_1^2)\sinh r_1 d\cdot C + (2f^2 - k_1^2)\cosh r_1 d\cdot D -$$
$$- 2ifs_1 \cosh s_1 d\cdot E - 2ifs_1 \sinh s_1 d\cdot F = 0$$

$$(VI) \qquad -2ifr_1 \cosh r_1 d\cdot C - 2ifr_1 \sinh r_1 d\cdot D -$$
$$-(2f^2 - k_1^2)\sinh s_1 d\cdot E - (2f^2 - k_1^2)\cosh s_1 d\cdot F = 0.$$

Le due equazioni (II), le (III), (IV), (V) e (VI) costituiscono un sistema di sei equazioni lineari nelle sei incognite A, B, C, D, E, F. L'eliminazione di dette incognite richiede l'annullarsi del determinante dei coefficienti delle medesime. Si ha:

$$
(10)\qquad
\begin{vmatrix}
+if & +s_2 & 0 & -if \\
-r_2 & +if & r_1 & 0 \\
-(2f^2-k_2^2) & +2ifs_2 & 0 & \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}(2f^2-k_1^2) \\
2ifr_2 & 2f^2-k_2^2 & -2i\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}fr_1 & 0 \\
0 & 0 & (2f^2-k_1^2)\sinh r_1 d & (2f^2-k_1^2)\cosh r_1 d \\
0 & 0 & -2ifr_1\cosh r_1 d & -2ifr_1\sinh r_1 d
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
-s_1 & 0 \\
0 & -if \\
-2i\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}s_1 f & 0 \\
0 & -\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}(2f^2-k_1^2) \\
-2ifs_1\cosh s_1 d & -2ifs_1\sinh s_1 d \\
-(2f^2-k_1^2)\sinh s_1 d & -(2f^2-k_1^2)\cosh s_1 d
\end{vmatrix} = 0.
$$

L'equazione determinante (10) consente la determinazione della velocità di propagazione delle onde di Rayleigh nello strato superficiale.

Nell'ipotesi $\rho_1 \sim \rho_2$, la (10) può scriversi

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & -8\frac{f^2}{k_1^2}\cdot\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)\left\{2\frac{f^2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)\left(\frac{r_2 s_2}{k_1^2}-\frac{f^2}{k_1^2}\right)+\right. \\
& \left.+\frac{k_2^2}{k_1^2}\left(\frac{r_2 s_2}{k_1^2}+\frac{f^2}{k_1^2}\right)\right\}+\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\cdot\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\cosh r_1 d\cdot\cosh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\sinh r_1 d\cdot\sinh s_1 d\right\}\cdot \\
& \cdot\left\{-4\frac{f^6}{k_1^6}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)^2+\frac{r_2 s_2}{k_1^2}\left[4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)+4\frac{f^4}{k_1^4}\left(1-2\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)+\frac{k_2^4}{k_1^4}\left(1+4\frac{f^4}{k_1^4}\right)\right]\right\}+ \\
& +\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\sinh r_1 d\cdot\sinh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\cosh r_1 d\cdot\cosh s_1 d\right\}\cdot \\
& \cdot\left\{-4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 r_2}{k_1^2}\frac{s_1 s_2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)^2+\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\left[4\frac{f^4}{k_1^4}\left(1-2\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)-4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)+\frac{k_2^4}{k_1^4}\left(1+4\frac{f^4}{k_1^4}\right)\right]\right\}+ \\
& +\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\sinh r_1 d\cdot\cosh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\cosh r_1 d\cdot\sinh s_1 d\right\}\frac{r_1 s_2}{k_1^2}\frac{k_2^4}{k_1^4}+ \\
& +\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\cosh r_1 d\cdot\sinh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\sinh r_1 d\cdot\cosh s_1 d\right\}\frac{r_2 s_1}{k_1^2}\frac{k_2^4}{k^4}=0.
\end{aligned}
$$

Nella (11) $\frac{2\pi}{f}$ è la lunghezza d'onda (L) e $p = \frac{2\pi}{T}$, essendo T il periodo. È inoltre

$$\frac{s_1}{k_1} = \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2} - 1} \quad ; \quad s_1 d = \frac{2\pi}{L} d \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{f^2}},$$

$$\frac{r_1}{k_1} = \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2} - \frac{b_1^2}{k_1^2}} \quad ; \quad r_1 d = 2\pi \frac{d}{L} \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{k_1^2} \frac{k_1^2}{f^2}},$$

$$\frac{s_2}{k_1} = \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1^2}} \quad ; \quad \frac{r_2}{k_1} = \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2} - \frac{b_2^2}{k_1^2}}.$$

La (11) va risolta rispetto a k_1/f, che esprime il rapporto fra la velocità delle onde superficiali di Rayleigh e la velocità delle onde trasversali, proprie del mezzo [2].

(2) A questo scopo, devono essere assegnati valori ai rapporti $\frac{b_1^2}{k_1^2}, \frac{b_2^2}{k_1^2}, \frac{k_2^2}{k_1^2}$. Scegliendo per la costante di Poisson il valore 0,25 e osservando che, in tal caso, $\lambda' = -\frac{2}{3}\mu'$, si ha

$$(\gamma) \qquad \frac{b_1^2}{k_1^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{\frac{9}{4p^2}\left(\frac{\mu_1}{\mu'}\right)^2 + 1}} + ip \frac{15 \frac{\mu_1}{\mu'}}{81\left(\frac{\mu_1}{\mu'}\right)^2 + 16p^2}.$$

È ancora

$$\frac{b_2^2}{k_1^2} = \frac{27\frac{\mu_1}{\mu_2} + 12p^2 \frac{\mu'}{\mu_2}\frac{\mu''}{\mu_2}}{81 + 16p^2\left(\frac{\mu''}{\mu_2}\right)^2} + ip \frac{27\frac{\mu'}{\mu_2} - 12\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu''}{\mu_2}}{81 + 16p^2\left(\frac{\mu''}{\mu_2}\right)^2} \quad ;$$

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\mu_1\mu_2 + p^2\mu'\mu''}{\mu_2^2 + p^2\mu''^2} + ip \frac{\frac{\mu'}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu''}{\mu_2}}{1 + p^2\left(\frac{\mu''}{\mu_2}\right)^2}$$

e se si suppone (come si verifica con buona approssimazione per la crosta terrestre), $\mu' \sim \mu''$,

$$(\delta) \qquad \frac{b_2^2}{k_1^2} = \frac{27\frac{\mu_1}{\mu_2} + 12p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2}{81 + 16p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2} + ip\frac{\mu'}{\mu^2} \frac{27 - 12\frac{\mu_1}{\mu_2}}{81 + 16p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2} \quad ;$$

$$(\varepsilon) \qquad \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2}{1 + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2} + ip\frac{\mu'}{\mu_2} \frac{1 - \frac{\mu'}{\mu_2}}{1 + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)}.$$

La (11) va risolta, tenendo conto delle (γ), (δ), (ε), assegnando valori (da variarsi opportunamente) ai rapporti d/L, p, μ'/μ_2, μ'/μ_1, μ_1/μ_2. Una soluzione in questo senso è stata già da tempo proposta all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Determiniamo ora l'espressione dal rapporto fra l'ampiezza del moto orizzontale e quella del moto verticale.

Tenendo conto della (V), si ha dalla prima delle (6) – a meno del fattore esponenziale $e^{i(pt-fx)}$ –, sulla superficie esterna

$$(u_1)_{z=d} = \frac{k_1^2 s_1}{2f^2 - k_1^2} (\mathrm{E} \cosh s_1 d + \mathrm{F} \sinh s_1 d).$$

Dalla (VI), in base alla seconda delle (6), l'ampiezza del moto verticale sulla superficie esterna, a meno del solito fattore, assume l'espressione,

$$(w_1)_{z=d} = -i \frac{k_1^2}{2f} (\mathrm{E} \sinh s_1 d + \mathrm{F} \cosh s_1 d).$$

Consegue per le (5),

$$\left(\frac{u_1}{w_1}\right)_{z=d} = i \frac{\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{f^2}}}{1 - \frac{k_1^2}{2f^2}} \frac{1 + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}} \tanh s_1 d}{\tanh s_1 d + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}}. \tag{12}$$

Resta da determinare l'espressione di F/E.

Dalla prima delle (II) moltiplicate per $-\frac{i}{f} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{k_2^2}{k_1^2} (2f^2 - k_1^2)$ e sommata alla (III), osservando che, sulla superficie di discontinuità, per $\rho_1 \sim \rho_2$,

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\mu_1 + ip\mu'}{\mu_2 + ip\mu''},$$

fatte le posizioni

$$\chi = \frac{2f^2}{k_2^2} \left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) \quad , \quad \psi = 1 + \chi, \tag{13}$$

si ottiene

$$\frac{s_1 \mathrm{E}}{f} = i\chi \mathrm{A} + \frac{s_2}{f} \psi \mathrm{B}. \tag{14}$$

Sempre sulla superficie di discontinuità, dalla seconda delle (II) moltiplicata per $2i \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{k_2^2}{k_1^2} \cdot f$ e sommata alla (IV), posto

$$\varphi = 2\left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) \quad , \quad \zeta = 1 - \frac{2f^2}{k_2^2}\left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) = 1 - \chi, \tag{15}$$

si deduce

$$-\mathrm{F} = i \frac{fr_2}{k_2^2} \varphi \mathrm{A} - \zeta \mathrm{B}. \tag{16}$$

La prima delle (II) moltiplicata per $-2if \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{k_2^2}{k_1^2}$ e sommata alla (III), dà, sulla superficie di discontinuità,

$$\mathrm{D} = \zeta \mathrm{A} + i \frac{fs_2}{k_2^2} \varphi \mathrm{B}, \tag{17}$$

mentre la seconda delle (II), moltiplicata per $\frac{i}{f}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{k_2^2}{k_1^2}(2f^2-k_1^2)$ e sommata alla (IV), conduce, sulla superficie di discontinuità, alla relazione

$$(18)\qquad \frac{r_1}{f}\,\mathrm{C}=-\frac{r_2}{f}\,\psi\cdot\mathrm{A}-i\chi\cdot\mathrm{B}.$$

Dalla (V), tenendo conto delle (14), (16), (17) e (18), consegue

$$\left\{\left(\frac{k_1^2}{f^2}-2\right)\left(\zeta\cosh r_1 d+\frac{r_2}{r_1}\,\psi\sinh r_1 d\right)-2\left(-\frac{r_2 s_1}{k_2^2}\,\varphi\sinh s_1 d+\chi\cosh s_1 d\right)\right\}\cdot\mathrm{A}+$$

$$+i\left\{\left(\frac{k_1^2}{f^2}-2\right)\left(\frac{fs_2}{k_2^2}\,\varphi\cosh r_1 d-\frac{f}{r_1}\,\chi\sinh r_1 d\right)+2\left(\frac{s_1}{f}\,\zeta\sinh s_1 d+\frac{s_2}{f}\,\psi\cosh s_1 d\right)\right\}\cdot\mathrm{B}=0.$$

Posta la prima parentesi $\{\cdots\}=\xi$ e la seconda $\{\cdots\}=\eta$, avremo

$$\xi\mathrm{A}+i\eta\mathrm{B}=0,$$

da cui

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=i\frac{\xi}{\eta}.$$

Consegue

$$(19)\qquad \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}=\frac{-i\frac{fr_2}{k_2^2}\varphi\mathrm{A}+\zeta\mathrm{B}}{i\frac{f\chi}{s_1}\mathrm{A}+\frac{s_2}{s_1}\psi\mathrm{B}}=\frac{s_1}{f}\,\frac{-\frac{fr_2}{k_2^2}\varphi+\zeta\frac{\xi}{\eta}}{\chi+\frac{s_2}{f}\psi\frac{\xi}{\eta}},$$

dove χ,ψ,φ,ζ hanno le espressioni date dalle (13), (15).

Determinati, mediante le (11), i valori della velocità, è quindi possibile ottenere anche quelli del rapporto fra l'ampiezza dello spostamento orizzontale e quella dello spostamento verticale.

Quando $k_1^2>f^2>h_1^2$ le soluzioni soggette alle condizioni superficiali si ottengono sostituendo $\cosh s_1\zeta$ e $\sinh s_1\zeta$ con $\cos s_1\zeta$ e $\sin s_1\zeta$; e quando $h_1^2>f^2$, similmente $\cos r_1\zeta$ e $\sin r_1\zeta$ vanno messi in luogo di $\cosh r_1\zeta$ e $\sinh r_1\zeta$. In questi casi

$$(12^{bis})\qquad \left(\frac{u_1}{w_1}\right)_{z=d}=i\,\frac{\sqrt{\frac{k_1^2}{f^2}-1}}{1-\frac{k_1^2}{2f^2}}\,\frac{1-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\tan s_1 d}{\tan s_1 d+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}},$$

dove l'espressione di F/E è formalmente identica alla (19).

Il valore di u/w non è quindi costante, come si verifica nella classica teoria di Rayleigh, ma è funzione della lunghezza d'onda (come del resto si è già trovato nel caso del mezzo indefinito).

È facile provare che le onde in questione sono effettivamente onde di Rayleigh.

Se lo spessore d dello strato superficiale tende a diventare grande oltre ogni limite, $\tanh s_1 d$ tende all'unità e la (12) diventa

$$\left(\frac{u_1}{w_1}\right)_{z=d} = i\,\frac{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{f^2}}}{1-\frac{k_1^2}{2f^2}}; \tag{20}$$

ma poichè $\frac{k_1^2}{f^2} = V_R^2\,\frac{1}{v_2^2}$ – dove V_R esprime la velocità delle onde di Rayleigh e v_2 la velocità delle onde trasversali proprie del mezzo – la (20) coincide, in valore assoluto, con l'espressione che il rapporto u/w assume nella teoria di Rayleigh, per onde propagantisi alla superficie di un mezzo elastico, semi-infinito, non stratificato.

Osserviamo ancora che, per grossi valori degli argomenti $s_1 d$, $r_1 d$ le funzioni iperboliche tendono ad uguagliarsi. Dalle (V), (VI) si ha allora

$$(2f^2 - k_1^2)^2 = 4 f^2 r_1 s_1, \tag{21}$$

relazione che consente di determinare k_1/f, e quindi V_R. Infatti, poichè, come si deduce dalle (5),

$$\frac{r_1^2 s_1^2}{f^4} = \left[1-\left(\frac{V_R}{v_1}\right)^2\right]\cdot\left[1-\left(\frac{V_R}{v_2}\right)^2\right],$$

dove v_1 è la velocità delle onde longitudinali spaziali, dalla (21) viene

$$\left(2-\frac{V_R^2}{v_2^2}\right)^4 = 16\left(1-\frac{V_R^2}{v_1^2}\right)\left(1-\frac{V_R^2}{v_2^2}\right),$$

che è l'equazione classica delle onde di Rayleigh.

Fisica (Fisica-Matematica). — *Sulla elaborazione dei dati della fotoelasticità per la ricerca degli sforzi principali.* Nota di L. Sobrero, presentata[1] dal Socio M. Picone.

1. Argomento della ricerca. – È ben noto che la distribuzione di sforzo di un sistema elastico piano risulta completamente determinata appena si conoscano, per ogni punto del sistema, gli sforzi principali σ_1 e σ_2 e le rispettive loro direzioni (che diremo brevemente 1 e 2). Si sa, inoltre, che queste ultime sono ortogonali fra loro, cosicchè, per individuarle, basta conoscere l'angolo φ che una di esse (quella indicata con 1) forma con una direzione fissa di riferimento (per esempio l'asse x).

La fotoelasticità permette di determinare, sperimentalmente, per ogni punto del sistema piano, il valore di φ e il valore (che diremo q) della

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

differenza $\sigma_1 - \sigma_2$; *ma non determina, separatamente, gli sforzi principali* σ_1 *e* σ_2 [2]. Pertanto, chi voglia giungere ad una esatta conoscenza degli sforzi del sistema elastico, dovrà completare i dati della fotoelasticità con opportune ricerche supplementari, sperimentali o analitiche. Dei numerosi metodi proposti a questo scopo [3] l'unico fino ad oggi correntemente impiegato è quello (analitico) del Filon. Esposto il metodo del Filon (per quel tanto che è necessario alla comprensione dell'argomento) indicheremo, in questa Nota, un nostro procedimento che ci sembra offrire vantaggi di semplicità e di speditezza di esecuzione.

2. Il metodo del Filon. - I vari metodi analitici suggeriti per la separata determinazione degli sforzi principali a partire dai parametri φ e q, hanno in comune il preventivo tracciamento, sul sistema piano, di un certo numero di curve *isostatiche* (le quali forniscono un quadro assai espressivo – se pure incompleto – della distribuzione degli sforzi nei vari punti del sistema). Ben note sono le operazioni grafiche occorrenti al tracciamento delle isostatiche: Supposte già determinate, per ogni punto del sistema, le direzioni 1 e 2 (e cioè supposto conosciuto il parametro φ), si parta, da un generico punto P, nella prima delle due direzioni principali esistenti in questo punto, fino a giungere ad un punto vicino P′: di qui si esca secondo la prima delle due direzioni principali esistenti in questo nuovo punto, fino a giungere ad un punto prossimo P″; e così via di seguito. La spezzata PP′P″... così costruita individua una delle isostatiche uscenti da P. Un'altra isostatica, ortogonale alla precedente, si otterrebbe uscendo da P nella direzione 2.

Una volta tracciate le isostatiche delle due famiglie (l'una formata dalle curve tangenti alle direzioni 1, l'altra da quelle tangenti alle direzioni 2) gli sforzi σ_1 e σ_2 possono determinarsi utilizzando le equazioni di equilibrio nel modo che verrà qui appresso ricordato. Sopra una isostatica C_1 (della prima famiglia) uscente da un punto P del contorno, stabiliamo un sistema di ascisse curvilinee s_1, e diciamo $\sigma_1(s_1)$ lo sforzo che agisce (tangenzialmente a C_1) in un generico punto di tale isostatica. Denotiamo, inoltre, con c_2 la

(2) Fanno tuttavia eccezione i punti del contorno del sistema. Consideriamo, infatti, un punto P appartenente a un tratto di contorno che (per semplicità) supporremo soggetto ad un carico normale e ripartito. In questo punto P una delle direzioni principali coincide con la normale, l'altra con la tangente al contorno. Noi conosciamo (dalla fotoelasticità) la differenza dei due sforzi principali esistenti in P e, inoltre, conosciamo il valore di uno di questi sforzi (quello normale al contorno, il quale coincide col carico esterno). Pertanto anche l'altro sforzo principale risulta immediatamente determinabile. Così rimane provato che, nei punti del contorno, i soli dati della fotoelasticità sono sufficienti a determinare, in modo completo, la distribuzione degli sforzi.

(3) Si veda un elenco di tali metodi, e una sommaria loro descrizione, in una nostra pubblicazione dal titolo *La fotoelasticità e le sue applicazioni*, edita dall'Istituto Nazionale per gli Studi e la Sperimentazione dell'Edilizia, Roma.

curvatura di quella isostatica - *della seconda famiglia* - che passa per il punto considerato, convenendo di riguardare c_2 come positiva se detta isostatica volge la sua concavità dalla parte verso cui crescono le ascisse s_1. È facile dimostrare che, per l'equilibrio di un elemento (del sistema) avente centro nel punto considerato, devono sussistere: l'equazione

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} = c_2 (\sigma_1 - \sigma_2) \tag{1}$$

e l'analoga che da essa si ottiene scambiando fra loro gli indici 1 e 2. Senza fermarci sulla dimostrazione della (1), mostriamo come essa si applichi al problema che forma oggetto di questa Nota. Se integriamo membro a membro la (1), lungo l'isostatica C_1, fra il punto P ed un altro punto arbitrario Q, abbiamo

$$(\sigma_1)_Q = (\sigma_1)_P + \int_P^Q c_2 (\sigma_1 - \sigma_2)\, ds_1, \tag{2}$$

dove $(\sigma_1)_P$ e $(\sigma_1)_Q$ designano i valori di σ_1 nei punti P e Q. Tutte le grandezze comparenti sotto il segno di integrale a secondo membro della (2) ci sono note dalla fotoelasticità. Quanto alla grandezza $(\sigma_1)_P$, essa ci è pure nota se, come per ipotesi, il punto P cade sul contorno del sistema [4]. *La* (2) *permette, dunque, di esprimere, per mezzo di grandezze note, lo sforzo* σ_1 *esistente in ogni punto* Q *dell'isostatica* C_1.

Questo metodo (attribuito al Maxwell) non ha mai trovato applicazione pratica a causa dell'impossibilità di determinare, con approssimazione sufficiente, la curvatura c_2 di curve (le isostatiche) a loro volta ottenute con metodi grafici approssimati. Vari Autori han cercato di trasformare l'equazione (2), così da renderla adatta alle applicazioni. La trasformazione più nota è dovuta al Filon, il quale riesce, esprimendo in modo conveniente la curvatura c_2, a porre l'equazione (2) nella forma sottoindicata:

$$(\sigma_1)_Q = (\sigma_1)_P + \int_P^Q \operatorname{ctg} \gamma \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)\, d\varphi,$$

dove il differenziale $d\varphi$ si intende calcolato lungo l isostatica C_1, e γ designa l'angolo che, in un generico punto dell'isostatica C_1, formano fra loro la linea isostatica e la linea isoclina passante per quel punto (linee isocline chiamandosi, come è ben noto, quelle su cui è $\varphi = \text{cost.}$). Il maggior inconveniente del metodo del Filon sta nella difficoltà di misurare esattamente l'angolo γ, perchè le linee isocline hanno spesso andamento sperimentale non molto ben definito e, più che linee, costituiscono bande larghe e sfumate. Non presenta questo inconveniente il metodo che noi proponiamo e del quale ora faremo parola.

(4) Vedi la nota (2).

3. Il nostro metodo. – Consideriamo, sul sistema piano, due isostatiche, C′ e C″, abbastanza vicine fra loro (costituenti, dunque, una striscia curvilinea che brevemente chiameremo « tubo di flusso »). Su questo tubo pratichiamo una serie di sezioni, abbastanza vicine le une alle altre, mediante segmentini che risultino ortogonali ad uno (e, praticamente, ad ambedue) i lati del tubo. Queste sezioni verranno indicate coi numeri $0, 1, 2, \cdots$; e, ove non si tema equivoco, si indicheranno con gli stessi numeri anche i punti di mezzo delle varie sezioni. Converrà scegliere la sezione iniziale (quella indicata col numero 0) sul contorno del sistema (là dove nasce, per così dire, il nostro tubo di flusso). Diremo, ancora, $h_0, h_1, h_2, \cdots$ le larghezze della striscia nelle varie sezioni (e cioè le lunghezze dei segmenti $0, 1, 2, \cdots$), e $q_{01}, q_{12}, \cdots$ i valori della differenza $\sigma_1 - \sigma_2$ nei punti di mezzo (baricentri) dei campi quadrilateri in cui le sezioni $0, 1, 2, \cdots$ dividono il tubo di flusso. Le h ci son note dal disegno delle isostatiche, le q ci son direttamente conosciute dall'indagine fotoelastica.

Ciò premesso, possiamo dimostrare che, nel passaggio da una sezione del tubo di flusso alla successiva (per esempio nel passaggio dal punto 0 al punto 1), lo sforzo σ_1 subisce l'incremento

$$(3) \qquad (\sigma_1)_1 - (\sigma_1)_0 = - q_{01} (L_1 - L_0),$$

dove $(\sigma_1)_0$ e $(\sigma_1)_1$ designano i valori di σ_1 nei punti 0 ed 1, ed L_0 ed L_1 sono i logaritmi naturali di h_0 ed h_1. Prima ancora di accennare alla dimostrazione della formula (3) mettiamone in evidenza il significato nei riguardi del problema di cui ci stiamo occupando. Afferma la (3) che, nel passaggio da una sezione del tubo alla successiva, l'incremento di σ_1 eguaglia (a meno del segno) il prodotto del valore di q (nel centro del quadrilatero limitato, sul tubo di flusso, dalle sezioni in esame) per l'incremento che subisce il logaritmo della larghezza del tubo nel passaggio dall'una all'altra sezione. Dei due fattori ora indicati il primo è direttamente noto dalla fotoelasticità, e il secondo può comodamente determinarsi mediante un regolo il quale porti segnate non le misure delle varie lunghezze, ma i logaritmi di queste misure. Accostando un regolo cosiffatto alle due sezioni 0 ed 1 leggeremo direttamente i valori di L_0 ed L_1. La (3), pertanto, ci permette di ricavare (successivamente) i valori di σ_1 in tutte le sezioni del tubo di flusso, appena sia noto il valore di σ_1 nella sezione iniziale 0 (per questo basterà scegliere tale sezione sul contorno del sistema piano).

4. Dimostrazione della formula fondamentale del nostro metodo. – Otterremo la formula (3) trasformando l'equazione di equilibrio (1), e cioè esprimendo convenientemente la curvatura c_2 che figura in questa equazione. Ma per giungere a questo risultato, ci son necessarie alcune preliminari considerazioni geometriche.

Diciamo: R la parte di tubo di flusso limitata dalle sezioni h_0 ed h_1, C_2 la famiglia di isostatiche *normali* ai lati del tubo di flusso. Riferiti, provvisoriamente, i punti dell'area R ad un sistema di coordinate x, y, diremo $P(x, y)$ un generico punto di quest'area, c_2 la curvatura (in P) dell'isostatica (della famiglia C_2) passante per il punto P, e $\bar{c}_2$ il valore medio della curvatura c_2 nell'intiera area R. Questo valor medio che, per definizione, viene espresso dalla formula

$$\bar{c}_2 = \frac{1}{\Omega} \int_R c_2 \, dx \, dy, \tag{4}$$

(dove Ω designa l'area della regione R), può esprimersi più semplicemente introducendo l'angolo $\Psi(x, y)$ che, nel punto P, l'isostatica della famiglia C_2 forma con l'asse x. Abbiamo infatti, per la stessa definizione di curvatura, $c_2 = -\partial\Psi/\partial s$ (5) (la derivata intendendosi calcolata nella direzione della tangente all'isostatica in parola), ovvero

$$c_2 = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} l + \frac{\partial \Psi}{\partial y} m\right),$$

dove l ed m sono i coseni direttori della tangente suddetta. Poichè tali coseni si identificano con $\cos\Psi$ e $\sin\Psi$, avremo, ancora,

$$c_2 = -\frac{\partial \sin\Psi}{\partial x} + \frac{\partial \cos\Psi}{\partial y}.$$

Introduciamo, nella (4), questa espressione di c_2, e trasformiamo gli integrali che vengono a figurare a secondo membro in integrali di linea (estesi al contorno L dell'area R). Avremo, dopo qualche semplificazione,

$$\bar{c}_2 = -\frac{1}{\Omega} \int_L \cos\alpha \, ds,$$

dove ds è un generico elemento della curva L, ed α è l'angolo formato, in un punto di questa curva, fra la direzione di quest'ultima e la direzione dell'isostatica (della famiglia C_2) passante per il punto. Tenendo conto che, sui quattro lati del quadrilatero costituenti il contorno L, l'angolo α ha, rispettivamente, i valori di 0°, 90°, 180°, 270°, l'ultima relazione scritta diviene

$$\bar{c}_2 = \frac{h_0 - h_1}{\Omega},$$

(5) Il segno della « curvatura di una curva » è, in fondo, convenzionale. Noi stabiliamo di riguardarla come positiva quando un osservatore (in piedi sul piano x, y) il quale percorra la curva nel suo verso positivo, ne lasci alla destra il centro di curvatura. In questa ipotesi l'espressione della curvatura c_2 è (in valore assoluto e segno) quella indicata nel testo.

ovvero, confondendo la curvatura media $\bar{c}_2$ con il valore che la curvatura c_2 assume nel baricentro P dell'area R (il che è lecito a motivo delle infinitesime dimensioni di quest'area),

$$c_2 = \frac{h_0 - h_1}{\Omega}.$$

Di questa espressione della curvatura c_2 ci dovremo servire fra breve.

Se, al punto P, applichiamo l'equazione di equilibrio (1), sostituiamo la curvatura c_2 che figura in questa equazione con l'espressione soprascritta, e, infine, poniamo, in luogo della derivata $\partial\sigma_1/\partial s_1$, che figura a primo membro, il rapporto incrementale corrispondente $[(\sigma_1)_1 \quad (\sigma_1)_0]/\Delta$ (dove indichiamo con Δ la distanza dai punti 0 ed 1), otteniamo

$$(\sigma_1)_1 - (\sigma_1)_0 = (\sigma_1 - \sigma_2)\frac{h_0 - h_1}{\frac{\Omega}{\Delta}}.$$

Poichè il rapporto Ω/Δ si identifica con la larghezza h della striscia nella sezione (normale) fatta per il punto P, la relazione precedente si può scrivere nella forma

$$(\sigma_1)_1 - (\sigma_1)_0 = -(\sigma_1 - \sigma_2)\frac{h_1 - h_0}{h},$$

ovvero nella equivalente forma differenziale

$$d\sigma_1 = -(\sigma_1 - \sigma_2)\, d \log h,$$

e viene quindi a coincidere con la (3).

5. Conclusione. – Il metodo sopra esposto, da noi sistematicamente applicato, si è sempre dimostrato soddisfacente. Raramente abbiamo riscontrati, nella valutazione di σ_1, errori superiori al 3 % (del valore massimo dello sforzo σ_1 in tutto il sistema piano); precisione, questa, non solo sufficiente per gli scopi della tecnica, ma non inferiore a quella con cui vengono determinati (sperimentalmente) i valori di q e di φ. Una migliore approssimazione, nel calcolo di σ_1, sarebbe pertanto, più che inutile, illusoria.

Il metodo da noi proposto è anche suscettibile di una interpretazione grafica non priva di eleganza. Questa interpretazione grafica, altri dettagli del metodo ed un esempio di applicazione si possono trovare in una nostra Memoria in corso di pubblicazione presso una rivista scientifica nord-americana.

Fisica (Fisica-Matematica). — *I «segmenti» e le loro applicazioni alla fotoelasticità.* Nota di L. Sobrero, presentata [1] dal Socio M. Picone.

In taluni problemi di fotoelasticità (e di ottica delle piastre cristalline) appare conveniente introdurre il concetto di *segmento*. Esamineremo, in questa Nota, la definizione, le proprietà e le principali operazioni dei segmenti; e quindi ne indicheremo una applicazione ai problemi di elasticità piana.

1. Definizione di segmento; eguaglianza di due segmenti. – *Segmento* si dice la parte di retta limitata da due punti. Elementi caratteristici di un segmento sono: la sua *lunghezza* (che, per ora almeno, riguarderemo come positiva) e la sua *direzione*. Un segmento non possiede, pertanto, alcun verso determinato; e non si potrà parlare di origine o di estremo di un segmento (locuzioni, queste, che implicano il concetto di verso) ma solo, genericamente, di estremi di un segmento. Brevemente si potrà dunque definire un segmento come *un vettore privo di verso.*

Mentre i vettori si rappresentano con una lettera cui è sovrapposta una freccia (esempio: $\vec{a}$), i segmenti si rappresentano con una lettera cui è sovrapposta una linea (esempio: $\bar{a}$); la notazione stando appunto a ricordare la mancanza di un verso nel concetto di segmento. Un segmento che abbia per estremi due punti dati, A e B, verrà, indifferentemente, indicato con $\overline{AB}$ o con $\overline{BA}$.

Diremo che due segmenti $\bar{a}$ e $\bar{b}$ sono eguali o equipollenti (e scriveremo: $\bar{a} = \bar{b}$) se i due segmenti hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione (e cioè appartengono a rette parallele).

Nullo si dirà un segmento di lunghezza nulla.

Per le applicazioni che abbiamo in vista ci possiamo limitare a considerare solo i segmenti di un determinato piano; ma talune delle definizioni e delle operazioni che indicheremo potrebbero agevolmente estendersi allo spazio.

2. Angolo di due segmenti. – Angolo di due segmenti dati si dice la rotazione che deve eseguire, intorno a un suo punto, il primo dei due segmenti perchè la sua direzione venga a coincidere con quella del secondo; la rotazione intendendosi positiva quando abbia luogo in un verso prefissato (per esempio quello antiorario). L'angolo di due segmenti risulta, pertanto, definito a meno di multipli di 180°.

(1) Nella seduta del 18 aprile 1946.

Se si scambia l'ordine con cui si prendono i due segmenti, il loro angolo cambia di segno; e, se non si precisa quest'ordine, l'angolo rimane determinato, tanto a meno di multipli di 180° quando a meno del segno. Quando, genericamente, si parla di angolo di due segmenti, si intende alludere a una – qualsivoglia – delle possibili determinazioni di questo angolo.

3. Prodotto scalare e prodotto di un segmento per un numero. – Diremo prodotto scalare di due segmenti $\bar{a}$ e $\bar{b}$, e indicheremo con $\bar{a} \times \bar{b}$, il numero ottenuto moltiplicando fra loro le lunghezze dei due segmenti e il coseno del *doppio* dell'angolo φ fra essi compreso. In simboli:

$$\bar{a} \times \bar{b} = a \cdot b \cdot \cos 2\varphi .$$

Si constata subito che il prodotto così definito non dipende dalla determinazione che si sceglie per valutare l'angolo φ dei due segmenti dati. Le proprietà del prodotto scalare sono senz'altro evidenti: Il prodotto gode della proprietà commutativa; il prodotto è nullo quando è nullo uno dei fattori, o quando questi formano tra loro un angolo di 45°.

Diremo prodotto di un segmento $\bar{a}$ per un numero k, e indicheremo con $k\bar{a}$, un segmento avente la stessa direzione di $\bar{a}$, e lunghezza k volte maggiore. Provvisoriamente dovremo ammettere che il numero k sia positivo; ma ci libereremo, fra breve, di questa restrizione.

4. Somma. – Diremo somma di due segmenti $\bar{a}$ e $\bar{b}$, e indicheremo con $\bar{a} + \bar{b}$, un terzo segmento ottenuto con l'operazione grafica seguente.

Trasformati i due segmenti $\bar{a}$ e $\bar{b}$ in vettori (attribuendo loro un verso arbitrario) conduciamoli, l'uno di seguito all'altro, a partire da un punto dato P, così da formare una spezzata bilatera PAB (col primo lato equipollente ad $\bar{a}$, e il secondo equipollente a $\bar{b}$). Condotta poi, per il punto P, una retta di direzione e verso arbitrari (che diremo *retta* o *direzione di riferimento*) si tracci, a partire da P, una nuova spezzata, PA'B', i cui lati abbiano lunghezza pari a quella dei corrispondenti lati della spezzata PAB, ma formino, con la direzione di riferimento, angoli *doppi* di quelli della spezzata PAB. Preso, finalmente, in esame, il lato di chiusa, PB', di questa nuova spezzata PA'B', facciamolo ruotare intorno a P (senza alterarne la lunghezza) fino a che l'angolo da esso formato con la direzione di riferimento si riduca alla metà del suo primitivo valore. Il vettore cui si perviene, privato di verso, è per definizione, la somma $\bar{a} + \bar{b}$.

Parecchi elementi arbitrari figurano in questa definizione di somma (sono arbitrari: la scelta del verso quando si trasformano i segmenti dati in vettori, la direzione e il verso della retta di riferimento, la determinazione che si adotta per i vari angoli che figurano nella costruzione); facili considerazioni – che qui, per brevità, ometteremo – dimostrano, tuttavia,

che il risultato finale dell'operazione di somma non dipende da questi elementi arbitrari.

Notiamo, per incidenza, che, indicando con $\bar{c}$ un segmento di lunghezza unitaria, avente la direzione della retta di riferimento, la proiezione ortogonale del lato di chiusa PB′ della spezzata PA′B′, sulla direzione di riferimento, vale (per la stessa definizione di prodotto scalare) $\bar{c} \times (\bar{a} + \bar{b})$. D'altra parte, questa proiezione è somma di quelle dei due lati della spezzata PA′B′, le quali valgono rispettivamente $\bar{c} \times \bar{a}$ e $\bar{c} \times \bar{b}$. Si conclude che

$$\bar{c} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b}.$$

Questa relazione (che si estende subito al caso di un segmento $\bar{c}$ di lunghezza differente dall'unità) dimostra che vale, per i segmenti, la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Del resto gli elementi arbitrari che intervengono nella operazione di somma possono venir scelti in maniera da semplificare l'esecuzione dell'operazione. Se, per esempio, si fa coincidere la direzione di riferimento con quella del primo dei due addendi della somma, l'operazione si semplifica e modifica come segue: Trasformati in vettori i due segmenti $\bar{a}$ e $\bar{b}$, si conducano due vettori eguali ai dati, a partire da una comune origine P. Lasciando fisso il primo vettore si faccia, poi, ruotare il secondo intorno a P, fino a raddoppiare l'angolo che esso forma col primo, e si compongano il vettore così ruotato e il primo vettore (rimasto fisso) con la solita regola del parallelogramma. Infine si faccia ruotare (in senso inverso) il vettore risultante fino a ridurre a metà l'angolo che esso forma col vettore fisso. Il vettore che in tal modo si ottiene, ridotto a segmento (e cioè privato del verso), rappresenta la somma richiesta.

Si possono facilmente ideare costruzioni geometriche atte a semplificare le operazioni di duplicazione e bipartizione degli angoli che intervengono nella definizione di somma; ma queste costruzioni non presentano alcun particolare interesse.

Quasi evidenti sono le proprietà della somma. Oltre alla proprietà distributiva - già dimostrata più sopra - è facile vedere che la somma gode della proprietà commutativa. La somma di due segmenti di egual direzione è un nuovo segmento avente la stessa direzione e lunghezza eguale alla somma delle lunghezze. Osserveremo ancora che, se l'angolo di due segmenti è infinitesimo, la somma dei due segmenti coincide (a meno di infinitesimi superiori) con il segmento che si ottiene (da quelli dati) componendoli con la regola del parallelogramma. Ciò non accade più quando l'angolo dei due segmenti è sufficientemente grande. Per esempio è facile vedere che la somma di due segmenti ortogonali è un nuovo segmento, avente la direzione del maggiore dei due segmenti dati, e lunghezza pari alla differenza delle loro lunghezze. In particolare la somma di due segmenti, ortogonali e di egual lunghezza, risulta eguale a zero.

5. Segmenti negativi; differenza di due segmenti. – Si dirà *contrario* di $\bar{a}$, e si indicherà con $-\bar{a}$, un segmento di lunghezza pari a quella di $\bar{a}$, e ad esso ortogonale. In virtù dell'ultima osservazione del numero precedente, la somma di due segmenti contrari risulta eguale a zero.

Noi abbiamo, fin qui, considerate le lunghezze dei segmenti come essenzialmente positive. Utilizzando il concetto di segmenti contrari possiamo liberarci ora di quella restrizione, che riuscirebbe incomoda nelle applicazioni. Diremo, dunque, segmento di direzione r e lunghezza $-l$ (negativa) il segmento di lunghezza l, avente direzione ortogonale ad r.

Sempre utilizzando il concetto di segmenti contrari possiamo introdurre la definizione di differenza di due segmenti. Diremo *differenza di due segmenti* dati, $\bar{a}$ e $\bar{b}$, e indicheremo con $\bar{a} \quad \bar{b}$, la somma del segmento $\bar{a}$ col contrario di $\bar{b}$. Se i due segmenti hanno la stessa direzione la loro differenza è un segmento che possiede ancora quella direzione, ed ha una lunghezza pari alla differenza delle loro lunghezze. È appena necessario osservare che questa lunghezza differenza potrebbe esser negativa, e, in questo caso, il segmento $\bar{a} - \bar{b}$ risulterebbe ortogonale alla comune direzione dei segmenti $\bar{a}$ e $\bar{b}$.

Il concetto di segmenti contrari ci permette, infine, di definire il prodotto di un segmento $\bar{a}$ per un numero (negativo) $-k$. Intenderemo con tale locuzione (e indicheremo con $-k\bar{a}$) un segmento avente lunghezza ka, e direzione ortogonale a quella di $\bar{a}$.

6. Applicazione dei segmenti alla elasticità piana. – In un sistema elastico piano la configurazione di sforzo esistente in un generico punto P si individua, come è ben noto, mediante gli sforzi principali (che diremo σ_1 e σ_2) e le rispettive loro direzioni (necessariamente ortogonali fra loro) che diremo 1 e 2.

Sotto alcuni aspetti (per esempio nei riguardi del fenomeno della birifrangenza artificiale prodotta dagli sforzi elastici) noi possiamo concepire lo sforzo σ_1 come un segmento avente la direzione 1 e la lunghezza σ_1. Indicheremo questo segmento (e l'analogo di direzione 2) con le notazioni $\bar{\sigma}_1$ e $\bar{\sigma}_2$. Insieme coi due segmenti $\bar{\sigma}_1$ e $\bar{\sigma}_2$ interessa considerare la loro somma che diremo *segmento principale* e indicheremo con $\bar{q}$. Essa gode di alcune notevoli proprietà che ne giustificano la considerazione.

Intanto si vede che il segmento $\bar{q}$ può anche definirsi come quello che ha per lunghezza il valore assoluto $|\sigma_1 \quad \sigma_2|$ della differenza dei due sforzi, e per direzione quella del maggiore (in senso algebrico) dei due sforzi σ_1 e σ_2; oppure come il segmento che ha la direzione 1 e lunghezza pari (in valore assoluto e segno) a $\sigma_1 \quad \sigma_2$; o, infine, come il segmento che ha la direzione 2 e lunghezza pari (in valore assoluto e segno) a $\sigma_2 - \sigma_1$. Una breve discussione mostrerebbe che tutte queste definizioni risultano fra loro equivalenti.

Il segmento $\bar{q}$ definisce in modo completo il comportamento del sistema elastico agli effetti dei fenomeni di birifrangenza (e quindi nei riguardi della fotoelasticità). Infatti, sappiamo che il comportamento ottico di un sistema elastico piano trasparente, il quale sia attraversato in un suo punto P da un pennello di raggi ortogonali, dipende esclusivamente (oltre che dallo spessore del sistema e dalla natura del materiale) dalle direzioni degli sforzi principali σ_1 e σ_2 esistenti in P, e dalla differenza $\sigma_1 - \sigma_2$ fra questi sforzi; e cioè proprio dalle grandezze caratteristiche del segmento $\bar{q}$. Si può dunque affermare che *il segmento principale definisce il comportamento fotoelastico del sistema*. Reciprocamente, la fotoelasticità permette di determinare, per ogni punto del sistema elastico, la differenza $\sigma_1 - \sigma_2$ e le direzioni 1 e 2, e quindi il segmento principale $\bar{q}$.

C'è di più. Supponiamo che in un punto di un sistema elastico piano, si produca, per opera di una certa distribuzione di forze esterne, una configurazione di sforzo caratterizzata da due direzioni principali 1 e 2 e da due sforzi principali σ_1 e σ_2. Se si fa agire sul sistema una differente distribuzione di forze esterne, lo sforzo esistente in P sarà caratterizzato da due nuove direzioni principali 1′ e 2′, e da due nuovi sforzi principali σ_1' e σ_2'. Se noi applichiamo simultaneamente le due distribuzioni di forze esterne, lo sforzo che si produce in P è quello che si ottiene per sovrapposizione delle due configurazioni di sforzo prima considerate. Quali saranno le direzioni e gli sforzi principali di questa configurazione di sforzo risultante? Questo problema, che si incontra a ogni passo nella teoria della elasticità, trova, nella teoria dei segmenti, una soluzione estremamente semplice [2]; vige, infatti, la seguente proprietà (di cui qui ometteremo la dimostrazione): *Nella sovrapposizione, in un punto* P, *di due sistemi di sollecitazioni, i segmenti che rappresentano gli sforzi principali del primo sistema di sollecitazione si sommano a quelli che rappresentano gli sforzi principali nel secondo sistema di sollecitazioni*. È inutile dire che la somma dovrà essere eseguita secondo le modalità indicate nei numeri precedenti.

Altri dettagli e proprietà dei segmenti possono trovarsi in una nostra Memoria in corso di stampa presso una rivista nordamericana.

(2) Più semplice, intendiamo dire, di quella classica, la quale consiste nel dedurre le componenti cartesiane di ciascuna delle due configurazioni di sforzo; nel sommare le componenti omonime delle due configurazioni, così da avere le componenti della configurazione di sforzo risultante; e, infine, nel passare da queste componenti cartesiane ai corrispondenti sforzi principali.

Fisica (Fisica-Matematica). — *Effetto della viscosità e della conduzione termica in un risuonatore acustico.* Nota di I. Barducci, presentata [1] dal Socio U. Bordoni.

1. Scopo del lavoro. - Nello studio dei trasduttori elettroacustici – microfoni, altoparlanti, telefoni – si incontrano spesso sistemi assimilabili a risuonatori acustici, ma non sempre essi possono essere ricondotti allo schema classico nel quale si trascurano gli effetti della viscosità e della conduzione termica [2]. Infatti molto spesso il collo del risuonatore ha dimensioni tali che questi effetti assumono in esso una importanza fondamentale. Anche in vista delle applicazioni tecniche, interessa perciò svolgere una teoria dei risuonatori acustici che tenga conto degli effetti della viscosità e della conduzione termica nel collo, tanto sulla frequenza quanto sul coefficiente di risonanza.

Come è noto, un risuonatore acustico – costituito, come in fig. 1, da una cavità di volume V (cm³) e da un collo di lunghezza l (cm) ed area S (cm²) - può essere assimilato ad un sistema ad un grado di libertà, schematizzando la cavità in una *rigidezza acustica* $\mathfrak{D}$ (dine. cm^{-5}), ed il collo in una *massa acustica* $\mathfrak{M}$ (g. cm^{-4}), in serie con una *resistenza acustica* $\mathfrak{R}$ (g. cm^{-4}. sec^{-1}). Naturalmente, perchè si possa ritenere che tutta la $\mathfrak{R}$ sia concentrata nel collo è necessario fare l'ipotesi, quasi sempre verificata, che le perdite nella cavità siano trascurabili in confronto con quelle localizzate nel collo stesso. La rigidezza acustica $\mathfrak{D}$ della cavità si calcola con la nota relazione: $\mathfrak{D} = P_0 \varkappa / V$, ($P_0$ [dine. cm^{-2}] = pressione atmosferica; $\varkappa$ = rapporto fra i calori specifici dell'aria).

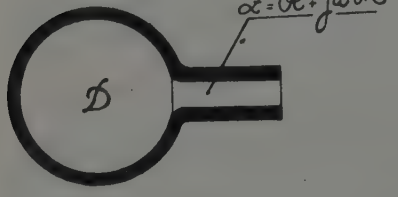


Fig. 1. – Risuonatore acustico.

Nello schema classico del risuonatore di Helmholtz, la $\mathfrak{M}$ è la massa acustica dell'aria contenuta nel collo – cioè $\mathfrak{M} = \rho l / S$ (ρ [g. cm^{-3}] = densità dell'aria) – cui si aggiunge la massa acustica di radiazione [3]:

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(2) Vedere, per esempio Rayleigh, *The theory of sound*, Mc Millan ed., 1929, 2ª ed., vol. II, cap. XVI, p. 170 e segg. Vedere anche: I. B. Crandall, *Vibrating systems and sound*, Mc Millan ed., 1926, cap. II, p. 53.

(3) Si vedrà più avanti, al § 3, perchè si è presa per la $\mathfrak{M}$, questa espressione – seguendo, per esempio A. B. Wood, *A text book of sound*, Bell. ed., 1944, 2ª ed., p. 186 – anzichè quella più comunemente impiegata che si riferisce alla radiazione da ambedue le facce di un foro in uno schermo piano infinito.

$\mathfrak{M}_r = \psi_r \mathfrak{M}_i = 0{,}6\,\rho\, r/S$ (r [cm] = raggio del collo). La $\mathfrak{R}$ viene completamente trascurata, oppure identificata unicamente con la resistenza di radiazione $\mathfrak{R}_r$.

Nel caso più generale, invece, in cui si debba tener conto degli effetti della viscosità e della conduzione termica nel collo l'impedenza acustica $\mathfrak{Z}$ di quest'ultimo si compone di tre parti: reattanza acustica della massa d'aria contenuta nel collo, impedenza acustica dovuta alla viscosità e alla conduzione termica e impedenza acustica di radiazione.

I. B. Crandall fa lo studio di un risuonatore acustico tenendo conto della viscosità [4], nell'ipotesi che la presenza di quest'ultima introduca uno smorzamento, ma non abbia alcun effetto sulla frequenza di risonanza f_0 — definita come quella per la quale si annulla la reattanza acustica: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}}}$. In questo studio la radiazione viene trascurata. Inoltre la formula di Helmholtz–Kirhhoff, impiegata per il calcolo della resistenza del collo, vale, come si vedrà in seguito, soltanto per tubi di raggio non eccessivamente piccolo rispetto alla lunghezza d'onda.

Le formule date da Crandall per la frequenza f_0 e la resistenza $\mathfrak{R}$ vanno dunque considerate come risultati approssimati, applicabili limitatamente al caso di smorzamenti non troppo grandi – cioè di tubi non troppo stretti [5].

Nella presente Nota, invece, si prende in considerazione un risuonatore acustico avente un collo di sezione circolare, senza le limitazioni suddette. Sviluppando una formula generale, data dallo stesso Crandall, si calcolano espressioni generali per la massa acustica e la resistenza acustica di un tubo di sezione circolare, tenendo conto della viscosità e della conduzione termica, senza limitazioni nel raggio del tubo. Successivamente si calcolano nuove espressioni approssimate, facendo vedere che esse dànno risultati soddisfacenti su quasi tutto il campo che interessa nelle applicazioni ai risuonatori. Le formule ottenute sono poi applicate al calcolo della frequenza e del coefficiente di risonanza dei risuonatori acustici, tenendo conto anche della radiazione.

(4) I. B. Crandall, *Vibrating systems and sound*, Mc Millan ed., 1926, cap. II, p. 56 e Appendice A, p. 229. Nelle formule di Crandall si tiene conto esplicitamente del solo effetto della viscosità. Tuttavia non c'è difficoltà a portare in conto anche l'analogo effetto della conduzione termica, dando alla costante di viscosità un valore opportunamente aumentato secondo una formula di Kirchhoff, come è accennato più avanti dallo stesso Crandall.

(5) In un lavoro di Rschevkin su « J. Techn. Phys. USSR », *3*, 1936, n. 6, si tien conto anche degli effetti della radiazione e della viscosità sulla frequenza f_0, sempre servendosi della formula di Kirchhoff. I risultati hanno perciò un valore più generale di quelli di Crandall per la f; ma, come si comprenderà meglio in seguito, si hanno sempre le solite limitazioni per la resistenza acustica.

2. Costanti acustiche di un tubo di sezione circolare. — Per calcolare l'impedenza acustica $\mathfrak{Z}_v$ di un tubo, tenendo conto dell'effetto della viscosità e di quello, egualmente importante, dovuto alla generazione e alla conduzione del calore, conviene porre:

$$\mathfrak{Z}_v = \omega \mathfrak{M}_l \zeta \tag{1}$$

dove: $\mathfrak{M}_l = \rho l/\pi r^2$ (g. cm^{-4}) è la massa acustica dell'aria contenuta nel tubo (ρ (g. cm^{-3}) = densità dell'aria; l (cm) = lunghezza ed r (cm) = raggio del tubo); $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione della pressione acustica; $\zeta = \varphi + j\psi$ è un coefficiente numerico complesso.

Da una formula data da Crandall [6] si ricava allora immediatamente:

$$\frac{1}{\zeta} = -j\left[1 - \frac{2}{(xj^{3/2})} \cdot \frac{J_1(xj^{3/2})}{J_0(xj^{3/2})}\right] \tag{2}$$

dove: J_0 = funzione di Bessel di ordine zero; J_1 = funzione di Bessel del primo ordine. La x è un parametro dipendente dal raggio r del collo, dalle costanti dell'aria e dalla frequenza

$$x = r\sqrt{\frac{\omega}{\bar{\nu}}}. \tag{3}$$

Nella (3) si è indicato con $\bar{\nu}$ un fattore avente le dimensioni della costante di viscosità cinematica ν (cm^2.sec^{-1}), ma di valore maggiore, per tener conto anche degli effetti termici. Per valori di x non troppo piccoli si può calcolare $\bar{\nu}$ con la seguente formula data da Kirchhoff [7]:

$$\sqrt{\bar{\nu}} = \sqrt{\nu} + \left(\sqrt{\varkappa} - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\sqrt{\nu'} \tag{4}$$

dove: $\varkappa = 1{,}40$ è il rapporto fra i calori specifici dell'aria, a pressione e a volume costante; ν (cm^2.sec^{-1}) è la costante di viscosità cinematica e ν'(cm^2.sec^{-1}) è la costante di diffusione termica: $\nu' = \chi/\rho c_v$; χ (cal. cm^{-1} sec^{-1} grado^{-1}) = coefficiente di conduzione termica dell'aria; c_v (cal. g^{-1}. grado^{-1}) = calore specifico a volume costante; ρ (g.cm^{-3}) = densità. Poichè $\nu = \eta/\rho$, se η (g. cm^{-1}.sec^{-1}) è la costante di viscosità dinamica, alla (4) si può sostituire la:

$$\sqrt{\bar{\eta}} = \sqrt{\eta} + \left(\sqrt{\varkappa} - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\sqrt{\eta'} \tag{4'}$$

(6) I. B. Crandall, loc. cit., p. 237, formula G'.

(7) G. Kirchhoff, «Pogg. Ann.», *134*, 1868, p. 177. Vedere anche Müller–Pouillets, *Lehrbuch der Physik*, vol. I, *Mechanik und Akustik*, parte 2ª, p. 396. Veramente la (4) dovrebbe essere applicata, soltanto per valori di x abbastanza grandi. Quando invece il diametro del tubo diviene piccolissimo ($x \ll 1$) lo strato influenzato dalle pareti occupa la maggior parte della sezione e in queste condizioni $\bar{\nu}$ tende, al limite, a divenire eguale ad ν. Tuttavia nelle applicazioni ai risuonatori si può ritenere che sia sempre valida la (4) almeno in prima approssimazione, pur potendosi prevedere che, per i più bassi valori di x, $\bar{\nu}$ avrà, probabilmente un valore alquanto minore.

dove si è posto: $\eta' = \chi/c_v$ (g. cm^{-1}/sec^{-1}). Le costanti η ed η' dipendono dalla temperatura $\vartheta°$, ma non dalla pressione, ed il coefficiente di temperatura è sensibilmente eguale per entrambe ($\simeq 2{,}7°/_{00}$ per °C)·Ao°C si ha: $\eta = 1{,}72.10^{-4}$; $\eta' = 3{,}37.10^{-4} = 1{,}96\,\eta$, e quindi:

$$\bar{\eta} = 3{,}75.10^{-4}\,(1 + 0{,}0027\,\vartheta°) \qquad \text{(g. cm}^{-1}\text{.sec}^{-1}\text{)}. \tag{5}$$

Per la densità, se h è la pressione atmosferica in mm di mercurio si ha:

$$\rho = \frac{0{,}001293}{1 + 0{,}003673\,\vartheta°} \cdot \frac{h}{760} \qquad \text{(g. cm}^{-3}\text{)}. \tag{6}$$

Dalla (1) e dalla (3) si deduce che la resistenza acustica $\mathfrak{R}$ e la massa acustica $\mathfrak{M}$ del tubo sono date da:

$$\mathfrak{R}_v = \omega\varphi\,\mathfrak{M}_t = \bar{\nu}\,\frac{x^2}{r^2}\,\varphi\,\mathfrak{M}_t \qquad \text{(g. cm}^{-4}\text{.sec}^{-1}\text{)} \tag{7}$$

$$\mathfrak{M}_v = \psi\,\mathfrak{M}_t \qquad \text{(g. cm}^{-4}\text{)}. \tag{8}$$

Inoltre il *coefficiente di risonanza* ε di un risuonatore, avente un collo la cui impedenza acustica si calcoli con le (7), (8) ed una frequenza di risonanza: $f_o = \omega_o/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}}}$, è (non tenendo conto della radiazione):

$$\varepsilon = \frac{\omega_o\,\mathfrak{M}_v}{\mathfrak{R}_v} = \frac{\psi}{\varphi}\,. \tag{9}$$

Restano perciò di calcolare, servendosi della (2), i valori di φ e di ψ in funzione di x. Espressioni generali di φ e di ψ, valide per qualunque valore di x [8] si ricavano servendosi delle relazioni seguenti fra le funzioni di Bessel [9]:

$$J_o(x\,j^{3/2}) = \mathrm{ber}\,(x) + j\,\mathrm{bei}\,(x)$$

$$J_1 = -\,J_o$$

dove: ber (x); bei (x) sono, rispettivamente, la parte reale ed immaginaria di $J_o(x\,j^{3/2})$. Eseguendo i calcoli, si trova:

$$\varphi = \frac{x\,\mathrm{ber}\,(x)\,[x\,\mathrm{bei}\,(x) + 2\,\mathrm{ber}'(x)] - x\,\mathrm{bei}\,x\,[x\,\mathrm{ber}\,(x) - 2\,\mathrm{bei}'(x)]}{[x\,\mathrm{ber}\,(x) - 2\,\mathrm{bei}'(x)]^2 + [x\,\mathrm{bei}\,(x) + 2\,\mathrm{ber}'(x)]^2} \tag{10}$$

$$\psi = \frac{x\,\mathrm{ber}\,(x)\,[x\,\mathrm{ber}\,(x) - 2\,\mathrm{bei}'(x)] + x\,\mathrm{bei}\,(x)\,[x\,\mathrm{bei}\,(x) + 2\,\mathrm{ber}'(x)]}{[x\,\mathrm{ber}\,(x) - 2\,\mathrm{bei}'(x)]^2 + [x\,\mathrm{bei}\,(x) + 2\,\mathrm{ber}'(x)]^2}\,. \tag{11}$$

I calcoli con le formule generali (10) e (11) sono alquanto laboriosi; quando però $x \geqq 10$ si possono ottenere espressioni di φ e di ψ assai più

(8) Purchè, naturalmente, si dia a $\bar{\nu}$ un valore opportuno (vedi Nota precedente).

(9) Questo procedimento di calcolo è stato suggerito, ma non sviluppato, dallo stesso Crandall.

semplici applicando la relazione, valida con grande approssimazione in questo campo:

$$\frac{J_1(xj^{3/2})}{J_0(xj^{3/2})} \cong -j. \tag{12}$$

Sostituendo la (12) nella (2), eseguendo i calcoli e trascurando termini di ordine superiore, si ottiene:

$$\varphi \cong \frac{\sqrt{2}}{x}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{x}\right) \tag{13}$$

$$\psi \cong 1 + \frac{\sqrt{2}}{x} \tag{14}$$

$$\varepsilon \cong \frac{x}{\sqrt{2}} - 1. \tag{15}$$

A questo punto è opportuno osservare che, per ricavare dalla (2) la formula approssimata comunemente impiegata per $x > 10$, è necessaria una ulteriore approssimazione. Dopo aver sostituito la (12) nella (2), ottenendo una espressione del tipo: $1/\zeta = -j[1 + 2j/z]$ dove: $z = (xj^{3/2})$ *è un numero complesso*, si calcola ζ con la relazione [10]

$$\zeta = \frac{j}{1 + \frac{2j}{z}} \cong j\left(1 - \frac{2j}{z}\right). \tag{16}$$

Ora si vedrebbe facilmente che, così facendo, si introduce un errore molto piccolo sul modulo di ζ e su ψ; ma l'errore percentuale è assai maggiore su φ, eccettuato il caso che x sia *molto più grande* di 10.

Comunque, così facendo si ricava:

$$\varphi \cong \frac{\sqrt{2}}{x} \tag{17}$$

mentre per ψ si ottiene ancora la (14). Il confronto della (17) con la (13) conferma che la (17) è applicabile solamente per valori grandi di x; applicandola per $x = 10$ si avrebbe, ad esempio, un valore di φ di oltre il 20% minore di quello calcolato con la formula generale (10) (vedi Tabella I).

(10) I. B. Crandall, loc. cit., p. 237. Alla stessa conclusione – che la (16) vale solamente per x grande, e quindi per tubi di raggio non troppo piccolo – si arriverebbe seguendo un altro procedimento, riportato pure da Crandall, che permette di arrivare alla (16) direttamente, senza passare per la formula generale (2). Infatti in questo ragionamento si trascura la curvatura della superficie cilindrica del tubo.

TABELLA I.

Valori di φ, (φx^2), ψ *ed* ε *calcolati con le relazioni generali* (9), (10), (11).

x	φ	(φx^2)	ψ	ε
1	8,00	8,00	1,333	0,1667 = 1/6
2	2,027	8,108	1,330	0,656
3	0,945	8,505	1,316	1,39
4	0,586	9,376	1,289	2,20
5	0,423	10,56	1,254	2,96
6	0,334	12,02	1,220	3,66
7	0,271	13,28	1,192	4,40
8	0,229	14,66	1,171	5,11
9	0,198	16,04	1,153	5,82
10	0,174 (0,182)	17,40 (18,2)	1,139 (1,141)	6,55 (6,10)
20	0,0786 (0,0807)	31,44 (32,3)	1,070 (1,071)	13,6 (13,2)
100	0,01445 (0,0144)	144,5 (144)	1,014 (1,014)	70,2 (70,2)

N. B. – I valori tra parentesi sono calcolati con le formule approssimate (13), (14), (15).

Quando invece il tubo è molto stretto, cioè per $x \leqq 1$, sviluppando in serie di potenze la J_0 e la J_1 e trascurando termini di ordine superiore si ottengono le relazioni [11]:

$$\mathfrak{R}_v = \frac{8\bar{\nu}}{r^2}\mathfrak{M}_t = \frac{8\bar{\eta}l}{\pi r^4} \qquad \text{(g. cm}^{-4}\text{.sec}^{-1}\text{)} \tag{18}$$

$$\mathfrak{M}_v = \frac{4}{3}\mathfrak{M}_t \qquad \text{(g. cm}^{-4}\text{)}. \tag{19}$$

Cioè per $x \leqq 1$ tanto la $\mathfrak{R}_v$ quanto la $\mathfrak{M}_v$ sono indipendenti da x e quindi dalla frequenza, se $\bar{\eta}$ si mantiene costante. Inoltre la $\mathfrak{R}_v$ è indipen-

(11) I. B. CRANDALL, loc. cit., p. 235. Si è già osservato che in questo campo non si può più calcolare $\bar{\eta}$ con la (5), perchè al tendere a zero del raggio, $\bar{\eta}$ tende a η. Conviene osservare inoltre che, nei limiti di validità delle (18), (19) – cioè per $x \leqq 1$ – non si può più parlare propriamente di risuonatore acustico. Infatti se anche in questo campo si cerca l'espressione del «coefficiente di risonanza» si trova facilmente: $\varepsilon = x^2/6$, ed essendo $x \leq 1$ si ha $x \leq 1/6$. Cioè lo smorzamento è sempre notevolmente superiore a quello critico, che corrisponde come è noto ad $\varepsilon = 1/2$. Naturalmente, quando si va a valori così bassi ε può essere definito solamente come $\omega\mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ e non come $f/\Delta f$.

dente dalla pressione atmosferica perchè, come mostra la (18), essa è funzione di $\overline{\eta}$ ma non di ρ, e la $\overline{\eta}$ dipende solamente dalla temperatura [12].

Per quanto si è visto, è necessario, quindi, ricorrere alle formule generali (10) e (11) solamente per $1 \leqq x \leqq 10$, cioè nel campo intermedio fra quello in cui valgono le (18), (19) e quello in cui valgono le (13), (14).

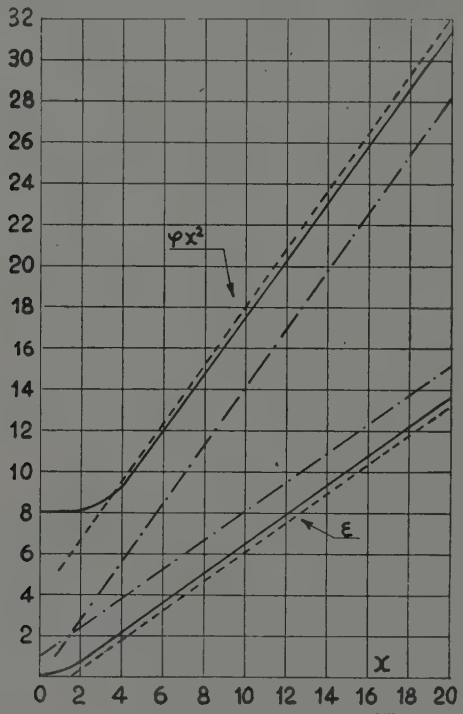


Fig. 2. – Diagrammi di (φx^2) e di $\varepsilon = \dfrac{\omega_0 \mathfrak{M}_v}{\mathfrak{R}_v} = \dfrac{\psi}{\varphi}$ in funzione di x.

——— formule generali (9), (10), (11);
– – – – – – nuove formule approssimate (13), (14), (15);
– • – • – • – formule di Helmoltz–Kirchhoff.

Nella Tabella I sono raccolti i valori di φ, ψ ed ε, calcolati con le (10), (11), (9), per x intero, variabile fra 1 e 10; inoltre sono riportati i valori (φx^2), che per la (7) sono proporzionali ad $\mathfrak{R}_v$. Nella stessa tabella, a titolo di verifica dell'approssimazione data dalle (13), (14), (15), sono riportati anche i valori degli stessi coefficienti per $x = 20$ e per $x = 100$,

(12) Vedi in proposito: P. G. Bordoni, *Influenza della pressione atmosferica sulle impedenze acustiche dovute alla viscosità.* «Ric. Sci. Ric.», *15*, 1945, p. 415.

calcolati sia con tali formule, sia con le formule generali. Il confronto delle nuove formule approssimate (13), (14), (15) – e della (17) ricavata dalla formula di Kirchhoff – con le relazioni generali (9), (10), (11) si vede anche meglio nelle figg. 2 e 3; risulta chiaramente che l'approssimazione data dalle (13), (14), (15) è assai buona, specialmente se si tien conto che l'incertezza nel valore di $\bar{\nu}$ limita la precisione che ci si può aspettare dai

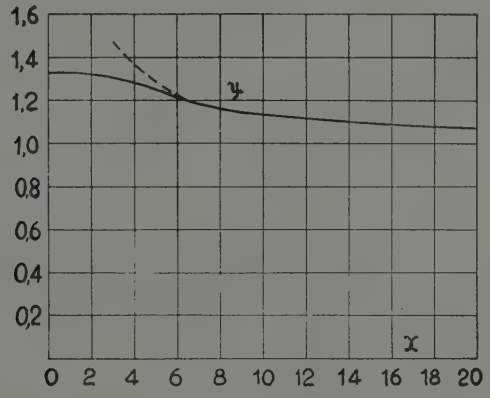


Fig. 3. – Diagramma di ψ in funzione di x.
——— formula generale (11)
– – – – – – – formula approssimata (14)

calcoli sui risuonatori. Anzi, dall'esame delle figure si vede che le formule suddette, sebbene ricavate nell'ipotesi che sia $x = 10$, dànno buoni risultati *anche per valori di x parecchio minori*, fino ad $x = 4 \div 5$, cioè su quasi tutto il campo che può interessare nelle applicazioni ai risuonatori.

3. Impedenza acustica di radiazione. – La *resistenza acustica di radiazione* $\mathcal{R}_r$, per i calcoli sui risuonatori, nei quali la lunghezza d'onda deve essere grande rispetto alle dimensioni del collo, può essere espressa con la relazione:

$$\mathcal{R}_r = \frac{\rho\omega^2}{4\pi c} = \frac{\pi\rho f^2}{c} \qquad (g.\,cm^{-4}.sec^{-1}) \tag{20}$$

dove: c (cm.sec^{-1}) è la velocità del suono nell'aria.

La *massa acustica di radiazione* è: [13]

$$\mathfrak{M}_r = \psi_r \mathfrak{M}_i \qquad (g.\,cm^{-4}) \tag{21}$$

(13) La (22) è stata suggerita da Rayleigh in base a criteri empirici, prendendo un valore alquanto minore di quello (0,825) che compete ad un tubo con schermo acustico infinito. Per ottenere un valore più esatto di ψ_r si può assimilare il risuonatore ad una sfera rigida avente lo stesso volume, e munita di una calotta oscillante avente la stessa area della bocca, come è stato fatto da P. G. Bordoni e W. Gross. *Massa di radiazione*

con

$$\psi_r = 0{,}6\, r/l \,. \tag{22}$$

Le costanti $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{M}$ del collo di un risuonatore, tenendo conto anche della radiazione sono dunque:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_v + \mathfrak{R}_r \qquad (\text{g. cm}^{-4}.\text{sec}^{-1}) \tag{23}$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_v + \mathfrak{M}_r = (\psi + \psi_r)\,\mathfrak{M}_l \qquad (\text{g. cm}^{-4}). \tag{24}$$

4. Calcolo di un risuonatore acustico. – Abbiamo ora quanto è necessario per i calcoli sui risuonatori acustici. Basta infatti ricordare che la rigidezza acustica di una cavità di volume V (cm³) è:

$$\mathfrak{D} = \frac{P_0 \varkappa}{V} \qquad (\text{dine. cm}^{-5}) \tag{25}$$

dove: P_0 (dine. cm^{-2}) = pressione atmosferica, data da: $P_0 = 1{,}012 \cdot 10^6 h/760$ se h è l'altezza barometrica in mm di Hg; $\varkappa = 1{,}40$ è il rapporto fra i calori specifici dell'aria. Si arriva allora alla seguente relazione che dà la frequenza f_0 di un risuonatore in funzione delle sue dimensioni geometriche:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{(\psi + \psi_r)\,\mathfrak{M}_l}} = \frac{c}{2\sqrt{\pi\,(\psi + \psi_r)}} \cdot \frac{r}{\sqrt{V\,l}} \,(\text{Hz}) \tag{26}$$

dove: $c = \sqrt{P_0 \varkappa/\rho}$ è la velocità del suono nell'aria: $c = 33145 + 60{,}9\,\vartheta^\circ$ (cm/sec^{-1}) alla temperatura di ϑ° °C.

Nella (26) ψ è funzione di x, e quindi di f_0; però, varia assai lentamente, restando sempre poco diverso dall'unità. Si può perciò calcolare f_0 servendosi di un procedimento di approssimazioni successive.

Il coefficiente di risonanza è: $\varepsilon = \dfrac{\omega_0 \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}$. Si è visto in fine al § 2 che, per il calcolo di φ e ψ sono quasi sempre sufficienti le formule approssimate (13) e (14).

Per tubi non troppo corti rispetto al raggio, $\mathfrak{Z}_v$ prevale su $\mathfrak{Z}_r$; se allora si trascura $\mathfrak{Z}_r$ si può calcolare immediatamente un valore approssi-

di un diaframma rigido munito di schermo acustico chiuso (in corso di pubblicazione sugli « Atti dell'Accademia dei Lincei »). I valori così ottenuti variano naturalmente da caso a caso, ma sono abbastanza prossimi a $0{,}6\ r/l$. Va inoltre osservato che moltissimi autori prendono per $\mathfrak{M}_r$ la massa di radiazione, da ambedue le facce, di un foro in uno schermo infinito. A parte, però, il fatto che il collo dei risuonatori termina, per solito, con uno schermo assai piccolo rispetto alla lunghezza d'onda, non sembra, comunque corretto considerare la radiazione anche da parte della faccia interna, la quale termina non in un campo di radiazione, ma in una cavità di piccole dimensioni. Si osserva ancora che, come è noto e come si vede ponendo nella (21) le espressioni di ψ_r ed $\mathfrak{M}_l$, la $\mathfrak{M}_r$ dipende solamente dal raggio r, ma non dalla lunghezza l del collo.

mato di ε con la (15), la quale può essere scritta anche nella forma seguente:

$$(27) \qquad \frac{\varepsilon+1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{o anche:} \quad \frac{\varepsilon+1}{\sqrt{f_0}}=\sqrt{\frac{\pi}{\bar{\nu}}}\,r.$$

Questa relazione dice che, se $\mathfrak{Z}_r \ll \mathfrak{Z}_v$, il rapporto $\dfrac{\varepsilon+1}{\sqrt{f_0}}$ – o approssimativamente $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{f_0}}$, se ε non è troppo piccolo – *è proporzionale solamente al raggio r del collo* ed è indipendente dalle altre dimensioni del risuonatore. La fig. 4, che rappresenta, in funzione di x, i valori del rapporto:

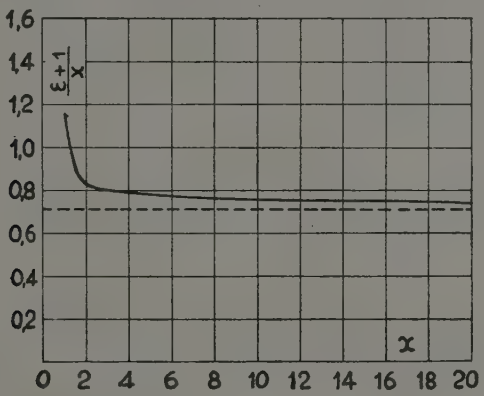


Fig. 4. – Diagramma di $(\varepsilon+1)/x$, in funzione di x.
——— valori calcolati con le formule generali;
– – – – – – – valori calcolati con la (27).

$(\varepsilon+1)/x$, calcolati con le relazioni generali (9), (10), (11), mostra che tale rapporto è sensibilmente costante, come vuole la relazione approssimata (27), fino a valori di x molto bassi; ciò costituisce una ulteriore conferma della validità delle formule approssimate (13), (14), (15), fino a $x = 4 \div 5$.

La (27) permette di determinare univocamente il raggio del collo di un risuonatore che debba avere dati f_0 ed ε. Calcolato r, la (26) diviene una relazione che lega alla f_0 le altre due dimensioni (volume V della cavità e lunghezza l del collo) una delle quali può dunque essere assegnata a piacere.

Combinando la (26) e la (27) si deduce infine che hanno lo stesso coefficiente di risonanza risuonatori per i quali è eguale il prodotto $r^2 f_0$, ossia $r^3/\sqrt{Vl}$ (trascurando le variazioni con f_0 di $\psi + \psi_r$).

5. Conclusioni. – Si è visto che gli effetti della viscosità e della conduzione termica nel collo di un risuonatore acustico, generalmente trascurati, assumono una importanza notevole nelle applicazioni e che spesso hanno

un effetto sensibile non solamente sul cofficiente di risonanza, ma anche sulla frequenza di risonanza $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{M}}}$. Per risuonatori aventi un collo di sezione circolare, si sono date formule valevoli senza le consuete limitazioni nel raggio del collo, mediante le quali si può tener conto degli effetti suddetti.

Si sono poi ricavate nuove formule approssimate assai più semplici di quelle generali e si è mostrato che esse dànno una approssimazione sufficiente su tutto il campo che interessa nelle applicazioni ai risuonatori. Dal confronto fra i valori del *coefficiente di resistenza* φ e del *coefficiente di massa* ψ di un tubo calcolati con queste nuove formule e con quella di Helmholtz–Kirchhoff si è visto che quest'ultima dà per ψ valori sensibilmente esatti, mentre per φ dà valori tanto più in difetto quanto più piccolo è il raggio del tubo (rispetto alla lunghezza d'onda), fino ad oltre il 20% in meno per i coefficienti di risonanza più bassi.

Servendosi delle nuove formule approssimate si sono infine ricavate semplici relazioni per il calcolo della frequenza f_0 e del coefficiente di di risonanza ε dei risuonatori in funzione delle loro dimensioni geometriche, tenendo conto anche delle radiazione.

Fisica. — *Determinazione del numero medio di urti che un neutrone termico subisce in acqua prima della cattura.* Nota di G. Cortini e F. Molina [1], presentata [2] dal Corrisp. G. C. Trabacchi.

1. Generalità. - Per descrivere il moto dei neutroni termici in seno ad una sostanza idrogenata, si può partire dall'ordinaria equazione della diffusione. Basta inserire in essa due termini: il primo per tener conto della cattura da parte dei nuclei della sostanza idrogenata (« morte » dei neutroni): il secondo per tener conto del fatto che continuamente neutroni più veloci vengono per urto rallentati ed entrano così a far parte del « gas » di neutroni termici di cui si vuol descrivere il moto (« generazione » dei neutroni termici).

Se $n(x, y, z)$ rappresenta la densità dei neutroni termici ed $f(x, y, z)$ la loro generazione (talchè $f(x, y, z) \cdot dV$ esprima il numero di neutroni che ogni secondo divengono termici entro il volumetto dV), l'equazione che ne risulta si scrive, nel caso stazionario [3]:

$$(1) \qquad D\Delta_2 n(x, y, z) - \frac{1}{\tau} n(x, y, z) = -f(x, y, z)$$

(1) Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Fisica Nucleare, Roma.

(2) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(3) Vedi, per esempio, E. Amaldi e G. C. Wick, *Appunti di Fisica Nucleare*, Lit. Romolo Pioda, 1946, Roma, par. 3, 54.

dove τ è la vita media dei neutroni termici prima della cattura, e D è la cosidetta costante di diffusione, la quale è legata – secondo la teoria cinetica – alla velocità media $\bar{v}$ dei neutroni termici ed al loro cammino libero medio Λ dalla relazione

$$D = \frac{\Lambda \bar{v}}{3} \qquad (1')$$

Sulla base della (1) è possibile svolgere la teoria di una qualsiasi esperienza di diffusione stazionaria di neutroni, mediante un'opportuna scelta della forma analitica della funzione di generazione $f(x, y, z)$ e delle condizioni al contorno. Ora, nella (1) compare in modo essenziale il prodotto $D\tau$, che è legato (cfr. più oltre, la (4)) al numero medio N di urti che un neutrone termico subisce prima di venir catturato. È quindi chiaro che i risultati delle esperienze di diffusione saranno legati a questo numero N, e che pertanto sarà possibile una determinazione di N basata appunto su esperienze di diffusione. Supponiamo ad esempio di avere una massa di sostanza idrogenata nella quale si possa inserire una grande lastra di cadmio piana, così spessa da assorbire praticamente tutti i neutroni termici che vi incidono. Supponiamo inoltre che nella nostra sostanza idrogenata la generazione dei neutroni termici sia *omogenea*, talchè la $f(x, y, z)$ si riduca ad una costante. In tale ipotesi, realizzabile in pratica solo con grossolana approssimazione, detto A un punto della superficie della lastra di Cd, e dette n, n_0 le densità dei neutroni in A rispettivamente in presenza e in assenza della lastra stessa, il rapporto $F = n/n_0$ risulta legato in modo semplicissimo al numero N. Precisamente si ha [4]:

$$\frac{1}{F} = \sqrt{\frac{\bar{v}\tau}{\Lambda}} + 1 = \sqrt{N} + 1 \quad ; \quad N = \frac{\bar{v}\tau}{\Lambda} = \left(\frac{1}{F} - 1\right)^2. \qquad (2)$$

Oltre che con la teoria, che possiamo chiamare « fenomenologica », basata sulla (1), il problema del moto dei neutroni in un mezzo idrogenato può trattarsi in modo più aderente alla realtà fisica partendo direttamente dall'equazione di Boltzmann [5]. Questo secondo metodo, che tanto per intenderci chiameremo « esatto », permette tra l'altro di tener conto della possibilità che l'urto neutrone – protone non sia isotropo, talchè risulti diverso da zero il cosidetto coefficiente di correlazione $P = \overline{\cos \alpha}$, ove α è l'angolo tra i due vettori che rappresentano la velocità del neutrone, rispettivamente prima e dopo l'urto. Orbene, per $P = 0$ (urto isotropo) con questo metodo si ottengono, nel caso sopra descritto, risultati praticamente coincidenti con le (2) mentre per $P \neq 0$ le equazioni si complicano e ne diviene impossibile

(4) Ivi, par. 3, 62.
(5) Ornstein e Uhlenbeck, « Physica », *4*, 478, 1937.

una risoluzione in forma chiusa. D'altra parte si potrebbe vedere [6] che è possibile ottenere risultati approssimati partendo non dall'equazione « esatta » ma da quella « fenomenologica » – cioè dalla (1) – pur di sostituire il cammino libero medio Λ l'espressione $\Lambda^* = \frac{\Lambda}{1 - P}$. Il valore di P si può desumere approssimando con una funzione del tipo $1 + a \cos \alpha$ una curva di distribuzione angolare calcolata da Arley [7], sulla base di ipotesi abbastanza verosimili relative al legame chimico degli atomi d'idrogeno. Si trova così $P = 0{,}13$, da cui:

$$\frac{1}{1 - P} = \frac{\Lambda^*}{\Lambda} = 1{,}15 .$$

Facendo uso di questa correzione, le (2) divengono:

$$(2') \quad \frac{I}{F} = \sqrt{\frac{\bar{v}\tau}{\Lambda^*}} + 1 = \sqrt{N(1 - P)} + 1 \quad ; \quad N = \frac{1}{1 - P}\left(\frac{I}{F} - 1\right)^2 .$$

D'altra parte il numero N è determinabile mediante misure di sezione d'urto. Precisamente risulta:

$$(3) \qquad N = \frac{\sum n^i \sigma_s^i}{\sum n^i \sigma_c^i}$$

dove n^i sono i numeri di atomi per cm³ dei vari elementi presenti nella nostra sostanza idrogenata, e σ_s^i, σ_c^i sono le rispettive sezioni d'urto per sparpagliamento e per cattura.

Appare quindi di una certa importanza una misura di N basata sulla cattura di neutroni da parte di una lastra di Cd, ma *indipendente dall'ipotesi della generazione omogenea*; è infatti chiaro che una misura siffatta, confrontata con il valore che si ottiene dalla (3), può fornire utili indicazioni se e in quale misura i valori misurati delle sezioni d'urto si accordino con il valore di N misurato direttamente e con il valore di P desunto dai calcoli di Arley.

2. Teoria. – Un'esperienza del tipo sopra descritto, con lastra di Cd piana, fu eseguita da Amaldi e Fermi [8] (cfr. § 6). Noi abbiamo cercato di ripetere l'esperienza di Amaldi e Fermi in condizioni tali da renderci indipendenti dall'ipotesi della generazione omogenea. Ciò avrebbe potuto farsi trovando una conveniente espressione analitica per la funzione di generazione $f(x, y, z)$ e per le condizioni al contorno, e integrando quindi la (1). Ma nel caso di una sorgente di neutroni veloci praticamente puntiforme e

(6) Vedi per esempio Jeans, *The Dynamical Theory of Gases*. Cambridge 1935, 275.

(7) N. Arley, « Deb. Kgl. Dansker Vidensk. Selskab., Math. Phys. Medd. », XVI, *1*, 1938.

(8) E. Amaldi and E. Fermi, « Phys. Rev. », *50*, 10, 1936.

di una lastra di Cd piana, si otteneva per tal via un'espressione analitica assai complicata e di malagevole calcolo, in cui l'incognita N compariva sotto vari segni di integrale, ciascuno dei quali andava calcolato numericamente.

Abbiamo pertanto preferito scegliere una disposizione sperimentale in cui fosse realizzata una simmetria tale che tutte le grandezze implicate nella (1) dipendessero soltanto dalla distanza r da una retta fissa z.

Rinviando al prossimo paragrafo la descrizione del dispositivo sperimentale, mostreremo ora come il calcolo di F risulti in tal caso molto semplice.

Esplicitando infatti l'operatore Δ_2, scritto in coordinate cilindriche, la (1), tenuto conto che le funzioni f ed n dipendono solo da r, diviene:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dn}{dr}\right)-\frac{1}{l^2}n=-s(r) \tag{1''}$$

in cui si è posto $s(r)=\frac{1}{D}f(r)$, e la costante $l\,(=\sqrt{D\tau}=$ tratto di diffusione) è legata ad N e al cammino libero medio Λ dalla formula:

$$N=\frac{\bar{v}\tau}{\Lambda}=\frac{1}{\Lambda}\cdot\left(\frac{3\,l^2}{\Lambda^*}\right)=\frac{3}{\Lambda\cdot\Lambda^*}D\tau. \tag{4}$$

Se indichiamo ora con $n_0(r)$ la soluzione imperturbata della (1'') cioè quella soluzione particolare della (1'') che esprime l'andamento della $n(r)$ in assenza di Cd, l'integrale generale della (1'') risulta esprimibile nella forma:

$$n(r)=n_0(r)+a\,I_0\left(\frac{r}{l}\right)+b\,K_0\left(\frac{r}{l}\right) \tag{5}$$

con a, b = costanti arbitrarie, I_0, K_0 = soluzioni indipendenti dell'equazione di Bessel ottenuta annullando il primo membro della (1'').

La soluzione perturbata dalla presenza di una lastra di Cd cilindrica di raggio R, avente l'asse coincidente con il nostro asse z (talchè la simmetria cilindrica seguiti a sussistere), sarà dunque del tipo (5), le costanti a, b essendo determinate dalle condizioni al contorno. Se ci riferiamo alla zona esterna al nostro cilindro perturbatore, tali condizioni risultano:

$$n(r)\to 0 \qquad \text{per} \quad r\to\infty \tag{6a}$$

$$D\frac{dn}{dr}=\frac{n\bar{v}}{\sqrt{3}}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\Lambda^*}{\sqrt{3}}\frac{dn}{dr}-n=0 \qquad \text{per} \quad r=R. \tag{6b}$$

Quest'ultima condizione risulta scrivendo che la densità di corrente dei neutroni $D\frac{dn}{dr}$ è uguale al numero di neutroni contenuto in un prisma di base unitaria e altezza $\bar{v}$; il fattore $\sqrt{3}$ deriva dalla media eseguita su tutte le possibili orientazioni della velocità. Tenuto conto che la funzione $I_0(x)$

tende all'infinito con x, e ricordando che tra le funzioni di Bessel $K_0(x)$, $K_1(x)$ sussiste la relazione $\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$, segue dalle (6):

$$(7)\quad \begin{cases} a = 0 \quad , \quad b = \dfrac{\frac{\Lambda^*}{\sqrt{3}} n_0'(R) - n_0(R)}{\frac{\Lambda^*}{\sqrt{3}} \frac{1}{l} K_1\left(\frac{R}{l}\right) + K_0 \frac{R}{l}}, \quad \text{e di quì:} \\ F(r) = \dfrac{n(r)}{n_0(r)} = 1 - \dfrac{1 - \frac{\Lambda^*}{\sqrt{3}} \frac{n_0'(R)}{n_0(R)}}{\frac{\Lambda^*}{\sqrt{3}} \frac{1}{l} K_1\left(\frac{R}{l}\right) + K_0\left(\frac{R}{l}\right)} \frac{n_0(R)}{n_0(r)} K_0\left(\frac{r}{l}\right). \end{cases}$$

In pratica noi abbiamo misurato F solo a ridosso del cilindro di Cd cioè per $r = R$.

3. Dispositivo sperimentale. – La nostra sorgente di neutroni veloci consisteva in un preparato Ra + Be di 430 millicurie, contenuto in una provetta cilindrica lunga 9 cm. e avente un diametro di circa 1 cm. Per ottenere la simmetria cilindrica abbiamo usato un dispositivo meccanico comandato da un motore, mediante il quale la provetta contenente il preparato si muoveva lungo una retta verticale alternativamente verso l'alto e verso il basso, su un percorso di circa 56 cm, e con una frequenza di circa 15 oscillazioni complete al minuto (9).

In tal modo era realizzata una sorgente di neutroni veloci che si poteva considerare con buona approssimazione lineare e di densità lineare costante, purchè il tempo (circa due secondi) impiegato dal preparato a compiere mezza oscillazione fosse piccolo rispetto alla vita media del rivelatore. Come è ovvio, la sorgente lineare così ottenuta si sarebbe potuta realizzare più semplicemente sostituendo all'integrazione meccanica effettuata dal nostro apparecchio un'integrazione numerica, vale a dire facendo successive misure a sorgente ferma in varie posizioni dell'asse z e integrando i singoli risultati. Ma in tal modo si sarebbero avute tali differenze di intensità tra le misure con Cd a sorgente lontana e quelle senza Cd a sorgente vicina da andare incontro a inconvenienti dovuti alla non linearità dell'apparato registratore.

Come rivelatori abbiamo usato quattro lastrine di rodio (vita media di circa 1 min., soddisfacente quindi alla condizione sopra accennata) di $\frac{1,44}{12,5}$ gr./cm^2, la cui attività, dopo un irraggiamento di un minuto, veniva misurata con un contatore di G. M. collegato ad una registrazione alla Neher e ad una scala da 8 del tipo Piccioni-Conversi. Le misure di attività dura-

(9) Ringraziamo il sig. Mancini per la fabbricazione e la messa a punto del dispositivo meccanico.

vano un minuto e venivano iniziate dopo un tempo variabile da circa 20 sec. a 55 sec., a partire dalla fine dell'irraggiamento. Mediante le note formule tutte le misure venivano riportate a condizioni standard.

La sorgente si muoveva all'interno di un tubo di ottone di 22 mm. di diametro, il quale si trovava nell'asse di una vasca cilindrica piena di acqua, alta 70 cm. e del diametro di 52 cm. Sul tubo di ottone potevano scorrere i sostegni di un cilindro di Cd avente un diametro esterno di 6,2 cm (R = 3,1 cm.), una lunghezza di 51 cm. e uno spessore di 0,52 gr./cm.^{2}, nonchè di un cilindro di Al avente identiche caratteristiche geometriche. Lo scopo di quest'ultimo cilindro era di avere, nelle misure senza Cd, condizioni geometriche identiche a quelle delle misure con Cd. Durante l'irraggiamento i rivelatori venivano posti una volta sulla superficie del cilindro di Al (all'altezza del centro del suo asse, coincidente con il centro della sorgente lineare), una volta sul cilindro di Cd in posizione analoga, una volta sul medesimo cilindro di Cd ma con uno schermo esterno costituito da un'altra lastrina di Cd, anch'essa di 0,52 gr./cm.^{2}. Indicando con A , B , C le attività misurate in queste tre condizioni, risulta:

$$\frac{1}{F(R)} = \frac{A - C}{B - C} \tag{8}$$

La misura C fornisce infatti l'attività del Rh dovuta ai neutroni di risonanza (che non sono catturati dal Cd) e va pertanto detratta dall'attività totale per ottenere l'attività dovuta ai soli neutroni termici.

Oltre al rapporto F (R) abbiamo determinato l'andamento $n_0(r)$ della densità dei neutroni (in assenza di Cd) in funzione della distanza r dalla sorgente lineare. La curva $n_0(r)$ ci è stata infatti necessaria per poter determinare il rapporto $\frac{n_0'(R)}{n_0(R)}$ che compare nella (7); in queste misure ci siamo serviti di una camera di ionizzazione connessa ad un elettrometro di Edelmann; per il resto le condizioni sperimentali erano identiche a quelle già descritte, salvo la rimozione di entrambi i cilindri di Cd e di Al.

4. Risultati delle misure. – La curva imperturbata dalle distanze $n_0(r)$ è rappresentata in fig. 1; da essa abbiamo dedotto, approssimandola con una parabola di 2° grado, e applicando il metodo dei minimi quadrati, il valore: $n_0'/n_0 = 0{,}012 \pm 0{,}004$ cm^{-1}.

Per determinare ciascuna delle grandezze a secondo membro della (8) abbiamo eseguito circa 80 misure, alternando sia i quattro rivelatori, sia le tre misure A , B e C. Il risultato ottenuto è:

$$\frac{1}{F(R)} = 6{,}32 \pm 0{,}055 \,. \tag{9}$$

L'errore da noi riportato è l'errore statistico. Abbiamo anche calcolato l'errore quadratico medio che risultava prendendo separatamente tutte le

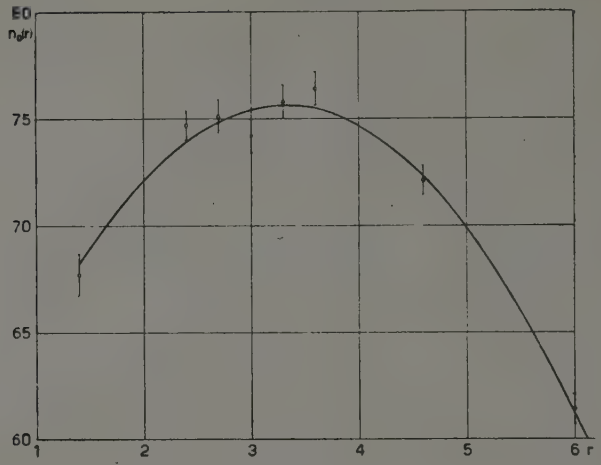


Fig. 1.

misure ottenute con ciascuno dei quattro rivelatori e confrontando i valori di F ottenuti con ciascuna di queste quattro serie di misure. L'errore così ottenuto è risultato non maggiore (anzi alquanto più piccolo) dell'errore statistico; è questa una buona indicazione dell'assenza di errori sistematici.

5. Correzioni. – Abbiamo preso in considerazione le seguenti possibili cause di errori sistematici.

a) *Non linearità dell'apparecchio registratore.* – Misure accurate ci hanno mostrato che la correzione in parola conduceva ad aumentare il valore (9) di $\frac{1}{F(R)}$ dell'1,0%, portandone il valore da 6,32 a 6,39.

b) *Lunghezza finita della sorgente lineare.* – Da misure eseguite a sorgente ferma in varie posizioni della sua corsa, abbiamo veduto che l'andamento dell'attività del rivelatore in funzione della differenza di quota rispetto alla sorgente, entro gli errori sperimentali, era rappresentato bene da curve esponenziali, sia per le misure del tipo A che per le misure del tipo B, e precisamente con coefficienti dell'esponente uguali. Inoltre, l'attività ottenuta con sorgente ferma all'estremo della corsa era dell'ordine del 0,8% rispetto a quella ottenuta con sorgente al centro. Abbiamo concluso che la correzione era trascurabile.

c) *Perturbazione della densità dei neutroni da parte del rivelatore.* – Il rivelatore, catturando neutroni, perturba localmente la loro densità. Questo effetto si fa sentire soltanto nelle misure eseguite sulla superficie del cilindro di Al; per quelle in cui il rivelatore è a ridosso del cilindro di Cd l'effetto non si fa sentire in quanto ogni neutrone incidente sul cilindro è in ogni

caso catturato, non importa se dal rivelatore o dal Cd. La perturbazione apportata nella densità dei neutroni da un rivelatore è stata calcolata recentemente da Corinaldesi [10], sulla base della teoria fenomenologica della diffusione, nel caso di rivelatori circolari, e per diversi valori del rapporto $\frac{\rho}{l}$, essendo ρ il raggio del rivelatore ed l il tratto di diffusione già definito. Noi abbiamo usato le sue formule, assumendo il raggio corrispondente ad un'area circolare uguale a quella delle nostre lastrine di Rh (che erano rettangolari). Questa correzione – che chiameremo d'ora in poi correzione di rivelazione – risulta dell'ordine del 35 %. Non possiamo però darne il valore esatto prima di aver meglio discusso la teoria da noi usata e i risultati sperimentali, in quanto la correzione varia al variare del tratto di diffusione l cioè, per la (4), al variare di N.

6. Discussione. - Tra F ed N abbiamo dunque due relazioni, e cioè la (7) da un lato, e dall'altro la relazione che si ottiene applicando al valore sperimentale di F la correzione di rivelazione (che come si è detto, dipende da N). Queste due relazioni corrispondono alle due curve della fig. 2, le quali forniscono per N, con la loro intersezione, di valore:

$$N = 127 \pm 5 . \qquad (10)$$

L'errore deriva sia dagli errori sperimentali da cui sono affetti i valori di $F(R)$ e di $\frac{n_0'(R)}{n_0(R)}$, sia dall'applicazione della correzione di rivelazione.

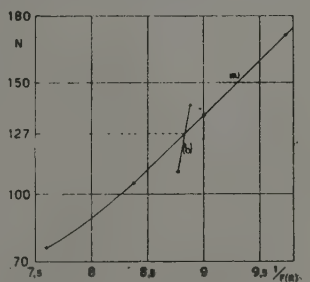


Fig. 2.

La curva (*a*) corrisponde alla relazione (7); la curva (*b*) corrisponde alla relazione ottenuta applicando al valore sperimentale di F la correzione di rivelazione.

Il valore (10) può essere confrontato con quello che si ottiene applicando la (2′) ai risultati sperimentali di Amaldi e Fermi, che trovarono $1/F = 9{,}7$. È però necessario applicare preventivamente a questo valore la correzione di rivelazione. In tal modo si trova $N \sim 110$ [11]. L'errore non è determinabile sulla base dei dati forniti nella citata Memoria da Amaldi e Fermi.

Tutti questi risultati sono ottenuti assumendo per Λ il valore 0,319 cm. (affetto da un errore dell'1 %) che si deduce dalle misure di sezione d'urto per sparpagliamento, (cfr. più oltre), e per P il valore che si desume dai calcoli di Arley.

(10) E. Corinaldesi, «N. Cim.», 1946, in corso di pubblicazione. Ringraziamo il dott. Corinaldesi per l'aiuto datoci nel calcolo della correzione in parola.

(11) Il valore N = 124 dato da Amaldi e Fermi fu ottenuto applicando una correzione di rivelazione basata sul concetto di «albedo», meno approssimata di quella da noi usata.

Vediamo ora quale sia la concordanza del valore (10) di N con le misure di sezione d'urto. Nel caso dell'acqua la (3) assume la forma:

$$N = \frac{\sigma_s^{(H)} + \frac{1}{2}\sigma_s^{(O)}}{\sigma_c^{(H)}} \cdot \tag{3'}$$

Dalle misure di Carroll [12] e di Goldhaber e Briggs [13] il numeratore di questa formula risulta uguale a $46{,}7 \cdot 10^{-24}$ cm² e con un errore di circa l'1 %. Meno precise sono le misure fino ad ora pubblicate di σ_c. Il valore più attendibile è quello che si desume, attraverso la formula

$$\sigma_c = \frac{1}{\tau m \bar{v}} \tag{11}$$

(in cui m rappresenta il numero di nuclei di idrogeno per cm³), dalle misure di Manley, Haworth e Luebke [14], che forniscono $\tau = 209 \pm 9$ μ sec. Senonchè in questa formula viene introdotto un errore notevole a causa dell'incertezza circa il valore che bisogna assumere per $\bar{v}$.

Assumendo, come fanno Manley e collaboratori, il valore $\bar{v} = 2200$ m/sec (il quale risulta da una distribuzione Maxwelliana, tenendo conto dell'andamento $\frac{1}{v}$ delle sezioni d'urto [15]), si trova $\sigma_c = 0{,}33 \cdot 10^{-24}$ cm²; ma gli AA. non dànno l'errore da cui è affetta questa determinazione di σ_c, proprio a causa dell'incertezza circa il valore che bisogna assumere per $\bar{v}$.

Dalle nostre misure invece risulterebbe:

$$\sigma_c = (0{,}367 \pm 0{,}015) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Tenuto conto dell'incertezza su $\bar{v}$ e d'altra parte delle approssimazioni implicite nell'uso della teoria fenomenologica della diffusione, si può ritenere che vi sia buon accordo tra i due valori di σ_c sopraindicati, e quindi tra la nostra esperienza e il valore $P = 0{,}13$ calcolato da Arley.

Teniamo ad esprimere la nostra più viva gratitudine al prof. Amaldi e al prof. Ageno dell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma per il prezioso aiuto da loro offertoci nella progettazione, esecuzione, e discussione del nostro lavoro; ringraziamo inoltre la Direzione dell'Istituto superiore di Sanità per averci ospitato e dato in uso la sorgente di neutroni.

(12) Carroll, « Phys. Rev. » *60*, 702, 1941.
(13) Goldhaber and Briggs, « Proc. Roy. Soc. », A *162*, 127, 1937.
(14) Manley, Haworth and Luebke, « Phys. Rev. », *61*, 152, 1942.
(15) Goldsmith e Rasetti, « Phys. Rev. », *50*, 328, 1936.

Chimica. — *Nuove ricerche sull'azione batteriostatica dei chinoni* [1]. Nota di E. Del Pianto e G. B. Marini-Bettòlo, presentata [2] dal Socio G. Bargellini.

Le pubblicazioni riguardanti le proprietà batteriostatiche dei chinoni diventano sempre più numerose, e sempre più interessante si appalesa anche l'interpretazione del meccanismo d'azione di questi in rapporto a quello di altri batteriostatici.

Riguardo al meccanismo d'azione, noi avevamo osservato, in due precedenti lavori [3], che le proprietà batteriostatiche dei chinoni si potevano attribuire al fatto che questi composti costituiscono dei sistemi di ossido-riduzione. La stessa ipotesi era stata espressa da J. E. Page e F. A. Robinson [4] in un lavoro, che, solo ora, dopo il ripristinato scambio culturale con l'estero, ci è stato possibile conoscere attraverso la citazione fatta da P. Atkins e J. L. Ward [5]. J. E. Page e F. A. Robinson ammettono che, tra i chinoni, solamente quelli il cui potenziale è compreso tra $-0{,}10$ e $+0{,}15$ Volt, possiedono attività batteriostatica, mentre rilevano che tale attività non è posseduta da molti composti usati come indicatori di ossido-riduzione, che pur rientrano in questi limiti di potenziale.

Questa affermazione non trova conferma nelle citate nostre esperienze nelle quali i chinoni impiegati, pur possedendo un potenziale compreso tra $+0{,}393$ e $-0{,}140$ Volt, presentano tutti attività batteriostatica.

Recentemente anche A. Albert, S. D. Rubbo e Coll. [6], studiando le proprietà antibatteriche di numerosi derivati acridinici, hanno pensato che potesse essere messo in causa il potenziale di ossido-riduzione. Essi finiscono però con l'escluderlo, e ammettono invece che le proprietà antibatteriche di detti acridinici siano piuttosto in relazione con la possibilità di tautomerizzazione posseduta da tali composti.

Vi sono ancora molti altri lavori recenti sull'attività batteriostatica dei chinoni. Rimandiamo per una più ampia bibliografia al lavoro « in extenso »; segnaliamo qui soltanto M. Barber [7], G. E. Glock, R. H. Thorp, G. Ungar

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico dell'Università di Roma. Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(3) G. B. Marini-Bettòlo e E. Del Pianto, « Pont. Acc. Sc. Comm. », presentati il 7 aprile e l'8 ottobre 1945 e in corso di stampa. Vedi anche Nota riassuntiva sui « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, (1), 90 (1946).

(4) J. E. Page e F. A. Robinson, « Brit. Journ. ex. path. », *24*, 89 (1943).

(5) P. Atkins e J. L. Ward, « Brit. Journ. ex. path. », *26*, 120 (1945).

(6) A. Albert, S. D. Rubbo, R. J. Goldacre, M. E. Davey, J. D. Stone, « Brit. Journ. ex. path. », *26*, 160 (1945).

(7) M. Barber, « Journ. path. bact. », *55*, 434 (1944).

e R. Wien [8], che studiano l'attività « in vivo » del 4–6–dimetossitoluchinone concludendo per una assenza di proprietà chemioterapiche; Atkins e Ward [5] che, sperimentando « in vitro » vari esteri del 2-metil-1–4–naftoidrochinone, trovano che l'estere succinico è il più attivo in quanto si saponifica assai facilmente ridando per ossidazione il chinone corrispondente; e infine, fra gli Autori italiani, G. Jacini [9], G. Del Vecchio e Coll. [10], G. Carrara e L. Lorenzini [11].

Dato l'interesse che riveste l'argomento, abbiamo desiderato continuare in queste ricerche soffermandoci per ora sullo studio del solo fenantrenchinone, che è il più attivo tra i numerosi composti da noi precedentemente esaminati. Le esperienze, che riassumiamo in breve, riguardano tre argomenti distinti.

a) In una prima serie, abbiamo ricercato quale fosse il destino del fenantrenchinone per azione dello sviluppo del batterio. Ci siamo serviti di una reazione cromatica molto sensibile che il fenantrenchinone dà in presenza di pentacloruro di antimonio, reazione usata da noi a scopo puramente qualitativo. Abbiamo potuto così osservare che il fenantrenchinone scompare dal terreno di coltura dopo 48 ore di sviluppo batterico, mentre i controlli effettuati con brodo sterile, danno il chinone presente anche dopo molti giorni di permanenza in termostato. Abbiamo già fatto notare [3] come alcuni chinoni si possono combinare con gli ammino–acidi, mentre il fenantrenchinone non ne è capace. Non si può pertanto attribuire ad un simile meccanismo la scomparsa del fenantrenchinone dal terreno di coltura.

b) In una seconda serie di esperienze, abbiamo eseguito tentativi di solubilizzazione del fenantrenchinone, e saggiato le attività batteriostatiche dei composti solubili; ciò abbiamo fatto in vista di uno studio « in vivo »: notiamo che nei precedenti lavori avevamo già sperimentato nell'azione batteriostatica, derivati solubili solfonici e amminici del fenantrenchinone [3], ma li avevamo trovati scarsamente attivi. Abbiamo perciò preparato il sale sodico dell'acido fenantrenchinon–3–carbossilico, il derivato bisolfitico del fenantrenchinone e l'estere succinico del corrispondente idrochinone (questo ultimo non descritto in letteratura), ed è risultato che il primo dei tre possiede in vitro un'attività batteriostatica molto bassa verso lo Stafilococco aureo; il derivato bisolfitico, è attivo alla concentrazione di 1/100.000; l'estere succinico appare invece altrettanto attivo quanto il fenantrenchinone (1 : 200.000), forse perchè si idrolizza facilmente in brodo, riossidandosi.

(8) G. E. Glock, R. H. Thorp, G. Ungar e R. Wien, « Biochem. Journ. » *39*, 308 (1945).

(9) G. Jacini, « Chimica e Industria », *27*, 199 (1945).

(10) G. Del Vecchio, V. Del Vecchio e R. Argenziano, nota I e II presentate alla Soc. Biol. Sper. di Salerno il 5, 1, 1946.

(11) G. Carrara e L. Lorenzini, « Chimica e Industria », *28*, 15 (1946).

Tentativi di solubilizzazione del fenantrenchinone a mezzo degli acidi desossicolico e deidrocolico hanno dato risultati di scarso interesse.

c) In una terza serie di esperienze, infine, abbiamo desiderato vedere se i chinoni vengono inibiti, nella loro azione batteriostatica, dalla cisteina, analogamente a quanto Cavallito ed altri Autori [12] hanno osservato per la piocianina, penicillina, clavacina, ecc.

Dalle esperienze eseguite risulta che la cisteina inibisce effettivamente l'azione del fenantrenchinone, quando venga aggiunta al terreno di coltura alla concentrazione di 1/2.000.

Per interpretare tale azione, si può ammettere che il chinone venga inibito perchè la cisteina, tendendo ad ossidarsi, sposta l'equilibrio chinone–idrochinone verso la forma idrochinonica, meno attiva. Pertanto i chinoni funzionerebbero inibendo i processi di riduzione legati con il metabolismo del batterio. Questo è confermato da esperienze da noi eseguite con l'acido ascorbico, esperienze che dimostrano come anche questo composto inibisca l'azione batteriostatica del fenantrenchinone.

L'ipotesi sopra cennata è in accordo anche con quelle di Cavallito e Coll. [12] e di Fildes [13], le quali si riferiscono a casi particolari dell'ipotesi generale di azione competitiva tra sostanze antibatteriche e fattori di accrescimento o enzimi, indispensabili allo sviluppo dei batteri. Questi Autori ammettono che enzimi contenenti gruppi —SH indispensabili per l'accrescimento di microorganismi, vengano bloccati da sostanze antibatteriche, e che, quindi, l'aggiunta di cisteina sposti l'equilibrio a favore dell'enzima. Il fenantrenchinone, che non è capace di combinarsi con i gruppi —SH, come fanno i para–chinoni, potrebbe agire in modo analogo a quanto Fildes ammette per numerosi coloranti [14], mantenendo, con la sua azione ossidante, i gruppi R—SH dell'enzima nella forma ossidata R—S—S—R.

È il caso di porre in evidenza come tutte queste ipotesi facciano risaltare l'importanza del potenziale di ossido–riduzione nel meccanismo batteriostatico di molte sostanze.

Dai nostri dati sperimentali possiamo concludere che:

1) il fenantrenchinone scompare dal terreno di coltura sotto l'azione dello sviluppo batterico;

2) tra i derivati solubili del fenantrenchinone, l'estere succinico e il complesso bisolfitico sono i più attivi;

3) la cisteina e l'acido ascorbico inibiscono « in vitro » l'attività batteriostatica del fenantrenchinone.

(12) C. J. Cavallito, J. H. Bailey, T. H. Haskell, W. F. Warner, « Bacter. Rev. », *9*, 62 (1945).

(13) P. Fildes, « Brit. Journ. ex. path. », *21*, 67 (1940).

(14) P. Fildes, « Lancet », 238, 955 (1940).

Elettrochimica. — *Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi* [1]. Nota [2] di G. Bianchi, presentata dal Corrisp. O. Scarpa.

Numerose ricerche sperimentali hanno mostrato che al passaggio della corrente elettrica nei metalli liquidi corrisponde non solo un flusso di elettroni ma anche un flusso di ioni. Questi, nel mercurio e nelle amalgame liquide, portano cariche positive e cariche negative [3]. È noto che il trasporto elettrico di ioni pur avviene in alcuni metalli solidi [4].

Ne segue che fra due metalli eterogenei a contatto, capaci di sciogliersi l'uno nell'altro (allo stato liquido o allo stato solido), debbono avvenire, indipendentemente dai noti fenomeni di diffusione, passaggi di ioni dall'uno all'altro metallo allorquando la superficie di contatto è attraversata dalla corrente elettrica. Che ciò debba avvenire corrisponde al fatto dimostrato anche sperimentalmente dal prof. O. Scarpa, per cui in speciali circuiti chiusi completamente metallici, possedenti temperatura uniforme, comprendenti metalli eterogenei a contatto opportunamente disposti (ad esempio nel circuito: *rame*|*mercurio*|*zinco*|*rame*) la somma algebrica delle forze elettromotrici di contatto può non essere nulla (come esigerebbe la seconda legge di Volta che vale soltanto nel caso in cui la conduttività elettrica è unicamente di tipo elettronico) e quindi possono venir generate correnti elettriche persistenti [5] analogamente a quanto avviene in speciali circuiti

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 giugno 1946. Presentata nella seduta del 15 giugno 1946.

(3) Vedere ad esempio in: R. Kremann, *Elektrolyse geschmolzener Legierungen*. «Samm. Chem. und Chem. Techn. Vorăge», vol. 28 (1926); K. E. Schwarz, *Elektrolytische Wanderun in flüssingen und festèn Metallen*. Lipsia (1940).

(4) Rieke, «Phys. Z.», *2*, 639 (1901); Kinsky, «Z. Elektrochem.», *14*, 406 (1908); Kremann, «Mh. f. Chem.», *44*, 383, 401 (1923); Mayr, «Rend. Ist. Lom. Scienze e Lettere». II, *55*, 567 (1922) e *57*, 381 (1924); Cohen u. Specht, «Z. Physik.», *62*, 1 (1930); Wever u. Muller, «Inst. Eisenforshg.», 11, 193 (1930); Bartocci, Tesi manoscritta (Lab. di Elettrochimica del Politecnico di Milano) (1932); Jost, «Z. Angew. Chem.», *45*, 544 (1932) e Jost u. Linhe, «Z. Physik. Chem.», B. 29, 127 (1935); Seith u. Etzold, «Z. Elektrochem.», *40*, 829 (1934) e *41*, 122 (1935); Seith u. Kubaschewski, «Z. Elektrochem.», *41*, 551 (1935); Nehlep-Jost-Linke, «Z. Elektrochem.», *42*, 150 (1936); Seith u. Daur, «Z. Elektrochem.», *44*, 256 (1938). Vedere anche in: W. Seith, *Diffusion in Metallen*. Berlino (1939).

(5) O. Scarpa, «Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze», anno 1939. Vedi più particolarmente nella Memoria: *Pile Metalliche Isotermiche*, «Reale Accademia d'Italia», vol. I, anno 1930 e nelle note in «Zeit. Phys. Chem.», *153*, 225, anno 1931 e in «Journal de Physique», anno 1934 (*Les limites de validité de la loi des tensions électriques dans les métaux*).

formati unicamente con elettroliti differenti posti fra di loro in diretto contatto.

Particolarmente interessante è il caso dei metalli rame e zinco poichè è ben nota la facilità con la quale essi si disciolgono l'uno nell'altro sia allo stato liquido sia allo stato solido. E poichè l'effetto del passaggio della corrente elettrica attraverso il sistema costituito con del rame allo stato solido in contatto con lo zinco allo stato liquido non è stato ancora indagato, ho eseguito le seguenti esperienze.

In un fornetto elettrico a resistenza, provvisto di dispositivo potenziometrico autoregolatore della temperatura, ho posto il crogiolo contenente lo zinco (fig. 1). In questo bagno sono parzialmente immersi tre cilindri di rame elettrolitico (A, B, C) del diametro di 3 mm., che pescano per circa 20 mm.; essi hanno l'estremità inferiore accuratamente spianata, e le superficie laterali protette, per una lunghezza di circa 30 mm., da manicotti fortemente aderenti fatti con filo d'amianto, in modo che il contatto col bagno avviene solamente con la faccia inferiore dei cilindri. Dei tre cilindri, due (A, B) sono collegati ai poli di una dinamo (attraverso gli strumenti di misura e i dispositivi di regolazione) mentre il terzo (C), non è percorso da corrente e serve come termine di confronto.

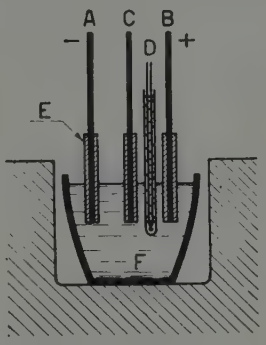


Fig. 1.

A, elettrodo negativo (rame). – *B*, elettrodo positivo (rame). – *C*, cilindro di rame non percorso da corrente. – *D*, coppia termoelettrica. – *E*, manicotto amianto. – *F*, bagno zinco fuso.

Facendo passare attraverso il bagno, mediante i due elettrodi di rame A, B, correnti continue sufficientemente intense, ho trovato che una certa quantità di rame passa nel bagno di zinco fuso con conseguente accorciamento dei due cilindri di rame, mentre il cilindro di rame non percorso da corrente, si accorcia in misura assai minore. Ho trovato inoltre che l'accorciamento dell'elettrodo positivo è maggiore di quello del negativo (Tabella I).

Infine, ho trovato che se invece di corrente continua, si impiega una corrente alternata (frequenza 42 periodi) di eguale intensità (efficace) per un eguale tempo, e si opera a parità di condizioni (temperatura, ecc.) entrambi gli elettrodi di rame si corrodono in misura circa uguale. Questa corrosione è però notevolmente inferiore di quando vengono percorsi dalla corrente continua, pur essendo sempre maggiore di quanto avviene nel cilindro di rame non percorso dalla corrente (Tabella II).

Per lo studio del fenomeno ho fin'ora eseguito quattro serie di esperienze facendo variare la durata della prova, l'intensità della corrente e la temperatura del bagno; inoltre, ho sperimentato con bagni i quali contengono, fin dall'inizio, oltre allo zinco, date percentuali di rame.

TABELLA I.

Corrente continua.

Temperatura	Durata	Intensità	Composizione iniziale del bagno (1)	Variazione di lunghezza in mm.		
C°	min.	Amp.	Cu %	C (senza corrente)	B (positivo)	A (negativo)
600°	20	100	6	0,8	2,8	2,1
600°	30	100	6	1,7	3,0	2,1
600°	60	100	6	2,2	9,9	4,5
600°	90	100	6	2,0	10,5	6,6
600°	120	100	6	1,8	14,4	9,8
600°	60	50	6	0,9	3,1	2,8
600°	60	74	6	0,7	3,3	2,3
600°	60	115	7	0,9	8,9	4,9
600°	60	130	6	1,1	22,4	18,9
600°	60	100	0	3,6	22,1	19,7
600°	60	100	3	1,3	9,6	8,3
600°	60	100	7	0,9	8,6	5,3
600°	60	100	15	0,5	—	5,0
600°	60	100	23	0,7	4,8	5,1
450°	30	100	3	0	0,7	1,0
500°	30	100	3	0,2	3,1	2,4
550°	30	100	3	0,8	5,1	4,6
650°	30	100	3	2,0	12,9	11,7
700°	30	100	3	—	19,9	13,7

(1) Per effetto della quantità di rame entrato in soluzione nel bagno si ha alla fine della prova una differenza più al massimo dell'ordine del 2 %.

Le osservazioni delle estremità del rame dei cilindri corrosi hanno mostrato la formazione di crateri più o meno irregolari, la cui superficie è ricoperta con un straterello di soluzione solida con struttura α, alla quale

sussegue uno strato di soluzione γ e quindi una terza soluzione solida con struttura $\varepsilon + \eta$ o ε o $\varepsilon + \gamma$ secondo la percentuale di rame nel bagno, la quale occupa tutta la rimanente parte del manicotto inizialmente occupata dal rame. È da tener presente che questa struttura corrisponde a soluzioni che sono liquide (o in parte liquide) alle temperature superiori a 450° C. Nessuna differenza di spessore degli strati con struttura α e γ si osservò tra quelli formatisi all'elettrodo positivo, e quelli formati al negativo, come pure nel cilindro di confronto.

TABELLA II.

Corrente alternata.

Temperatura	Durata	Intensità	Composizione iniziale del bagno	Variazione di lunghezza in mm.		
C°	min.	Amp.	Cu %	C (senza corrente)	B (alternata)	A (alternata)
600°	60	70	6	0,7	1,9	2.1
600°	60	135	6	1,3	18,5	—
600°	60	100	0	—	10,2	10,1
600°	60	100	0	2,3	6,9	9,3
600°	60	100	5	1,0	2,9	5,8

Per maggiormente confermare l'andamento dei fenomeni e per stabilire quale relazione intercorre tra le corrosioni degli elettrodi quando in eguali condizioni di tempo e di temperatura vengono percorsi da correnti

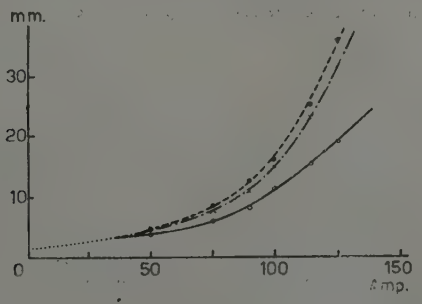


Fig. 2.

elettrodo positivo: linea tratteggiata – elettrodo negativo: linea tratto e punto – elettrodo percorso da corrente alternata: linea continua.

continue e da correnti alternate con intensità crescente ho operato con quattro elettrodi immersi nello stesso bagno facendone percorrere due dalla corrente alternata di uguale intensità.

Nella Tabella III sono riportati i risultati così ottenuti, i quali sono rappresentati graficamente nella fig. 2.

Tabella III.

Temp.	Durata	Corrente	Composizione iniziale del bagno	Variazione di lunghezza degli elettrodi in mm.				
C°	min.	Amp.	Cu %	B (positivo)	A (negativo)	B (c. alternata)	A (c. alternata)	valore medio
600°	30	50	0	4,4	4,5	0,9	4,0	2,5
600°	30	75	0	8,0	7,3	7,7	3,2	5,5
500°	30	90	0	12,3	10,5	8,7	8,8	8,75
600°	30	100	0	15,8	14,7	11,9	11,2	11,55
600°	30	115	0	22,9	22,6	15,0	16,0	15,5
600°	30	125	0	35,1	30,5	18,7	18,5	18,6

Anche in tal modo si ebbe la conferma:

1° che gli elettrodi percorsi da corrente si corrodono molto di più del cilindro non percorso da corrente;

2° che operando con la corrente continua l'elettrodo avente polarità positiva si corrode di più di quello con polarità negativa;

3° che i due elettrodi percorsi da corrente alternata si corrodono ambedue in misura uguale;

4° che tale misura è inferiore a quella corrispondente agli elettrodi percorsi dalla corrente continua.

Risultò inoltre che l'intensità delle corrosioni aumenta in modo sensibilmente proporzionale al tempo, e aumenta, con legge parabolica, con l'aumentare della temperatura, mentre diminuisce con l'aumentare del contenuto in rame del bagno.

Per quanto riguarda l'azione della intensità della corrente, risultò che l'entità delle corrosioni aumenta prima lentamente e poi con grande rapidità, con l'aumentare della intensità della corrente.

L'ordine di grandezza degli spessori dei sopraindicati strati risultò (nella condizione delle mie esperienze) un decimo di millimetro per lo strato

costituito con la soluzione solida α, e cinque decimi di millimetro per lo strato occupato dalla soluzione solida γ.

Le micro e macrofotografie delle sezioni assiali dei cilindri verranno pubblicate insieme ad altri particolari in altra Nota nella quale verranno pur descritte le prove (tutt'ora in corso) con sistemi costituiti con rame allo stato solido in contatto con mercurio liquido.

Ringrazio il Direttore del Laboratorio, prof. Oscar Scarpa, per i consigli e l'aiuto di cui mi è stato largo durante la ricerca.

Antropologia. — *L'orientamento fisiologico del femore umano nelle sue normali condizioni morfomeccaniche.* Nota [1] di A. Sacchetti, presentata [2] dal Corrisp. S. Sergi.

Allo studio delle normali leggi architetturali morfomeccaniche del femore umano ho dedicato un ampio lavoro da cui traggo alcune notizie fondamentali per questa attuale breve pubblicazione preventiva.

Il primo problema da risolvere è stato quello dell'orientamento fisiologico del femore, tale da estrinsecarsi non per una semplice *posizione di comodo*, bensì per una *condizione meccanica naturale*. Il che ha dato origine ad uno studio accurato della minuta struttura trabecolare, delle singole linee di forza, in connessione persino con i possibili movimenti dell'osso. In questa Nota – è ovvio – non è possibile ricordare che i risultati di questa prima fase del lavoro: e i risultati consistono – in sintesi – nella semplice visione schematica dei principali piani ed assi d'orientamento prescelti per lo sviluppo ulteriore delle ricerche sperimentali.

Ho poggiato innanzi tutto *testa* e *condili* posteriormente su un unico piano, definito come *piano di appoggio frontale* (si veda la fig. 1 con un profilo mediale del femore destro): bisognerebbe notare che l'attenzione si fissa esclusivamente sulle estremità articolari per il loro evidente significato meccanico. Ciò posto, si può facilmente concepire un *piano*, parallelo, *tangente anteriore alla testa* (accennato nella stessa fig. 1). Il piano ancora parallelo, intermedio fra i due, passa evidentemente nel mezzo della *testa* (costituita quasi da una semisfera) dove si rappresenta agevolmente la risultante delle linee di resistenza alla pressione del peso corporeo. Questa risultante – posso dire tra l'altro – non è teorica, ma praticamente segnata anche dalle linee trabecolari del tessuto spugnoso *(fascio cefalico)*. Tale piano intermedio è definito come *piano primario frontale* (v. ancora la fig. 1).

Considerando successivamente i limiti laterale e mediale della *testa* e il piano intermedio perpendicolare al *frontale* (al *primario* come naturalmente

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(2) Nella seduta del 18 maggio 1946.

ai suoi paralleli) ho ottenuto il *piano primario sagittale:* anch'esso con un evidente significato meccanico; tale per cui l'asse corrispondente all'incontro dei due suddetti piani primari è risultato essere il vero *asse fisiologico* del femore, su cui infatti si basa l'orientamento definitivo. Va aggiunto però a tutto questo l'avvertenza per la quale il femore, orientato secondo il detto *asse fisiologico,* deve essere sempre sistemato in modo da trovarsi con i condili tangenti anche su un piano perpendicolare ai precedenti piani primari *frontale* e *sagittale.* Tale piano, che risulterà orizzontale se si pone verticalmente l'asse fisiologico, è detto *piano di appoggio condiloideo.* Scelto, infine, con un riferimento anatomico rigoroso, sull'*asse fisiologico,* un livello centrale interno della testa ne ho indicato il punto corrispondente con le lettere di abbreviazione *Tci* (testa, centro, interno), per cui l'asse fisiologico per esso passante è stato schematicamente indicato con *ATci.*

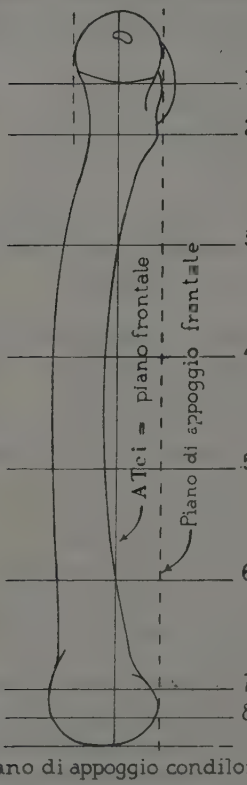
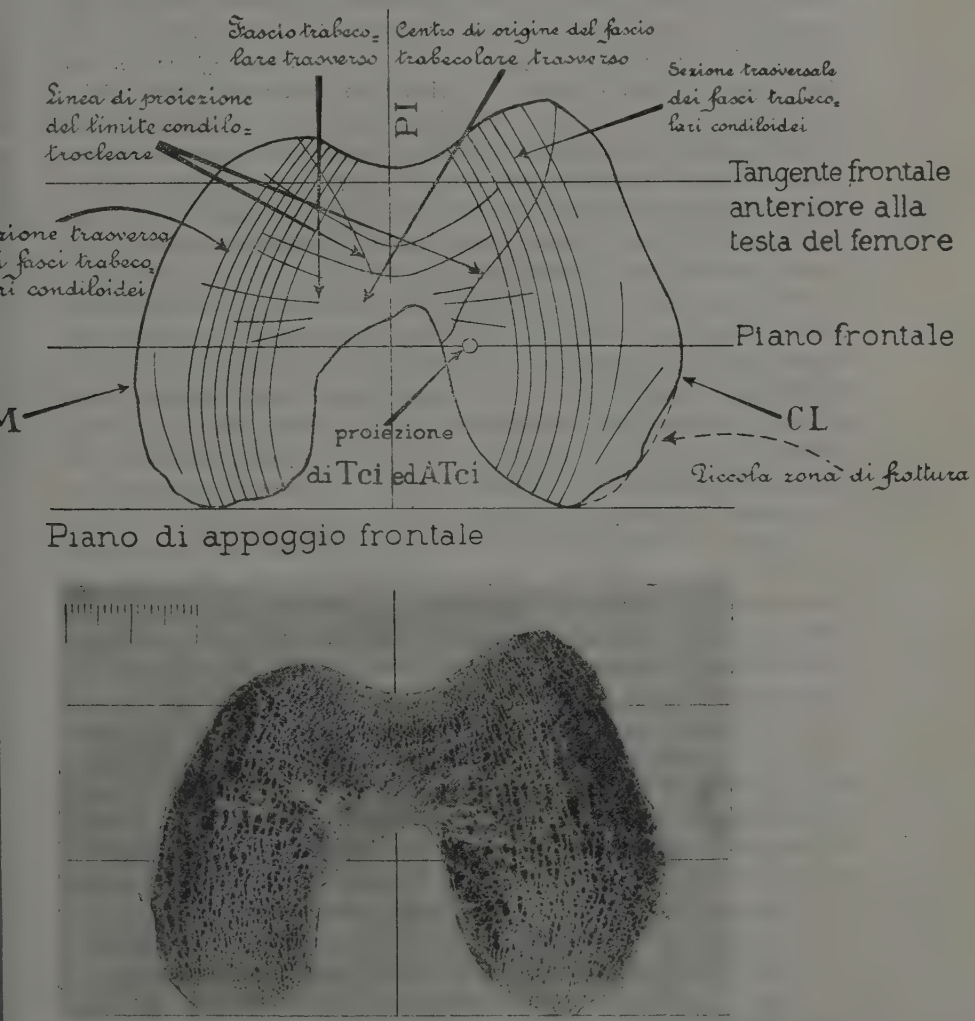


Fig. 1. – Proiezione mediale del profilo di un femore umano destro orientato secondo i piani fisiologici prescelti. Gli otto segmenti orizzontali numerati rappresentano i livelli in corrispondenza dei quali sono state studiate le sezioni dell'osso.

Così stabilito il sistema d'orientamento (e riferito ora in forma purtroppo solo intuitiva) ci si potrebbe chiedere – per poter giustificare naturalmente le deduzioni successive di ordine meccanico e comparativo su singoli caratteri – che cosa accade in rapporto al *piano frontale primario* sulla estremità distale del femore. Sarebbe complesso voler rispondere analiticamente al punto interrogativo. Si può dire che in realtà il *piano frontale* (3) segna anche nei condili un livello meccanicamente primario, perchè da esso si disperdono, avanti e dietro, tutte le linee di forza che si irradiano sulle superfici articolari (linee sempre partenti, d'origine, dalle lamine diafisarie di tessuto compatto). Tale livello ha una posizione meccanicamente intermedia, si potrebbe dire dunque di

(3) Per brevità con la semplice espressione *piano frontale* indicherò il *piano frontale primario.*

equilibrio. Ma per meglio illustrare quest'aspetto del problema, che è di fondamentale importanza, ho appunto riportato qui un taglio orizzontale dei condili (perpendicolare al *piano frontale* e al *p. sagittale*) con la relativa figura schematica interpretativa, anche per le linee trabecolari. Si veda la figura 2.



2. – Sezione condiloidea (8 della fig. 1) riprodotta in proiezione verticale per un femore destro (in gr. nat.). schema interpretativo delle singole formazioni, in alto, è dedotto evidentemente da un lucido della fotografia. esso *CM* = condilo mediale; *CL* = condilo laterale; *Tci* = centro interno della testa; *ATci* = asse fisiologico (del *Tci*); *PI* = piano sagittale intercondiloideo.

Lo schema interpretativo porta proiettata la traccia del *limite condilo-trocleare* esistente sulla superficie d'articolazione: è di singolare interesse osservare in proposito l'incrocio di questo limite con il *piano frontale anteriore* e il relativo andamento del profilo orizzontale dei fasci trabecolari condiloidei. Si può concludere infatti che *alla zona mediana di maggiore addensamento trabecolare dei suddetti fasci, compresa in proiezione fra la tangente posteriore dei condili e il limite condilo-trocleare, corrisponde per tutta la sua estensione anteroposteriore la equivalente ampiezza della testa femorale segnata dai suoi piani tangenti anteriore e posteriore.* Il significato meccanico di tutto ciò è innegabile quando si pensi che all'ampiezza massima della testa (in senso antero-posteriore) corrisponde (sempre in senso antero-posteriore) una equivalente ampiezza massima della zona d'appoggio dei condili e sopratutto della parte dei fasci trabecolari distali più tipicamente destinata alla resistenza statica dell'osso. E ciò è tanto più importante in quanto può affermarsi *per il condilo laterale*, dove con maggiori o minori oscillazioni cade sempre il centro interno *(Tci)* meccanico della *testa*. Ecco dunque un altro argomento decisivo in appoggio ai tanti dati di fatto sui quali ho basato l'orientamento. Il *piano frontale*, intermedio fra i due tangenti anteriormente e posteriormente alla testa, resta pertanto un elemento base per ogni ulteriore interpretazione meccanica e ad esso ho appositamente attribuito l'importanza di un *piano primario* di riferimento, tanto più che esso stesso contiene la proiezione verticale del centro interno cefalico: e una tale proiezione doveva *necessariamente* coincidere con l'*asse fisiologico*.

Tralascio ora la possibile descrizione degli altri particolari della stessa figura 2, anche se importanti dal punto di vista meccanico, come nel caso del fascio distale trasverso e del suo spostamento verso il condilo mediale *(CM)*: si tratterebbe infatti di spiegare le differenze tra la parte mediale e laterale, la cui trattazione richiederebbe un esame molto più profondo come è affrontato nel lavoro in esteso.

Orientato comunque il femore nel modo descritto, ho definito una serie di livelli a differenti altezze sull'asse fisiologico in corrispondenza dei quali ho poi proceduto alla rilevazione delle sezioni del femore date dal contorno dell'osso così come esternamente si presenta con tutte le formazioni relative, le impronte di attacchi muscolari, ecc. Naturalmente, la scelta dei livelli si basa anch'essa su presupposti di ordine meccanico e morfologico che non mi dilungo ad illustrare. Il problema è risolto stabilendo:

un livello in corrispondenza del noto punto mediale intercondiloideo sul margine inferiore del piano popliteo (sulla linea diafisoepifisaria);

un livello in corrispondenza del punto centrale sulla formazione del piccolo trocantere;

quattro livelli intermedi ai precedenti ed equidistanti;

un livello prossimale a metà altezza sulla faccia laterale del grande trocantere.

Per la nomenclatura ne sono risultati i seguenti otto livelli a cui corrispondono altrettante sezioni orizzontali dell'osso adottate principalmente nello studio architetturale (v. fig. 1):

1° livello *macrotrocanterico*;
2° livello *microtrocanterico*;
3° livello *diafisario superiore*;
4° livello *diafisario medio–superiore*;
5° livello *diafisario medio-inferiore*;
6° livello *diafisario inferiore*;
7° livello *popliteo inferiore* o *distale diafisoepifisario*;
8° livello *condiloideo*.

Le proiezioni delle singole sezioni le ho realizzate con appositi apparecchi esistenti nell'Istituto di Antropologia della Università di Roma (pantogoniostato e assidiatetero ideati da Sergio Sergi, diagrafo, livellatori, ecc.).

I caratteri rilevati da tali proiezioni sono naturalmente svariati e di notevole interesse se messi, come ho sempre fatto, in relazione non solo con la struttura interna dell'osso ma anche con le impronte esterne degli attacchi muscolari. Per quanto occorre in questa sede si possono assommare così:

Promerie (anteriori e posteriori): distanza più o meno avanzata della tangente (anteriore o posteriore) a ciascuna sezione rispetto al parallelo *piano frontale* (tali distanze si possono schematicamente indicare con f_i dove l'indice i rappresenta di volta in volta il numero di riferimento della sezione).

Apomerie (laterali e mediali): distanza più o meno lateralizzata della tangente (laterale o mediale) a ciascuna sezione rispetto al parallelo *piano sagittale primario* (tali distanze si possono schematicamente indicare con s_i similmente al caso precedente).

Valori di curvatura: sono dei particolari valori relativi delle promerie anteriori supposti uguali a zero f_2 e f_7, in modo che come valori utili restano d_3, d_4, d_5, d_6 (le somme dei primi e dei secondi due valori dànno $C_{3,4}$ e $C_{5,6}$);

Indici di robustezza: sono le aree (a_i) coperte da ogni sezione e rapportate all'altezza dei femori singoli (a'_i);

Angoli di torsione: sono angoli che misurano la rotazione di qualche sezione o di una parte di esse rispetto ai piani frontale e sagittale.

Dato l'interesse che suscitano gli angoli di torsione, per i risultati cui hanno condotto, ad essi limiterò essenzialmente la esemplificazione. Ma per questo appunto è necessario fermarsi almeno ad elencare gli angoli rilevati per i livelli macro e microtrocanterico. Si osservi la figura 3.

In essa si notano i contorni della sezione 1 e della 2. Per la sezione 1 gli angoli sono:

α (fra il piano frontale e la tangente postero–mediale alla sezione);

α' (fra il piano frontale e la linea, passante per la proiezione di *Tci*, tangente anch'essa alla sezione).

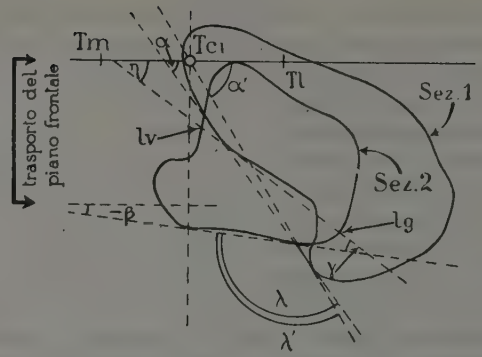


Fig. 3. – Proiezione verticale delle sez. 2 e 1, rispettivamente micro e macrotrocanterica, sulla traccia dei due piani frontale e sagittale al cui incontro evidentemente si ha anche la proiezione di *Tci*. Sono indicati i vari angoli di torsione citati nel testo e, tra l'altro, sul piano frontale, i limiti (in proiezione) laterale (*Tl*) e mediale (*Tm*) della testa. Il trasporto del piano frontale serve a facilitare l'indicazione grafica dell'angolo β, negativo nel caso particolare in quanto normalmente si indica come positivo quando si apre in senso inverso, cioè medialmente a causa della rotazione indietro del piccolo trocantere.

Per la sezione 2 sono:

β (fra piano frontale e la tangente posteriore alla sezione);

η (fra piano frontale e la retta passante, sulla sezione, per la linea di inserzione del *vasto mediale (lv)* e quella del *gluteo (lg)*);

γ (fra la retta passante per *lv* ed *lg* e quella semplicemente tangente posteriore alla sezione $= \eta + \beta$).

L'angolo λ infine è istituito fra la tangente posteriore alla sezione 2 usata per β e quella posteromediale alla sezione 1 usata per α. La variazione di λ′ rispetto a λ è corrispondente a quella di α′ rispetto ad α.

Le variazioni di tutti questi angoli – per niente affatto solidali in campo intrarazziale, quale regola generale – hanno condotto a precisare i concetti di torsione del femore in maniera molto diversa da quella finora adottata. Occorre infatti distinguere le seguenti tre forme di torsione:

una *torsione totale*, quando tutti gli angoli sono variati solidalmente da un gruppo all'altro e da un individuo all'altro;

una *torsione localizzata*, quando è relativa a due sezioni comparate reciprocamente;

una *pseudotorsione*, quando riguarda una unica sezione presa per se stessa, come accade ad esempio valutando le differenze riscontrabili attraverso l'angolo γ.

Tutto ciò è conseguenza dello studio del comportamento intrarazziale dei caratteri. Ma che cosa accade in campo interrazziale? Rimando l'argomento alla Nota successiva.

Antropologia. — *Sulla variabilità nelle normali condizioni morfomeccaniche del femore umano.* [1] Nota di A. Sacchetti, presentata [2] dal Corrisp. S. Sergi.

Nella precedente Nota ho citato particolarmente come la torsione del femore debba essere considerata sotto vari aspetti a seconda dei livelli che di volta in volta vengono presi in considerazione sull'asse fisiologico d'orientamento. Tale conclusione, che apre tutto un nuovo ampio orizzonte di ricerca per l'antropologia, vale non soltanto per i confronti intrarazziali, ma anche per quelli interrazziali... ed interspecifici, come recentissimamente ho potuto mettere in evidenza seguendo un lavoro comparato in parte condotto in collaborazione con il prof. S. Beer.

Per quanto si riferisce al comportamento interrazziale ho tentato in proposito lo studio della *transvariazione* esistente fra i gruppi per mezzo dell'indice sintetico *Tn* [3], pur precisando che si tratta delle prime indagini condotte al riguardo e che per tanto il materiale, ai fini di una generalizzazione interrazziale, non è sufficiente ancora: i gruppi esaminati sono tre, uno fuegino e due europei, il primo scelto appositamente molto lontano dai secondi per meglio valutare le possibilità dei nuovi procedimenti seguìti. Pertanto il *Tn*, come indice che oscilla da 0 (transvariazione nulla) a 1 (transvariazione massima), si è usato in questo caso come elemento esclusivamente di *confronto del gruppo fuegino rispetto agli altri*. Ma non meno suggestivi sono apparsi i risultati!

Con la figura 1 si ha una sintesi comparativa dei valori di *Tn* per parte dei caratteri più importanti rilevati nella ricerca. Il grafico circolare a raggi graduati (da me definito come *ruota di comparazione dei caratteri*) riguarda 6 angoli di torsione, 4 apomerie laterali, 6 promerie posteriori, 6 valori di curvatura, 5 indici di robustezza. La graduazione che è riprodotta su un solo raggio di riferimento oscilla da zero (nel centro) a 1 (sulla massima circonferenza). La circonferenza media corrisponde a 0,5, la piccola a 0,1.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia della Università di Roma.

(2) Nella seduta del 18 maggio 1946.

(3) L'espressione è la seguente:

$$Tn = 1 - 2\,\theta\left(\frac{\Delta'}{2\,M\,(\sigma)}\right)$$

dove θ indica un integrale di probabilità normale, *Tn* la probabilità di transvariazione, Δ' la media di tutte le possibili differenze fra i valori medi corrispondenti rispettivamente ai gruppi messi a confronto, $M(\sigma)$ la media di σ per gli stessi gruppi. Cfr. in proposito: *Un indice sintetico di transvariazione*, in «Rend. della Cl. di Scienze Fis., Mat. e Nat. della Acc. d'Italia», Roma, 1943.

La transvariazione è molto diversa fra i vari caratteri; gli *indici di robustezza* presentano i valori in genere più alti, al di sotto di 0,5 si trovano invece in genere i *valori di curvatura*, quelli che più di altri caratteri distinguono i fuegini rispetto agli europei (in particolar modo se si considera la curvatura nella metà distale della diafisi: 5ª e 6ª sezione).

Per gli angoli di torsione le differenze sono quanto mai significative. L'angolo β è quello che peggio differenzia i fuegini, travandosi poco distante

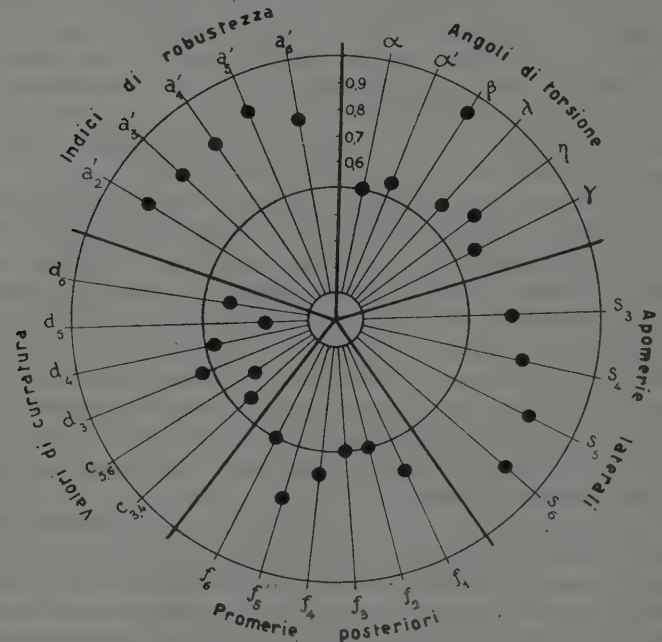


Fig. 1. « Ruota di comparazione dei caratteri » costruita sulla graduazione dei possibili valori di *transvariazione* interrazziale fra fuegini ed europei. L'indice *Tn* adottato per il calcolo oscilla da zero ad uno secondo la posizione (sui raggi rispettivi) dei cerchietti neri ed ha significato di *probabilità di transvariazione*. Il materiale adottato è statisticamente sufficiente per la trattata impostazione dei problemi.

dalla circonferenza esterna (dove $Tn = 1$). Prevale invece al riguardo, con una scarsa transvariazione, l'angolo $c\,\alpha$ con il corrispondente α') e l'angolo γ.

Tralascio λ il cui comportamento è legato in questo caso con ogni evidenza ad α. L'angolo η ha un Tn più elevato (e significativamente secondo altri calcoli più attenti che qui tralascio).

Dovremo concludere che nella valutazione delle differenze relative interrazziali e cioè della attitudine differenziatrice dei caratteri fra gruppi (fuegini

ed europei) prevalgono: la *torsione macrotrocanterica* (α e α′), la corrispondente *torsione localizzata* rispetto alla sez. 2 (λ), una *paratorsione* della sez. 2 (γ). Prevalgono in altre parole elementi tali per cui si può dire, generalizzando finalmente, che *la torsione, considerata come finora si è fatto nella letteratura da parte delle scuole più diverse, come un unico concetto ed un corrispondente unico valore angolare, non ha quel significato architetturale e meccanico che invece le si attribuisce.* Ciò indirettamente spiega gli scarsi risultati che aveva dato l'esame della torsione con un semplice angolo fra l'asse anatomico del collo e un piano d'appoggio frontale (neppure quello d'orientamento fisiologico da noi prescelto!). La torsione invece, nel suo più reale complesso significato, messo in evidenza nel lavoro citato, lascia già intravedere suggestivi risultati, sia per gli aspetti interpretativi di ordine architetturale, si per quelli sistematici.

Il problema architetturale ha suggerito tra l'altro una indagine particolare per chiarire *come di fronte a tante possibili torsioni sono rispettate le leggi meccaniche più elementari per la statica dell'osso e la sua resistenza a tutte le possibili sollecitazioni.* La variabilità nella torsione può essere anche grande, sia fra individui che fra razze (forse però secondo differenti leggi che vanno organicamente indagate), quella delle condizioni meccaniche basilari è invece necessariamente minima! Non è possibile qui neppure un accenno descrittivo sulle minute strutture morfomeccaniche predisposte in natura attraverso il tessuto trabecolare. Sarà sufficiente però un semplice riferimento esemplifi-

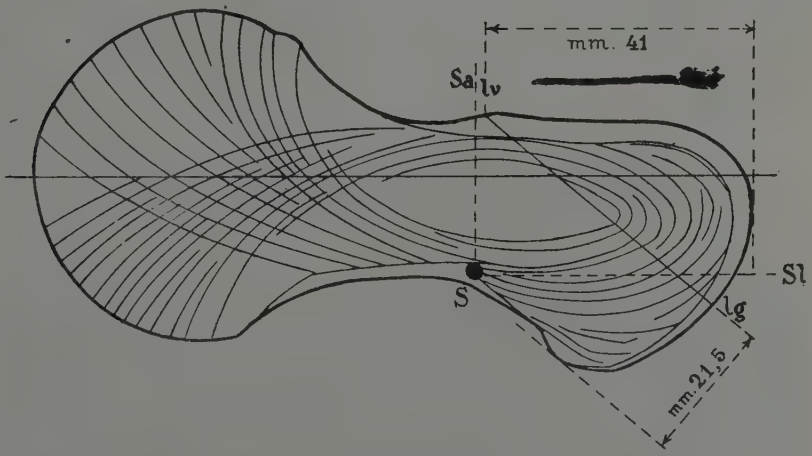


Fig. 2. Rappresentazione grafica della sezione di un femore destro di sardo (S 846–6 dell'Ist. di Antrop. di Roma) su un piano trasverso contenente l'asse anatomico del collo. Le curve interne rappresentano le linee trabecolari del *fascio arciforme*, la linea retta orizzontale il *piano frontale*, *S* = punto d'origine dello sperone femorale, *Sa* = la corrispondente perpendicolare *sul piano frontale*, *Sl* = l'orizzontale parallela al *piano frontale*, *lg* = il punto in cui la sezione taglia la *linea del gluteo*, *lv* = il punto in cui la sezione taglia la *linea del vasto*.

cativo. Esso è tratto da una sezione dell'osso che per ragioni particolari (che non riferisco ora) è obliqua rispetto alla nostra orizzontale e coincide con un piano perpendicolare al frontale contenente in sè l'asse anatomico del collo del femore (dirò solo che così è visibile in sezione trasversa il fascio trabecolare arciforme).

Le figure 2 e 3 riproducono due esempi di proiezione grafica di tali sezioni per due femori di sardi. Le curve interne interpretano l'andamento delle linee trabecolari (sistema del *fascio arciforme*) il cui significato meccanico ha una fondamentale importanza. Pur non entrando nei particolari di

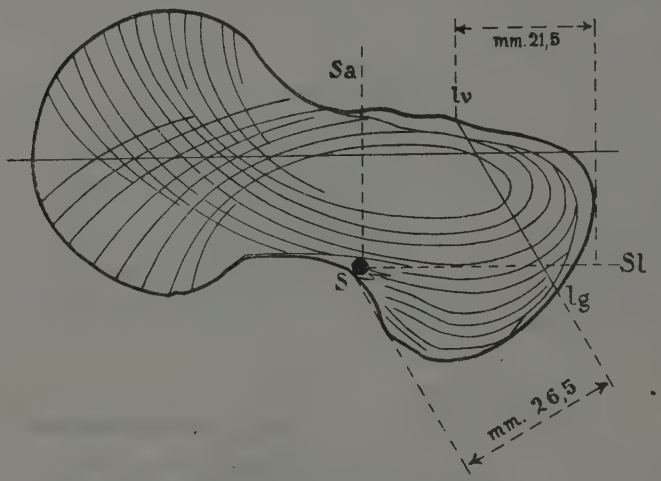


Fig. 3. Rappresentazione grafica della sezione di un femore sardo (S 846–5 dell'Ist. di Antropol. di Roma) su un piano trasverso contenente l'asse anatomico del collo. Per le altre indicazioni, v. la fig. 2.

questo sistema trabecolare, i quali hanno richiesto una ampia trattazione, è interessante notare come *l'andamento generico delle linee rispetto alla retta orizzontale, rappresentante la proiezione del piano frontale, è del tutto simile per i due femori*. Essi invece presentano forti differenze architetturali esterne per la opistomeria del grande trocantere e la morfologia in genere della estremità prossimale (esclusa la testa). La *linea del vasto* (*lv*), con la rotazione del grande trocantere dall'avanti all'indietro (da S 846–6 a S 846–5), si sposta lateralmente (nella sezione prescelta), tanto da allontanarsi molto dalla perpendicolare S–Sa: nel femore S 846–5, *più piccolo*, ma non di molto rispetto a S 846–6, raggiunge la minima distanza di mm. 21,5 (sui 41 mm. di S 846–6) rispetto alla perpendicolare tangente lateralmente al grande trocantere! Al contrario se si misura trasversalmente la cresta intertrocanterica,

dalla retta passante per *lv* ed *lg* alla parallela corrispondente, tangente al piccolo trocantere in proiezione, per il secondo femore (fig. 3), il più piccolo, si ha 26,5 e per il primo 21,5 (fig. 2)! Le misure sono naturalmente invertite, ma proprio a causa del fenomeno complesso di torsione con opistomeria macrotrocanterica presente in S 846-5 rispetto a S 846-6.

Se si pensa che, nella sezione studiata, al fascio arciforme, il cui andamento è schematicamente riprodotto nelle figure, è devoluta la massima resistenza meccanica in connessione con la pressione esercitata sulla testa femorale, i fatti illustrati, di assenza di relazione fra fenomeni diversi, ma pur sempre legati alla struttura architetturale dell'osso, acquistano una portata maggiore. Tanto più poi se si aggiunge che tale mancanza di relazione è risultata generalizzabile sulla base di più estese mie indagini sperimentali. Le strutture trabecolari fondamentali, come quella del fascio arciforme, sono in genere più stabili e tendono sempre ad assumere una posizione di adattamento poco variabile (per l'orientamento meccanico rispetto ai piani) qualora si confronti con la forte variabilità esterna che è legata a molte cause (impronte muscolari, differente funzionalità dei complessi muscolari, posizione abituale dell'arto per le differenti attitudini individuali, fattori ereditari come caratteristica di gruppi sistematici di varia entità, ecc.).

Da tali rapidi accenni si comprende la vastità dell'argomento trattato, ma sopratutto la sua importanza per l'interpretazione morfomeccanica delle strutture: esso è nato tra l'altro per il confronto delle transvariazioni fortemente diverse fra i vari angoli, così come è messo in evidenza con la *ruota di comparazione dei caratteri*, la quale ha suggerito anche un passo ulteriore per le necessità comparative di ordine più strettamente sistematico su cui tornerò in uno scritto successivo.

Fisiologia vegetale. — *Escreti fungini e mitosi cellulari* [1]. Nota [2] di F. M. Gerola, presentata dal Socio G. Gola.

Il complesso argomento della micorrizia è stato affrontrato considerandone diversi problemi: ecologico, trofico, micologico; ma anche sotto questi punti di vista l'argomento è ancora ben lungi dall'essere risolto.

Minore interesse sembra finora abbia destato il problema morfologico; eppure notevoli sono le morfosi che si osservano nelle piante sottoposte a simbiosi micorrizica. Dal punto di vista citologico si sono osservate modificazioni nel rapporto nucleo–plasma, forme anomale della massa nucleare, colorabilità diversa dei nuclei nei diversi momenti della simbiosi micorrizica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 giugno 1946. Presentata nella seduta del 15 giugno 1946.

Anche la forma delle radici invase è ben diversa da quella delle radici normali. Oltre a queste morfosi che si osservano nella cellula invasa o nei tessuti ad essa immediatamente vicini, altre se ne possono verificare a distanza: tuberizzazione degli organi ipogei, anomalie fiorali, gravissime turbe nella funzione di riproduzione, talora addirittura sterilità.

Ho isolato dalle radici e dalle foglie di piante sicuramente micorriziche, nell'Orto Botanico di Padova e sui monti del Trentino a 1000 m. circa, alcuni stipiti di funghi, alcuni allo stato di ifomiceti, altri riconoscibili per *Alternaria*, *Torula* ecc. Per alcuni di tali stipiti si può ancora sospettare che essi non siano in simbiosi micorrizica, ma per altri ho potuto constatare lo sviluppo di eguali forme isolate da ericacee diverse, raccolte in località diverse come il Trentino e Padova.

Con tale materiale ho studiato l'azione che il substrato in cui sono cresciuti questi funghi esercita sulle modalità della mitosi. Le culture furono eseguite dapprima sopra substrato nutritizio preparato con decotto di bulbi di *Ornithogalum* addizionato di glucosio e sali minerali, in seguito su agar mineralizzato e glucosato.

Il materiale agente sulle mitosi veniva preparato con culture di un mese, ed in principio anche più prolungate, sopra un liquido corrispondente a quello delle culture su agar: il liquido, filtrato su carta, serviva per gli esperimenti.

In scatole Petri contenenti o il liquido delle culture o, per controllo, acqua comune, si ponevano piantine di frumento, sviluppate tutte in condizioni identiche di tempo e di temperatura. Dopo 24-48-72 e 96 ore di esperimento le radichette venivano fissate e trattate con metodo di Feulgen e successivamente schiacciate.

Le radici venivano misurate prima e dopo la permanenza nei liquidi di prova allo scopo di determinare l'eventuale allungamento. L'esame citologico era compiuto sopra le porzioni apicali delle radichette, comprendenti solo la parte meristematica, ciò che era facile limitare, essendo solo questa colorata in rosso dopo il trattamento col Feulgen. Su porzioni eguali perciò delle singole radichette era facile eseguire sicuri confronti sul comportamento degli apici nelle differenti condizioni di sperimentazione.

La tabella seguente riporta il numero delle mitosi contate negli apici sottoposti ai diversi trattamenti. Gli stipiti sono indicati con una numerazione corrispondente al mio giornale di lavoro. I numeri 453 e 2376 corrispondono a dei *Penicillium*; 1077 e 1064 a *Mucor*; 238 a *Torula*; 1056 ad *Alternaria*. Le altre forme pur dopo parecchi mesi di isolamento sono rimaste sterili e non le ho potute ancora identificare. Le quattro colonne corrispondenti ai quattro tempi di azione dei liquidi di cultura comprendono ciascuna tre numeri: il primo indica il numero totale delle mitosi osservate nell'apice vegetativo, il secondo il numero totale delle mitosi nello stadio di metafase. Il terzo esprime i punti di merito relativi all'allunga-

mento totale delle radici dall'apice alla base dell'asse caulinare: 0 nessun allungamento, e gli altri valori 03, 05, 1, 2, 4 rispettivamente l'aumento di 1/3, 1/2, di altrettanto, di due volte e di quattro volte la lunghezza primitiva.

	24h	48h	72h	96h
Acqua comune I	384—240—2	=267—148—03	=242—101—1	=207—106—4
Acqua comune II	498—272—2	=249—148—1	= 73— 42—1	=
A) 5 *b* 37 (453)	75— 43—2	= 83— 45—0	= 61— 48—0	
1 *b* 5 (460)	30— 15—0	= 5— 5—05	= 0— 0—0	
A·319 (2376)	386—205—2	= 6— 5—0	= 0— 0—2	
11 *b* 72 (2392)	58— 45—2	= 12— 11—0	= 2— 2—0	
B) 1 *b* 5 (1052)	227—212—0	= 83— 80—0	= 0— 0—0	=281—272—0
AY 4 *a* 650 (1071)	280—217—0	=156—129—0	=215—118—0	=177—124—0
AY 5 638 (1077)	279—237—0	=182—165—0	=126—121—0	= 92— 69—0
AW 5 826 (1064)		172—114—0	=102— 82—0	=165—110—0
AX 1 *a* 595 (1044)	425—316—0	=210—177—0	=292—220—0	=280—259—0
AN 980 (2379)	204—167—0	= 75— 47—0	= 49— 46—0	
M 354 (2378)	244—225—05	=239—222—0	=205—188—0	
AI 418 (2381)	scarse —0	=189—189—0	= 86— 85—0	
V 386 (2380)	8— 7—2	=242—234—0	=265—265—0	
C) AG 413 (1047)	390—272—0	= 91— 52—0	=244—152—0	=141— 87—0
9 *a* 58 (1056)		344—233—0	=279—160—0	=167—116—0
D) AY 5 *a* 653 (1066)		342—221—0	=406—257—0	=279—187—0
AV 1 561 (2388)	459—249—2	=324—184—0	=153— 87—0	
AX 3 *a* 599 (2386)	363—222—0	=199—163—0	=405—260—0	
AZ 5 718 (2391)	390—198—2	=384—227—2	=400—192—2	

L'azione da parte dei brodi di cultura sulle mitosi delle radici sperimentate è molto diversa per i vari funghi esaminati.

Ho distinto i risultati ottenuti in quattro gruppi:

A) Un primo gruppo arrestante nettamente il processo mitotico: i miceli 460, 453 e 2392 bloccano nettamente all'inizio il processo mitotico; il 2376 determina all'inizio uno stimolo alla mitosi, seguìto da un suo brusco arresto.

Contemporanea a questa inibizione mitotica nella radice principale è sovente l'emissione di nuove radici.

Può essere presente o no un certo allungamento delle radici.

B) Questo gruppo di funghi blocca le mitosi alla metafase: negli apici radicali troviamo perciò un numero elevato di cellule in divisione,

quasi tutte però allo stadio di metafase. I nuclei in ana- e telofase sono inoltre molto piccoli, a differenza di quelli in metafase, presentanti cromosomi molto lunghi, e per lo più a disposizione peculiare: mentre, cioè, nelle mitosi normali la placca equatoriale presenta i cromosomi situati in modo regolare sul piano equatoriale del fuso, in queste mitosi anomale si osservano i cromosomi irradiantisi, da un centro comune, in tutte le direzioni come i raggi di una stella (« metafase stellata »).

I miceli di *Mucor* 1077 e 1064 non dànno origine a queste caratteristiche metafasi, ma invece le placche equatoriali appaiono come raggrumate.

La crescita in lunghezza delle radici è completamente inibita, salvo in rare eccezioni, nelle quali però si verifica solo nelle prime 24 ore.

C) Un terzo gruppo di funghi non mostra avere alcuna azione sull'andamento delle mitosi. Debbo tuttavia notare che sovente non si ha, come nei controlli, una decrescita regolare del numero delle mitosi, in quanto nei vari giorni si osserva un alternarsi di massimi e di minimi di tale numero.

La crescita in lunghezza delle radici è anche in questo caso inibita.

D) Un ultimo gruppo di funghi sembra infine stimolare (in vario grado) il processo mitotico: il numero delle cariocinesi mantiene valori elevati anche dopo 96 ore.

Questo eccitamento può essere accompagnato (2391-2388) o no (1066-2386) da un allungamento delle radici.

Interessante appare subito il netto sdoppiamento della reazione mitotica da quella distensiva; in alcuni casi non sembra vi sia nei brodi alcuna sostanza auxinica, in altri le auxine sembrano presenti in dosi notevolissime. Questa seconda ipotesi è avvalorata dal fatto che i coleoptili delle specie a radici non allungate, crescevano in questi casi in maniera rilevante. Nel caso dello stipite AG 413 (1046) ebbi un allungamento notevole della radice soltanto a diluizioni forti del brodo di cultura; e ciò sarebbe conforme alla norma che iperdosi di auxine hanno azione inibitrice sulla crescita delle radici.

Mi riserbo di studiare ulteriormente le proprietà dei miceli sopraindicati; il reperto più importante mi sembra questa azione inibitrice della divisione cellulare, la quale, per quanto mi risulta, si potrebbe collegare a due ordini di acquisizioni recenti: l'una, quella dell'azione colchicinica, bloccante anch'essa le mitosi in metafase e determinante, come è noto, la poliploidia. Nei casi da me studiati non ho verificato alcun caso di poliploidia. Per ora non ho esperimenti definitivi sul destino degli apici sottoposti all'azione dei brodi fungini, mi sembra però che almeno in alcuni casi, appena cessi l'azione del brodo essi riprendano il loro sviluppo. Si avrebbe in questi casi un comportamento analogo a quello che si osserva nelle micorrize, in cui il gioco delle condizioni di ambiente nel ciclo annuale, permette il prevalere dello sviluppo dell'uno o dell'altro dei due organismi antagonisti.

L'altra acquisizione è quella più recente dei funghi produttori di penicilline. Da quanto risulta dall'impiego terapeutico di tali principî attivi, sembra che la loro azione inibitrice della divisione cellulare non lasci conseguenze sulle cellule sopravviventi. Se questa affinità potesse venir provata, lo studio delle mitosi cellulari sotto l'influenza dei funghi potrebbe portare ad una interpretazione più esatta del meccanismo delle mitosi e del modo di azione di questi singolari corpi batteriostatici.

Per quanto riguarda le mitosi nucleari ed il problema della micorrizia le mie ricerche continuano.

Istologia. — *Ancora una volta in tema di fibre muscolari, miofibrille e strie* [1]. Nota [2] di U. D'Ancona, presentata dal Socio G. Gola.

All'attacco, non certo benevolo, rivolto dal prof. Diamare [3] al mio allievo Giacinto Ciaccio, non voglio replicare per non riaccendere vecchie polemiche; desidero semplicemente indicare al lettore le risposte, che si trovano già nei lavori stessi di Diamare, Titomanlio e Ciaccio.

a) Che Ciaccio citi *ad abundantiam* a proposito della linea Z e Diamare e Titomanlio, potrà sincerarsi chiunque legga a p. 574 la Memoria oggetto della critica [4].

b) Che Titomanlio consideri fibre dei muscoli toracici degli Insetti quelle che noi e altri con noi, tra cui ora Diamare, interpretano quali miofibrille, risulta con sufficiente chiarezza dal testo di questa autrice a p. 31 della sua Memoria e dalle allegate figg. 4–6 [5].

c) Che nella citata e in altre sue pubblicazioni Ciaccio eviti qualsiasi intonazione polemica, « misconoscenze » e « circonlocuzioni ambigue » potrà apparire pure con tutta chiarezza a chiunque legga i suoi lavori scevro da preconcetti.

Per cui, tutto sommato, non si vedono ragioni per aver sollevato questa discussione polemica, che credo possa venir senz'altro chiusa.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 maggio 1946. Presentata nella seduta del 18 maggio 1946.

(3) V. Diamare, *Miofibrille e loro bande*. « Rend. R. Accad. Sci. Napoli », ser. IV, vol. XIII, 1945.

(4) G. Ciaccio, *Ricerche sull'azione degli agenti chimici sulle fibre dei muscoli delle ali di alcuni Coleotteri*. « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », Bd. XXX, p. 567, 1940.

(5) M. Titomanlio, *Studi critici e ricerche sul comportamento ottico della sostanza muscolare striata e su relazioni tra chimico–fisica e struttura di questa*. « Arch. Zool. Ital. », vol. XIV, p. 19, 1930.

Questo spunto mi fa però ritener necessario di precisare alcuni punti di disaccordo, non tanto nei confronti di Diamare e Titomanlio, di fronte ai quali ho già ripetutamente precisato il mio punto di vista, quanto nei riguardi di Loreti [6], di fronte al quale è opportuno definire alcune opinioni controverse, non con l'intenzione di iniziare discussioni polemiche, ma con il semplice desiderio di offrire al lettore una più esatta enunciazione delle opinioni nostre e di quelle degli altri autori.

Il principale punto di divergenza in confronto a Diamare e a Loreti consiste nel fatto che io [7] ritengo che le miofibrille delle fibre striate, una volta differenziate, persistano quali organelli cellulari stabili non soggetti in condizioni normali a reversioni. Per cui non condivido la tesi di Loreti, approvata invece dal Diamare, secondo la quale le miofibrille « non rappresentano entità strutturali elementari stabili della sostanza contrattile, ma sono solo l'espressione di una condizione chimico-fisica della fase miofibrillabile, che, *in vivo* è reversibile e che è inerente al momento funzionale e forse anche alle condizioni di nutrizione della fibra ». Io quindi non accetto i concetti di « miocolloide colonnare » o di « miosarcoplasma » (Diamare) e di « fase miofibrillabile ». Per me, miofibrille e sarcoplasma, una volta differenziati dal mioplasma iniziale dei sarcoblasti indifferenziati, si conservano come due diversi e persistenti costituenti della fibra muscolare. Sono d'accordo con Loreti nell'ammettere un orientamento filare del colloide miofibrillare, orientamento che giustifica la birifrangenza (Schmidt), ma per me la struttura miofibrillare non è soltanto una condizione fisico-chimica submicroscopica « di ordine esclusivamente micellare ». La miofibrilla è per me una struttura microscopica distinta, anche *in vivo*, dal colloide sarcoplasmatico. Nè posso accettare l'affermazione di Loreti che « la "miofibrilla" appare ..... come entità concreta, stabile, irreversibile, solo colla morte della fibra o in tutte quelle condizioni in cui si crei un turbamento dell'equilibrio chimico-fisico del colloide muscolare ». Questa tesi può trovare la sua apparente giustificazione nel fatto che *in vivo* allo stato di riposo le miofibrille sono per lo più strettamente aderenti tra loro e che non sono separate da sarcoplasma interposto, per cui possono apparire come una massa continua, dalla quale per effetto della retrazione dovuta alla fissazione le miofibrille

(6) F. Loreti, *Sulla struttura della fibra muscolare striata negli Artropodi.* « Mem. R. Accad. Italia », vol. XI, p. 499, 1940; *Ulteriori osservazioni sulla struttura della fibra muscolare striata negli Artropodi. Ricerche di micromanipolazione.* « Pont. Acad. Sci. Commentationes », vol. IV, p. 413, 1940; *Ricerche sulla struttura della fibra muscolare striata negli Artropodi (Insetti e Crostacei).* « Atti Accad. Med. Lombarda », anno XXIX, 1940.

(7) U. D'Ancona, *Contributo a una revisione delle nostre conoscenze sulla morfologia della fibra muscolare striata.* « Protoplasma », vol. X, p. 177, 1929; *Linee fondamentali della struttura della fibra muscolare striata.* « Arch. Zool. Ital. », vol. XVI, p. 805, 1930; *Ricerche sulle modificazioni morfologiche che intervengono nella fibra muscolare striata durante la contrazione.* « Protoplasma », vol. XVII, p. 388, 1932; *Le striature trasversali delle fibre muscolari striate, in vivo e nei preparati fissati.* « Arch. It. Anat. Embriol. », vol. XXX, p. 556, 1932.

stesse sembrano individuarsi. Nell'osservazione delle fibre in contrazione, da me documentata con la cinematografia, si può però rilevare come nell'onda di contrazione, aumentando il liquido interfibrillare, le fibrille appaiono anche *in vivo* perfettamente individuate.

Per quanto riguarda la striatura delle fibre, io ho riconosciuta esatta l'osservazione di Diamare che i tratti Q sono birifrangenti e che quindi non è esatto il riferire a Q i tratti che a luce ordinaria appaiono scuri e a luce polarizzata monorifrangenti; non concordo invece con questo autore nell'interpretazione delle diverse strie. Per me elemento essenziale della striatura è la sola linea Z; tutto il tratto di miofibrilla compreso tra due successive linee Z è birifrangente, con differenze poco sensibili nelle fibre osservate a fresco, che si accentuano invece con la fissazione. Non riconosco quindi nelle fibrille i tratti « parazetali » monorifrangenti di Diamare, accettati dal Loreti. Di monorifrangente osservo soltanto le linee Z e le serie di granuli J. Se questi ultimi coincidono per il livello con i tratti « parazetali », non sono però costituenti della fibrilla, ma formazioni interfibrillari. In fondo Loreti si associa però in parte al mio punto di vista quando riconosce che « nel tratto parazetale la dimostrazione a luce ordinaria di strie chiare ed oscure è fondamentalmente connessa alla presenza dei granuli J (" sarcosomi ") aventi situazione intermiofibrillare ».

Devo a questo proposito rilevare che la mia opinione non è esattamente riferita da Levi [8] quando dice che « Diamare dimostrò alcuni anni or sono (e D'Ancona e G. Bruno lo confermarono) che furono inesattamente stabilite le corrispondenze tra tratti chiari e scuri in Insetti e Vertebrati. Prendendo come base l'anisotropia, il così detto *tratto chiaro* della fibra dei Vertebrati fu fatto inesattamente corrispondere, secondo Diamare, a quello chiaro della fibra degli Insetti, perchè il primo è anisotropo come il tratto detto *scuro* di questi ultimi, mentre il disco scuro della fibra dei Vertebrati è isotropo ». Senza entrare a chiarire i punti di vista dei singoli autori, dirò soltanto che questa non è la mia opinione, che per me l'omologia delle striature delle fibre degli Insetti e dei Vertebrati è data dalla linea Z, che è sempre equivalente. La confusione è derivata dal fatto che si è parlato di tratti scuri e di tratti chiari, i quali sono aspetti più o meno evidenti, più o meno artificiosi. Costante è invece la linea Z, che corrisponde a un livello di adesione delle miofibrille al teloframma e con esso al sarcolemma.

Ricorderò a questo proposito che non condivido la distinzione tra linea Z e linea di Amici fatta da Diamare e accettata da Loreti, secondo il quale, in accordo con precedenti osservazioni di Bruno, vi sarebbero dei granuli Z di natura miofibrillare distinti dalla membrana o linea di Amici di natura sarcoplasmatica. Per me linea di Amici, teloframma, membrana Z sono

(8) G. Levi, *Trattato di Istologia*, II, ed. Torino, 1935

formazioni e denominazioni corrispondenti. Dopo la demolizione delle miofibrille effettuata da Ciaccio, le membrane Z appaiono continue attraverso fibrille e sarcoplasma. I granuli che Loreti afferma colorarsi con il bleu di metilene sono secondo noi da identificare con i granuli J sarcosomici interfibrillari, « parazetali » per usare la denominazione di Diamare. Nelle nostre osservazioni, compiute su fibre di diverse specie animali e in differenti gradi di estensione, non abbiamo mai riscontrato una distinzione di granuli Z e di granuli J. Ritengo quindi che questi presunti granuli Z rappresentino semplicemente i punti di intersezione delle miofibrille con le membrane Z.

Non è neppure esatto l'accenno di Levi ove dice che non sembra « che gli argomenti addotti da D'Ancona siano di natura tale da farci rinunziare all'antica idea, che il disco Q sia parte integrante della miofibrilla ». Anch'io sono appunto dell'idea che la zona indicata quale disco Q sia parte integrante della miofibrilla. Io non nego l'esistenza a questo livello di un tratto miofibrillare più o meno differenziato; penso però che il cosidetto disco Q non sia una porzione distinta dal resto della miofibrilla, ma soltanto un tratto della stessa, che, per particolari condizioni di tensione e di addensamento della sostanza miofibrillare, assume gradi diversi di trasparenza e di birifrangenza; questo tratto acquista una delimitazione netta in confronto al resto della miofibrilla soltanto sotto l'influenza dei reattivi. Su questo modo di considerare la striatura delle miofibrille, Loreti esprime vedute fondamentalmente concordanti con le mie, nè vi è sostanziale dissenso con la precedente affermazione di Diamare [9] che « bande e strie non rappresentano.... che stati di una concezione fisico-chimica non uniforme delle miofibrille ».

Un altro punto fondamentale della mia concezione strutturale della fibra muscolare è rappresentato dall'andamento elicoidale della linea o meglio della membrana Z.

L'affermazione di Diamare che Ciaccio « confermi... che le fibre alari documentano l'erroneità del concetto della disposizione elicoidale » non corrisponde alla verità, perchè Ciaccio dice semplicemente con tutta obbiettività, che nelle fibre delle ali « non è rilevabile l'andamento elicoidale della membrana Z, ormai sicuramente dimostrato per le fibre striate tipiche ». E che nelle stesse fibre delle ali questa disposizione non sia rilevabile, si spiega con il grande spessore delle fibre stesse e con la piccola altezza degli inocommi. In tutte quelle fibre che per lo spessore e l'altezza degli inocommi si trovano in condizioni adatte di osservazione, si può rilevare con tutta evidenza che la membrana Z e con essa le striature dovute agli addensamenti fibrillari e alle granulazioni interfibrillari hanno un ben evidente andamento elicoidale. Ciò, dopo le precedenti imperfette interpretazioni di Münch e di Tiegs, è stato da me chiaramente osservato e dimostrato in

(9) V. Diamare, *La birefrazione nella striatura delle fibre muscolari dei Vertebrati e Artropodi.* « Rass. Terap. e Patol. Clin. », anno VII, 1935.

fibre studiate a fresco in condizioni di sopravvivenza; è stato meglio documentato da Ciaccio per mezzo della demolizione parziale della fibra, è stato confermato da B. Schreiber [10], da Tiegs [11] e da Aurell e Wohlfart [12] e, se bene interpreto una succinta citazione che sola sono riuscito fino ad ora a leggere, anche da Szent–Györgyi [13]. Di fronte a queste nostre affermazioni e dimostrazioni, oltre a Diamare e a Bruno [14], persistono invece nel negare la disposizione elicoidale della stria Z Loreti e Pensa [15]. L'interpretazione di questi ultimi autori che le nostre osservazioni siano basate sull'esame di fibre deformate non è sostenibile, perchè noi ci siamo sempre preoccupati di evitare tale possibile causa di errore.

Per riassumere il mio punto di vista sulla struttura della fibra muscolare striata, dirò che questa consta quali costituenti tipici (oltre al sarcolemma, al sarcoplasma, ai nuclei):

1) delle miofibrille, individualità persistenti, a più elevato grado di densità che i colloidi sarcoplasmatici che le circondano, a costituzione unitaria benchè a caratteristiche fisico–chimiche periodicamente variabili, birifrangenti sebbene a grado diverso in tutto il loro decorso;

2) della membrana Z ad andamento elicoidale, che interseca le miofibrille e aderisce perifericamente al sarcolemma che avvolge tutta la fibra;

3) dei granuli interfibrillari J e Q e di altri costituenti granulari sarcosomici di natura lipoproteica.

Sui rapporti tra miofibrille e membrane Z, che sembrano continuarsi tanto quelle attraverso a questa, quanto viceversa, per cui in un primo tempo mi ero pronunziato con riserva, dirò che mentre le miofibrille si rendono evidenti nella fibra in sviluppo prima della comparsa delle linee Z [16], successivamente a fibra differenziata le membrane Z appaiono continue anche dopo la demolizione delle miofibrille (Ciaccio), per cui si deve concludere che queste ultime si originano come formazioni continue che poi vengono intersecate dalla membrana Z, la quale si origina in un tempo successivo.

(10) B. Schreiber, *Osservazioni sulla membrana di Amici nel tumore muscolare da pebrina del baco da seta.* « Arch. Zool. Ital. », vol. XIX, p. 381, 1933.

(11) O. W. Tiegs, *Observations on the structure of striated muscle fibre.* « Proc. R. Soc. London », vol. CXVI, p. 38, 1934.

(12) G. Aurell e G. Wohlfart, *Studien über mikroskopischen Bau der quergestreiften Muskulatur.* « Zeitschr. mikr. anat. Forsch. », Bd. XL, p. 402, 1936; G. Wohlfart, *Ueber das Vorkommen verschiedener Arten von Muskelfasern in der Skeletmuskulatur des Menschen und einiger Säugetiere.* « Acta Psychiatr. » (Köbenhavn), 1937.

(13) « Nature », vol. CLV, p. 750, 1945.

(14) G. Bruno, *La struttura delle fibre muscolari degli Artropodi studiata nei preparati a fresco.* « Arch. exp. Zellforsch. », Bd. XII, p. 355. 1932.

(15) A. Pensa, *Trattato di Istologia generale*, II. ed., Milano, 1939.

(16) U. D'Ancona e V. Fosi, *Ricerche sulla istogenesi delle fibre muscolari striate con particolare riguardo al differenziamento delle miofibrille.* « Arch. Ital. Anat. Embriol. », vol. XXXIX, p. 377, 1937.

Dal punto di vista funzionale le nostre ricerche hanno portato a precisare due punti fondamentali:

1) che nella contrazione le miofibrille si disidratano per un passaggio di acqua tra esse e gli spazi interfibrillari (D'Ancona);

2) che mentre le fibrille devono essere interpretate quale costituente contrattile meccanico della fibra, i granuli sarcosomici vanno considerati quale costituente energetico al cui livello si svolgono processi ossido-riduttivi (Ciaccio) [17].

Quest'ultima constatazione, unitamente alla dimostrazione che le membrane Z persistono anche dopo distruzione delle miofibrille ad opera di agenti patologici o sperimentali, è dovuta a G. Ciaccio [18], la cui opera ha quindi maggior rilievo di quanto ad essa attribuisca Diamare, secondo il quale « non porta alcun contributo reale all'argomento ».

Per quanto poi si riferisce alla disidratazione delle miofibrille, dirò per chiudere questa breve messa a punto che tale reperto è stato confermato per altra via sperimentale dal Szènt-Györgyi [19].

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Annibale Comessatti

a cura del Socio L. Berzolari, letta nella seduta del 15 giugno 1946.

Il Presidente prof. Guido Castelnuovo, prima di dare lettura alla commemorazione del compianto Corrispondente Comessatti che qui sotto vien riprodotta pronuncia le seguenti parole:

« Ho conosciuto il Comessatti poco tempo dopo la sua laurea. Egli venne a trovarmi in un villaggio del Cadore ove trascorrevo la stagione estiva e dai discorsi scambiati con Lui compresi subito quali alte promesse Egli desse alla scienza, promesse poi largamente mantenute.

« Nello stesso villaggio passammo insieme le due stagioni estive del 1940 e del 1941. Egli villeggiava colà con la gentile Signora e con l'unica figliuola,

(17) G. Ciaccio, *Ricerche sui costituenti granulari delle fibre muscoluri striate, con particolare riguardo ai granuli interfibrillari* Q e J. « Arch. Ital. Anat. Embriol. », vol. XL, p. 301, 1938; *Ricerche sul significato istochimico e funzionale delle granulazioni interfibrillari* (J e Q) *delle fibre muscolari striate di Artropodi e Vertebrati.* « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », Bd. XXXI, p. 549, 1941.

(18) Si veda pure G. Ciaccio, *Ricerche sulla fibra muscolare striata. Esame con la fotografia a luce ultravioletta.* « Zeitschr. Zellforsch. », Bd. XXXIII, p. 157, 1944.

(19) A. Szent-Györgyi e coll., *Myosin and muscular contraction.* « Studies Inst. Med. Chem. Univ. Szeged », vol. I, 1942.

fiore di grazia, di bontà e di intelligenza, che morì diciassettenne nell'autunno del 1941; il dolore di questa immensa sventura abbreviò la vita del nostro Collega.

« Le lunghe conversazioni con Lui avute tra le Alpi mi convinsero, non meno che la lettura dei Suoi lavori, della profondità del Suo ingegno e della larghezza della Sua cultura. Egli voleva sviscerare ogni questione che imprendeva a trattare, e l'acume del Suo spirito critico lo salvava da errori facili a commettere in un campo ove spesso manca il sussidio dei procedimenti analitici. La passione che portava nella ricerca era pari a quella che lo animava nell'insegnamento universitario. Comprendo quindi quale grave perdita abbia recato alla Università di Padova la morte del Comessatti che era l'animatore di quella Scuola di matematica.

« Alla vedova che piange il marito e la figliuola invio oggi il reverente saluto mio e dei Colleghi ».

Con la morte di Annibale Comessatti, avvenuta in Padova il 13 settembre 1945, la Matematica italiana ha perduto uno studioso di singolare valore, dotato d'intuito fine e penetrante e di acuto spirito critico, il quale in breve tempo si era reso padrone dei concetti e dei procedimenti gruppali e topologici, algebrico–geometrici e trascendenti, facendoli convergere con agile maestria alla risoluzione di elevati e difficili problemi della Geometria algebrica, e conseguendo in questo campo risultati d'importanza essenziale.

Era nato a Udine il 30 gennaio 1886 e aveva compiuto gli studi universitari a Padova, laureandosi con lode nel 1908. In quell'Università si trattenne fino al 1920 come assistente successivamente di Geometria descrittiva, analitica e proiettiva; conseguì nel 1914 la libera docenza in Geometria descrittiva, e dal 1920 al 1922, in seguito a concorso, fu all'Università di Cagliari come professore straordinario di Analisi algebrica e Geometria analitica. Chiamato nel 1922–23 alla cattedra di Geometria descrittiva dell'Università padovana, l'anno successivo ebbe la promozione a ordinario. Nello stesso anno mutò il Suo insegnamento con quello di Geometria analitica e proiettiva, e a partire dal 1925 tenne pure l'incarico di Geometria superiore. Fu anche incaricato di varie materie, nell'Università di Ferrara nel periodo 1924–27, e in quella di Bologna nel periodo 1936–39.

Negli anni 1915–18 prese parte alla guerra italo–austriaca come tenente di artiglieria, e riportò due croci al merito di guerra.

* * *

La dissertazione di laurea è il primo di una serie di lavori che il Comessatti dedicò alla Geometria sopra una curva algebrica, e già vi si ravvisano quelle doti di ricercatore dotto e geniale che dovevano poi distinguere tutta la Sua opera scientifica. È un ampio studio sulle curve doppie di genere $\pi \geqq 1$ (curve alge-

briche contenenti involuzioni irrazionali di second'ordine e genere π), dove, fra altro, sono assegnate, sotto varie forme, le condizioni d'identità birazionale di due curve doppie rappresentate sopra una medesima curva di genere π con lo stesso gruppo di diramazione, ed è determinato il corrispondente numero delle famiglie birazionalmente distinte.

L'argomento fu da Lui ripreso nel 1930 in uno scritto sulle superficie (e curve) multiple cicliche, nel quale è risolto il difficile problema di trovare il numero delle famiglie birazionalmente distinte di tali superficie, rappresentate sopra una data superficie con o senza curva di diramazione.

Altri lavori degli anni 1910–15 dànno la soluzione di problemi numerativi sulle serie lineari appartenenti ad una curva algebrica, inoltre l'estensione, dal punto di vista trascendente, del criterio aritmetico dovuto al Castelnuovo, che permette di caratterizzare le serie algebriche ∞^1 di dato ordine, irriducibili e prive di punti fissi, che siano contenute totalmente in una serie lineare dello stesso ordine.

La prontezza del Comessatti nel sapersi orientare nelle più svariate direzioni e la Sua perizia nell'impiego promiscuo di procedimenti gruppali, topologici, algebrico–geometrici, appaiono in piena luce nelle importanti indagini degli anni 1929–31 intorno all'argomento, tra noi scarsamente coltivato, dei rapporti tra funzioni algebriche e funzioni fuchsiane o automorfe. Notevoli ed eleganti i collegamenti da Lui stabiliti tra le involuzioni ∞^1 sopra una curva algebrica e la teoria delle funzioni fuchsiane, punto centrale della ricerca essendo il teorema generale di diramazione per quelle funzioni (già considerato in casi particolari dal Klein e dal Fubini). Si tratta della condizione necessaria e sufficiente affinchè, date due curve algebriche irriducibili f e C in corrispondenza $(1,n)$, ed una variabile uniformizzante fuchsiana di f, questa risulti una variabile uniformizzante anche per C: essa viene espressa da un semplice legame tra il gruppo di diramazione dell'uniformizzante su f e quello della rappresentazione multipla di C su f.

La nozione di « curva di Galois », da Lui introdotta, Gli consentì di stabilire intimi rapporti con la teoria di Galois e di dare interessanti applicazioni atte ad illustrare sia la teoria generale che certi particolari esempi.

In connessione con le ricerche precedenti, Egli studiò le equazioni differenziali fuchsiane di genere zero, ossia le equazioni del tipo

$$y'' = Q(z)\, y\,,$$

con Q funzione razionale di z, per le quali la variabile indipendente z risulta funzione fuchsiana del rapporto tra due integrali particolari qualunque.

Partendo poi dall'osservazione che, quando si ricorra all'uniformizzazione mediante funzioni fuchsiane, le trasformazioni birazionali di una curva algebrica in sè, dotate di almeno un punto unito, si possono rappresentare come rotazioni periodiche del piano iperbolico, fornì la completa soluzione del problema, già

trattato da A. Hurwitz e da A. Wiman, di assegnare il massimo valore che sopra una curva irriducibile di dato genere $p > 0$ può avere il periodo di una trasformazione birazionale della curva in sè, dotata di un numero prefissato di punti uniti.

* * *

Vari lavori sono dedicati, a partire dal 1913, alle superficie e varietà di Jacobi, e a ricerche sopra superficie e varietà algebriche: tra le ultime specialmente notevoli quelle collegate con risultati ottenuti dal de Franchis, dal Castelnuovo e dal Rosenblatt, sulle superficie irregolari contenenti un fascio irrazionale di curve. La classificazione, ottenuta in modo completo dal Comessatti, delle superficie irregolari soddisfacenti alla diseguaglianza del Castelnuovo

$$p_g \leqq 2(p_a + 2),$$

dove p_a e p_g sono i generi aritmetico e geometrico della superficie, è collegata col problema analitico di integrare un certo sistema di equazioni alle derivate parziali. Il Comessatti, con un'elegante rappresentazione geometrica, ha ridotto questo problema allo studio di un sistema di ∞^2 rette di un iperspazio appartenenti a più complessi lineari, e lo ha risolto completamente nel caso che interessa la questione geometrica da cui ha avuto origine.

Un lavoro del 1943 si riferisce alla teoria delle plurilinearità tra spazi lineari di dimensioni arbitrarie, i fondamenti della quale erano stati posti dal Severi in un corso di lezioni pubblicato l'anno precedente.

Un posto a parte tra le produzioni del Comessatti occupano alcuni lavori del 1921–23, nei quali, mediante una rappresentazione iperspaziale, si stabiliscono per via geometrica i teoremi più importanti della teoria delle forme binarie.

* * *

Ma dove il Comessatti segnò l'orma più profonda per l'originalità e la potenza dei procedimenti e per la portata generale dei risultati, fu nelle ricerche sugli enti algebrici reali, che, intraprese pochi anni dopo il conseguimento della laurea, formarono poi sempre l'oggetto delle Sue meditazioni.

Sono del 1911 e del 1914 le due fondamentali Memorie, nelle quali è fatto uno studio generale delle superficie razionali reali dal punto di vista invariante rispetto alle trasformazioni birazionali reali: nella prima, stabilendone la classificazione in tre famiglie, e determinando per ciascuna di queste il numero delle falde reali, la relazione di questo numero con l'invariante di Zeuthen–Segre, inoltre i moduli reali di una classe di superficie razionali reali equivalenti per trasformazioni birazionali reali; nella seconda, studiando le proprietà di connes-

sione delle falde e le loro relazioni con il detto invariante e con un altro invariante desunto dalle ricerche del Severi sulla base per i sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Il risultato fondamentale a cui pervenne il Comessatti è compendiato nella relazione

$$I + Z = 2(\bar{\rho} - 1),$$

valida per ogni superficie razionale reale, indipendentemente dalla famiglia a cui appartiene e dal numero delle falde, denotandosi con I l'invariante di Zeuthen–Segre, con Z l'ordine di connessione totale delle falde reali della superficie, e con $\bar{\rho}$ il numero base reale della superficie, ossia il numero delle curve algebriche reali linearmente indipendenti, con le quali è linearmente legata ogni curva algebrica reale della superficie.

L'estensione della precedente ricerca alle superficie algebriche non razionali offre gravi difficoltà, e il Comessatti con una delicata analisi ha mostrato (1928 e 1932) che essa conduce, in generale, ad una doppia diseguaglianza

$$2(\bar{\rho} + p_g) - R_2 \leq Z \leq R_2 - 2(\rho - \bar{\rho}) - 2p_g,$$

dove R_2 è l'ordine di connessione bidimensionale reale, e ρ e $\bar{\rho}$ sono i numeri base, complesso e reale, delle curve giacenti sulla superficie. Essa è tuttora l'unica formola conosciuta che porga qualche indicazione sul numero e sui caratteri topologici delle falde di una superficie algebrica reale.

Notevoli risultati ha pur conseguito il Comessatti sulle varietà abeliane (varietà algebriche V_p di p dimensioni, che ammettono una rappresentazione parametrica con funzioni analitiche $2p$ volte periodiche di p argomenti) reali, ossia trasformate in sè da una simmetria S.

Dell'argomento già si erano occupati S. Lefschetz e S. Cherubino; il Comessatti ne ha ripreso lo studio dall'inizio e ha composto le proprie ricerche in una teoria organica. Ufficio essenziale ha in esse il cosiddetto *carattere reale* λ di S. Si possono assegnare il numero delle classi reali delle V_p, e in ciascuna classe il numero delle falde reali delle V_p, e su ogni falda il numero e la distribuzione dei punti uniti reali nelle diverse classi di trasformazioni birazionali involutorie reali di V_p in sè.

Assunti in V_p (ossia nella relativa varietà riemanniana) $2p$ cicli primitivi, resta determinato un sistema di periodi primitivi, che formano una matrice di Riemann. Dallo studio delle proprietà reali algebriche di V_p il Comessatti fu condotto a porsi il problema della normalizzazione della matrice: problema complesso, che Egli risolse quando sia $\lambda = 0$, e per $\lambda > 0$ in un caso che si presenta nelle varietà di Jacobi.

Dei Suoi risultati il Comessatti fece applicazioni al problema di determinare il numero dei gruppi semicanonici appartenenti ad una curva algebrica reale di dato genere, e alla classificazione delle varietà di Kummer reali.

Il carattere reale fu da Lui ulteriormente studiato come carattere di una matrice riemanniana (*indice di simmetria*, denotato con 0), da aggiungersi ai

due h (*indice di moltiplicabilità*) e k (*indice di singolarità*) considerati dallo Scorza. Esso soddisfa alle limitazioni

$$\theta \leq k + 1 \quad , \quad 0 \leq h - k .$$

Lo Scorza aveva dimostrato l'esistenza (per $p > 2$) delle matrici con $k = 0 , h = 1$, e ne aveva dato la effettiva costruzione. Le difficoltà del problema divengono ancora più forti quando si voglia dimostrare l'esistenza di matrici con dati valori di θ e compatibili con quelli di h e k. Il Comessatti ha risolto il problema per $\theta = 0$ e per $\theta = 1$, assegnando pure la costruzione della matrice per $k = 0 , h = 1$.

* * *

Sorvolando su alcuni scritti riguardanti particolari questioni (notevole, ad esempio, uno studio sul gruppo topologico di una coppia di coniche), diamo almeno un cenno di due lavori, ricchi di osservazioni originali e acute, occasionati dalla pubblicazione delle belle *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva*, e dedicati ad una revisione critica dei principî logici che stanno a base della Geometria proiettiva. L'uno concerne il « teorema fondamentale » della Geometria proiettiva, l'altro, in relazione con la definizione di proiettività tra forme di prima specie, dovuta allo Staudt, conduce alla nozione di « Geometria non staudtiana ».

Se al ricordo di essi si associa quello delle tre Note sulla Geometria descrittiva, appaiono in tutta evidenza le belle doti del Comessatti pure come Maestro, non pago di attenersi nel Suo insegnamento agli schemi tradizionali, ma tutto pervaso dal duplice desiderio di approfondire criticamente i principî su cui si fondano le discipline da Lui professate, e di suscitare e tener vivo nei discepoli l'interesse di una cultura più ampia di quella strettamente scolastica, ponendoli ben presto a contatto con questioni atte ad eccitarne le iniziative personali.

Sia onore alla Sua memoria! Con la probità della Sua vita ha offerto un nobile esempio di virtù pubbliche e familiari, e con gli scritti e con l'insegnamento ha efficacemente contribuito a tenere alto il prestigio della scienza italiana.

Commemorazione del Corrispondente Augusto Stella

letta dal Socio Federico Sacco nella seduta del 15 giugno 1946.

La vita di Augusto Stella fu tutta intessuta di intenso quanto svariato lavoro che, sopra una base strettamente scientifica, si sviluppò, in modo pratico ed altamente proficuo, nel campo specialmente della Geologia mineraria.

Nato il 25 settembre 1863 a Chiari (Brescia) si laureò, nel 1886, nella Scuola di Ingegneria industriale di Torino.

Augusto Stella (1863–1944).

Poco dopo, vinto un Concorso di Allievo ingegnere nel Corpo reale delle Miniere, si recò a perfezionarsi nell'Accademia montanistica e nello Istituto geologico di Berlino, visitando pure numerose miniere e varî giacimenti minerari nella Germania, nonché nel Belgio, nella Francia e persino in Russia.

Rientrato infine in Italia nel 1892, incominciò subito la sua carriera come attivo geologo rilevatore nell'Ufficio geologico, dedicandosi particolarmente al difficile e faticoso rilevamento delle Alpi Occidentali che costituivano

allora un assai complesso problema che l'ing. STELLA, coll'aiuto di pochi colleghi (Zaccagna, Novarese, Mattirolo e Franchi), contribuì molto efficacemente a chiarire ed in parte a sciogliere, ponendolo su solide basi litologiche e tettoniche e risultandone l'importantissima, per quanto sintetica: *Carta geologica delle Alpi Occidentali*, pubblicata, dall'Ufficio geologico, alla scala di 1 a 400.000, nel 1908; mentre intanto venivano pure pubblicati, in parte per opera dello STELLA, diversi fogli al 100.000 della Carta geologica d'Italia riguardanti detta regione, nonché svariate Note per illustrare diversi fenomeni più importanti osservati durante il rilevamento geologico di tale regione alpina.

Oltre a questo studio dei terreni antichi, più o meno cristallini, delle Alpi, quasi scendendo a riposare dalle aspre regioni montane alla prospiciente pianura padana, lo STELLA si dedicò pure assai presto (dal 1895 in poi) allo studio dei terreni relativamente giovani, quaternari, di tale ampia fertile regione pianeggiante, proponendo per essi una prima distinzione in una Nota speciale: *Sui terreni quaternari della Valle del Po.* (« Boll. Comit. geologico italiano », 1895).

Tali ricerche sui depositi fluviali e simili portarono naturalmente lo STELLA all'esame delle tanto importanti falde acquee sotterranee lentamente scorrenti in tali permeabili terreni, come già risulta in una prima Nota: *Sulla idrografia sotterranea della pianura padana.* (« Boll. Soc. geol. it. », XV, 1896); ricerche che furono poi largamente estese ed approfondite dall'ing. STELLA, specialmente per captazione di acque potabili con pozzi trivellati in varie regioni del Piemonte e della Lombardia, specialmente per alimentazione di Torino e Pavia, come risulta per esempio dalla Nota: *Sulle condizioni geognostiche della pianura piemontese rispetto alle acque del sottosuolo* (« Boll. Comit. geol. », XXI, 1900) Infine Egli conchiuse i suoi: *Studi sulla Idrografia sotterranea della pianura del Po* in una importante Memoria descrittiva della Carta geologica d'Italia, vol. XVII, 1915).

Già sin dal 1897 l'ing. STELLA colla sua lucida mente di geologo pratico si era occupato e preoccupato dello: *Sviluppo ed indirizzo della Geologia applicata in Italia.* (Boll. Soc. geol. it. », XVI, 1897), anche: *A proposito della Geologia applicata nelle nostre Scuole d'Ingegneria.* (« Rass. Min. », VII, 1897), mettendo in luce l'importanza di tale disciplina come base di tante opere, come: captazione di acque sotterranee specialmente a scopo potabile, canali, lavori stradali e ferroviarî, gallerie, dighe per serbatoi acquei artificiali, acque minerali, opere portuarie, ricerche minerarie, frane, materiali naturali per costruzione, pavimentazione, cementazione ed ornamentazione, miglioramenti agrari, ecc.

È appunto in rapporto a tale argomento che lo STELLA ebbe dalla Direzione della Società italiana del Progresso scientifico in Italia l'incarico di segnalare, nell'opera: *Un secolo di Progresso scientifico italiano, 1839–1939* il *Contributo italiano nel progresso della Geologia applicata negli ultimi cento anni* (Roma, 1940).

In relazione ai suoi profondi studi di geotettonica della regione alpina, l'ing. STELLA poté portare un notevole contributo alla soluzione dei problemi

della costruzione delle grandi Gallerie transalpine, così per esempio trattando *Il Problema geo–tettonico dell'Ossola e del Sempione.* (« Boll. Comit. geol. d'Italia », 1915) ed occupandosi *Delle condizioni geologiche della Grande Galleria dello Spluga* (« Boll. Soc. geol. ital. », XXX, 1911).

Malgrado tante e svariate ricerche l'ing. Stella mai dimenticò di appartenere al Corpo delle Miniere, spesso infatti applicandosi a studi minerari, come *Sul giacimento plumbo–baritico della regione di Trou des Romains presso Courmayeur.* (« Rass. Min. », XVI, 1902), quando studiavo, con alcuni Colleghi: *I Giacimenti di Antracite della Valle d'Aosta.* (Mem. descr. Carta geol. d'Italia, XII, 1903); *I Giacimenti metalliferi dell'Ossola.* (« Boll. Comit. geol. d'Italia », 1907; *Le Cave di Alabastro del Saluzzese.* (« Boll. Com. geol. d'Italia », 1907); *Relazione sulle ricerche minerarie nei giacimenti cupriferi del Circondario di Alghero.* (« Boll. Com. geol. ital », 1908); *Il minerale ferro–stannifero di Campiglia marittima.* (« Rass. Min », XXXVII, 1912); *I Giacimenti italiani di Magnesite.* (« L'Ind. chim. », II, 1915); *I giacimenti minerari di Predazzo.* (« Boll. Soc. geol. ital., », XXXIX, 1920. Studi minerari che culminarono nel grande lavoro sopra: *Le Miniere di Ferro d'Italia* (1921) ed in quello analogo, ora in stampa, sull'Oro. Ricordiamo pure *Sopra un giacimento di Cromite nella Valle Argentiera presso Ziona.* (« Boll. Soc. geol. ital. », XLIII, 1924; *Contributo alla conoscenza dei giacimenti italiani di Leucite.* («Boll. Soc. geol. ital., XLIX), 1930); *Nuovi studi sui giacimenti di Antracite della Thuite.* (« Mem. Soc. geol. ital. », I, 1932); *Su un interessante ammasso ferro–titanifero dell'alto Egitto.* (« Rend. Acc. Lincei », XV, 1932); *Materie prime ed evoluzione mineraria.* (« Atti Soc. ital. Progr. Scienze », 1933); *Nuovi studi sui giacimenti ferriferi dell'Isola d'Elba.* (« Boll. Soc. geol. ital. », LII, 1933); *Contributo alla conoscenza dei giacimenti di Berillo dell'Alto Egitto.* (« Boll. Soc. geol. ital. », LII, 1933); *Ricerche e studi sulle alluvioni aurifere della Valle padana.* (« Cons. Naz. Ricerche », Roma, 1934); *Interessante constatazione fatta in alcuni giacimenti metalliferi dell'Iglesiante.* (« Ind. Miner. », 1935); *Alcune osservazioni a proposito del giacimento di rame della Sardegna.* (« Ind. Min. », 1940); ecc.

Anche si interessò lo Stella dei rapporti fra Geologia ed Agricoltura, come mostrò specialmente nella *Descrizione geognostica–agraria del Montello* (Mem. descr. Carta geol. d'Italia, vol. XI, 1902); tali rapporti infatti sono, sotto varî aspetti, assai più stretti di quanto generalmente si creda.

Né mancò l'ing. Stella di occuparsi, quando gli si presentò l'occasione, dei problemi geoidrologici (che sempre interessarono la sua acuta mente indagatrice) riguardo alle colonie italiane in Africa; Egli infatti fece parte nel 1913 della Spedizione Franchetti in Tripolitania, come risulta dalla interessante monografia: *Topografia, Geologia ed Acque nel Gebel Tripolitano.* (Soc. ital. Studi di Libia – Firenze, 1914).

In relazione coll'alta competenza geologico–mineraria dello Stella, quando, nel 1908, fu istituito il Corso di perfezionamento di Ingegneria mineraria nel

Politecnico di Torino [1], Egli, appena allora nominato professore a Palermo, fu chiamato ad occuparne la Cattedra di Miniere, cattedra che il prof. Stella coprì con molto onore, creandovi anche un utilissimo laboratorio di coltivazione delle Miniere e di preparazione dei minerali, radunando pure speciali collezioni didattiche relative ai giacimenti minerari d'Italia.

Durante la prima guerra mondiale il prof. Stella, colle sue preziose cognizioni di Arte mineraria, poté portare al Comando supremo utili insegnamenti, specialmente riguardo alla perforazione delle roccie; ciò dal novembre 1915 al dicembre 1916.

Più tardi, istituita in Roma, nel 1923, la speciale Scuola di Ingegneria Mineraria, il prof. Stella fu naturalmente chiamato nel 1924 a coprirne la Cattedra di Scienza delle Miniere; Cattedra che Egli occupò col suo solito fervore di opere e con ottimi risultati sino al suo collocamento a riposo, per limiti di età, nel 1935. In tale occasione gli Allievi gli offrirono una medaglia ed in suo nome fu fondata una borsa di studio per la migliore laurea in Ingegneria mineraria.

Ma il prof. Stella non conosceva il riposo, per cui, ritornando tranquillamente, come semplice privato studioso, al suo caro Ufficio geologico, di cui aveva fatto attiva parte per tanti anni, e dove fu ben accolto assieme ad alcuni altri coetanei di analoghe condizioni, attese ad ulteriori studi, fra cui una monografia: *Sui giacimenti di Stagno del M. Valerio* e specialmente un importante lavoro monografico sopra *I giacimenti auriferi delle Alpi italiane*, analogo a quello che aveva pubblicato molti anni prima sul Ferro, quando, inattesa, la morte ne troncò l'inestinguibile attività, con un attacco cardiaco, il 28 novembre 1944.

Tale fu, schematicamente delineata, l'opera scientifica e tanto utilmente pratica, del nostro compianto Socio (dal 1926) ing. prof. Augusto Stella, alla cui memoria l'Accademia dei Lincei rivolge oggi, con commosso pensiero, un ammirato saluto.

(1) Sin dal 1903, essendo allora professore di Geologia applicata nel Politecnico e di Paleontologia all'Università di Torino, avevo propugnato l'idea della *Istituzione di un Corso di perfezionamento per Ingegneri della Miniere in Torino.* (F. Sacco, « L'Ingegneria civile », XXVIII, Torino, 1903).

Commemorazione del Corrispondente Giuseppe Tommasi

letta dal Socio Guido Bargellini, nella seduta del 15 giugno 1946.

Giuseppe Tommasi terminò la sua vita operosa il 21 gennaio 1944 quando l'Accademia dei Lincei esisteva soltanto nel cuore dei suoi Soci. Ora che l'Accademia rinasce dalle sue ceneri, ora vuole ricordarlo ai Colleghi che lo stimarono e lo amarono e a tutti i cultori della scienza e della tecnica agraria che lo ebbero Maestro e che si rivolgeranno per molto tempo ancora alle sue opere per la conoscenza della fertilità della terra e per trovare lo spunto a nuove conquiste nel settore della produzione agraria.

Nato a Cosenza il 16 maggio 1885, da Bartolomeo Tommasi, professore di Agronomia, fu allievo di Cannizzaro e di Paternò nell'Università di Roma dove si laureò in Chimica nel decembre 1908. Dopo breve periodo di collaborazione con Parravano, Giuseppe Tommasi entrava come assistente alla Stazione Chimico Agraria di Roma e nel 1913 era promosso vice–direttore. Nello stesso anno conseguiva la libera docenza in Chimica Agraria.

All'inizio della Sua carriera lavorò col Direttore della Stazione, prof. Ampola, sugli anticrittogamici ed insetticidi, più particolarmente sull'arsenico, per il quale elemento Egli elaborò un apprezzato metodo di determinazione; poi con F. Scurti, intraprese una serie di ricerche di Biochimica vegetale, fra cui notevoli quelle sulla formazione dei grassi nei frutti oleaginosi e sul sughero. Pubblicò poi una serie di lavori sulla determinazione del grado alcoolico, e molte ricerche di chimica analitica sui vini, sui frumenti, sulle rocce leucitiche e sui guani. Anche gli studi sulla sostanza colorante dell'Henna e sulla essenza di magnolia, nonchè le esperienze sulla sterilizzazione del suolo, lo misero in vista, tanto da essere ternato nel concorso per la cattedra di Chimica Agraria di Portici e da poter concorrere al posto di direttore della Stazione Agraria, vacante per la morte di Ampola, a cui Egli venne a succedere nel 1920.

Assai precarie erano le condizioni in cui si trovava la Stazione Agraria quando Egli ne prese le redini: affrontò quindi il problema di creare una sede degna dell'avvenire dell'Istituto, quale Egli voleva e presentiva di poter raggiungere. Furono anni di battaglie e di affannoso lavoro, in cui rifulsero le doti di tenace realizzatore del Tommasi, il quale riuscì a organizzare entro la Villa Celimontana di Roma un Istituto rispondente ai suoi disegni, che costituisce oggi un'eredità degna dello scomparso.

Pur attraverso le difficoltà accennate, che durarono fin quasi agli ultimi giorni della Sua vita, la sua attività di studioso non veniva meno, ed anzi assumeva via via più ampio respiro con l'affrontare problemi di sempre maggiore

portata nel settore della Chimica Agraria. Al primo più difficile periodo appartengono varie indagini di Chimica analitica e bromatologica. Appena gli fu possibile disporre di un campo sperimentale, incominciò numerose prove di concimazione che lo indirizzarono decisamente verso lo studio della fertilità della terra. Qui fece passi da gigante, tanto da raccogliere lusinghiere attestazioni già nel 1932 al Congresso di Chimica di Roma, con la chiara conferenza *La chimica nei più moderni problemi della produzione agraria* ed al 1° Convegno Nazionale del Grano, con la classica memoria: *La concimazione del grano*, fondamentale per l'incremento della produzione frumentaria attraverso l'impiego dei fertilizzanti chimici.

I nuovi concetti da Lui esposti scaturivano da un complesso di originali esperienze sulla nutrizione minerale e idrica del frumento nei successivi stadi di sviluppo, dalle quali erano emerse nuove ed assai interessanti cognizioni di fisiologia vegetale. Egli infatti dimostrò sperimentalmente che il frumento durante la formazione della cariosside consuma circa la metà dell'acqua totale che traspira durante l'intero ciclo vegetativo.

L'introduzione dei grani precoci, la pratica delle nitratazioni invernali al grano, ed altre nuove forme di tecnica colturale, trovarono suadente giustificazione teorica, per cui fu possibile formulare norme accettate subito dalla massa dei tecnici e degli agricoltori.

Scevro da ogni preconcetto sul valore delle nozioni già acquisite, con semplice e ferma obiettività portò un validissimo contributo allo studio sistematico dei terreni italiani, da Lui condotto con scopi eminentemente pratici fondati su una visione unitaria del concetto di fertilità.

Per raggiungere tale fine molti furono i metodi di analisi da Lui riveduti e messi a punto, ma soprattutto importante quello per la misura del fabbisogno fosforico del suolo.

Con siffatta preparazione il Tommasi potè affrontare, nel 1933, una delle più importanti e vaste imprese di sperimentazione agraria, quando l'Opera Nazionale per i Combattenti lo chiamò a risolvere l'impellente problema della rapida messa a coltura dei terreni della Bonifica Pontina, che risultavano pressochè sterili. I risultati della sperimentazione furono assai proficui per la riuscita della grande bonifica, ma lo furono anche per il Tommasi che nel diuturno lavoro affinò le vedute sulla fertilizzazione dei terreni. Queste furono messe al banco di prova in un campo sperimentale dell'Altipiano Silano in Calabria ed in altri campi, alcuni dei quali a carattere dimostrativo, tantochè nel 1935, la sua Stazione contava ben 18 campi e poderi sperimentali con una superficie di oltre 200 ettari e circa 2.000 parcelle. Dalle esperienze in Sila derivò un memorabile lavoro sulla valorizzazione di questa vasta e promettente regione; da esperienze in campi irrigui derivò la realizzazione della tecnica degli erbai superintensivi già preconizzati dal Tommasi e che portò in qualche caso a produzioni di 2.500 quintali di erba per ettaro e per anno; da esperienze sulle bietole scaturirono interessanti norme di concimazione e tecnica colturale.

Sul decennale lavoro delle bonifiche pontine relativamente poche pubblicazioni sono apparse finora. Soltanto una monografia sui terreni dell'Agro Pontino è stata diffusa dopo la sua morte: i suoi allievi non mancheranno di lavorare nel suo indirizzo e di divulgare ancora l'opera del Maestro.

I concetti formulati dal Tommasi sulla fertilizzazione furono raccolti nel 1937, in una pubblicazione dal titolo: *Nuova dottrina integrale della concimazione* che costituisce in questo settore il più originale e decisivo contributo scientifico del Tommasi e resta una sicura guida per gli studi avvenire.

A questa Nota seguirono altre pubblicazioni su diversi argomenti dirette a portare una migliore conoscenza dei concetti sopra indicati: un attento lettore potrà forse scorgere in queste sue ultime parole i segni della malattia che lo minava.

La produzione scientifica del Tommasi è raccolta in 122 pubblicazioni. Nel 1935 fu nominato Socio Corrispondente dei Lincei e nello stesso anno ottenne il premio Santoro: nel 1940 gli fu assegnato il premio Ciamician, per la Chimica applicata. Fu chiamato a far parte di numerose Commissioni e Comitati nei quali portò sempre il contributo del suo fine spirito critico e del suo buon senso. L'Università di Roma da un venticinquennio gli aveva affidato l'insegnamento della Chimica Agraria.

Carattere aperto, battagliero, temperamento apparentemente rude e rigoroso, aveva il culto dell'amicizia: lo sanno quanti ebbero la fortuna di avvicinarlo e di essergli amici. La famiglia era il suo ideale e ad essa l'Accademia invia la sua commossa partecipazione di profondo cordoglio.

NOTE PRESENTATE NELLA SEDUTA DEL 15 GIUGNO 1946 E CHE SARANNO PUBBLICATE NEL PROSSIMO FASCICOLO

Note di Soci.

Bompiani E., « Enti geometrici definiti da sistemi differenziali ».
Carrelli A., « Sulla polarizzazione della luce del cielo ». Nota II.
Carrelli A., « Sulla polarizzazione della luce del cielo ». Nota III.

Note presentate da Soci.

Colacevich A., « Il " supposto " ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali ». Nota I, pres. dal Socio G. Abetti.

Colacevich A., « Il " supposto " ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali ». Nota II, pres. dal Socio G. Abetti.

Frontali N., « Trapianto dell'occhio tra embrioni e larve irradiate con raggi X e larve normali », pres. dal Socio F. Silvestri.

Galafassi V. E., « Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali ». Nota I, pres. dal Socio L. Berzolari.

Galafassi V. E., « Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali ». Nota II, pres. dal Socio L. Berzolari.

Goidanich G., « Sulle cause dei cedimenti nella pavimentazione del Palazzo Corsini, sede dell'Accademia Nazionale dei Lincei », pres. dal Socio D. De Blasi.

Morelli C., « Le analogie gravimetriche in funzione delle deviazioni della verticale », pres. dal Socio G. Cassinis.

Signorini R., « Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo da Badia Tebalda a Santa Sofia nell'Appennino Romagnolo ». Nota I, pres. dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

Signorini R., « Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo da Badia Tebalda a Santa Sofia nell'Appennino Romagnolo ». Nota II, pres. dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 15 giugno 1946

BARGELLINI Guido. — *Lezioni di Chimica organica.* Roma, Editrice Studium, 1946. Pp. 659, in 8°.

GOLA Giuseppe. — *Abramo Massolongo fitopaleontologo.* Verona, « Tipografica Veronese », 1941. Pp. 54, in 8°, con tavv.

— *Achille Forti.* Commemorazione. Verona, Tipografia Operaia, 1937. Pp. 19, in 8°.

— *Achille Forti (1878–1937).* Sonderabd. aus den « Berichten der Deutschen Botanischen Gesellschaft », Bd. LV, 1938.

— *Briofite raccolte dal dott. G. B. de Gasperi nella Terra del Fuoco sud-occidentale.* Estr. dal volume: « G. B. de Gasperi, Scritti vari di geografia e geologia », Firenze, 1922.

— *Contributo alla conoscenza delle Epatiche delle isole Canarie.* Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVI, 1911.

— *Contributo alla conoscenza delle Epatiche del Katanga (Congo Belga).* Estr. dal « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. XXVII, fasc. 2–4, 1920.

— *I caratteri della vegetazione della Valle Maira (Alpi Cozie).* Estr. da « Studi sulla vegetazione del Piemonte », 1929.

— *I fondamenti biologici dell'agricoltura italiana.* Estr. dagli « Atti della XXVII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », 1939.

— *I Lipoidi nelle piante.* Estr. da « Biochimica e Terapia sperimentale », volume XV, fasc. 3, 1928.

— *Il comportamento del mercurio nell'organismo.* Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino », volume VI, a. LXIII, fasc. 6, 1900 e da « Archives internationales de Pharmacodynamie et de Thérapie », volume VII, 1900.

GOLA Giuseppe. — *Il contributo italiano al progresso della botanica negli ultimi cento anni.* Estratto dall'opera « Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839–1939 ».

— *L'acido cianidrico e i glucosidi cianogenetici nel regno vegetale.* Estr. dal « Supplemento annuale all'Enciclopedia di Chimica », vol. XXIII, 1907.

— *L'albero.* Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova », vol. XLVII, 1931.

— *L'erbario micologico di P. A. Saccardo. Catalogo.* Padova, Tipografia Antoniana. 1930. Pp. XVI-329, in 8°.

— *L'opera epaticologica.* Estr. dal volume: « L'Opera botanica del prof. C. Massalongo », 1929. (Accademia di Agricoltura, Scienze e Lettere di Verona).

— *La respirazione dei semi durante la maturazione dei frutti, specialmente in quelli carnosi.* Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tom. LXXXIII, parte II, 1923–24.

— *La teoria del micoplasma e la trasmissione ereditaria di alcune malattie delle piante.* Estr. dagli « Atti della Società Medico-Chirurgica di Padova », 1923.

— *La vegetazione degli Euganei.* Estr. dagli « Atti della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova », vol. LI, 1934–35.

— *Le avene piemontesi della sez. « Avenastrum » Koch. Osservazioni critiche.* Estr. dalle « Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, s. II, tom. LXII, 1911.

GOLA Giuseppe. — *Le basi puriniche nel regno vegetale.* Estr. dal « Supplemento Annuale all'Enciclopedia di Chimica » diretto dal prof. I. Guareschi, volume XXIV, 1908.

— *Le condizioni naturali della Provincia di Padova in rapporto colla vegetazione spontanea e coltivata.* Estr. dal vol.: « L'Economia nella Provincia di Padova », Padova, 1931.

— *Le Epatiche raccolte dal Dott. G. B. De Gasperi nella Terra del Fuoco sud-occidentale.* Estr. dal « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. XXIX, ottobre 1922.

— *Le piante vascolari della Val Maira (Alpi Cozie).* Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tomi XCII e XCIII, 1932-33 e 1933-34.

— *Lo zolfo e i suoi composti nell'economia delle piante. Ricerche di fisiologia vegetale.* Estr. dal « Malpighia », a. XVI, vol. XVI.

— *Marco Scave.* Commemorazione. Estr. dagli « Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino », vol. LXXI, 1928.

— *Osservazioni sopra l'azione fisiologica delle irrorazioni cupriche sulla bietola da zucchero.* Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova », vol. XLVI, 1930.

— *Osservazioni sopra un fungo vivente sugli idrocarburi alifatici saturi.* Estr. dal « Bull. della Soc. Bot. Ital. », 1912.

— *Osservazioni sui danneggiamenti alle piante legnose della regione veneta in seguito ai freddi del gennaio-febbraio 1929.* Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova, vol. XLV, 1929.

— *Osservazioni sopra i liquidi circolanti nel terreno agrario.* Estr. dal « Giornale di Geologia Pratica », a. IX, fasc. III-IV, 1911.

— *Osservazioni sul valore sistematico del Bromus Dertonensis All.* Estr. dal « Malpighia », a. XVIII, volume XVIII.

GOLA Giuseppe. — *Osservazioni sulla Cerinthe Maculata All.* Estr. dal « Malpighia », a. XVIII, vol. XVIII.

— *Piante rare o critiche per la flora del Piemonte.* Estr. dalle « Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino », s. II, tom. LX, 1909.

— *Problemi di biologia vegetale sulla laguna di Venezia.* Estr. dal « Bollettino della Società Veneziana di Storia Naturale e del Museo Civico di Storia Naturale », vol. II, n. 3.

— *Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumento impermeabile.* Estr. dalle « Memorie delle Reale Accademia delle Scienze di Torino », s. II, tom. LV, 1905.

— *Sopra alcuni ibridi tra Pinus Pinaster, P. Halepensis e P. Brutia dei dintorni di Grado.* Estr. dagli « Atti dell'Accademia Veneto-Trentino-Istriana », vol. XVI, 1929.

— *Sopra un metodo rapido per riconoscere il Lentisco nelle polveri di Sommacco.* Estr. dagli « Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino », vol. LII, 1909.

— *Sopra una pianta infesta alle risaie del Vercellese.* Estr. dagli « Annali della R. Accademia di Agricoltura di Torino », vol. LIII, 1910.

— *Studi sul ricambio dei composti ternarii delle piante.* Tre Note presentate all'« Istituto Botanico della R. Università di Padova » nel 1923.

— *Sul comportamento di alcuni composti di ferro nella digestione artificiale.* Estr. dal « Giornale della Reale Accademia di Medicina di Torino », vol. V, a. LXII, fasc. 5, 1899.

— *Sull'attività respiratoria di alcuni semi durante il periodo di quiescenza.* Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLI, 1906.

— *Sulla presenza di composti umici nei tegumenti seminali di alcune Centrospermae.* Estr. dal « Bullettino della Società Botanica Italiana », n. 4-9, 1920.

— *Sulla respirazione intramolecolare nelle piante palustri.* Estr. dagli « Atti della

R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XL, 1905.

GOLA Giuseppe. — *Sulla riflessione di radiazioni ultraviolette per parte di alcuni organi vegetali*. Estr. dal « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s. volume XXXIV.

— *Sulle membrane dei tessuti fellogenici delle radici di « Diospyros Lotus L. »*. Estr. dal « Bullettino della Società Botanica Italiana, n. 6, 1924.

Pubblicazioni dell'Istituto per le applicazioni del Calcolo (Consiglio Nazionale delle Ricerche), 1943-1945, nn. 141, 143-147, 149-164.

SILVESTRI Filippo. — *Primo contributo alla conoscenza dei Termofili viventi con specie di Syntermes*. Estr. da « Commentationes Pontificiae Academiae Scientiarum », vol. IX, n. 13, 1945.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

NOTE PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1946

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Matematica (Geometria). — *Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali.* Nota I di V. E. Galafassi, presentata [1] dal Socio L. Berzolari.

1. – Sotto l'aspetto birazionale, in seguito a classici risultati di A. Harnack [2] e di F. Klein [3], è ben nota l'esistenza di curve algebriche reali di genere p la cui parte reale consti di k circuiti, per ogni valore di k soddisfacente alla:

$$0 \leq k \leq p + 1 .$$

Ciò, come fu esplicitamente osservato da L. Brusotti, non permette peraltro di trasportare il risultato nell'ambito proiettivo per una determinata famiglia o sottofamiglia reale di curve algebriche, onde conserva interesse la ricerca relativa a singoli casi [4].

In quest'ordine di idee, nel presente lavoro si prendono in esame le famiglie di curve algebriche delle superficie rigate razionali a generatrici reali.

Precisamente, dopo aver richiamata la nota distribuzione in famiglie delle curve algebriche giacenti su rigate (razionali) normali delle S_r, si dimostra che in ogni famiglia reale di curve algebriche della rigata nor-

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(2) A. Harnack, *Ueber die Vielttheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, « Math. Ann. », *10* (1876), pp. 189–198.

(3) F. Klein, *Ueber die Konforme Abbildung von Flächen*, « Math. Ann. », *19* (1882), pp. 159–160; *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig, 1882, p. 72; oppure « Ges. Math. Abhandlungen », *3*, Berlin, 1923, p. 564.

(4) Per tutto questo e per citazioni di lavori precedenti, cfr. L. Brusotti, *Sul numero dei circuiti delle curve algebriche reali di una quadrica reale*, « Rend. di Mat. », (5), *3* (1942), pp. 113-120, specialmente pp. 113–115.

male generale reale (ed a generatrici reali) esistono curve reali dotate del massimo numero $p + 1$ di circuiti (reali), essendo p il genere della curva corrente nella famiglia.

Stabilito poi, sempre per ogni famiglia, anche il minimo numero di circuiti (che risulta zero od uno a seconda della parità dei caratteri proiettivi della famiglia), e dimostrata l'esistenza di curve reali dotate di tale minimo numero di circuiti, rimane più in generale provata – in ogni famiglia – l'esistenza di curve reali dotate di k circuiti, essendo k un qualunque intero compreso fra il minimo e il massimo.

I risultati vengono poi estesi alle famiglie di curve di una qualunque rigata razionale (anche non normale).

Infine, si rileva che dai risultati conseguiti rimane anche dimostrata la esistenza di curve, « appartenenti » ad S_r, dotate del massimo numero di circuiti compatibile con l'ordine, perchè le curve d'ordine assegnato, di massimo genere sulla rigata normale di S_r, sono anche di massimo genere nello S_r.

2. – Nello S_r sia V_2^{r-1} una superficie rigata normale, e sia $m \left(\leqq \frac{r-1}{2} \right)$ l'ordine della sua curva direttrice minima, o, per r dispari nel caso $m = \frac{r-1}{2}$, di una sua direttrice minima (5).

Consideriamo la ben nota rappresentazione piana della V_2^{r-1} ottenuta per proiezione dallo S_{r-3} individuato da $r-2$ punti generici P_i della V_2^{r-1} stessa. In tale rappresentazione sono elementi eccezionali nel piano un punto Q immagine della direttrice C^{r-2} di ordine $r-2$ individuata dai punti P_i e $r-2$ punti T_i immagini delle generatrici h_i che passano per i punti P_i. Sulla V_2^{r-1} sono elementi eccezionali i punti P_i che hanno per immagine le rette QT_i. Ne scende che le generatrici di V_2^{r-1} hanno per immagine le rette uscenti da Q e che le immagini delle sezioni iperpiane sono le curve di ordine $r-1$, con punto $(r-2)$-plo in Q e passanti (semplicemente) per gli $r-2$ punti T_i. La (od una) direttrice minima ha per immagine una curva C^m di ordine m avente punto $(m-1)$-plo in Q e passante (semplicemente) per gli $r-2$ punti T_i: ne consegue che quando i punti T_i siano generici è $m = \frac{r-2}{2}$ oppure $m = \frac{r-1}{2}$ secondochè r sia pari o risp. dispari, ossia la V_2^{r-1} è generale, mentre le altre specie di rigate normali si hanno quando la detta immagine della direttrice minima (od obiettivamente la direttrice minima stessa) si spezza in rette

(5) Per le proprietà delle rigate razionali (in particolare normali) cfr. C. SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, « Atti Acc. Torino », *19* (1884), pp. 355-373; oppure, anche per le notazioni qui usate, E. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, Messina, 1923, cap. XIV.

uscenti da Q (od obiettivamente in generatrici) ed in una curva residua. Cosicchè, le rigate normali non generali possono dedursi dalle generali come casi limiti, per esempio facendo variare con continuità la configurazione dei punti T_i in modo da ottenere il detto spezzamento.

Da questa rappresentazione si deduce inoltre che la caratterizzazione di una famiglia di curve algebriche sulla V_2^{r-1} può conseguirsi con due dei tre numeri n, α, β ($n = \alpha + \beta$) che indicano risp. l'ordine dell'immagine piana della curva corrente nella famiglia, la sua molteplicità in Q e la molteplicità in ognuno dei punti T_i. Ed è opportuno scegliere n e β perchè tali numeri presentano un più interessante significato obiettivo come ordine e numero di incontri con ogni generatrice della curva corrente nella famiglia. Con riferimento a questa rappresentazione piana indicheremo pertanto ogni famiglia col simbolo: (n, β).

Per il genere p, ed il numero α di incontri colla direttrice minima, si ottengono quindi le formule:

$$(1)\quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-\beta)(n-\beta-1)}{2} - (r-2)\frac{\beta(\beta-1)}{2} = \\ = (\beta-1)\left(n-1-\frac{r-1}{2}\beta\right)$$

$$(2)\quad \alpha = mn - (m-1)(n-\beta) - (r-2)\beta = n - (r-m-1)\beta$$

le quali potrebbero peraltro ottenersi anche con considerazioni obiettive sulla V_2^{r-1} stessa [6]. La dimensione della famiglia è poi:

$$(3)\quad d = \frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-\beta)(n-\beta+1)}{2} - (r-2)\frac{\beta(\beta+1)}{2} = \\ = \beta + \left(n - \frac{r-1}{2}\beta\right)(\beta+1).$$

Ricordiamo infine che le famiglie che per un determinato valore di n possiedono il genere massimo sono quelle per cui $\beta = \chi + 1$, essendo χ il minimo intero non inferiore ad $\frac{n-r}{r-1}$. Il valore massimo per il genere è allora fornito dalla espressione:

$$(4)\qquad \chi\left\{n - \frac{r+1}{2} - \chi\frac{r-1}{2}\right\}$$

(6) Per esempio applicando importanti formule dovute a C. Segre. Cfr. di tale A. *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*, «Rend. Lincei», (4), *3* (1887), pp. 3-6; ed anche, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, II Partie, «Math. Ann.», *34* (1889), pp 1-25. Per il raffronto con le formule qui fornite, basta sostituire π, k, p, ν, n con $p, \beta, o, n, r-1$ risp.

che coincide coll'espressione, dovuta al Castelnuovo (7), per il massimo genere di una curva algebrica di ordine n in S_r.

3. È poi conveniente, almeno per le rigate normali generali, caratterizzare le famiglie di curve della rigata stessa anche con riferimento alla rappresentazione piana minima di questa. Perciò è necessario distinguere il caso di r pari e quello di r dispari.

Nel caso di r pari, se la V_2^{r-1} è generale, risulta $m = \frac{r-2}{2}$. Nella rappresentazione piana minima alla direttrice minima corrisponde un punto Q, alle generatrici le rette del fascio di centro Q ed alle sezioni iperpiane le curve di ordine $\frac{r}{2}$ con punto $\frac{r-2}{2}$-plo in Q. In relazione a tale rappresentazione appare opportuno caratterizzare le famiglie di curve sulla V_2^{r-1} coi numeri α, β, i quali mentre sulla rigata hanno il significato già precisato, in rappresentazione indicano risp. la molteplicità delle curve immagine in Q, ed il numero delle intersezioni, fuori da Q, della curva immagine con una retta uscente da Q. Conviene quindi indicare ogni famiglia col simbolo $[\alpha, \beta]$. Per tali famiglie, osservato che la curva immagine è di ordine $\alpha + \beta$, si hanno le formule:

$$(5) \qquad n = \frac{r}{2}(\alpha+\beta) - \frac{r-2}{2}\alpha = \frac{r}{2}\beta + \alpha$$

$$(6) \qquad p = \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} =$$

$$= (\alpha-1)(\beta-1) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}$$

$$(7) \qquad d = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = \beta + \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)(\beta+1).$$

Nel caso invece di r dispari, sempre per V_2^{r-1} generale, risulta $m = \frac{r-1}{2}$. In rappresentazione ad una direttrice minima corrisponde ancora un punto Q che ancora è centro di un fascio di rette immagini delle generatrici di V_2^{r-1} eccetto una, la quale ha invece come immagine un punto T (distinto da Q) che a sua volta è centro di un fascio di rette immagini delle direttrici minime distinte da quella già considerata. La retta QT è

(7) Cfr. di tale A: *Ricerche di Geometria sulle curve algebriche*, « Atti Acc. Torino », *24* (1889), pp. 346-373, oppure « Mem. scelte », Bologna (Zanichelli), 1937, pp. 19-44.

Da questa Memoria più precisamente risulta che tutte le C^n dello S_r di genere massimo stanno – se $n > 2r$ ed $r \neq 5$ – su rigate normali. Per $r = 5$ a queste va aggiunta la superficie del VERONESE, mentre per $n \leq 2r$ solo particolari C^n di genere massimo stanno su rigate normali.

immagine del punto comune alla direttrice di immagine Q ed alla generatrice di immagine T.

Alle sezioni iperpiane corrispondono le curve di ordine $\frac{r+1}{2}$ con punto $\frac{r-1}{2}$-plo in Q e passanti (semplicemente) per T. Anche qui risulta opportuno caratterizzare ogni famiglia coi numeri α, β, ed indicarla col simbolo $[\alpha, \beta]$, ove i numeri α e β hanno significati già precisati al caso precedente, sicchè β indica qui anche la molteplicità in T delle curve immagine. E si hanno le formule:

$$(8)\quad n = \frac{r+1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{r-1}{2}\alpha - \beta = \frac{r-1}{2}\beta + \alpha$$

$$(9)\quad p = \frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \frac{\beta(\beta-1)}{2} = (\alpha-1)(\beta-1)$$

$$(10)\quad d = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+3)}{2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2} = \beta + \alpha(\beta+1).$$

Oss. – Sarebbe poi facile trattare nella rappresentazione piana minima anche il caso delle rigate normali non generali. Ma tale rappresentazione non appare qui più conveniente di quella generale ricordata al n. 2, onde a noi non occorre [8].

Astronomia. — *Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali* [1]. Nota I di A. Colacevich, presentata [2] dal Socio G. Abetti.

Nell'ultimo quarantennio sono comparse numerose note riguardanti la possibilità di esistenza di una corrente stellare a cui fosse associato il Sole. Tale ipotesi venne avanzata da G. V. Schiaparelli [3]; i dati vennero esaminati da G. Horn–D'Arturo [4] prima e da L. Gialanella [5] poi. Questi due ricer-

(8) La trattazione per esteso delle questioni di realità già annunciate al n. 1, forma oggetto di una Nota II, recante lo stesso titolo, che viene presentata contemporaneamente a questa.

(1) Lavoro eseguito nell'Osservatorio astrofisico di Arcetri. Firenze.

(2) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(3) G. V. Schiaparelli, *Orbite cometarie, correnti cosmiche, meteoriti.* «Riv. di Fis. Mat. e Sc. Nat.», Pavia 1908; anche in *Opere* V, p. 263.

(4) G. Horn D'Arturo, *L'ammasso delle stelle dotate di velocità spaziali minime.* «Pubbl. Oss. Bologna», vol. II, n. 4 (1929); *L'ammasso biplanare delle stelle concomitanti il Sole.* «Pubbl. Oss. Bologna», vol. II, n. 5 (1929).

(5) L. Gialanella, *Nuove ricerche sull' "ammasso del Sole"*. Nota I. «Rend. Lincei», vol. XXVI, 1937; Nota II. «Rend. Lincei», vol. XXVII, 1938; Nota III. «Rend. Acc. d'Italia», ser. VII, vol. I, 1940.

catori conclusero per l'esistenza di un ammasso solare, cioè per l'esistenza di un gruppo di stelle di cui faceva parte il Sole e che aveva a comune con questo entro determinati limiti, le velocità nello spazio; o, in altre parole, vi erano stelle la cui velocità relativamente al Sole non sorpassava un limite determinato e piccolo. Così Gialanella ad esempio trovava che tra 6739 stelle, 122 di queste avevano velocità che differivano da quella del Sole meno di 7 km/sec.

Contemporaneamente a questi lavori in Italia, altri ne venivano condotti altrove e principalmente nel Belgio, dove Stroobant [6] studiava il problema ed elencava un gruppo di stelle di piccolo moto rispetto al Sole. Per questo motivo talvolta questo gruppo di stelle viene chiamato corrente di Stroobant. A queste ricerche facevano seguito varie altre di A. Festraets [7] affermative circa l'esistenza dell'ammasso. Alla Nota di Gialanella faceva seguito una breve Nota di K. Graf Ferrari [8] confermante l'esistenza dell'ammasso in senso statistico e poco dopo una dello scrivente [9] dove veniva negata l'esistenza di tale ammasso nel senso che il numero delle stelle che avevano una piccola velocità spaziale rispetto al Sole erano quante se ne potevano aspettare in base a considerazioni generali sulla distribuzione dei moti stellari. In quella stessa Nota, lo scrivente si proponeva di eseguire una ricerca su di un insieme omogeneo di stelle ed analizzarne le velocità a questo scopo. Successivamente altre ricerche vennero condotte da L. Rovera [10] che confermava l'esistenza dell'ammasso e nel mese scorso ho avuto notizia di una ricerca di G. Cecchini [11] che, pur giungendo a risultati statistici discordanti dai miei, concludeva per la non esistenza fisica di detto ammasso. A queste medesime conclusioni giungeva W. Gliese [12] in una ricerca più generale sui moti spaziali delle stelle, dove è pure contenuto un elenco delle stelle della cosidetta *corrente di Stroobant*.

Da questo rapido riassunto si vede come questa questione sia stata dibattuta e che anche in tempi recenti le conclusioni siano state discordanti.

(6) P. Stroobant, *Sur le mouvement de certaines étoiles dans l'espace*. « Bulletin Astronomique », tom. 27 (1910); P. Stroobant et M. P. Bourgeois, « Comptes Rendus », tom. 177 (1923).

(7) A. Festraets, *Le courant de Stroobant*. « Comptes Rendus », tom. 206 (1938); « Ciel et Terre », 1938.

(8) K. Graf Ferrari, *Zur Frage der Realität des "Sonnenhaufens"*. « Astronom. Nachrichten », Bd. 268 (1939).

(9) A. Colacevich, *Sul numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole* « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, 1940.

(10) L. Rovera, *L'ellissoide di velocità per il gruppo di stelle formanti "l'ammasso del Sole"*. « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. III, 1941.

(11) G. Cecchini, *Inconsistenza di un "ammasso del Sole" in senso fisico*. « Contributi Oss. Torino », N. 1 (1944).

(12) W. Gliese, *Die Untersuchung der Raumgeschwindigkeiten des FK3*. « Astronom. Nachrichten », Bd. 272 (1941).

Risulta quindi utile una ricerca, quale si propone di essere questa qui presentata, nella quale si giunge ad una conclusione che ci sembra definitiva su questo problema.

Alla base di questa Nota sta un lavoro più esteso, sui moti spaziali delle stelle più splendenti della 5.50 grandezza visuale apparente, che lo scrivente insieme a M. C. Ballario sta eseguendo in Arcetri e di cui una prima parte è in corso di stampa [13]. Delle stelle elencate ne vennero escluse 198 per mancanza di parallasse o parallasse negativa e 17 per mancanza di velocità radiale.

Lo studio qui presentato si basa sul moto spaziale di 2459 stelle per cui sono note le velocità radiali ρ, i moti propri $\mu_\alpha \cos\delta$, μ_δ e la parallasse p. Il modo con il quale vennero calcolate le velocità spaziali è pubblicato altrove [13]. Brevemente diremo che le velocità radiali sono tratte dal catalogo di Lick [14] e sono corrette per l'effetto K [15]. I moti propri sono tratti dal Boss General Catalogue [16] e ridotti al 1900; a questi moti vennero applicate alcune correzioni sistematiche secondo W. M. Smart [17]. Le parallassi sono tratte dal catalogo di Schlesinger [18] e combinate secondo un criterio unico per tutte le stelle come detto in altra Nota [13]; alle parallassi venne applicata successivamente una correzione sistematica come detto nella stessa Nota [13] per rendere omogenei i risultati statistici trovati con le velocità radiali con quelli ottenuti dai moti propri. In conclusione, i valori di queste quantità adottati per ogni stella sono dati, per le stelle che a noi interessano, nella tabella II annessa a questo lavoro.

La ricerca deve consistere da un lato nello stabilire il numero di stelle che hanno piccola velocità spaziale rispetto al Sole e dall'altro nel calcolare, in base alle conoscenze acquisite sulla distribuzione delle velocità delle stelle, il numero delle stelle che, per le leggi della statistica, vengono ad avere (casualmente) velocità molto prossime a quelle del Sole. La discordanza o meno dei numeri di stelle osservate e di quelle calcolate è un indice statistico dell'esistenza o meno di un *ammasso solare*. Considerazioni fisiche possono confermare o meno le conclusioni raggiunte.

A) *Numero delle stelle con velocità spaziale rispetto al Sole inferiore a 7 km/sec.* – Ragionando come qui si fa su una base statistica non è lecito scartare stelle per il fatto che i dati su cui si basano hanno una maggiore o minore certezza, o per lo meno tale considerazione deve essere estesa a tutto il materiale considerato, ossia non si devono tenere criteri differen-

(13) M. C. Ballario e A. Colacevich, *Generalità e calcolo delle velocità spaziali di 2459 stelle.* « Memorie della Soc. Astr. Ital. » (in corso di stampa).

(14) Lick, Publ. XVIII.

(15) Lick, Publ. XVI, p. XXVIII.

(16) *General Catalogue of 33342 stars etc.*, 1936.

(17) W. M. Smart, *The systematic corrections etc.* « Monthly Not. », 101 (1941).

(18) *General Catalogue of Stellar Parallaxes.* « Yale obs. », 1935.

ziali per le stelle a piccola velocità. Naturalmente, non tutte le stelle hanno valori per le velocità così sicuri da garantire che con il miglioramento dei dati esse rimarranno nel gruppo di queste stelle, ma è statisticamente probabile che un certo numero di stelle attualmente non considerate potranno poi entrare a farne parte.

Nella fig. 1 è dato un grafico che rappresenta la distribuzione dei moduli della velocità spaziale, delle stelle qui considerate, rispetto al Sole: in ascisse è posta la velocità ed in ordinate il numero delle stelle, di km/sec. in km/sec. La spezzata congiunge i dati effettivamente osservati, la curva a

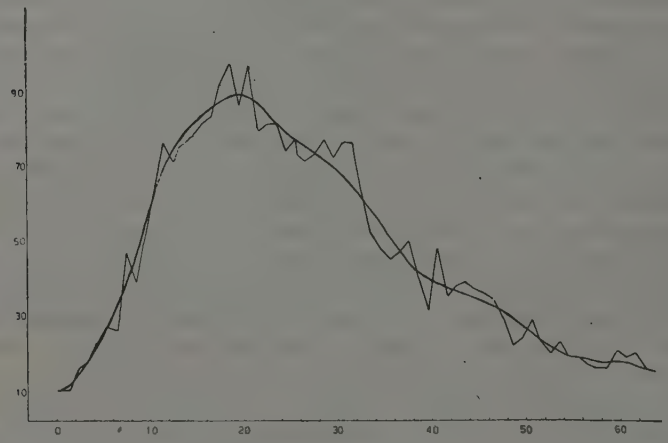


Fig. 1.

tratto continuo rappresenta l'andamento medio. A prima vista non sembra che i dati a piccola velocità (inferiore a 7 km/sec.) siano più numerosi anzi si nota una certa deficenza nella velocità tra i 6 ed i 7 km/sec. con un eccesso tra i 7 e gli 8 km/sec. che sono esclusi dai nostri computi. Gli scarti tra curva media e spezzata devono ritenersi dovuti a normali scostamenti statistici allorchè il numero dei dati considerati non è sufficientemente grande.

Ci si può porre ancora la domanda se detta curva verrebbe sostanzialmente mutata se si conoscessero (a parte le correzioni sistematiche) i veri dati, cioè se si tenesse conto degli errori di osservazione; come si sa questi hanno una tendenza a livellare le curve vere.

Indicando con μ il moto proprio complessivo, con M il moto proprio trasverso in km/sec. e con V la velocità spaziale si ha la nota relazione

$$V^2 = \rho^2 + \frac{4{\cdot}74\,\mu^2}{p^2} = \rho^2 + M^2$$

e differenziando

$$dV = \frac{\rho}{V} d\rho + \frac{M^2}{4.74\,V}\left(\frac{d\mu}{\mu} - \frac{dp}{p}\right)$$

ossia

$$dV < d\rho + \frac{M}{4.74}\left(\frac{d\mu}{dp} - \frac{dp}{p}\right)$$

o anche per la teoria degli errori:

$$\varepsilon_V^2 < \varepsilon_\rho^2 + \frac{M^2}{4.74^2}\left(\frac{\varepsilon_\mu^2}{\mu^2} + \frac{\varepsilon_p^2}{p^2}\right).$$

Si vede da quest'ultima formula come l'errore in V sia crescente con la V stessa. Scarti medi dell'ordine di $\pm$ 4 km/sec sono stati riscontrati in un gruppo di 20 stelle con velocità sull'ordine di 30 km/sec. Si è calcolato secondo le formule proposte da Eddington [19] l'effetto degli errori accidentali sull'andamento della curva di distribuzione per le piccole V. Esso è risultato praticamente trascurabile, come del resto era prevedibile per il fatto che la curva media è circa rettilinea in questo primo tratto e quindi le derivate di ordine pari richieste dalle formule sono praticamente nulle e così pure piccola ne deriva la correzione.

Tabella I.

	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	Totale
N'	0	1	4	7	23	15	26	76
N	0	0	6	8	13	17	16	60
N_A	0	0	5	8	6	6	5	31
N_B	0	0	0	0	7	11	11	29
N_1	0	3	11	19	63	41	71	208
N_2	0	0	16	22	35	47	44	164

Considerato così l'effetto degli errori accidentali, rimane da considerare quello degli errori sistematici; questi in genere hanno effetti cospicui sulla distribuzione. Così la correzione della velocità radiale per effetto K avrà una tendenza ad aumentare il numero delle stelle con piccola velocità special-

(19) W. M. Smart, *Stellar Dynamics.*

mente di quelle di tipo spettrale B mentre la correzione sistematica de moti propri secondo Smart [17] ha in genere tendenza ad aumentare il moto delle stelle e quindi a diminuirne il numero con piccola velocità. Il massimo effetto però porta la correzione sistematica delle parallassi, che aumenta in media di circa un decimo il moto traverso. Nella tabella I sono dati i numeri di stelle entro i limiti segnati per le velocità spaziali prima N' e dopo N la correzione sistematica di Smart e delle parallassi.

Si ha quindi una diminuzione del 20% nel numero delle stelle.

La distribuzione per tipo spettrale, secondo la classificazione Draper, è la seguente:

Sp.	B2	B8-9	A	dF	gF	dG	gG	dK	gK	gM	Tot.
N	2	3	24	3	7	1	9	2	7	2	60

Si considerano, per brevità, nane tutte le stelle delle classi F, G, K che abbiano grandezza assoluta visuale più debole di 2.

Le parallassi di queste stelle sono distribuite come segue

paral.	0-49	50-99	100-199	200-399	oltre 400	Tot.
N	4	5	22	25	4	60

Le parallassi sono espresse in decimillesimi, dato che con le correzioni sistematiche si è tenuto conto anche della quarta decimale. È evidente che in genere l'appartenenza di una stella al gruppo delle stelle con piccola velocità sarà tanto più certa quanto più sarà grande la parallasse. In senso fisico le stelle a grande distanza (piccola parallasse) sono certamente meno legate ad un qualche ammasso.

Nella tabella II sono elencate tutte le 60 stelle. I valori dei moti propri e delle parallassi sono arrotondati alla terza decimale, mentre il calcolo delle V è stato condotto con la quarta decimale di queste quantità e poi arrotondato al 0.1 km/sec. Si notano nella tabella le sei stelle della costellazione della *Coma Berenices* che fanno parte di un ammasso stellare del tipo di quello delle Plejadi. Al novero delle stelle dovrebbe essere aggiunto il nostro Sole. È curioso rilevare infine che i tre quarti delle stelle della tabella si trovano entro le prime 12 ore di ascensione retta.

N	*	α_{1900}	δ_{1900}	m_v	Sp	ρ	$\mu_\alpha \cos\delta$	μ_δ	π	V
		h m								
1	22 And	0 05.1	+ 45° 31′	5.08	F o	— 5.1	+ 0″.006	— 0″.003	0″.015	5.5
2	32 And	0 35.7	+ 38 55	5.42	G 5	— 5.5	— .009	— .007	.012	6.8
3	HD 6245	0 58.3	— 46 56	5.34	K o	— 1.7	— .008	+ .004	.012	3.9
4	38 Psc	1 05.6	+ 30 54	5.04	A 5	+ 4.7	— .014	— .012	.021	5.9
5	ν Psc	1 36.2	+ 4 59	4.68	K o	+ 0.1	— .020	+ .003	.020	4.8
6	ε Tri	1 57.1	+ 32 48	5.44	A 2	+ 0.9	— .011	— .015	.015	5.9
7	10 Tri	2 13.2	+ 28 11	5.28	A 2	+ 2.1	+ .014	— .007	.015	5.3
8	ι Cass	2 20.8	+ 66 57	4.59	A 5 p	+ 0.2	— .012	+ .012	.019	4.0
9	τ Per	2 47.2	+ 52 21	4.06	G o	+ 2.4	+ .004	— .007	.023	2.9
10	γ Per	2 57.6	+ 53 07	3.08	A 3	+ 1.2	+ .004	— .006	.018	2.4
11	β Per	3 01.7	+ 40 34	2.3	B 8	+ 4.0	+ .007	— .004	.032	4.2
12	HD 24479	3 48.6	+ 62 47	4.87	B 9	+ 2.9	+ .005	+ .002	.008	4.1
13	HD 25007	3 53.3	+ 80 26	5.25	A 2	+ 3.2	— .012	— .004	.014	5.4
14	46 Tau	4 08.2	+ 7 28	5.35	F o	+ 3.7	+ .001	+ .007	.022	4.3
15	HD 26764	4 08.9	+ 53 22	5.12	A 2	+ 2.3	— .009	— .004	.017	3.6
16	66 Tau	4 18.4	+ 9 14	5.06	A 2	— 3.2	— .013	— .007	.018	5.0
17	λ Eri	5 04.4	— 8 53	4.34	B 2	— 1.9	+ .005	— .002	.005	5 6
18	19 Aur	5 13.4	+ 33 51	5.16	A 5 p	— 4.5	+ .001	— .014	.020	5.6
19	26 Aur	5 32.2	+ 30 26	5.49	A 2	— 0.1	— .015	— .010	.018	4.9
20	δ Dor	5 44.6	— 65 46	4.52	A 5	— 3.6	— .026	— .002	.022	6.7

Segue: TABELLA II.

N	*	α_{1900} h m	δ_{1900}	m_v	Sp	ρ	$\mu_\alpha \cos\delta$	μ_δ	$\not p$	V
21	2 Lyn	6 10.8	+ 59° 03′	4.42	A o	— 5.5	— 0″.008	+ 0″.021	0″.027	6.8
22	8 CMa	6 33.5	— 18 09	4.65	K o	— 1.8	— .004	— .009	.011	4.6
23	HD 48879	6 40.5	+ 67 41	5.04	B 3	— 6.1	+ .003	+ .002	.006	6.9
24	δ Gem. b.	7 14.2	+ 22 10	3.51	F o	— 2.3	— .018	— .014	.055	3.0
25	4 Pup	7 41.3	— 14 19	5.11	F o	— 2.1	— .008	+ .007	.022	3.1
26	HD 63660	7 44.9	— 24 40	5.32	G o	+ 1.8	— .024	+ .013	.021	6.6
27	ξ Pup	7 45.1	— 24 37	3.47	G o p	+ 3.9	.000	— .004	.004	6.3
28	d Vel	8 40.8	— 52 17	4.12	G 5	— 2.6	— .012	+ .015	.036	3.7
29	32 Hya	9 26.9	— 0 44	4.50	A 3	+ 3.8	— .008	— .012	.027	4.7
30	HD 82694	9 28.4	— 40 12	5.36	K o	— 1.0	+ .016	— .015	.018	6.2
31	42 Lyn	9 32.1	+ 40 41	5.24	A 5	— 2.3	— .016	+ .002	.018	4 6
32	HD 84121	9 37.7	— 57 32	5.36	A 2	+ 5.3	— .027	— .003	.039	6.2
33	l Car	9 42.5	— 62 03	3.69	G o	+ 4.2	— .008	+ .011	.022	5.1
34	η Leo	10 01.9	+ 17 15	3.58	A o p	+ 0.5	— .003	— .006	.004	5.4
35	30 UMa	10 16.9	+ 66 04	4.92	A o	— 1.8	— .013	— .020	.025	4.8
36	z Car	11 02.4	— 61 53	4.76	K o	— 2.3	— .031	+ .005	.039	4.5
37	ω Vir	11 33.3	+ 8 41	5.47	M b	+ 3.1	— .004	+ .003	.007	4.6
38	HD 106112	12 07.5	+ 78 10	5.12	A 5	0.0	+ .006	+ .021	.027	4.0
39	12 Com	12 17.5	+ 26 24	4.82	F 5	+ 2.1	— .006	— .012	.025	3.2
40	13 Com	12 19.3	+ 26 39	5.10	A 2	— 0.2	— .013	— .012	.015	5.6

Segue: TABELLA II.

N	*	α_{1900}	δ_{1900}	m_v	Sp	ρ	$\mu_\alpha \cos\delta$	μ_δ	ϕ	V
		h m								
41	14 Com	12 21.4	+ 27° 49′	5.15	A 5	— 3.6	— 0″.012	— 0″.011	0″.021	5.1
42	16 Com	12 22.0	+ 27 23	5.04	A 2	0.0	— .004	— .012	.020	2.9
43	21 Com	12 26.0	+ 25 07	5.39	A 3 p	— 1.5	— .009	— .012	.015	5.0
44	31 Com	12 46.8	+ 28 05	5.07	G 0	— 1.4	— .013	— .012	.020	4.5
45	α Aps	14 35.4	— 78 37	3.81	K 5	— 0.8	+ .002	— .020	.016	6.0
46	ξ Boo	14 46.8	+ 19 31	4.80	G 5	+ 3.9	+ .136	— .104	.147	6.8
47	ω Oph	16 26.2	— 21 15	4.57	F 0	+ 2.2	+ .014	+ .031	.026	6.5
48	18 Dra	16 40.2	+ 64 47	5.00	K 0	0.0	+ .004	— .015	.013	5.7
49	θ Sco	17 30.1	— 42 56	2.04	F 0	+ 1.1	+ .010	— .005	.020	2.8
50	HD 164577	17 56.7	+ 1 19	4.44	A 2	— 5.7	+ .013	— .014	.025	6.8
51	74 Oph	18 15.8	+ 3 20	4.92	G 5	+ 4.5	— .001	+ .010	.010	6.7
52	ρ Sgr	19 15.9	— 18 02	3.95	A 5	+ 1.5	— .026	+ .022	.046	4.0
53	ν Aql	19 21.4	+ 0 09	4.86	F 0	— 0.9	— .001	— .001	.003	2.8
54	γ Aql	19 41.5	+ 10 22	2.80	K 2	— 2.3	+ .018	— .001	.018	5.3
55	ν Cap	20 15.1	— 13 04	4.84	A 0	— 2.6	+ .016	— .020	.019	6.8
56	5 Aqr	20 46.8	— 5 52	5.50	B 8	— 3.9	.000	+ .002	.016	3.9
57	2 Psc A	21 00.3	— 32 44	5.26	K 0	+ 2.8	— .003	+ .008	.008	6.1
58	VV Cep	21 53.8	+ 63 09	4.9	Map	— 3.4	+ .004	+ .004	.002	5.0
59	2 And	22 58.0	+ 42 13	5.08	A 2	+ 0.3	+ .059	— .005	.042	6.8
60	89 Aqr	23 04.6	— 23 00	4.94	G 0, A 2	— 4.6	+ .025	— .010	.027	6.6

Astronomia. — *Sur le mouvement du centre de gravité du systeme de deux corps rayonnants.* Nota di W. Opalski, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

Dans les remarques suivantes je m'occupe avec le cas des deux corps à masses decroissantes à cause de l'émission de l'énérgie radiante. Je m'ai proposé la question quelles conditions sont nécessaires afin qu'il soit possible réduir le problème à l'examination du mouvement relatif d'un des corps autour de l'autre.

Considérons un système isolé des deux corps dont les masses sont, à l'instant t_0, respectivement égales à $m_{0,1}$ et $m_{0,2}$. A un instant postérieur arbitraire t le système est composé des masses $m_1(t)$, $m_2(t)$ et de l'énergie radiante qui a été émise durant l'interval depuis t_0 à t. Puisque la somme des forces extérieures est égale à 0, il y a:

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathfrak{W}_1 + m_2 \mathfrak{W}_2) + \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = 0, \tag{1}$$

où $\mathfrak{W}_1$ et $\mathfrak{W}_2$ représentent les vecteurs-vitesses des masses m_1 et m_2 et $\mathfrak{G}$ représente la quantité de mouvement vectorielle emportée par la radiation par l'unité de temps.

C'est l'équation du mouvement rectiligne et uniforme du centre S des masses m_1 et m_2 et des masses émises depuis t_0; S pourrait être choisi comme l'origine d'un nouveau système galiléen (inértial). Mais un tel choix manquerait d'utilité, car S n'est pas en général rigoureusement identique avec le centre C des masses m_1 et m_2 seules.

L'accroissement de la quantité de mouvement des masses m_1 et m_2 par l'unité de temps est

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathfrak{W}_1 + m_2 \mathfrak{W}_2) = m_1 \mathfrak{W}_1' + m_2 \mathfrak{W}_2' + \frac{dm_1}{dt} \cdot \mathfrak{W}_1 + \frac{dm_2}{dt} \cdot \mathfrak{W}_2,$$

où $\mathfrak{W}_1'$ et $\mathfrak{W}_2'$ sont les vecteurs accélérations, $\frac{dm_1}{dt}\mathfrak{W}_1 + \frac{dm_2}{dt}\mathfrak{W}_2$ representant la perte de la quantité de mouvement avec de la masse disparaissante. Il y a donc:

$$\frac{dm_1}{dt} \cdot \mathfrak{W}_1 + \frac{dm_2}{dt} \cdot \mathfrak{W}_2 + \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = 0$$

et l'équation (1) se réduit à

$$m_1 \mathfrak{W}_1 + m_2 \mathfrak{W}_2 = 0. \tag{2}$$

Dans le cas képlérien, une équation formalement identique avec (2) nous conduit à la constatation du mouvement rectiligne et uniforme du

(1) Nella seduta del 18 maggio 1946.

centre C des masses m_1 et m_2 et c'est grâce à cette propriété qu'un nouveau système galiléen peut être choisi avec C comme l'origine, ce que réduit le problème à étudier le mouvement relatif sous l'action d'une force centrale.

Dans nôtre cas, le mouvement du centre C des masses m_1 et m_2 n'est pas en général ni rectiligne, ni uniforme. Si nous voulons donc choisir l'origine en C pour étudier le mouvement relatif, il faut introduire les forces d'inertie dépendantes de l'accélération instantanée du centre C.

Cherchons maintenant de faire une telle hypothèse concernant la perte des masses que le mouvement du centre C des masses décroissantes soit rectiligne et uniforme.

Nous postulons donc que le rayon–vecteur du point C dans un système des coordonnées galiléennes quelconque soit

$$\mathfrak{w}_C = \frac{m_1 \mathfrak{w}_1 + m_2 \mathfrak{w}_2}{m_1 + m_2} = \mathfrak{U} \cdot t + \mathfrak{B}, \tag{3}$$

où $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{B}$ sont des constantes vectorielles arbitraires; $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ – les rayons – vecteurs de m_1 et m_2. En différentiant l'équation (3) nous obtenons:

$$\frac{d\mathfrak{w}_C}{dt} = \frac{(m_1 \mathfrak{W}_1 + m_2 \mathfrak{W}_2 + m_1' \mathfrak{w}_1 + m_2' \mathfrak{w}_2)(m_1 + m_2) - (m_1 \mathfrak{w}_1 + m_2 \mathfrak{w}_2)(m_1' + m_2')}{(m_1 + m_2)^2} = \mathfrak{U}, \tag{4}$$

où m_1' et m_2' sont les dérivés par rapport à t.

Après un calcul facil nous obtenons:

$$\frac{d\mathfrak{w}_C}{dt} = \frac{(m_1 \mathfrak{W}_1 + m_2 \mathfrak{W}_2)(m_1 + m_2) + (m_1' m_2 - m_1 m_2')(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2)}{(m_1 + m_2)^2} = \mathfrak{U}. \tag{4'}$$

En differentiant (4') nous avons:

$$\frac{d^2 \mathfrak{w}_C}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{(m_1 \mathfrak{W}_1 + m_2 \mathfrak{W}_2)(m_1 + m_2) + (m_1' m_2 - m_1 m_2')(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2)}{(m_1 + m_2)^2} = 0. \tag{5}$$

En simplifiant (5) et en tenant compte de (2), nous trouvons la suivante condition necessaire du mouvement rectiligne et uniforme du point C:

$$\frac{d^2 \mathfrak{w}_C}{dt} = \frac{1}{(m_1 + m_2)^3} \{ (m_1 + m_2)(m_1 m_2' - m_2 m_1') \cdot (\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1) + \tag{6}$$

$$+ [(m_1 + m_2)(m_1'' m_2 - m_1 m_2'') - 2(m_1' + m_2')(m_1' m_2 - m_1 m_2')] \cdot (\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2) \} = 0.$$

On peut distinguer deux cas, où la condition (6) est satisfaite:

I. – Les vecteurs $(\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1)$ et $(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2)$ sont parallels. Ce cas est privé d'interêt.

II. – $(\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1)$ et $(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2)$ ont des directions différentes. La condition (6) donne les deux conditions simultanées:

$$m_1 m_2' - m_2 m_1' = 0 \tag{7}$$

$$(m_1 + m_2)(m_1'' m_2 - m_1 m_2'') - 2(m_1' + m_2')(m_1' m_2 - m_1 m_2') = 0 \tag{8}$$

dont la (8) est la conséquence de la (7). En intégrant la (7), nous en obtenons :

$$\frac{m_1}{m_2} = \text{const.} = \frac{m_{0,1}}{m_{0,2}} .$$

La condition (9) est aussi suffisante, comme on le vérifie aisément.

Il convient de remarquer que la condition (7), qui éxprime l'égalité de la radiation par l'unité de masse n'est pas compatible avec la fonction de Eddington des masses–luminosités, sinon au cas des masses égales.

Conséquence. – Si nous voulons intérpreter la fonction des masses–luminosités comme una relation qui détermine la fonction $m = m(t)$, le seul cas présentant le mouvement de C rigoureusement rectiligne et uniforme est celui des masses égales $m_1(t) = m_2(t)$.

L'étude du mouvement relatif des deux corps à masses décroissantes se fait en assumant que le mouvement du point C est rectiligne et uniforme, c'est à dire en négligeant $\frac{d^2 w_C}{dt^2}$.

En choisissant C comme l'origine du système des axes on devrait tenir compte de l'accélération de translation de ce nouveau système en introduisant les forces d'inertie. Les équations rigoureuses des mouvements des points m_1 et m_2 seraient :

$$\begin{cases} m_1 \mathfrak{W}_1' = \mathfrak{F}_{12} - m_1 \dfrac{d^2 w_C}{dt^2} \\ m_2 \mathfrak{W}_2' = \mathfrak{F}_{21} - m_2 \dfrac{d^2 w_C}{dt^2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathfrak{W}_1' = k \dfrac{m_2}{r^2} \cdot \dfrac{w_2 - w_1}{r} - \dfrac{d^2 w_C}{dt^2} \\ \mathfrak{W}_2' = k \dfrac{m_1}{r^2} \cdot \dfrac{w_1 - w_2}{r} - \dfrac{d^2 w_C}{dt^2} \end{cases}$$

où $\mathfrak{F}_{12}$ et $\mathfrak{F}_{21}$ signifient les forces newtoniennes; k est la constante de gravitation.

Pour éstimer l'ordre de grandeure de $\frac{d^2 w_C}{dt^2}$ on peut profiter de son expression qui figure dans (6). Les valeurs doivent en général resulter petites à cause des petites quantités $(m_1 m_2' - m_2 m_1')$, $(m_1'' m_2 - m_1 m_2'')$ et $(m_1' + m_2')$ qui s'y trouvent.

Pour éstimer la valeur de $\frac{d^2 w_C}{dt^2}$, j'avais à ma disposition seulement les éléments des quelques couples que j'avais choisi à un autre but d'un mémoire de S. Gaposchkin (2). Ce choix des couples était singulièrement mal adapté pour l'éstimation des valeurs de $\frac{d^2 w_C}{dt^2}$ car il renfermait juste les couples à membres à peu près égaux.

(2) « Veröffentlichungen d. Univ.–sternwarte zu Berlin–Babelsberg », Bd. IX, Heft 5. *Die Bedeckungsveränderlichen*, S. Gaposchkin. Berlin 1932.

Pour calculer $m_1'(t)$ et $m_2'(t)$ je disposais d'une reproduction du graphique représentant la fonction des masses–luminosités. J'ai transformé les grandeurs bolométriques absolues M du graphique en intensités lumineuses

$$L = -\frac{dm}{dt} \qquad \begin{matrix} (m = \text{la masse de l'étoile en unité : masse du Soleil;} \\ t = \text{le temps en unité : l'année sidérale}). \end{matrix}$$

Pour le Soleil : $M_{bol.} = +4^m.85$; $m_\odot = 1$; en grammes $(m_\odot)$ gr $= 1.98 \cdot 10^{33}$ gr ; le flux total de l'énérgie $J_\odot = 3.8 \cdot 10^{33}$ erg/sec.

$$\left(-\frac{dm}{dt}\right)_{gr/sec} = \frac{J_\odot}{c^2} \text{ gr/sec} = \frac{3.8 \cdot 10^{33}}{9 \cdot 10^{20}} \text{ gr/sec} = 0.42 \cdot 10^{13} \text{ gr/sec};$$

$$\left(-\frac{dm}{dt}\right)_{gr/année} = (0.42 \cdot 10^{13}) \cdot (3 \cdot 10^7) \text{ gr/année} = 1.32 \cdot 10^{20} \text{ gr/année};$$

$$(9) \qquad L_\odot = -\frac{dm_\odot}{dt} = \frac{1.3 \cdot 10^{20}}{1.98 \cdot 10^{33}} = 0.65 \cdot 10^{-13} \frac{\text{masses } \odot}{\text{année}}.$$

Pour une étoile dont $M_{bolométr.\ abs.} = M$ il y a :

$$\log \frac{L}{L_\odot} = -0.4\,(M - M_\odot)$$

ou, en tenant compte de (9) :

$$(10) \qquad -m' = -\frac{dm}{dt} = L = L_\odot \cdot 10^{0.4 \cdot M_\odot} \cdot 10^{-0.4 \cdot M} =$$

$$= 5.62 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-0.4 \cdot M} \frac{\text{masses } \odot}{\text{année}}.$$

D'après (10) j'ai obtenu le tableau suivant representant la fonction masse–luminosité ; m (masses) exprimées en masses $\odot$ et $-m'$ (luminosités) exprimées en $\frac{\text{masses } \odot}{\text{année}}$.

m	$-m'$	m	$-m'$	m	$-m'$
0.1	—	1.0	$8.13 \cdot 10^{-14}$	2.8	$2.95 \cdot 10^{-12}$
0.2	$8.91 \cdot 10^{-17}$	1.2	$1.55 \cdot 10^{-13}$	3.0	3.55
0.3	$5.62 \cdot 10^{-16}$	1.4	2.95	4.0	6.76
0.4	$2.04 \cdot 10^{-15}$	1.6	4.68	5.0	12 9
0.5	5.13	1.8	6.76	6.0	20.4
0.6	$1.07 \cdot 10^{-14}$	2.0	8.91	7.0	26.9
0.7	2.04	2.2	$1.29 \cdot 10^{-12}$	8.0	38.9
0.8	3.24	2.4	1.86	9.0	51.3
0.9	5 13	2.6	2.24	10.0	61.7

TABLEAU 2.

Étoile		S Ant	β Aur	*i* Boo	RS C
$k_h + k_s$	= (1)	229.0	220.0	350.0	191.0
$k_h + k_s$		2.360	2.342·	2.544	2.281
$\sin i$	(1)	9.947	9.989·	0.000	9.993
$V = \lvert \mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1 \rvert = \frac{k_h + k_s}{\sin i}$ km/sec		2.413	2.353	2.544	2 288
m_1	= (1)	0.57	2.40	0.64	1.85
m'_2	=	$2.5 \cdot 10^{-15}$	$1.74 \cdot 10^{-12}$	$1.4 \cdot 10^{-14}$	$5.75 \cdot$
m'_1	=	$9.3 \cdot 10^{-15}$	$1.86 \cdot 10^{-12}$	$1.4 \cdot 10^{-14}$	$7.2 \cdot 1$
m_2	= (1)	0.42	2 36	0 64	1.71
$m = m_1 + m_2$		0.99	4.76	1.28	3.56
m		9.995·	0.677·	0.107	0.551
$m_1 m'_2$	=	$1.42 \cdot 10^{-15}$	$4.18 \cdot 10^{-12}$	$0.89 \cdot 10^{-14}$	$10.64 \cdot 1$
$m_2 m'_1$	=	$3.91 \cdot 10^{-15}$	$4.39 \cdot 10^{-12}$	$0.89 \cdot 10^{-14}$	$12.31 \cdot 1$
$A = \lvert m_1 m'_2 - m_2 m'_2 \rvert =$		$2.49 \cdot 10^{-15}$	$0.21 \cdot 10^{-12}$	0	$1.67 \cdot 1$
A		$\overline{15}.396$	$\overline{13}.322$		$\overline{13}.22$
$m^2 = (m_1 + m_2)^2$		9.991	1.355		1.10
$v = 0.211 \cdot V \frac{\text{unités astr.}}{\text{année}}$		1.737·	1.677·		1.61
$A : m^2$		$\overline{15}.405$	$\overline{15}.967$		$\overline{14}.12$
$\frac{A}{m^2} \cdot v$		$\overline{13}.142·$	$\overline{13}.644·$		$\overline{13}.73$
$w = 2 \frac{A}{m^2} \cdot v$		$\overline{13}.443·$	$\overline{13}.945$		$\overline{12}.03$
$r = \lvert \mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}_1 \rvert$	= (1)	3.31	18.0	2.0	18.3
r^2	=				
$m_2 : r^2$	=				
$\left\lvert \frac{\mathfrak{F}}{m_1} \right\rvert = k \cdot \frac{m_2}{r^2}$	=				

(1) Les valeurs tirées du Tableau 4 du Mémoire cité de GAPOSCHKIN.;
(k_h = l'amplitude de la vitesse radiale, en km/sec., du composant plus bri
(2) Les masses des composants de Y Cyg se trouvent en dehors de la domaine de mon Tableau 1 : masse–luminosi

Y Cyg	YY Gem	Z Her	RX Her	TX Her	RT Scl	W UMa
487.0	241.0	190.0	276.5	261.9	272.0	322.0
	2.382	2.279	2.441·	2.416·	2.434·	2.508
	9.999·	9.997	9.999	9.999	9.969·	9.984
	2.382·	2.282	2.442·	2.417	2.465	2.524
(2)	0.63	1.6	2.2	2.06	0.68	0.70
	$9.3 \cdot 10^{-15}$	$3.0 \cdot 10^{-13}$	$7.8 \cdot 10^{-13}$	$6.5 \cdot 10^{-13}$	$1.15 \cdot 10^{-14}$	$5.1 \cdot 10^{-15}$
	$1.29 \cdot 10^{-14}$	$4.7 \cdot 10^{-13}$	$1.29 \cdot 10^{-12}$	$1.00 \cdot 10^{-12}$	$1.8 \cdot 10^{-14}$	$2.0 \cdot 10^{-14}$
(2)	0.57	1.4	1.90	1.77	0.61	0.5
	1.20	3.0	4.1	3.83	1.29	1.2
	0.079	0.477	0.613	0.583	1.210·	0.079
	$5.86 \cdot 10^{-15}$	$4.8 \cdot 10^{-13}$	$1.71 \cdot 10^{-12}$	$1.34 \cdot 10^{-12}$	$0.78 \cdot 10^{-14}$	$3.6 \cdot 10^{-15}$
	$0.73 \cdot 10^{-14}$	$6.6 \cdot 10^{-13}$	$2.45 \cdot 10^{-12}$	$1.77 \cdot 10^{-12}$	$1.10 \cdot 10^{-14}$	$1.00 \cdot 10^{-14}$
	$0.14 \cdot 10^{-14}$	$1.8 \cdot 10^{-13}$	$0.74 \cdot 10^{-12}$	$0.43 \cdot 10^{-12}$	$0.32 \cdot 10^{-14}$	$0.04 \cdot 10^{-14}$
	$\overline{15}.146$	$\overline{13}.255$	$\overline{13}.869$	$\overline{13}.633$	$\overline{15}.501$	$\overline{15}.806$
	0.158	0.954	1.226	1.166	0.221	0.158
	1.707	1.606·	1.767	1.741·	1.789·	1.848·
	$\overline{16}.988$	$\overline{14}.301$	$\overline{14}.643$	$\overline{14}.467$	$\overline{15}.388$	$\overline{15}.648$
	$\overline{14}.695$	$\overline{13}.307$	$\overline{12}.410$	$\overline{12}.208$	$\overline{13}.169\cdot$	$\overline{13}.496\cdot$
	$\overline{14}.996$	$\overline{12}.208$	$\overline{12}.711$	$\overline{12}.509\cdot$	$\overline{13}.470$	$\overline{12}.797$
8	3.90·	15.1	9.8	10.66	4.2	2.32
			96.04			
			0.020			
			0.79			

, = l'amplitude de la vitesse radiale, en km/sec., du composant plus faible).

Pour confronter la valeur du premier terme de (6):

$$W = 2\,\frac{m_1 m_2' - m_2 m_1'}{(m_1 + m_2)^2} \cdot (\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1)$$

avec celle de l'accélération newtonienne: $|\mathfrak{W}_1'| = k \cdot \frac{m_2}{r^2}$ j'ai exprimé $v = |\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1|$ en unités: $\frac{\text{unité astronom.}}{\text{année}}$ et j'ai réduit la constante k de Gauss [6.47116] au système des unités: unité astr. de longueur, masse du Soleil et l'année sidérale, en obtenant:

$$k = 39.478.$$

Le calcul m'a donné pour W des valeurs négligeables en comparaison avec des valeurs de l'accélération newtonienne. En effet, le tableau 2 où jai fait le calcul pour *onze étoiles doubles*, nous montre que la plus haute valeur de log W (pour RX Her) est égale à $\overline{12}.711$, tandis que $|\mathfrak{W}_1| = 0.79$. Il en résulte le rapport:

$$\left|\frac{W}{\mathfrak{W}_1}\right| \cong 10^{-11}. \tag{11}$$

Le second terme de l'expression (6) doit être une quantité petite d'ordre supérieur à cause de la présence des termes avec $m_1'' m_2 - m_2'' m_1$ et $(m_1' + m_2') \cdot (m_1' m_2 - m_1 m_2')$.

Il en suit que l'accélération de translation est une quantité petite à négliger auprès de l'accélération newtonienne.

Il est à remarquer que le rapport (11) a été éstimé pour les couples à masses à peu-près égales, ce que fait s'annuler l'expression (6).

Geodesia. — *Le anomalie gravimetriche in funzione delle deviazioni della verticale.* Nota di C. Morelli, presentata [1] dal Socio G. Cassinis.

Richiamo di alcune definizioni della Geodesia. — Da alcuni concetti ben noti in Geodesia ricordiamo le seguenti definizioni:

a) Si chiama *deviazione (totale) della verticale* ε (o *deviazione locale*) in P l'angolo formato (fig. 1) dalla normale n (interna) al geoide in P e dalla normale ν all'ellissoide condotta nello stesso punto. Indicheremo con ξ'', η'' le *componenti della deviazione della verticale* secondo il meridiano e secondo il parallelo (espresse in secondi).

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

b) Si chiama (2) *anomalia gravimetrica (totale)* in un punto P del geoide la differenza Δg fra il *valore attuale* g_P (osservato e ridotto) della gravità in P ed il *valore normale* γ_P della gravità nello stesso punto: $\Delta g = g_P - \gamma_P$.

c) Il *valore normale della gravità* γ_P viene a sua volta ricavato dal valore normale γ_Q della gravità in Q, definito come quella parte della gravità in Q che compete la potenziale U su una superficie di riferimento regolare e prossima al geoide (sferoide; come tale è oggi assunto l'*ellissoide internazionale* di rotazione, Madrid 1924).

Conoscendo la distanza QP = N, positiva dove il geoide è esterno all'ellissoide, e trascurando i termini di ordine superiore, si avrà quindi:

$$\gamma_P = \gamma_Q - N\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)_Q + \cdots$$

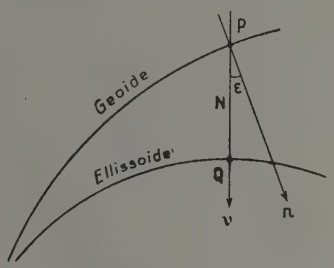


Fig. 1.

d) In generale però non si conosce il valore di N, e quindi ci si deve accontentare del calcolo di una *anomalia apparente* $\Delta' g$ definita da:

$$\Delta' g = g_P - \gamma_Q .$$

Si dimostra però facilmente che, poichè:

$$\Delta' g = \Delta g + \gamma_P - \gamma_Q = \Delta g - N\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)_Q + \cdots ,$$

indicando con γ_m ed R i valori medi della gravità e del raggio terrestre e ponendo con approssimazione sufficiente:

$$\left(\frac{d\gamma}{dv}\right)_Q = \frac{2\gamma_m}{R} = 0{,}309 \text{ mgal},$$

si ha:

$$\Delta g - \Delta' g = 0{,}309 \cdot N ,$$

dove le anomalie sono espresse in mgal qualora N sia in metri.

Poichè in Italia il massimo scostamento del geoide dall'ellissoide finora riscontrato è (3) di 13 m. (Comacchio), l'errore che si commette considerando l'anomalia apparente $\Delta' g$ al posto di quella vera Δg è al massimo di 4 mgal, e quindi trascurabile in prima approssimazione di fronte alle altre cause di errore (sia di osservazione che di riduzione).

e) Si dimostra inoltre che l'anomalia vera (o in pratica l'anomalia apparente) in un punto dipende, oltre che dal potenziale U, da un potenziale addittivo T derivante dalle perturbazioni di carattere più o meno locale, la cui complessità di espressione analitica ed entità numerica è variabile da regione a regione, ma sempre piccola rispetto ad U. Per cui con riferimento ad un sistema qualsiasi di assi cartesiani ortogonali x, y, z rigidamente collegati con la Terra, si ha:

$$\Delta g = \frac{1}{\gamma} \sum_{x,y,z} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} .$$

Insistiamo particolarmente (per le conclusioni che seguiranno) su questo punto: T dipende dalle masse perturbatrici, in particolare dalla distribuzione della densità nei primi strati della crosta terrestre.

(2) G. Cassinis, *Progressi nello studio della forma della Terra.* «Boll. Geodetico I. G. M.», III, 1, Firenze, 1943.

(3) G. Boaga, *Le deviazioni della verticale in Italia.* «Mon. di Geofisica e Geochimica», n. 1, Ist. Geofisico Ital., Milano, 1946.

In questo lavoro, si intendono per *anomalie gravimetriche* e si indicano semplicemente con Δg le anomalie *apparenti* dianzi definite.

Posizione del problema. – La ricerca delle relazioni fra l'espressione della gravità sopra una superficie sferoidale supposta di equilibrio e l'equazione della stessa, costituisce un importante problema geodetico cui negli ultimi decenni la *Scuola italiana* ha portato notevoli contributi specialmente per merito di Pizzetti, Somigliana, Mineo, Gulotta, ecc. (4).

In particolare, per superfici sferoidiche non di rotazione il Gulotta determina le relazioni intercedenti fra i coefficienti dell'espressione della anomalia di gravità e le deviazioni della verticale; con altri procedimenti questo problema era già stato trattato dai proff. Mineo e Dore.

Partendo dalle formule del Pizzetti, il prof. Boaga ha ricavato (5) la seguente formula non eccessivamente complicata che permette di determinare la relazione fra le *differenze di gravità* Δg *per punti corrispondenti su una superficie sferoidica non di rotazione e sull'ellissoide in funzione delle deviazioni* ξ'', η'' *e delle coordinate geografiche*:

$$(1)\quad \Delta g = F_1(\varphi) - g(\varphi) - F_2(\varphi, \lambda)\{\xi'' \cdot F_3(\varphi) - \eta'' F_4(\varphi, \lambda) + F_5(\varphi)\},$$

dove

$$F_1(\varphi) = f \cdot \frac{M}{r^2} - \frac{5}{2} w^2 r \left(\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2 \varphi\right),$$

$$F_2(\varphi, \lambda) = f \cdot \frac{M}{r^2} \left(\frac{149}{32} - \frac{35}{4} \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{105}{32} \operatorname{sen}^2 2\varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda\right),$$

$$F_3(\varphi) = \frac{4 \cdot \text{arc } 1''}{9 - 35 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

$$F_4(\varphi, \lambda) = F_1(\varphi) \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{ctg} 2\lambda,$$

$$F_5(\varphi) = \frac{45 + 6s^2 - 12 s^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi}{9 - 35 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

con:

φ, λ = coordinate geografiche sullo sferoide;

f = costante di attrazione universale;

M = massa dello sferoide;

w = velocità angolare;

r = raggio vettore dello sferoide;

s = schiacciamento dell'ellissoide di rotazione.

(4) G. Boaga, *Sulle relazioni fra le deviazioni della verticale e le anomalie gravimetriche*. «Rend. R. Acc. Lincei», XXV, ser. 6ª, 1° sem., fasc. 12, Roma, giugno 1937.

(5) G. Boaga, *Le anomalie gravimetriche e le deviazioni della verticale per pianeti sferoidici non di rotazione*. «Rend. Ist. Lombardo», LXXIV, fasc. II, Milano, 1940–41.

Nel presente lavoro ci proponiamo di verificare se la (1) può trovare applicazione pratica. Perciò ne studieremo il comportamento nei riguardi del campo gravimetrico osservato in Italia, calcolando i coefficienti numerici dello sviluppo (1) che permettano eventualmente di ricavare in Italia il valore di Δg noti che siano per ogni punto i valori di ξ'', η'' e le corrispondenti coordinate geografiche.

A tal fine, osserviamo che la (1) si può scrivere sotto la forma:

$$\Delta g = \Phi_1(\varphi, \lambda) + \Phi_2(\varphi, \lambda) \cdot \xi'' + \Phi_3(\varphi, \lambda) \cdot \eta'', \tag{2}$$

con:

$$\Phi_1(\varphi, \lambda) = x_1 + x_2 \operatorname{sen}^2 \varphi + x_3 \operatorname{sen}^4 \varphi + x_4 \cos^2 \varphi \cos 2\lambda,$$

$$\Phi_2(\varphi, \lambda) = x_5 + x_6 \operatorname{sen}^2 \varphi + x_7 \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos 2\lambda,$$

$$\Phi_3(\varphi, \lambda) = (x_8 + x_9 \operatorname{sen}^2 \varphi + x_{10} \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos 2\lambda) \cdot \operatorname{sen} \varphi \operatorname{ctg} 2\lambda,$$

dove x_i $(i = 1, 2, \cdots, 10)$ sono le incognite da determinare.

I coefficienti delle equazioni generate sono quindi:

$$a = 1 \qquad f = \xi'' \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$b = \operatorname{sen}^2 \varphi \qquad g = \xi'' \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos 2\lambda$$

$$c = \operatorname{sen}^4 \varphi \qquad h = \eta'' \operatorname{sen} \varphi \operatorname{ctg} 2\lambda$$

$$d = \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \qquad i = \eta'' \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{ctg} 2\lambda$$

$$e = \xi'' \qquad m = \eta'' \cos \varphi \operatorname{ctg} \varphi \cos 2\lambda \operatorname{ctg} 2\lambda$$

ed il termine noto:

$$k = -\Delta g.$$

Da 40 punti della rete geodetica italiana in cui sono stati osservati gli elementi qui necessari (cortesemente comunicati dal prof. Boaga) sono stati ricavati i 34 punti della tabella I, distribuiti con sufficiente uniformità su tutta la Penisola, per ognuno dei quali riportiamo le coordinate geografiche (longitudine da Greenwich), i valori di ξ'' e η'' e quelli delle anomalie gravimetriche (in mgal) nelle riduzioni di Faye e di Bouguer secondo i dati della rete gravimetrica italiana rielaborata e compensata dallo scrivente (gravità normale secondo la formula internazionale). I valori gravimetrici sono tutti relativi a misure successive al 1909 (dato che la maggior parte di quelle anteriori a questa data sono affette da errori anche molto notevoli dovuti a varie cause, fra cui soprattutto imperfette determinazioni di tempo e mancanza di correzione per la flessione del supporto).

TABELLA I.

STAZIONE	φ	λ	ξ″	η″	Δg F (mgal)	Δg B (mgal)	Δg calc. — Δg. oss. F (mgal)	B (mgal)
1. Oderzo	45° 46′ 54″,4	12° 29′ 39″	— 5,90	+ 2,65	— 51	— 52	+ 5	0
2. Aquileia	10 ,2	13 22 19	— 1,02	— 3,08	— 33	— 33	— 36	— 38
3. Trieste	38 36 ,9	46 31	— 1,36	— 12,94	— 17	— 23	— 49	— 30
4. Andrate	31 38 ,9	7 52 28	— 29.10	+ 16,81	+ 126	+ 48	— 99	— 69
5. Milano	28 15 ,6	9 11 33	— 15,76	+ 2,43	— 71	— 80	+ 61	+ 48
6. Padova	24 05 ,3	11 52 10	— 4,09	+ 6,00	— 4	— 6	— 28	— 39
7. Monte Vesco	19 25 ,4	7 59 24	— 19,83	+ 25,47	— 39	— 72	+ 50	+ 33
8. Monte Crea	05 41 ,5	8 16 24	— 3,23	+ 16,59	— 95	— 137	+ 68	+ 71
9. Torino	04 14 ,3	7 41 10	— 6,38	+ 26,59	— 20	— 44	+ 2	— 18
10. Pino Torinese	02 18 ,0	46 00	+ 2,82	+ 26,96	— 8	— 69	— 27	— 14
11. Monte Castello	44 56 56 ,3	8 40 56	+ 2,10	+ 3,00	— 136	— 154	— 140	+ 89
12. Tortona	53 35 ,2	52 17	+ 9,32	— 9,78	— 119	— 130	+ 53	+ 51
13. Pola	51 54 ,3	13 50 50	— 5,64	— 5,10	+ 15	+ 12	— 11	+ 10
14. Bric Torniola	49 19 ,9	7 58 34	+ 3,00	+ 7,51	— 60	— 96	+ 27	+ 33
15. Eremo di Cherasco	36 08 ,0	48 14	+ 18,88	+ 24.29	— 39	— 76	+ 6	— 46
16. Genova	25 08 ,2	8 55 20	— 0,02	— 0,02	+ 10	+ 2	— 18	— 31
17. Mondovì	23 23 ,4	7 49 46	+ 18,96	+ 13.48	+ 15	— 39	+ 10	— 26
18. Rimini	03 30 ,9	12 34 03	+ 13,08	— 1,15	— 81	— 82	+ 56	+ 35
19. Monteluro	43 54 29 ,4	46 32	+ 13,92	— 1,12	— 42	— 67	+ 36	+ 24
20. Monte Senario	53 40 ,9	11 20 03	+ 16,01	— 4,58	+ 57	— 27	— 69	— 16
21. Firenze	46 36 ,2	16 39	+ 13,27	— 2,76	— 2	— 6	+ 5	— 20
22. S. Romolo	44 44 ,2	06 17	+ 14,61	+ 4.24	+ 44	+ 17	— 30	— 44
23. Saltino Vall.	43 46 ,0	32 09	+ 12,66	+ 12,92	+ 84	— 7	— 53	— 13
24. T. Scapezzano	08 ,5	13 10 06	+ 10,76	— 1,15	— 40	— 55	+ 52	+ 36
25. Pisa	42 56 ,3	10 23 31	+ 6,00	— 6,41	+ 23	+ 23	— 13	— 26
26. B. Giusto	37 30 ,2	11 20 04	+ 14,59	— 4,35	+ 73	+ 11	— 66	— 33
27. Monte Conero	33 04 ,1	13 36 24	+ 11,79	— 0,89	+ 40	— 20	— 20	+ 5
28. Livorno	31 37 ,3	10 18 30	+ 10,00	— 6,46	+ 39	+ 58	— 24	— 59
29. Roma	41 53 33 ,4	12 29 38	+ 1,97	— 5,65	+ 31	+ 25	+ 40	+ 49
30. Bari	08 16 ,6	16 50 47	+ 7,48	— 1,37	+ 72	+ 72	— 65	+ 18
31. Cagliari	39 13 12 ,7	9 07 03	— 2,58	— 4,41	+ 30	+ 25	— 19	— 15
32. Carloforte	08 09 ,2	31 56	— 0,24	— 7,15	+ 43	+ 42	— 21	— 14
33. Palermo	38 06 47 ,1	13 21 50	+ 7,65	+ 7,07	+ 56	+ 55	+ 53	+ 47
34. Catania	37 30 10 ,9	15 04 49	+ 2,34	+ 15,03	+ 99	+ 97	— 34	— 33

1° tentativo: Anomalie gravimetriche secondo Faye in funzione delle componenti delle attrazioni del filo a piombo. – Abbiamo dapprima sviluppato i calcoli prendendo per le anomalie gravimetriche i valori che risultano con la sola riduzione in aria libera (anomalie secondo Faye); i valori sono così ancora influenzati dalle masse esterne al geoide: ma poichè queste stesse influiscono anche sui valori osservati delle deviazioni della verticale, come prima ipotesi l'impostazione seguita è accettabile. ξ'' e η'' sono state considerate col segno cambiato, per avere le componenti delle attrazioni del filo a piombo (notiamo che cambiare il segno a ξ'' e η'' non altera i risultati, in quanto anche le incognite da x_5 a x_{10} sortiranno allora col segno cambiato).

Calcolando per ognuna di queste stazioni i coefficienti precedenti, si è ottenuto un sistema di 34 equazioni generate nelle 10 incognite x_i, da cui sono risultati i seguenti valori per le incognite (per le quali sono riportate solo le cifre decimali necessarie):

$x_1 = -\ 4053{,}15$ $x_3 = -\ 24713{,}8$ $x_5 = +\ 26{,}7642$ $x_7 = -\ 23{,}7555$ $x_9 = +\ 46{,}5973$
$x_2 = +\ 20899{,}4$ $x_4 = -\ 540{,}6$ $x_6 = -\ 2{,}7027$ $x_8 = -\ 30{,}8005$ $x_{10} = +\ 7{,}5129$

Nel controllo le equazioni del sistema normale offrono con questi valori i seguenti scarti:

(1) + 0,028 (3) — 0,028 (5) + 0,008 (7) + 0,007 (9) — 0,011
(2) + 0,016 (4) — 0,001 (6) + 0,019 (8) — 0,010 (10) — 0,016

Ciò comprova l'esattezza della soluzione del sistema normale.

Però i residui che si ottengono dalle equazioni generate con i valori precedenti delle incognite sono quelli della penultima colonna della Tabella I (Δg calcol.-Δg osserv.; in mgal). Risulta quindi chiaramente l'insufficienza dei risultati così ottenuti.

2° tentativo: Anomalie gravimetriche secondo Bouguer in funzione delle componenti delle deviazioni della verticale. – Per vedere se questi eventuali scarti dipendono dal fatto che le anomalie gravimetriche introdotte nei calcoli non sono state sufficientemente ridotte, abbiamo rifatto (senza cambiare il segno a ξ'' e η'', per rimanere nelle ipotesi ammesse teoricamente) i calcoli sulla base delle anomalie gravimetriche secondo Bouguer (terz'ultima colonna della tabella I).

Si ottengono allora per le incognite i seguenti valori:

$x_1 = -\ 3371{,}52$ $x_3 = -\ 24144{,}6$ $x_5 = -\ 135{,}4890$ $x_7 = +\ 57{,}2501$ $x_9 = -\ 8{,}2038$
$x_2 = +\ 19724{,}4$ $x_4 = -\ 1082{,}4$ $x_6 = +\ 156{,}0027$ $x_8 = +\ 4{,}0089$ $x_{10} = -\ 0{,}0045$

I seguenti scarti delle equazioni del sistema normale confermano nel controllo l'esattezza (matematica) della soluzione:

(1) + 0,043 (3) — 0,027 (5) 0,000 (7) — 0,001 (9) — 0,007
(2) + 0,016 (4) — 0,001 (6) — 0,016 (8) — 0,024 (10) — 0,017

Rimangono però sempre residui troppo forti per le equazioni generate (v. ultima colonna della tabella I).

Si conclude che anche in questo caso le anomalie gravimetriche che risultano dalla (2), coi coefficienti calcolati con metodo probabilistico da un sufficiente numero di punti della rete geodetica italiana, non sono in buon accordo con quelle direttamente osservate.

Discussione e conclusione. – Abbiamo dimostrato col calcolo che la (2) ottenuta dal prof. Boaga con sviluppi in serie, limitati al secondo ordine e che indica la possibilità (teorica) di esprimere le anomalie gravimetriche in funzione (delle coordinate geografiche e) delle deviazioni della verticale, non soddisfa a tutti i valori sperimentali ottenuti in 34 stazioni.

Si potrebbe pensare che il risultato negativo sia dovuto al fatto che per l'impostazione col metodo dei minimi quadrati si è considerato un numero troppo esiguo (34) di stazioni, o che il risultato negativo per l'Italia sia dovuto all'estrema accidentalità del nostro sottosuolo dal punto di vista geofisico (gravimetrico).

Nei riguardi della prima osservazione ricordiamo che i punti prescelti sono distribuiti con sufficiente uniformità (almeno per l'Italia centro-settentrionale) e che i valori osservati sono molto attendibili; in nessun caso poi essi ci sembrano idonei a giustificare i notevolissimi scarti ottenuti.

La seconda osservazione ci sembra maggiormente attendibile. Ricordiamo infatti a questo proposito alcune osservazioni del prof. Boaga [5]:

« Se infine, nell'ambito delle osservazioni sperimentali, è noto lo scostamento lineare fra ellissoide di riferimento e geoide nel punto di osservazione (*cioè in altre parole sono note le* ξ'' e η'') ed il Δg calcolato con la (2) non corrisponde a quello dedotto sperimentalmente (*come nei due casi qui trattati*) la differenza è da attribuirsi in parte all'errore dell'ipotesi della forma attribuita al geoide (*ora anche: in parte alla approssimazione tenuta negli sviluppi in serie applicati via, via per giungere alla* (2)) ed in parte alle irregolarità della crosta terrestre nell'intorno del punto di osservazione ».

Ora, le irregolarità della crosta terrestre sono in Italia numerose e complesse, sicchè il geoide viene ad assumere in corrispondenza un aspetto molto movimentato: il contributo del potenziale di perturbazione T non è qui trascurabile nè esprimibile in forma analitica semplice. Ne consegue l'impossibilità di approssimarlo in maniera sufficiente con un'espressione del tipo (2) limitata ai primi termini.

Ciò risulta ancor più evidente se si pensa che *nel centro di un'anomalia* (dovuta ad una massa perturbante regolare) *la deviazione della verticale è nulla, mentre l'anomalia gravimetrica* (qualunque sia l'entità delle riduzioni applicate) *è massima*. Dalla (2) segue allora che in simili punti l'anomalia gravimetrica dovrebbe essere *funzione solo delle coordinate geografiche*, ed è quindi evidente l'impossibilità di approssimare con una funzione di ordine

non troppo elevato (equivalente ad una superficie dei primi ordini) delle sole coordinate geografiche il campo osservato delle anomalie gravimetriche in questi punti. Viceversa, ad una conveniente distanza dal punto di osservazione nel piano orizzontale ci saranno dei punti dove la deviazione della verticale sarà notevole ed invece le anomalie gravimetriche molto piccole, per cui il contributo dei termini funzione delle sole coordinate geografiche nello sviluppo (2) dovrebbe essere prossimamente uguale e di segno contrario a quello dei termini con ξ'' e η''.

Ne concludiamo che *per l'Italia un'espressione del tipo* (2) *non è sufficiente per esprimere le anomalie gravimetriche in funzione della posizione del punto e della deviazione della verticale ivi osservata.* E da quanto precede sembra lecito concludere che, date le numerose irregolarità presenti nella distribuzione delle masse negli strati superficiali (su un'area piuttosto ristretta), non lo sarebbe neanche considerando i termini del secondo ordine, cioè del tipo $\Phi_4(\varphi, \lambda)\,\xi''^2$, $\Phi_5(\varphi, \lambda)\,\xi''\eta''$, $\Phi_6(\varphi, \lambda)\,\eta''^2$, ecc., per cui per l'Italia il problema qui proposto non ammette in pratica soluzione.

Ciò non diminuisce naturalmente l'importanza teorica della (2) e non esclude la possibilità che per altre regioni, più estese e meno accidentate nella distribuzione della densità superficiale, sia possibile ricavare dei coefficienti per lo sviluppo (2) che consentano in pratica di raggiungere una sufficiente approssimazione.

È anche da prevedere che il risultato diventi positivo qualora al posto dei valori osservati o insufficientemente ridotti, si introducano nei calcoli valori *ridotti isostaticamente* sia per le anomalie gravimetriche che per le deviazioni della verticale, perchè in questo caso i contributi delle irregolarità di massa vengono ridotti al minimo. Per cui, combinando quanto esposto in questi due ultimi capoversi, ci proponiamo di ritentare la ricerca per i valori ridotti isostaticamente negli U. S. A. e nell'India, non appena ci sarà possibile ottenere i valori necessari.

Prima di chiudere vogliamo ancora esprimere al prof. Boaga la nostra gratitudine per le indicazioni che cortesemente ci ha fornito per l'esecuzione di questo lavoro.

Geologia. — *Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo nell'Appennino Romagnolo.* Nota di R. Signorini, presentata[1] dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

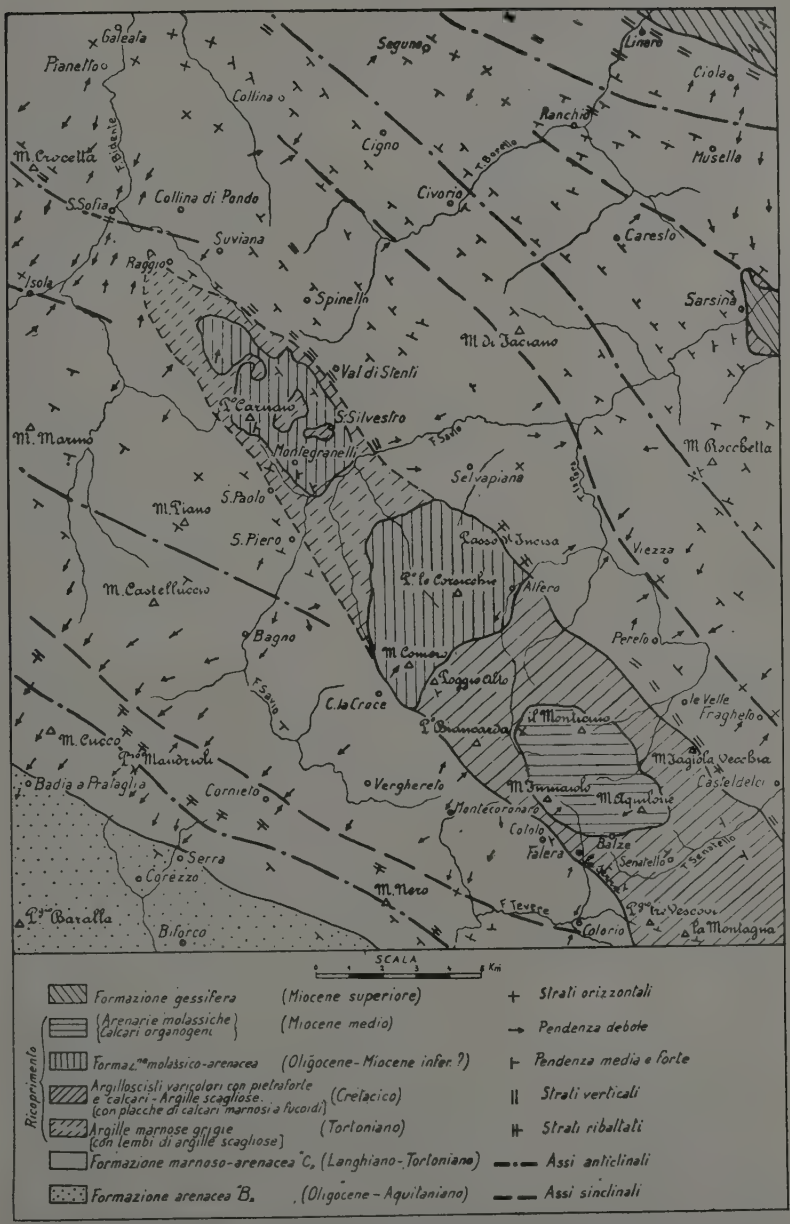
L'uniformità geologica dell'Appennino Romagnolo, costituito nella sua massa (80 Km. di lunghezza per 35 Km. di larghezza) dalla formazione marnoso-arenacea miocenica, è interrotta da una notevole striscia di terreni diversi e vari che da Badia Tedalda nella valle del Marecchia si allunga per 33 Km. verso NO fin presso S. Sofia nella valle del Bidente.

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

Per quanto riguarda la valle del Marecchia ho indicato nelle mie *Linee tettoniche trasversali nell'Appennino Settentrionale,* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », Classe Sc. fis., mat. e nat., vol. XXI, s. 6, f. 1, gennaio 1935, come essa corrisponda a una zona trasversale di depressione in cui si trova una colata di argille scagliose, con terreni vari, sopravanzata sulla formazione marnoso-arenacea miocenica, tra le aree sopraelevate dell'Appennino Urbinate e di quello Romagnolo. Nella *Struttura dell'Appennino tra la Val Tiberina e l'Urbinate,* « Giornale di Geologia », s. 2, vol. XV, Bologna 1941, al paragrafo 5 « Bordo NO della formazione marnoso–arenacea » ho descritto come questa si immerge verso NO sotto alle argille scagliose ricoprenti e come il ricoprimento è particolarmente evidente nei pressi di Badia Tedalda. Come poi, proseguendo verso NO, la stessa formazione marnoso–arenacea di sotto al ricoprimento delle argille scagliose si risolleva a costituire l'Appennino Romagnolo, l'ho esposto nella mia Nota: *Sulla tettonica dell'Appennino Romagnolo,* « Rend. R. Acc. d'Italia », Classe Sc. fis., mat. e nat., f. 8, s. VII, vol. I, 1940, a pp. 379–380: « Il bordo SE dell'Appennino Romagnolo ».

Da quella zona trasversale della Val Marecchia si parte, in direzione ortogonale, e penetra nel cuore dell'Appennino Romagnolo la striscia anomala Badia Tedalda–S. Sofia che ha la particolarità appunto di essere longitudinale rispetto alle pieghe e all'orografia dell'Appennino e che, come vedremo, fa parte del medesimo ricoprimento di terreni alloctoni sopravanzati da SO, posteriormente al Miocene medio, sulla formazione marnoso-arenacea.

Presso Badia Tedalda, sopra alla formazione marnoso-arenacea che costituisce la massa fondamentale su cui riposano i terreni vari alloctoni, giacciono lembi di argille scagliose con masse calcaree; queste costituiscono vette rilevate sul più erodibile paesaggio argilloso: Badia Tedalda (calcari nummulitici), Sasso di Cocchiola, poi, sulla sinistra del Marecchia, Monte Botolino, Monte Albino. Procedendo ancor più a NO, la vetta del Poggio dei Tre Vescovi (m. 1127), dove convergono tre confini tra Toscana, Marche e Romagna, è formata da un lembo di calcari marnosi bianchi ruvidi e marnoscisti a scaglia fogliettata, spesso con chiazze di colore rosso vinato e grigio verdastro; vi si vede anche qualche straterello di 1-2 cm. di calcare arenaceo. Analogo lembo calcareo costituisce, poco più ad oriente, la sommità della Montagna (m. 1154): sono calcari marnosi e marnoscisti che all'estremità meridionale del lembo, essendo inclinati a NNE, si vedono star sopra a strati di argilloscisti rossi e di arenarie calcaree fini compatte di color ferrigno, pure pendenti a NNE. In un campione dello strato calcareo più basso ho trovato una microfauna di *Globigerina* e *Globorotalia*. I campioni delle marne intercalate tra i calcari, che ho raccolto al Poggio dei Tre Vescovi, presentano molte forme di *Globotruncana* che attestano l'età cretacica di questa formazione calcarea.



Cartina geologica (Scala 1 : 200.000) della parte orientale dell'Appennino Romagnolo col lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo e del Carnaio. Rilevata al 25.000 da R. Signorini.

La formazione scistosa sottostante affiora tutt'intorno ai due lembi calcarei e nella sella interposta; si presenta poi bene esposta e bene stratificata lungo tutta la Serra, tra il Poggio dei Tre Vescovi e le Balze: gli strati hanno una pendenza generale tra est e SE e sono costituiti da argilloscisti rossi e grigi con qualche straterello di calcare scheggioso e di pietraforte; poi da scisti bruni e varicolori, talora con straterelli manganesiferi, con banchi di calcari scheggiosi, più o meno silicizzati e coloriti, caratterizzati da una fratturazione secondo superfici piane che si intersecano dando luogo a poliedri con spigoli vivi rettilinei (a lastre con contorno a linea spezzata anche con angoli rientranti, a cunei, financo ad aghi); inoltre strati di arenaria calcarea colore grigio ferro (pietraforte); talora anche scisti bituminosi fogliettati.

Sono questi gli ingredienti delle più tipiche «argille scagliose». E aspetto franoso di argille scagliose essi assumono scendendo sul versante NE nella valle del Senatello, coi caratteristici colori grigio plumbeo e rossigno. Nel Fosso della Rupina si trovano anche scisti bituminosi. Poco a valle della confluenza di questo torrente, sotto il paese di Senatello, il Fosso del Petroso incide la formazione argilloscistosa stratificata: sono argilloscisti rossi e grigio-verdastri, sfaldabili in squamette minute dure, alternanti con strati e straterelli (da 3 a 60 cm. di spessore) di arenaria calcarea compatta, dura, color ferrigno (rossigno esternamente, internamente grigio), con forti impronte basali, nemertiliti, ecc. È la tipica pietraforte: analoga a quella del Casentino, di Rignano sull'Arno, dei dintorni di Firenze, nelle quali località ha fornito Inocerami e Ammoniti del Cretacico. Campioni degli argilloscisti rossi bene esposti che ho raccolto nel fondovalle sotto Senatello presentano, con *Globigerina*, forme di *Globorotalia* del Cretacico.

Sopra alla formazione degli argilloscisti rossi con pietraforte poggia un pacco di strati di calcare marnoso bianco, inclinati a ONO, con le testate sul ripido versante del Fosso del Petroso: essi costituiscono la rupe su cui sta il paese di Senatello e continuano a metà versante in direzione NNE fin sotto al Monte Fagiola Vecchia. Ogni strato di calcare marnoso diventa scistoso nella parte superiore passando a una scaglia ruvida ricca di fucoidi e dendriti.

Al di sopra di questa placca calcarea il pendio del versante si attenua in un ripiano: sono ancora le argille scagliose, qui sparse superficialmente di massi staccati e rotolati dal sovrincombente erto fianco del Monte Aquilone (m. 1355). Quest'ultimo, unito al Monte Fumaiolo (m. 1408) e al Monticino (m. 1318), forma la più elevata zona: una grande placca suborizzontale, che rammenta un'amba, dai bordi scoscesi con grandi rupi; la formano sedimenti miocenici di facies particolare, costiera, analoga alla Verna, al Sasso di Simone, a San Leo, a San Marino: più che residui di erosione si tratta di placche staccate, slitte o barche galleggianti sulle argille scagliose. Questa grande placca o slitta del Fumaiolo ha la forma di un'ellisse con

assi di 5 e di 3 1/2 Km.; la stratificazione è pianeggiante, rialzata verso i margini, non piegata ma più o meno sconquassata; nella sua parte inferiore, che poggia direttamente sugli argilloscisti con pietraforte e calcari (argille scagliose) è costituita da bancate di calcari organogeni massicci, con fratturazione verticale, colonnare: alcuni banchi sono costituiti da un agglomerato di pallottole formate da alghe calcaree. Al di sopra dei calcari organogeni segue un forte spessore di arenarie molassiche massicce: queste verso l'alto tendono a dividersi in strati male separati, poi in strati più netti (arenarie marnose tenere e dure alternate). Talora nel calcare a litotamni, alla base della placca, si trovano inglobati frammenti angolosi di calcare marnoso rosso vinato, di calcare marnoso grigio verdognolo e di arenaria fine ferrigna: ciò mostra che la prima sedimentazione miocenica si è formata direttamente sopra alla formazione mista cretacica, la quale probabilmente si trovava già in coltre di ricoprimento nella zona più interna, quella del macigno oligocenico–aquitaniano, dove era la zona costiera del mare miocenico; poi è avanzata ulteriormente, insieme con placche della sedimentazione miocenica costiera, sopra alla formazione marnoso–arenacea depostasi più a NE nel mare aperto miocenico.

Lungo il bordo meridionale della placca, dalle rupi del Monte Aquilone sopra le Vene del Senatello fino alla grande parete calcarea sopra il Cotolo, viene a mancare la zona inferiore, quella calcarea, e le arenarie molassiche si trovano direttamente sulle argille scagliose (tratto delle Balze); questo fatto si ripete a SO e ad ovest del Monte Fumaiolo. Poichè generalmente le placche slittate tendono a perdere gli strati inferiori nella parte a tergo, mentre il fronte della slitta presenta la serie più completa, si può dedurre anche da questo carattere che l'avanzamento della placca del Monte Fumaiolo è avvenuto da SO verso NE: come già ci indicavano la successione delle facies mioceniche e il movimento dell'orogenesi appenninica [2].

La zona di cresta ora descritta Poggio dei Tre Vescovi – Monte Fumaiolo che forma lo spartiacque tra il Tirreno (bacino del Tevere) e l'Adriatico (bacini del Marecchia e del Savio), costituisce, con i suoi terreni vari ora descritti, un lembo rimasto in alto sopra un esteso basamento di formazione marnoso–arenacea. Questa appare infatti a SO subito sotto al Poggio dei Tre Vescovi e alla cresta della Serra ed è profondamente incisa dai fossi che scendono a Colorio; parimente costituisce fino in fondo il ripido versante sotto al ripiano di argille scagliose, sparso di blocchi di calcare miocenico, di Falera, e si estende nella valle del primo tronco del Tevere, a Montecoronaro e Verghereto.

In questa zona la formazione marnoso–arenacea miocenica ha inizio da SO, lungo la linea di dislocazione passante per Valsavignone nella valle

(2) R. Signorini, *La successione delle facies del Miocene nell'Appennino Centrale e Settentrionale.* « Boll. Soc. geol. it. », vol. LXIV, Roma 1945.

del Tevere e poi, verso NO, per Serra di Corezzo e per Badia a Prataglia, Passo dei Fangacci, Passo Porcareccio e oltre (3). È questa una linea di accavallamento lungo la quale, mediante caratteristiche striscie di argilloscisti rossi oligocenici, la formazione arenacea più interna, oligocenico–aquitaniana, si addossa alla formazione miocenica romagnola: questa forma una prima grande piega anticlinale parallela alla dislocazione, che in gran parte costituisce la cresta spartiacque; il suo asse passa per Monte Nero, il Passo dei Mandrioli, Monte Penna, fino a Castagnolo nella valle del Bidente sotto Campigna. Questa grande anticlinale è ribaltata verso NE sopra un'adiacente grande sinclinale il cui asse passa per Colorio nella valle del Tevere, per l'Abetia e Cornieto sotto Verghereto, il Paretaio, S. Paolo in Alpe. Nella zona Colorio–Verghereto non è più la formazione marnoso-arenacea tipica, bene stratificata, a arenarie e marne alternate, ma è un insieme prevalentemente marnoso, con stratificazione confusa, a pacchi rimossi e giustaposti con pendenze varie, che attribuisco a un inizio di scivolamento.

Dall'altra parte della striscia di terreni alloctoni, a NE, si estende di nuovo il sottostante basamento di formazione marnoso–arenacea: la struttura di questo presenta una grande sinclinale il cui fondo passa per Frassineto, Fragheto, Viezza e Molino della Para, parallelamente al margine della zona alloctona. Verso questo l'ala della sinclinale si solleva accrescendo l'inclinazione degli strati fino a raggiungere spesso la verticale. Nella valle del Senatello ciò avviene sulla linea Schigno–S. Maria. Sù in alto, a NE della placca del Fumaiolo, la formazione mista cretacica che le sta sotto e intorno costituisce il Monte Fagiola Vecchia (m. 1124) e il cocuzzolo quota 1099 (sono argilloscisti a squamette dure, strati di arenaria calcarea dura, strati di calcare marnoso coloriti, a fratturazione poliedrica); subito dopo questo cocuzzolo si passa alla formazione marnoso–arenacea di NE che si presenta in strati fortemente inclinati a SO: ma non è che la stratificazione marnoso–arenacea si immerga sotto al lembo del Fumaiolo, perchè gli strati sono sicuramente rovesciati, come mostra l'esame del senso di sedimentazione. Verso NE essi continuano rovesciati, con fortissime pendenze a SO fino alla cappella della Madonna del Piano, oltre la quale divengono verticali e poi normali con inclinazione a NE che diminuisce man mano fino al fondo della grande sinclinale regolare Fragheto-Viezza; l'opposta ala si rialza verso NE fino alla forte dislocazione (anticlinale ribaltata a NE) di Cicognaia, Caioletto e Rusciano che porta ad abbassare bruscamente la formazione marnoso–arenacea facendola sparire sotto alla formazione gessifera e alle argille scagliose della zona di S. Agata Feltria e Maiano.

Questa è la struttura di tutto il lato NE. Così nell'incisione del torrente la Para si vede l'ala della sinclinale di Fragheto sollevarsi sempre più

(3) R. Signorini, *Osservazioni geologiche sul bordo settentrionale del Casentino.* « Boll. Soc. geol. it. », vol. LV, fasc. 2, Roma 1936.

verso SO: strati inclinati 30° a NE presso Castelpriore, poi 50°, poi 60–70° a Campo del Riccio e nel Monte la Rocchetta (m. 1037), fino a divenire verticali alle Velle e infine ribaltati al contatto con la formazione mista cretacica del lembo del Fumaiolo. Questa struttura delle Velle è stata interpretata dal Lotti [4] come una stretta anticlinale il cui fianco SO si immerge sotto alla formazione mista: il Lotti infatti si era bene accorto che nei dintorni del Monte Fumaiolo la formazione marnoso-arenacea « apparisce in modo indiscutibile sottostante alle argille scagliose » e per mettere d'accordo questo fatto sicuro con la serie stratigrafica presunta continua, riferiva all'Eocene tanto la formazione marnoso-arenacea quanto le soprastanti argille scagliose e riteneva trasgressiva in posto la formazione miocenica (calcari organogeni e arenarie) del Monte Fumaiolo « residui di un terreno che un tempo dovette estendersi sopra una vasta area di questo tratto della catena appenninica »: era così portato a vedere gli strati marnoso-arenacei immergersi sotto alle argille scagliose. Il Sacco invece ritiene tutte le argille scagliose di età cretacica e disposte in rughe anticlinali tra formazioni più recenti.

Il Principi [5] poi conferma l'opinione di coloro che ritenevano miocenica la formazione marnoso-arenacea e ritiene le argille scagliose ad essa sottostanti o « intruse » da sotto, ma ripete la « piccola anticlinale raddrizzata la cui cerniera è visibile presso le Velle ».

Io ho visto che le « argille scagliose », qui veramante cretaciche, con i soprastanti terreni miocenici di facies costiera, si trovano in ricoprimento sopra alla grande massa della formazione marnoso-arenacea miocenica di mare aperto, con discordanza tettonica sugli strati di questa; e la struttura delle Velle, come di tutto il bordo NE del lembo di ricoprimento, non è che l'orlo raddrizzato e ribaltato dell'ala meridionale della sinclinale di Fragheto, a cui si addossano le « argille scagliose » e che, salvo questo fatto superficiale, non differisce dalle solite linee di dislocazione della « struttura romagnola » [6].

Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo qui descritto ha la sua continuazione diretta, verso NO, nei vari terreni alloctoni che costituiscono il Monte Comero, Montegranelli e il Carnaio: questa parte NO della lunga striscia anomala è oggetto di una Nota successiva [7].

(4) B. Lotti, *Il Monte Fumaiolo e le sue sorgenti.* « Boll. R. Com. geol. it. », Roma 1915 (Sezione CD).

(5) P. Principi, *I terreni terziari dell'alta valle della Marecchia.* « Boll. Soc. geol. it. », vol. XLIV, Roma 1925.

(6) R. Signorini, *Sulla tettonica dell'Appennino Romagnolo.* « Rend. R. Acc. d'Italia », Cl. Sc. fis., mat. e nat., fasc. 8, s. VII, vol. I, 1940.

(7) R. Signorini, *Il lembo di ricoprimento del Monte Comero e del Carnaio nell'Appennino Romagnolo.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Cl. Sc. fis., mat. e nat., fasc. 7-8, ser. 8°, vol. I, 1946.

Geologia. — *Il lembo di ricoprimento del Monte Comero e del Carnaio nell'Appennino Romagnolo.* Nota di R. Signorini, presentata [1] dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

In una Nota precedente [2] ho segnalato una grande striscia di terreni alloctoni, ricoprenti la formazione marnoso-arenacea miocenica dell'Appennino Romagnolo, che da Badia Tedalda va a Santa Sofia, e ne ho descritto la parte SE comprendente gli argilloscisti variegati con calcari marnosi e con pietraforte, di età cretacica, della zona del Poggio Tre Vescovi, e la placca di calcari organogeni e di arenarie molassiche del Miocene medio in facies costiera che forma il caratteristico gruppo del M. Fumaiolo. Questa striscia anomala continua verso NO nella zona del Monte Comero e del Carnaio fin presso Santa Sofia: oggetto della presente Nota è la descrizione di questa parte NO del grande lembo di ricoprimento (vedi, p. 855, la cartina inserita nella Nota citata), da cui si traggono delle precisazioni sulla età e il meccanismo del ricoprimento stesso.

Proseguendo a NO della placca miocenica del Fumaiolo, già descritta, nella striscia di terreni alloctoni si trovano ancora argilloscisti rossi e grigio-verdognoli con strati di calcari e di arenarie, e sopra a questi i lembi di calcari marnosi biancastri, con intercalate marne scistose, del Monte Castelvecchio, del Poggio Biancarda (inclinazione a ESE), della Casetta (inclinazione a SSE), del Poggio Alto (inclinazione 20° a ENE). In quest'ultima località, nella parte occidentale, sotto ai calcari marnosi a fucoidi e dendriti, si trovano calcari con liste e noduli di selce specialmente bianca.

A NO del Poggio Alto e a Casa Amitato compare una nuova formazione: una grande pila di strati di arenarie, spesso puddingoidi, intercalate da marnoscisti, che si erge a costituire il Monte Comero (m. 1371) donde scende verso nord fin presso al Savio. Questa formazione arenacea si ritrova ancora a NO, oltre il Savio, a Montegranelli e al Poggio Carnaio. Essa sulla Carta geologica al 100.000 (foglio Mercato Saraceno) dell'Ufficio Geologico non è distinta dalla formazione marnoso-arenacea miocenica, ma è suddivisa con questa in presunti piani diversi del Miocene. Si tratta invece di tutt'altra cosa. Come l'ho delimitata nella cartina geologica, essa fa parte della striscia di materiale alloctono in ricoprimento.

Da Casa la Croce (m. 1075) ad Alfero e al Passo dell'Incisa la formazione arenacea del Monte Comero e del Poggio le Corsicchie (m. 1215) occupa tutta la larghezza della striscia alloctona (5 Km.). Essa è formata da strati di arenaria grossolana, spesso passante a puddinga, ricca anche di

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(2) R. Signorini, *Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo nell'Appennino Romagnolo.* «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», Cl. Sc. fis. mat. e nat., questo fasc., p. 853.

materiale marnoso: si tratta d'un tipo molassico, in cui la separazione meccanica degli elementi grossi e fini è poco spinta (a differenza della formazione marnoso-arenacea ben classificata); superficialmente si disgrega con facilità e tende a dare blocchi arrotondati e a disfarsi in sabbia grossolana; vi si intercalano zone marnoscistose grigio-verdastre o a straterellamento colorito e strati di calcare marnoso compatto, esternamente gialliccio. Questi strati calcarei giallicci sono frequenti nella parte basale, sia al margine SO verso Casa la Croce, sia al margine NE al Passo dell'Incisa, dove sono accompagnati da strati di breccioline calcaree. Campioni che ho raccolto in ambedue le località presentano al microscopio, in sezioni sottili, *Orthophragmina*, *Alveolina*, *Nummulites*, *Rotalia*, più o meno frammentarie. Altri campioni, di calcare più fine, sono pieni di *Globigerina*. Quei foraminiferi grandi, dell'Eocene medio, sono con ogni probabilità rimaneggiati e rammentano le brecciole nummulitifere alla base del macigno [3]. La formazione di Monte Comero probabilmente appartiene all'Oligocene – Miocene inferiore.

Sopra Casa la Croce essa riposa con strati leggermente pendenti a NE sopra alle argille marnose grigio-cenere con strati sottili arenacei, che affiorano verso SO con andamento pianeggiante, in continuazione di Colorio e di Verghereto e che scendono verso nord fino al Savio a valle di San Piero in Bagno ed oltre: vedremo là meglio che esse costituiscono la parte più alta della formazione marnoso-arenacea, non più antica del Tortoniano.

A NE invece la formazione arenacea molassica, con alla base gli strati giallicci di calcari e breccioline intercalati a scisti bruni, viene a contatto diretto (Alfero-Passo dell'Incisa) con la formazione marnoso-arenacea di NE che si presenta anche qui con strati fortemente inclinati a SO e rovesciati. Si vede benissimo al Castello d'Alfero e a Casa il Monte la piega sinclinale ribaltata a NE con cui gli strati rovesciati passano alla posizione normale e scendono poi regolarmente a NE nella grande sinclinale di Viezza: è la continuazione della linea di dislocazione già vista alle Velle; qui ad Alfero il ribaltamento è più intenso, è una forte piega anticlinale rovesciata sul margine della grande sinclinale tranquilla. A NO, verso Selvapiana e verso S. Piero, il limite della formazione arenacea è meno netto sul declivio franoso che scende al Savio: sotto i detriti arenacei compaiono lembi di argille scagliose e affioramenti di argille grigie della formazione marnoso-arenacea.

Nella valle del Savio, dalla grande piega anticlinale ribaltata a NE che forma la cresta spartiacque dell'Appennino, si passa a una zona più tranquilla della formazione marnoso-arenacea che forma una blanda anticlinale tra Bagno di Romagna e San Piero in Bagno e che poi, lungo la linea Fosso della Castellina, S. Piero in Bagno, S. Paolo, colle del Carnaio, si im-

(3) C. Migliorini, *L'età del macigno dell'Appennino sulla sinistra del Serchio e considerazioni sul rimaneggiamento dei macroforaminiferi.* «Boll. Soc. geol. it.», vol. LXIII Roma 1944.

merge con inclinazione crescente verso NE passando con continuità alla parte più alta della formazione, costituita da argille marnose grigie che sopra San Paolo dànno luogo a tipici grandi calanchi. Queste argille contengono delle conchiglie di molluschi poco abbondanti, e una ricca microfauna che indica un'età tortoniana o comunque un Miocene assai alto (4). In alto verso il Carnaio (a NE del Terzo) si trova un lembo di argille scagliose tipiche: l'esame della microfauna di campioni che ivi ho raccolto ha rivelato la presenza di *Globotruncana*.

È evidente la sovrapposizione per ricoprimento sopra alle argille tortoniane, di queste argille scagliose cretaciche e delle soprastanti arenarie del Poggio Carnaio e di Montegranelli. Queste costituiscono una placca a strati pendenti in generale verso est, salvo al bordo orientale (S. Silvestro–Monsavino) dove tendono a rialzarsi lasciando riapparire di sotto, talora con qualche lembo di argille scagliose interposto, una zona continua di argille marnose grigie, a cui morfologicamente corrisponde una depressione (serie di insellature), tra la formazione arenacea della placca del Poggio Carnaio e la formazione marnoso–arenacea tipica che si estende a NE della linea Valcava – Val di Stenti – valletta tra Fonte Vallanza e Montriolo. Questa linea presenta la solita dislocazione con raddrizzamento e rovesciamento degli strati: il senso di sedimentazione è sempre rivolto verso NE. A Val di Stenti è ben delineata la stretta sinclinale ribaltata a NE che raccorda il ribaltamento con l'andamento normale.

Rilevo qui un carattere importante del sovrascorrimento. Già nella sinclinale sottostante all'anticlinale ribaltata a NE dello spartiacque appenninico ho trovato fenomeni di scollamento e scorrimento della parte più alta (più argillosa) della formazione marnoso–arenacea: lembi di Poggio Castiglione, Castel dell'Alpe, Poggio Alto, e Recettino–Nocicchio (sotto il Passo dei Mandroli). Pure a fenomeni di scivolamento va riferita la stratificazione confusa dell'ampia zona di Verghereto a cui ho accennato sopra. Qui nella zona di San Paolo e del Carnaio, e fin presso Santa Sofia, si passa gradatamente dalla formazione marnoso–arenacea normale alla parte superiore più argillosa in cui compaiono simili fenomeni di scollamento e spostamento, finchè la parte più alta si trova staccata e scorsa avanti: essa viene così a far parte del lembo di ricoprimento come zona basale del materiale alloctono sopraggiunto (lembi di argille scagliose e placca arenacea). Così si trovano le argille marnose grigie sul fronte del lembo, cioè sul margine NE, nella striscia depressa delle insellature, con discordanza tettonica sugli strati della formazione marnoso–arenacea di NE (per lo più rovesciati).

(4) R. Signorini, *Sull'età della formazione marnoso–arenacea umbro–romagnola*, e E. Di Napoli, *Esame paleontologico di alcuni campioni della formazione marnoso–arenacea umbro–romagnola* in « Boll. Soc. geol. it. », vol. LXII, Roma 1943.

Da queste osservazioni risulta dunque che, una volta terminata la grande sedimentazione marnoso-arenacea, nel Miocene Superiore, col sollevamento che dà un dislivello, la parte più alta della pila sedimentaria comincia a staccarsi, a muoversi per azione della gravità, a scivolare sul pendio; se da tergo giungono masse di materiale alloctono, queste intensificano lo scivolamento. La zona superficiale del basamento marnoso-arenaceo su cui avviene lo scorrimento può anche venir sminuzzata dando luogo ad un impasto argilloso a cui gli strati marnoso-arenacei fanno passaggio indipendentemente dal piano di stratificazione.

La placca arenacea di Montegranelli e del Carnaio ha una disposizione sinclinaloide con asse portato verso il margine NE e si presenta tutta sconquassata, a larghi blocchi sconnessi che lasciano apparire, anche nell'interno dell'area della placca stessa, lembi di argille scagliose (uno fra Trino e San Silvestro; un altro ad est delle Trappole) e anche un lembo delle argille marnose grigie (zona Casa Reggiale-Casa Poggiolo). La formazione arenacea è analoga a quella descritta sopra della placca di Monte Comero, e ben distinta anche litologicamente dalla formazione marnoso-arenacea romagnola. Nel fosso tra Montegranelli e San Paolo, ad occidente delle Tre Case, si trovano grandi massi di brecciole calcaree piene di grosse nummuliti lutetiane: in sezioni sottili vi si vedono *Nummulites* e *Orthophragmina* più o meno in frammenti, *Globigerina*, *Rotalia*. Sono brecciole analoghe a quelle che ho detto trovarsi alla base delle arenarie di Monte Comero e devono provenire dalla base delle arenarie di Montegranelli.

Da tutto questo risulta dunque che le argille marnose dei calanchi di San Paolo, che nella Carta geologica al 100.000 del R. Ufficio Geologico e nelle « Relazioni al rilevamento » del Principi sono attribuite al Langhiano, appartengono invece alla sommità della formazione marnoso-arenacea di età tortoniana; le arenarie di Montegranelli che vi sono considerate come regolarmente soprastanti e riferite al Tortoniano, sono indubbiamente più antiche, probabilmente dell'Oligocene-Miocene inferiore, sovrascorse in ricoprimento; i lembi di argille scagliose, ritenuti intrusioni da orizzonti sottostanti, fanno parte del ricoprimento e provengono dalla regione tirrenica.

Dal Poggio Carnaio la formazione arenacea continua verso NO sul versante del Bidente fino a Casa Pescina; scendendo più oltre affiorano le sottostanti argille scagliose rossiccie sparse di masse franate della formazione arenacea, fino ai Campacci e a Sasseto; poi, scendendo ancora verso Santa Sofia, la striscia anomala è costituita solo dalle argille grigie tortoniane e con esse ha termine sotto Raggio col sollevarsi della regolare formazione marnoso-arenacea sottostante. Analogamente ai dintorni di San Paolo e conforme all'interpretazione del sovrascorrimento esposta sopra, al margine SO della zona anomala, scendendo verso il Bidente, gli strati della formazione marnoso-arenacea sono costantemente inclinati a NE e passano gradualmente, sia verso l'alto, sia anche lateralmente, alle argille

marnose grigie, talchè queste fanno realmente parte della zona anomala, del ricoprimento, e come tali risaltano con un paesaggio diverso dalla circostante uniformità dell'Appennino Romagnolo.

Al bordo NE gli strati marnoso-arenacei assumono forti pendenze a SO immergendosi sotto alla zona anomala: nel fosso sotto Suviana ho constatato che gli strati non sono rovesciati e hanno un'inclinazione di 40° verso SSO. Poco più ad ovest, al passaggio tra questi strati marnoso-arenacei e le soprastanti argille grigie franose e calancate si trova, sopra al cimitero di Raggio, un masso zeppo di grosse *Lucina*, come ho trovato anche in altre località alla sommità della formazione marnoso-arenacea romagnola.

In questo tratto estremo il lembo di ricoprimento si trova dunque accolto entro una sinclinale della formazione marnoso-arenacea, il cui asse si solleva verso Santa Sofia: non si ritrova oltre il Bidente. Vi si trova invece una linea di dislocazione che dalla Collina di Pondo passa per Santa Sofia, il monte la Crocetta e il monte Prignolaia, in piena uniforme formazione marnoso-arenacea, marcata dal raddrizzamento degli strati, anche con ribaltamento a NE, secondo il solito stile delle anticlinali romagnole: essa separa la tranquilla sinclinale di Isola (sul Bidente), Cabelli, Monte della Fratta (a SO), dalla tranquillissima zona, a strati quasi pianeggianti, di Galeata (a NE).

Così ha termine presso Santa Sofia questa lunga striscia di terreni anomali, tanto diversi dall'uniforme formazione marnoso-arenacea romagnola in mezzo alla quale essa si insinua, a partire dalla valle del Marecchia per una lunghezza di 33 Km., con direzione longitudinale SE-NO (parallela alle linee tettoniche). Essa, riassumendo, è formata da argille marnose grigie tortoniane della sommità della formazione marnoso-arenacea, le quali hanno cominciato gradatamente a muoversi, a scollarsi, a scivolare; e da materiale alloctono arrivato sopra da aree più interne, con movimento di scivolamento da SO a NE: sono argilloscisti rossi e variegati con strati di calcari fratturati e di pietraforte, di età cretacica, ora in pacchi stratificati, ora divenuti caotici (argille scagliose); placche di calcari marnosi a fucoidi; grandi slitte di una formazione arenacea probabilmente dell'Oligocene-Miocene inferiore (Monte Comero e Montegranelli-Carnaio); infine il lembo di una facies alloctona, costiera, del Miocene medio (Monte Fumaiolo) che pure deve avere una provenienza da SO. Tutto questo materiale riposa sopra la grande massa dei sedimenti miocenici marnoso-arenacei ed è un residuo di un vasto ricoprimento avvenuto principalmente nel Miocene superiore. Nell'ultimo tratto a NO, dove la striscia anomala si restringe, si vedono gli strati marnoso-arenacei di ambedue i margini immergersi chiaramente sotto al lembo di ricoprimento; mentre nella parte più larga a SE questo rimane in discordanza tettonica sopra gli strati marnoso-arenacei diversamente piegati.

Biologia. — *Trapianto dell'occhio tra embrioni e larve irradiati con raggi X e larve normali* [1]. Nota di NORA FRONTALI, presentata [2] dal Socio F. SILVESTRI.

Le esperienze di cui tratta questa Nota riguardano l'azione dei raggi X in embrioni e larve di Anfibi, studiata col metodo dei trapianti, che permette di osservare l'influenza dei raggi X nei vari organi, al di là del limite di sopravvivenza dell'intero organismo e di distinguere l'azione diretta dei raggi X da quella indiretta dell'ambiente irradiato.

Queste ricerche furono eseguite per consiglio e sotto la guida del dott. T. Perri che in questo Istituto si sta occupando dal 1944 [3] della azione dei raggi X su embrioni e larve di Anfibi usando ampiamente la tecnica dei trapianti. L. Mistruzzi (1944) [4] ha eseguito in questo Istituto esperienze di parabiosi tra un embrione irradiato e uno normale ottenendo per alcune dosi (letali per embrioni singoli) che l'intera coppia vive a lungo e può perfino giungere alla metamorfosi.

Le presenti ricerche riguardano il comportamento dell'occhio sia di embrione sia di larva fortemente irradiata, trapiantato nella cavità orbitaria di larva normale. I trapianti da embrione su larva furono eseguiti particolarmente per saggiare le differenti condizioni di sperimentazione rispetto ai trapianti di embrione su embrione, avendosi nel primo caso migliori condizioni spaziali. I trapianti di larva su larva hanno lo scopo di mettere in evidenza l'azione che i raggi X esercitano sull'intero organismo larvale in confronto all'azione sull'intero organismo embrionale, data la profonda diversità dei due stadi.

Gli esperimenti furono eseguiti su embrioni e larve di *Rana esculenta*. Gli embrioni allo stadio di bottone codale appena accennato, liberati dai loro involucri e posti in una vaschetta di vetro contenente uno strato di acqua comune di 4 mm, vengono irradiati con tensione 40.000 volt, intensità 3 milliampere, senza filtro, distanza dall'anticatodo cm. 21,5 per 30 minuti primi. Le larve, al primo inizio dello stadio larvale, vengono irradiate alle stesse condizioni ma per 60′ e alla d. f. di cm. 10,5.

Il trapianto viene eseguito asportando con la massima delicatezza l'occhio del donatore e collocandolo nella cavità orbitaria della larva ospitante, a cui è stato asportato l'occhio con il foglietto interno della cornea. Con tale tecnica il trapianto viene a trovarsi in ottime condizioni spaziali e inoltre, per la trasparenza del foglietto esterno della cornea, è molto facilitata

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Roma.
(2) Nella seduta del 15 giugno 1946.
(3) Nota I in « Acta », vol. 8, n. 9, 1945; Nota II ivi, vol. 9, n. 19, 1946.
(4) « Acta », vol. 8, n. 12, 1945.

l'osservazione al binoculare del comportamento dell'occhio. I trapianti furono eseguiti nel luglio e nell'agosto 1945.

È stato esaminato dapprima il comportamento dell'occhio di embrione irradiato trapiantato su larva normale eseguendo l'operazione poco prima della morte dell'embrione. Gli embrioni, irradiati con la tecnica suaccennata per 30', muoiono costantemente con notevole idrope dopo un numero di giorni che varia con la temperatura; quando vengono giudicati prossimi a morire, viene eseguito il trapianto dell'occhio su larva normale lasciando

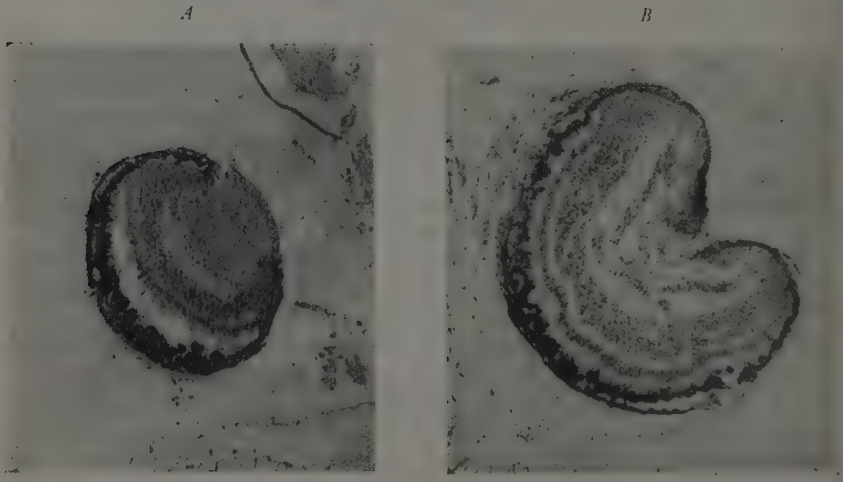


Fig. 1. – *Rana esculenta.*

Trapianto su larva dei due occhi di un embrione irradiato per 30' (d. f. cm. 21,5) 7 giorni prima. *A*): sviluppo raggiunto da un occhio dopo 4 giorni. *B*): l'altro occhio dopo 20 giorni (il cristallino è compreso in altre sezioni). Uguale ingr., di 110 diam.

alcuni embrioni irradiati per controllo (che sono morti infatti il giorno stesso o il seguente). Il donatore viene fissato per poter confrontare ogni occhio trapiantato con l'altro occhio al momento del trapianto. In qualche caso trapiantavo i due occhi su due larve fissandone una dopo alcuni giorni, l'altra dopo un tempo molto più lungo; in tal modo si ha pure implicitamente un controllo diretto della tecnica usata.

Ecco in breve i risultati: in alcuni casi gli occhi trapiantati dopo un certo numero di giorni vanno in distruzione e sono assorbiti; qualche volta l'occhio prima si accresce e poi si distrugge. In altri numerosi casi invece, di cui 3 fissati dopo un mese e 2 dopo 2 mesi, all'esame istologico si osserva che l'occhio si è accresciuto in modo notevolissimo dopo il trapianto. In generale gli strati retinici sono ben differenziati ed in buone condizioni; quasi sempre manca la cavità del corpo vitreo. Le maggiori

irregolarità sono quelle del cristallino che si accresce più della retina ed è situato talvolta fuori del foro pupillare, di forma spesso irregolare con epitelio in buone condizioni, visibili le fibre costitutive che sono ancora nucleate. Rispetto all'occhio normale quello trapiantato è sempre più piccolo, ma questo può essere effetto sia dell'irradiazione che della tecnica adoperata.

In due casi ho trapiantato i due occhi di un embrione irradiato, ognuno su una larva diversa. Dopo 4 - rispettivamente 6 giorni, essendosi i due occhi di ciascuna coppia sviluppati egualmente bene, ho fissato una larva lasciando vivere l'altra in un caso per 20 giorni nell'altro per 2 mesi dopo il trapianto. Al controllo istologico l'occhio della seconda larva risulta enormemente accresciuto e più differenziato rispetto alla prima (v. fig. 1). In un altro caso l'embrione donatore era stato irradiato per 5′ (d. f. cm. 21,5) allo stadio di 4 blastomeri; 10 giorni dopo, poco prima della morte, era stato eseguito il trapianto; fissata la larva ospitante 5 giorni dopo, l'occhio trapiantato era meglio differenziato che al momento del trapianto.

T. Perri aveva notato che l'occhio trapiantato subito dopo l'irradiazione con una certa dose, sopravviveva (in un caso fino ad un mese e mezzo dopo l'operazione) al donatore, che moriva invece con notevole idrope alcuni giorni dopo l'irradiazione, mentre per forti dosi l'occhio andava in distruzione.

Le presenti esperienze confermano questi risultati e dimostrano inoltre che all'occhio non ha nociuto l'esser rimasto nel proprio ambiente irradiato fino in prossimità della morte dell'intero organismo, esso infatti presenta ampie capacità vitali come nel trapianto eseguito subito dopo l'irradiazione.

Connesse con le precedenti sono le ricerche sull'azione che l'organismo irradiato ha sulla vescicola ottica primaria normale che viene trapiantata su di esso. T. Perri aveva notato che la vescicola ottica normale subisce in ambiente fortemente irradiato solo un lieve rallentamento di sviluppo. Confermano questi risultati esperienze di trapianto su larva normale di un occhio di embrione normale che, trapiantato su embrione fortemente irradiato (50′ d. f. cm. 21,5) vi era rimasto fino a poco prima che questo morisse. Questi occhi, ritrapiantati su larva, continuano a svilupparsi come perfettamente normali e anche al controllo istologico non presentano alterazioni. Ciò ribadisce che la vescicola ottica primaria di embrione normale trapiantata su embrione fortemente irradiato, non viene dunque per nulla danneggiata, e conserva le normali capacità vitali.

Un'altra serie di esperienze è quella che riguarda l'azione dei raggi X sulle larve di *Rana esculenta*. È da notare che l'inizio della vita larvale coincide (Cotronei) con lo stabilirsi delle correlazioni nervose ed endocrine e con l'assunzione di alimenti esterni. Nella vita larvale vigono dunque condizioni fortemente diverse che nella vita embrionale onde l'opportunità

di indagare come agiscano i raggi X in questo nuovo stadio sia sui vari organi sia sull'organismo intero.

Le larve, irradiate per 60′ (d. f. cm. 10,5), rimangono nettamente indietro nello sviluppo e muoiono vari giorni dopo; trapiantando su larva normale un occhio di larva così irradiata i trapianti quasi sempre si sviluppano e si accrescono regolarmente sopravvivendo ai donatori, anche nei casi seguiti più a lungo (50 giorni dopo il trapianto; erano già abbastanza sviluppati gli arti posteriori) senza mai dare segni di degenerazione (v. fig. 2).

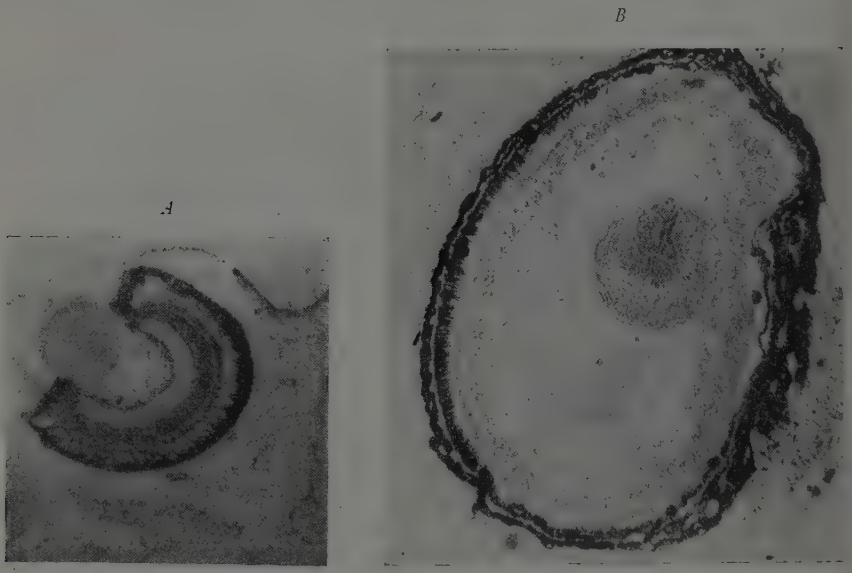


Fig. 2. – *Rana esculenta*

Trapianto di occhio di larva giovanissima irradiata il giorno precedente per 60′ (d. f. cm. 10,5). *A*): occhio al momento del trapianto. *B*): sviluppo raggiunto dall'altro occhio dopo 50 giorni dal trapianto. Uguale ingr., di 110 diam.

All'esame istologico l'occhio trapiantato si presenta anche qui enormemente accresciuto rispetto al donatore, gli stati retinici ben differenziati, il cristallino più piccolo del normale, situato all'interno della cavità del corpo vitreo: esso mostra dunque di aver sentito gli effetti dell'irradiazione più che le altre parti dell'occhio, mentre abbiamo visto che gli occhi irradiati allo stadio di vescicola ottica primaria presentano un cristallino accresciuto più che gli strati retinici.

Come negli embrioni dunque anche nelle larve l'occhio presenta una resistenza ai raggi X nettamente maggiore dell'intero organismo; la morte di questo impedisce all'occhio di esplicare tutte le capacità rimaste in esso dopo l'irradiazione.

Concludendo: 1° L'occhio di un embrione irradiato con una certa dose (letale) trapiantato poco prima che l'embrione muoia su larva normale, continua ad accrescersi e a svilupparsi sopravvivendo almeno per molto tempo al donatore.

2° Similmente l'occhio di larva irradiata, trapiantato su larva normale, continua ad accrescersi e a svilupparsi anche dopo la morte del donatore.

Biologia. — *La costituzione zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli* [1]. Nota [2] di G. Cotronei e L. Urbani-Mistruzzi, presentata dal Socio F. Silvestri.

Le ricerche sulla costituzione zoologica degli Anfibi, indagata con esperienze di trapianti ed espianti, hanno da molti anni occupata l'attività di questo Istituto [3]. Ai procedimenti intesi a saggiare il comportamento di determinati abbozzi embrionali messi a sviluppare in ambiente biologico costituito da organismi sistematicamente lontani, come nelle esperienze finora espletate fra Anuri ed Urodeli, abbiamo creduto opportuno di aggiungere le presenti, qui brevemente comunicate, ottenute con il metodo della parabiosi.

Tra Anfibi di specie di notevole distanza sistematica, esperienze di parabiosi furono già compiute da Born [4], ma i risultati positivi furono scarsi, tra *Bombinator* e *Pelobates* da una parte e *Rana esculenta* dall'altra. Solo in un caso Born tra *Bombinator* e *Rana* ottenne una sopravvivenza di 22 giorni al termine dei quali il *Bombinator* presentava segni di sofferenza e di regressione della coda.

Esperienze di parabiosi tra Anuri di specie diversa (Bufonidi e Ranidi e tra Anuri e Urodeli (*Rana esculenta* e *Triton taeniatus*) furono iniziate nel 1939 da Reverberi [5] con risultati che in linea generale confermano la incompatibilità delle forme adoperate già messa in evidenza con il metodo dei trapianti. Teniamo a rilevare che Reverberi tra Rana e Tritone notò, nei primi giorni dopo l'operazione, sviluppo regolare nei due parabionti, ma già al terzo giorno il Tritone presentava accrescimento ritardato ed inizio dei fenomeni di degenerazione che portavano al disfacimento dell'embrione. Reverberi conclude che « i tessuti del Tritone non riescono ad organizzarsi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1946.

(3) Per i lavori dal 1929 in poi consultare questo periodico: vol. X e seguenti.

(4) Born G., *Ueber Verwachsungsversuche mit Amphibienlarven.* « Roux Arch. », 4 (1897).

(5) Reverberi G., *Il comportamento dell'abbozzo caudale degli Anfibi nei trapianti etero e xenoplastici.* « Arch. Zool. Ital. », XXVI, p. 249 (1939).

su Rana o che, al più, vi è solo possibilità di una qualche differenziazione nei primi giorni in cui fu operato il trapianto ».

Questi i dati di cui siamo a conoscenza; aggiungiamo che Reverberi mette in risalto le difficoltà incontrate in questo genere di esperienze che gli impedirono « di poter dedurre con sicurezza una conclusione ». Noi pure abbiamo incontrato le stesse difficoltà dovute soprattutto a cause meccaniche, che portano alla separazione dei parabionti, alle quali abbiamo cercato parzialmente di ovviare adoperando soluzioni molto diluite di narcotico (alcool triclorobutilico 1/5.000, 1/8.000)

Nelle presenti ricerche l'impostazione sperimentale è stata di adoperare quel materiale che già in base alle esperienze dei trapianti di *Triton* su *Hyla* ci aveva dato risultati di compatibilità [6]. Ci è sembrata questa la via migliore per poter ottenere dati positivi nelle nuove condizioni sperimentali che raffrontano il reciproco comportamento di due individualità complete di Anuri ed Urodeli unite in parabiosi. Le esperienze sono state eseguite saldando uno di fianco all'altro embrioni di *Hyla arborea* e *Triton taeniatus* allo stadio di bottone codale e di *Rana esculenta* e *Triton taeniatus* allo stesso stadio. Abbiamo così avuto la possibilità di confrontare quelle forme che già le nostre antiche ricerche (Cotronei e allievi) avevano mostrato nei trapianti compatibilità (*Triton* su *Hyla*) ed incompatibilità (*Triton* su *Rana esculenta*). Abbiamo eseguito anche esperienze di parabiosi tra *Axolotl* e *Hyla* che promettevano risultati positivi, ma che, per deficienza di materiale, non hanno permesso di andare oltre nell'indagine.

I risultati positivi ottenuti sono su tre coppie di parabionti (*Hyla–Triton*). La concordanza dei risultati, pur su un numero così limitato di casi, non consente dubbi su quanto volevamo verificare, anche se una gran quantità di operazioni è andata perduta per un complesso di condizioni sfavorevoli e per la delicatezza delle operazioni stesse.

Abbiamo fissato le tre coppie in tempi successivi quando era stata raggiunta la vita larvale e gli esemplari di *Hyla* avevano mostrato già di nutrirsi da alcuni giorni. La durata delle esperienze dal giorno dell'operazione, è stata di 11, 12 e 17 giorni durante il mese di maggio, quando la temperatura ambiente era notevolmente elevata.

Non abbiamo voluto protrarre l'esperienza sulle coppie viventi, come sarebbe stato nostro desiderio, per la preoccupazione di perdere il materiale che volevamo sottoporre a controllo istologico, materiale che per noi si presentava troppo prezioso, dato che si tratta dei primi risultati positivi di parabiosi tra Anuri ed Urodeli.

(6) G. Cotronei e A. Spirito, *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri ed Urodeli.* Nota III. Questo periodico vol. XI–1930; *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri ed Urodeli.* Nota VII. Questo periodico, vol. XIV–1931; *Fenomeni di accrescimento embrionale e larvale studiati nei trapianti tra Anuri ed Urodeli.* Questo periodico, vol. XXIII–1936.

Normale è stato il differenziamento larvale dei parabionti, più avanzato nella terza coppia che è stata fissata per ultima, come abbiamo potuto desumere dallo sviluppo dell'arto anteriore del Tritone che presentava l'articolazione tra stilopodio e zeugopodio (gomito) e l'accenno delle dita nell'autopodio.

È risultato dunque che, per la durata delle nostre esperienze, a parte alcuni disturbi di carattere generale che si presentano frequentemente anche nelle parabiosi fra animali della stessa specie (idrope), la lontananza sistematica tra Anuri ed Urodeli non ha impedito nè lo sviluppo, nè il differenziamento istologico ed organologico dei due parabionti, dimostrando così che la convivenza umorale, sempre nel periodo di esperimento considerato, non porta ad azioni, almeno rilevabili, di reciproco danno.

L'unione tra i due parabionti è stata molto intima. Specialmente interessante è la fusione fra il tubo dirigente di *Hyla* e quello di *Triton*, tanto che abbiamo potuto riscontrare il passaggio dell'alimento (tuorlo d'uovo cotto) introdotto dall'*Hyla* nell'intestino del Tritone (in due casi con certezza). L'esame istologico ci ha dato la documentazione di questa unione tra le anse intestinali mostrandone la continuazione diretta dell'epitelio nei due parabionti. È da rilevare che l'intestino dell'*Hyla* si è sempre presentato fortemente dilatato. Si è ottenuta quindi una perfetta fusione anatomica dimostrante l'attrazione tra tessuti ed organi eguali, già messa in evidenza dal Born nel 1897 tra diverse forme di Anuri e tra Anuri ed Urodeli da Cotronei e Spirito (1930-31), per la prima volta, nelle fusioni oculari (7). In una coppia si nota una propaggine della muscolatura dorsale del Tritone verso la muscolatura omologa dell'*Hyla* per quanto rimanga, come era da prevedersi, un sepimento connettivale di separazione tra esse.

Risultati molto differenti abbiamo ottenuto nelle parabiosi tra *Triton taeniatus* e *Rana esculenta*; essi si collegano a quelli di Reverberi: dopo pochi giorni dall'operazione, in rapporto alla temperatura ambiente, l'embrione di Tritone va in distruzione.

L'azione sfavorevole che risultava dalle nostre antiche esperienze di trapianti di *Triton* su *Rana* è stata così confermata anche nelle parabiosi tra queste due forme.

In conclusione assai interessanti sono state le esperienze di parabiosi tra *Triton* e *Hyla*. Avevamo messo in evidenza da molti anni non soltanto la possibilità di differenziazione dei trapianti di *Triton* su *Hyla* ma anche una notevole possibilità di accrescimento. Si trattava però sempre di pezzi limitati di un organismo trapiantati su un individuo completo: era logico impostare esperimenti di parabiosi tra Anuri e Urodeli partendo, per i precedenti noti, da queste due forme. Ma come avrebbe reagito una individualità completa di *Triton*, rispetto all'altra, pure completa, di *Hyla*?

(7) G. Cotronei e A. Spirito, loc. cit.

Era questo il quesito sperimentale non ancora cimentato che attendeva la risposta. I risultati sono stati positivi nel senso di una notevole possibilità di « vita comune » anche oltre il limite del differenziamento embrionale ed organologico. Si è pure confermato tra le due forme (*Hyla* e *Triton*) l'affinità tra organi e tessuti simili, tuttavia i dati raccolti non ci dicono ancora il limite massimo di tempo al quale può arrivare questa « vita comune ».

È prevedibile che ci sarà, in un tempo successivo della vita larvale, la fine di questo equilibrio biologico (biochimico) tenendo conto delle esperienze di trapianti di *Hyla* su *Triton*, ma solo l'esperimento potrà dare la risposta decisiva.

Biologia (Patologia vegetale). — *Sulle cause dei cedimenti nella pavimentazione del Palazzo Corsini, sede dell'Accademia Nazionale dei Lincei.* Nota di G. Goidànich, presentata [1] dal Socio D. De Blasi.

I frequentatori della biblioteca dell'Accademia Nazionale dei Lincei situata nel settecentesco, venerando Palazzo Corsini avranno notato i lavori che sono in corso, specialmente nelle sale più prossime all'ingresso per il pubblico, al fine di restaurare la pavimentazione nella quale negli ultimi tempi si erano manifestati sintomi di cedimento piuttosto gravi, sì da indurre all'alleggerimento delle scaffalature e ad impedire l'accesso degli studiosi a questi locali.

L'inconveniente è provocato da un grave, profondo processo di deterioramento a cui sono andate soggette le intelaiature in legno che sorreggono il piano di pavimentazione in conseguenza dell'attacco di un basidiomicete lignivoro.

Il fatto in sé non rivestirebbe alcunché di notevole – se si prescinde dal valore materiale ed affettivo dell'opera d'arte che ne viene danneggiata – né apparirebbe degno di particolare menzione, noto essendo come di frequente il legname messo in opera subisca, se non opportunamente trattato con antisettici, alterazioni di natura microbiologica, particolarmente fungina, quale è appunto quella di cui si parla.

Nel corso dell'esame – cui venni invitato dalla Cancelleria dell'Accademia – del materiale e degli ambienti in cui l'alterazione si è manifestata, ò avuto però occasione di rilevare alcune particolarità relative al modo di insediarsi e di diffondersi dell'attacco fungino agli eccezionali fattori fisici che l'ànno condizionato ed ànno influito su tutto l'andamento del processo alterativo, particolarità che costituiscono elementi utili – e meritevoli quindi di essere resi noti – per una più precisa comprensione e conoscenza di questo capitolo della patologia forestale e di micologia applicata che à sì grande importanza nel settore edilizio e architettonico.

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

Speciale interesse avranno infine alcune osservazioni e relative considerazioni per le direttive da prendersi nelle opere di restauro o di rifacimento di attrezzature legnose avariate in edifici artistici di cui è così ricca l'Italia ed in cui per ovvie ragioni non possono mutarsi le originali particolarità costruttive, com'è il caso di Palazzo Corsini.

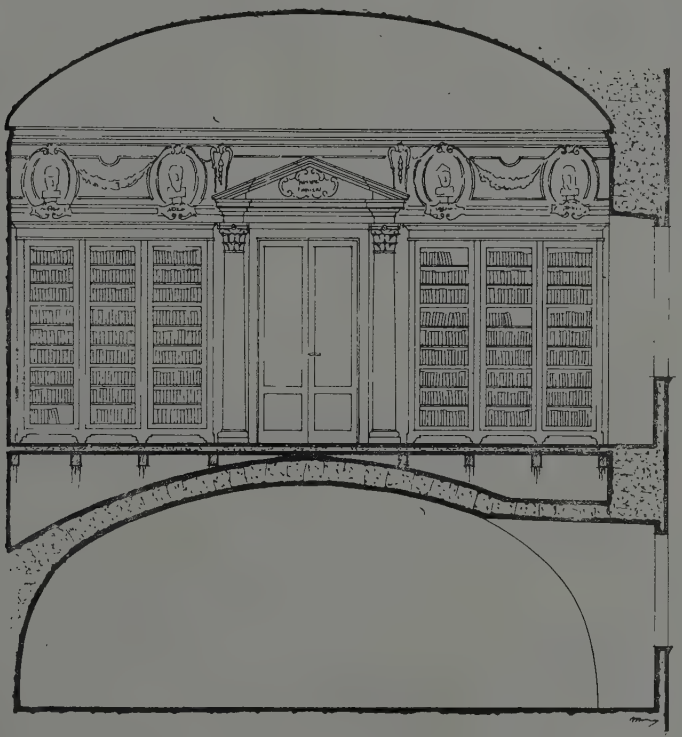


Fig. 1. – Spaccato in corrispondenza di un locale del piano della biblioteca che mette in evidenza le particolarità costruttive descritte nel testo.
(*Disegno dell'ing. G. Massari*).

La figura 1 riproduce in spaccato uno degli ambienti della biblioteca e precisamente quello in cui si è avuto il più accentuato cedimento che nella pianta (v. fig. 2) è contrassegnato con una tratteggiatura più fitta [2].

Le particolarità costruttive risultano evidenti dai disegni senza richiedere molte parole esplicative: la pavimentazione, in mattonato, posa su di uno

(2) Queste rappresentazioni (figg. 1 e 2) sono state approntate dall'ing. Giovanni Massari consulente tecnico degli uffici dell'Accademia, al quale si deve l'individuazione e la segnalazione del deterioramento che qui si descrive e che à gentilmente messo a disposizione la sua competenza ed esperienza al fine di interpretare i rapporti intercorrenti fra questo fenomeno e le particolarità costruttive dell'edificio.

strato di malta, gettata a sua volta sopra un'intelaiatura costituita di tronchi squadrati, di circa 12 cm. di lato, disposti nel senso longitudinale ed uniti trasversalmente da assi larghe 30 cm. e spesse 2 cm.(3). È questo un tipo di costruzione piuttosto rara a trovarsi in edifici anche antichi, perchè dispendiosa ed anche di non semplice realizzazione tecnica; ad essa l'architetto progettatore(4) deve essere ricorso per il criterio di non far gravare sulla vòlta sottostante, forse fragile, un eccessivo peso quale sarebbe risultato se si fosse servito del metodo usuale di ottenere il piano di pavimentazione riempiendo con laterizi e calcinacci i vuoti laterali sopra i fianchi della vòlta.

Dato il sistema ora accennato di costruzione, il legno, appena terminata la gettata della malta, base del mattonato, è venuto a trovarsi racchiuso in compartimenti perfettamente stagni, in quanto nella muratura dei quattro lati, anche in corrispondenza dei vuoti delle porte sovrastanti, non esiste alcuna apertura che metta in comunicazione l'atmosfera fra vano e vano sottostante al pavimento di ciascun ambiente. Per quanto risulti, a memoria, e a quanto si può giudicare dall'esame del fabbricato, nessun intervento posteriore è venuto a modificare tale stato di cose almeno nelle parti interessate dall'alterazione; al contrario nei vani corrispondenti agli ambienti che dànno sulla facciata anteriore e posteriore sono stati praticati – non si sa se all'atto della costruzione o più tardi – bocchette di aereazione(5) e negli ambienti sulla sinistra di quelli tratteggiati (ved. fig. 2) si è avuto, poco prima della fine dell'800, il completo rifacimento della pavimentazione con sostituzione della intelaiatura di legno con una in ferro; non si sa le ragioni che ànno promosso questo lavoro. In ogni caso è escluso, per controllo diretto dell'ing. Massari, che nell'occasione si siano determinate, anche provvisoriamente, aperture sulle pareti dei compartimenti stagni che oggigiorno si esaminano.

Di fronte a tali condizioni ambientali la domanda che ci si pone è: « Come è avvenuta e da dove proviene l'infezione del legno e quali sono i fattori che l'ànno mantenuta in vita in modo che essa portasse alle dannose conseguenze che attualmente e solo attualmente constatiamo? ».

Alla prima parte della domanda la risposta è semplice: nel'600 non era in uso trattamento sterilizzante del legno di sorta, sì che il materiale è stato messo in opera quasi certamente infetto perchè albergante i germi del basidiomicete(6). Non vi è dubbio però che anche a quei tempi il

(3) In ogni punto ove sono stati compiuti saggi, il legno adoperato per i tronchi e per le tavole è castagno.

(4) L'architetto G. Fuga, noto anche quale ideatore del palazzo della Consulta in Roma.

(5) E in questi ambienti, come si vede dalla pianta riprodotta in fig. 2, non si à la minima traccia di alterazione.

(6) Sulla persistenza della vitalità nei germi dei basidiomiceti lignivori, e del *Merulius lacrymans* in specie, i pareri sono discordi. Alcuni AA. dànno, per quest'ultimi, una

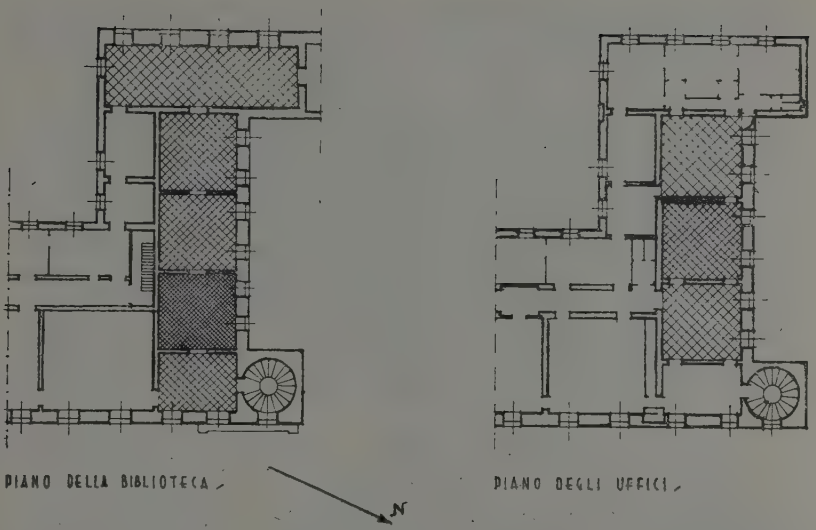


Fig. 2. – Pianta del piano della biblioteca e degli uffici in cui con tratteggiatura incrociata più o meno fitta è indicata la diversa intensità della alterazione. Nei locali di sinistra, non tratteggiati, l'originale travatura in legno è stata sostituita con putrelle di ferro.

legno era scelto ben secco e stagionato, dato che antichissima è la nozione che esso va altrimenti soggetto a deterioramento, in particolar modo ad opera dei funghi. Quindi è ovvio pensare che vi siano state condizioni tali che abbiano favorito una imbibizione del legno di acqua successivamente alla sua messa in opera e a mantenervela un tempo sufficientemente lungo a che il fungo potesse prender piede, diffondersi ed agire deleteriamente. Tali condizioni sono appunto quelle correlate alle particolarità costruttive, veramente eccezionali, e – dal nostro punto di vista – alquanto difettose dell'edificio.

Il legno infatti per la mancata istallazione di aperture di aereazione è venuto a trovarsi improvvisamente immerso in ambiente saturo di umidità derivante dalla muratura ancor fresca che, nel caso specifico, era ancor più dell'usuale ricca di acqua, in quanto per essa sono stati utilizzati laterizi di ricupero del demolito, vicino Palazzo dei Riari, la natura frammentaria dei quali laterizi à richiesto l'impiego di un quantitativo di malta assai su-

longevità di parecchi anni che è invece negata da altri, che la giudicano di molto minore durata (Cfr.: FINDLAY W. P. K., *The germination of the spores of « Merulis lacrymans »* (Wulf) Fr. « Trans. Brit. myc. soc. », *17*, 1933, pp. 335–336). Nel caso in istudio, però, i germi si vengono a trovare in condizioni favorevoli di sviluppo, si vedrà, entro limiti di tempo molto ristretti.

periore al normale. In tale maniera il legno à acquistato immediatamente lo stato di umidità minima necessaria (circa il 20-30% del peso secco) a permettere la vita del fungo (7). Anzi, è da ritenere che per un certo periodo esso abbia goduto di condizioni quasi o del tutto ottimali di sviluppo (8): a ciò fa pensare la rigogliosa vegetazione fungosa che si è differenziata in una buona parte della superficie del legno infetto, pendente in forma di lunghe, candide stalattiti che conferisce quel fantasmagorico aspetto ai vani sotterranei (v. fig. 3) e da cui viene specialmente attirata l'attenzione dell'incuriosito visitatore che si affacci ai saggi praticati nella pavimentazione dal Servizio restauri (v. fig. 4). Simili vegetazioni fanno invero pensare ad un periodo di euforia vegetativa, chè altrimenti non sarebbe ammissibile un tale dispendio di materiale plastico per strutture vegetative prive di funzione riproduttiva o anche semplicemente alimentare.

Ciò che deve avere influito sul perdurare delle condizioni di umidità necessarie alla vita del fungo quel periodo sufficientemente lungo a che esso con la sua opera disgregatrice producesse danni tali da infirmare la capacità di resistenza al carico dell'intelaiatura, e quindi la integrità della pavimentazione, è senza dubbio l'esposizione. I deterioramenti più gravi si ànno infatti nel piano inferiore, quello della biblioteca, e negli ambienti situati sulla destra della facciata (v. fig. 2) che, parte per l'orientazione, parte per la copertura delle costruzioni vicine non sono mai raggiunti dai raggi solari. È indubitato comunque che ad un certo momento il microrganismo abbia incontrato in funzione dell'umidità (la temperatura, dato il clima romano, sia nei mesi più caldi che più freddi rimane nei limiti della sopportabilità) condizioni di vita precarie; avrà allora abbandonato la produzione delle vegetazioni pendule e sarà ricorso a tutti gli artifizi di cui notoriamente dispongono simili basidiomiceti per procurarsi il fabbisogno di acqua in caso di necessità. Sono tali artifici - che costituiscono uno dei mirabili esempi degli adattamenti di cui sono capaci certi vegetali inferiori e che dànno ragione di inesplicabili casi di deterioramento di materiale legnoso sistemato in condizioni rispetto all'umidità apparentemente ottimali – principalmente due: l'impiego di un'enzima idrolizzante che fornisce acqua come prodotto di disintegrazione dei costituenti legnosi (9), ed il trasporto diretto di questa mediante cordoni rizomorfici (v. fig. 4 A) che assumono una struttura adatta per tali funzioni e che possono fare affluire le residue riserve idriche da parti

(7) Cfr. l'ampia letteratura citata sull'argomento in: E. E. Hubert, *An outline of forest pathology*. New York, J. Wiley and Sons, 1931, VIII+543 pp.; J. S. Boyce, *Forest Pathology*. New York, McGraw-Hill Book Comp., 1938, X+600 pp.

(8) C. Wehmer, *Versuche ueber die Bedingungen der Holz-Ansteckung und Zersetzung durch Merulius*. «Myc. Ztbl.», *3*, 1914, pp. 321-332; *4*, 1914, pp. 241-252; 287-299.

(9) W. G. Campbell, *A chemical approach to the study of wood preservation* «Forestry», *6*, 1932, pp. 302-306; V. V. Miller, *Points on the biology and diagnosis of house fungi*. Rec. in «Rew. Appl. Myc.», *12*, 1933, pp. 257-259. J. S. Boyce, loc. cit., p. 379.

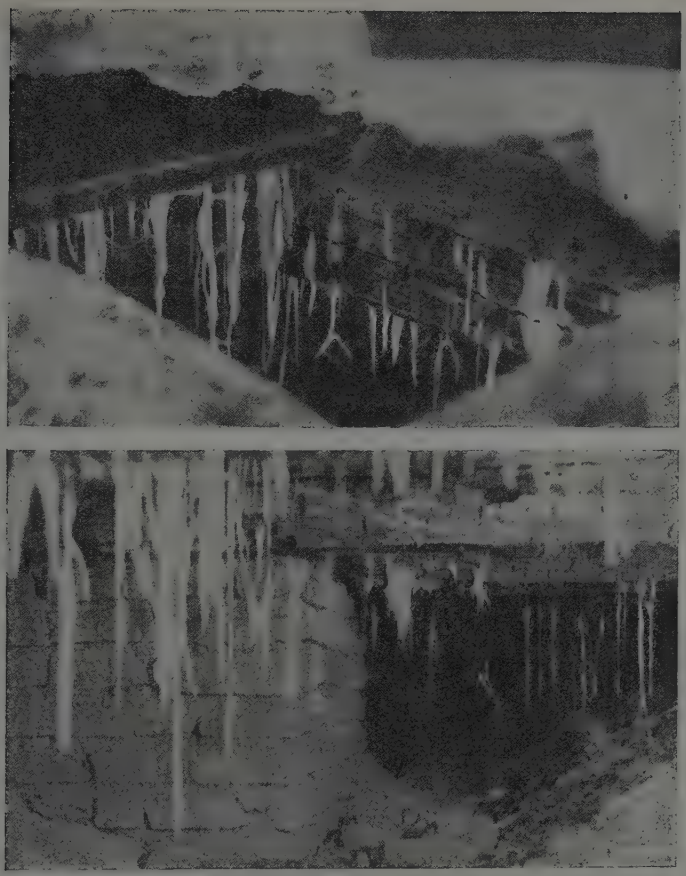


Fig. 3. – *In alto*: un saggio praticato nella pavimentazione del piano della biblioteca. Si vedono le produzioni fungose del basidiomicete lignivoro pendenti dai tronchi e dalle tavole. *In basso*: aspetto di un vano sottostante la pavimentazione del piano della biblioteca; è evidente il gran numero di produzioni fungose pendule, delle cui dimensioni dà una idea il confronto con il mattonato in primo piano.

anche molto distanti, persino da un piano ad un altro di un edificio [10]. Nella fase terminale della vita del fungo il lento ritmo del suo sviluppo sarà stato pure agevolato dalla carenza di ossigeno che in ambienti così limitati non può non fare sentire il suo peso.

(10) R. Hartig, *Der echte Hausschwamm. und andere das Bauholz zerstörende Pilze*. II Auf., Berlin, Verlag J. Springer, 1902, VII+105 pp.; R. Falk, *Die Merulids-Fäule des Bauholzes*. In «Möller A. Hausschwammforschungen», 1912, XVI+405 pp.; C. J. Humphrey, *Decay of lumber and building timbers due to « Poria incrassata »*. «Mycologia», *15*, 1923, pp. 258-277; E. E. Hubert, J. S. Boyce, locc. cit.

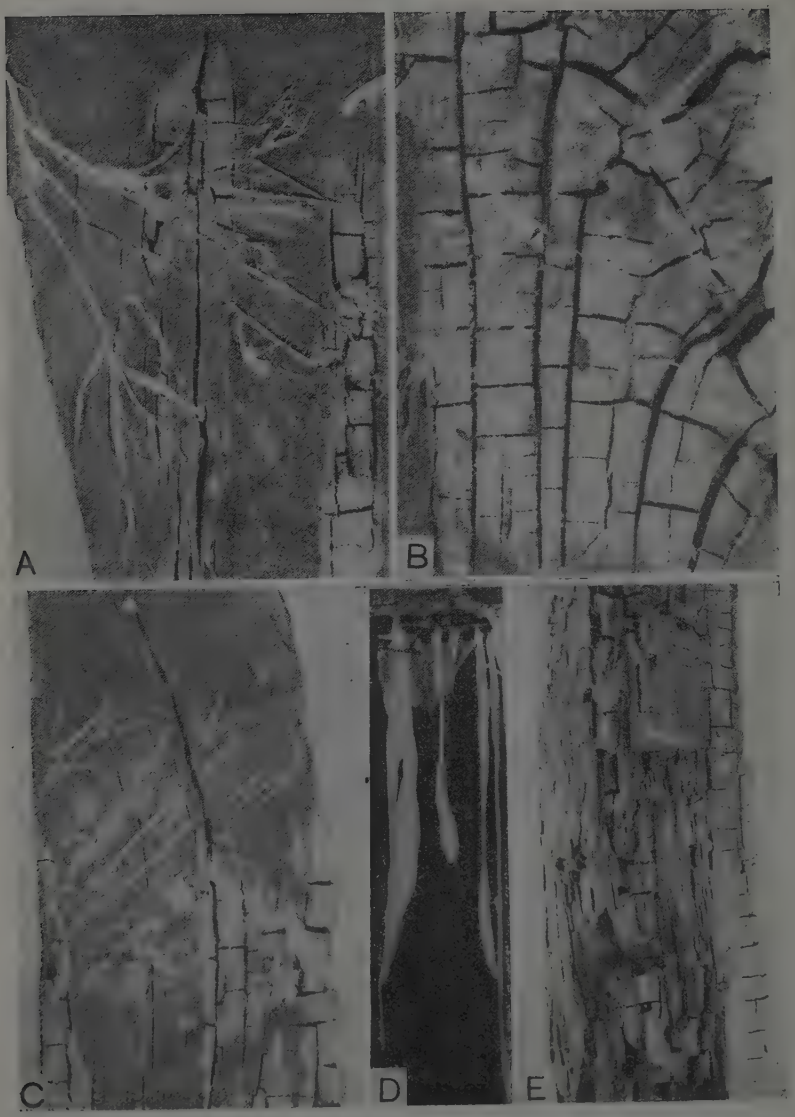


Fig. 4. Vari aspetti del materiale legnoso alterato prelevato dal piano della biblioteca.

A – Tavola in uno stadio iniziale di alterazione attraversata da una grossa rizomorfa superficiale del fungo. **B** – Porzione di tavola fortemente alterata sulla cui superficie è manifestata la tipica frattura cubica della massa legnosa. **C** – Tavola alterata nella parte basale ed indenne nella parte alta che contrastava con un tronco al quale era fissata con un chiodo passante per il foro che vi si distingue. **D** - Formazioni fungose di varie forme e dimensioni pendenti da un tronco fortemente alterato. **E** – Porzione di una trave nello stadio finale della alterazione, senza più alcuna resistenza meccanica.

Per quanti siano stati, comunque, i fattori che ànno concorso nel determinare una prolungata vitalità ed attività del fungo (superiore anzi a quella giudicabile dall'estensione e gravità dell'infezione) queste si sono arrestate molti anni or sono, certamente più che un centinaio [11]. Una parziale conferma di ciò, oltre che il ragionamento, ce la fornisce l'esame microscopico e culturale del materiale avariato: gli elementi vegetativi del fungo dannoso e degli altri microrganismi componenti la banale microflora superficiale dei tronchi sono pressocchè irriconoscibili e rimangono inattivi su qualsiasi substrato di cultura.

La risposta all'ultima parte del quesito che ci siamo posti inizialmente è altrettanto facile come alla prima. Il perchè solo oggi si siano rilevati i danni da tanto tempo esistenti è in relazione al fatto che il progressivo accumulo di libri nelle scaffalature ed ancor più il continuo passaggio di tutto il pubblico che accede alla biblioteca proprio nel settore più compromesso à lentamente ma progressivamente influito in maniera deleteria sulle proprietà meccaniche della già minata intelaiatura legnosa di sostegno fisso, si che essa non à più resistito al carico della pavimentazione e dei pesanti arredi sovrastanti.

Circa il tipo dell'alterazione in esame non vi è alcun dubbio che si tratta di un caso di «carie secca o pulverulenta» (*dry-rot* degli AA. in lingua inglese), termine col quale si vuole indicare la fase terminale del processo alterativo che è appunto la trasformazione del materiale legnoso in una massa arida, pulverulenta che si disintegra sotto la pressione delle dita (v. fig. 4, E). È questo il tipo più grave di alterazione, ad opera di basidiomiceti lignivori, cui vada soggetto il legname messo in opera nelle costruzioni per abitazione, per le industrie, opere di scavo, miniere, mulini ecc. Esso è il responsabile di danni incommensurabili, per ovviare i quali si è sviluppata una particolare attività scientifica che prende il nome di « patologia del legno », che in certi Stati à raggiunto una poderosa organizzazione di ricercatori e di laboratori [12].

Fra le carie secche quella caratterizzata da una finale frattura cubica (v. fig. 4, B), almeno degli strati più superficiali della massa legnosa – che rimane inalterata nel colore o si iscurisce – è la più diffusa; essa è provocata da *Merulius lacrymans* (partic. in Europa), *Poria incrassata* (partic. in America), *Coniophora cerebella, Lentinus lepideus, Lenzites sepiaria*, ecc.

La mancata differenziazione nel materiale del Palazzo Corsini di organi di fruttificazione, carpofori, imeni basidiofori o simili, e la impossibilità di

(11) Il micelio dei basidiomiceti lignivori può persistere vitale anche per considerevole tempo nel materiale su cui si è sviluppato; ma si tratta sempre soltanto di anni, mai di secoli (Cfr.: Mc Crea A.; *Longevity of « Merulius lacrymans » in wood destroyed by its growth.* « Mycologia », *26*, 1934, pp. 454-355.

(12) J. S. Boyce, loc. cit, p. 498.

rivelare nell'apparato vegetativo particolarità morfologiche di qualche significato tassonomico, non permettono di addivenire ad una identificazione precisa del basidiomicete che à provocato il danno. Di esso ò potuto solo rilevare e con notevole difficoltà che: il micelio delle formazioni pendule è costituito di due tipi di ife, le une grosse 2,5 × 3 μ, a setti distanziati 50–60 μ, provviste di rigonfiamenti intercalari isolati, 5–7 μ in diam., le altre sottili a setti invisibili. Allo stato attuale, la quasi totalità di queste ife è completamente mascherata da un rivestimento di ossalato di calcio. Il micelio delle rizomorfe è invece più regolare, ad ife di 2–2,5 μ, con scarse incrostazioni di ossalato.

È molto probabile – giudicando dal tipo e dalla profondità dell'alterazione prodotta ed assieme da alcune delle descritte caratteristiche dell'apparato vegetativo, fra cui specialmente la formazione di rizomorfe e le produzioni pendule – che si tratti del *Merulius lacrymans*.

Notoriamente, i processi alterativi del tipo di quello descritto si prevengono, e si arrestano, una volta che si sono iniziati, provocando un rapido e completo prosciugamento del legno. Cosa però questa non facile ad attuarsi in materiale messo in opera non all'aperto in edifici, specie se di un certo valore artistico. In tali casi è molto più prudente l'asportazione e la sostituzione di tutte le parti anche solo leggermente avariate in cui è sospettabile la sopravvivenza, in forma latente, dell'infezione, curando poi nell'esecuzione del restauro di non reincorrere negli stessi errori o deficienze costruttive che sono state la causa dell'inconveniente che si vuole eliminare.

Nel caso specifico del Palazzo Corsini, ed ovviamente in altri di analoghe caratteristiche, è però sufficiente la sostituzione dei tronchi e del tavolame che non possiede più il *minimum* di resistenza meccanica. Gli altri elementi anche se manifestamente alterati possono rimanere sul posto perchè la zona superficiale lungi dal costituire un pericolo (essendo il micelio morto) serve anzi di salvaguardia per successive infezioni. Ò infatti sperimentalmente constatato che basidiomiceti xilovori (due ceppi di *Coniophora cerebella* e *Polyporus vaporarius*) si sviluppano rigogliosamente sulle parti di legno indenni, mentre rifiutano di crescere, anche in condizioni ottime di ambiente, in quelle alterate e – cosa notevole – anche nello strato di legno immediatamente sottostante a quello cariato, di aspetto normale: quasi che sotto l'influenza della vicina infezione quest'ultimo avesse subìto una sorta di svuotamento delle sostanze nutritive necessarie alla vita dei funghi lignivori; di qui la mancata crescita in esso dei basidiomiceti sperimentati e la funzione protettiva delle strato di legno in parola.

Commemorazione del Socio Ercole Giacomini

tenuta dal Socio Antonio Pensa [1].

Ercole Giacomini nella rinnovata Accademia dei Lincei sarebbe stato una delle figure più eminenti della categoria delle Scienze biologiche. Con tutti gli onori dei quali era degno avrebbe ripreso il suo posto accanto a Giulio Chiarugi al quale Egli era legato da salda amicizia, da parentela e da spiccata comunanza di intenti e di mentalità. L'uno e l'altro, pur troppo, scomparvero amareggiati e delusi nell'epoca ancora torbida per passioni e per sciagure che precedette l'aprile 1945.

E con dolore quindi che l'Accademia non può plaudire al loro ritorno; ne venera però la memoria. Del Giacomini ricorda i 25 anni della sua vita accademica trascorsi dal luglio 1914 al 4 giugno 1939 quando avvenne la fusione con l'Accademia d'Italia (dal 1914 al 1926 come socio corrispondente, dal 1926 in poi come socio nazionale); ricorda l'uomo superlativamente onesto e saggio, riserbato e modesto, ma dignitoso così nell'aspetto e nel gesto, come in qualunque espressione di attività e di pensiero; ricercatore appassionato e valente per potere di osservazione e finezza di tecnica; prudente nell'assurgere a conclusioni, ma geniale interprete di fatti naturali e sicuro, tenace assertore di quelli da lui rivelati e controllati.

Il Giacomini fu uomo di studio di onestà esemplare, come in tutte le espressioni della sua vita, così anche nella ricerca e nel suo magistero. Un po' appartato nella austera serenità del suo laboratorio vi raccolse feconda messe di risultati, creò una scuola ed agli scolari profuse tesori di sapere, di esempio e di pratici avvertimenti. Pago delle compiacenze famigliari, della scuola e del suo lavoro, non chiese onori e prebende. Orgoglioso di aver raggiunto l'elevata posizione morale dovuta al riconoscimento unanime in Italia e fuori dei suoi alti meriti, con lo studio ed il lavoro indefesso, con sacrifici e privazioni, non pensò nemmeno che la sua vecchiezza ne potesse avere un compenso con maggiori agi e riposo. Continuò fino all'ultimo il suo tenore di vita anche quando il lavoro divenne fatica.

Le Accademie alle quali appartenne ebbero lustro da questo uomo insigne per sapere, per profondità di pensiero, per acutezza di indagine e per efficacia di maestro. L'Accademia delle scienze di Bologna, la sua prediletta, alla quale affidò per le stampe la parte maggiore della sua produzione scientifica, lo ebbe per parecchi lustri segretario attivissimo; accademico benedettino dal 1905. Le Accademie dei fisiocritici di Siena; delle Scienze, lettere ed arti di Modena; quella medico-chirurgica di Perugia; quella di Scienze naturali di Lisbona si

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1946.

onorarono di accoglierlo come socio corrispondente. Altre cariche importanti ebbe e le tenne con grande scrupolo e dignità. La Società italiana delle Scienze dei XL gli conferì la medaglia d'oro, uno dei più alti riconoscimenti di benemerenze scientifiche; la Fondazione Sacchetti di Bologna gli conferì il premio per il biennio 1930–31, per la sua fama di scienziato e di insegnante.

Ercole Giacomini nacque a Foligno il 19 maggio 1864; compì gli studi classici a Spoleto, il corso di Medicina a Perugia, a Firenze ed a Siena. Come altri biologi naturalisti, il Giacomini conseguì la laurea in Medicina e chirurgia il 28 giugno 1890 a Siena. Già nel periodo della sua carriera di studente, appassionatosi allo studio della Zoologia e della Anatomia comparata, fu allievo di Andrea Batelli (Perugia), di Alessandro Tafani (Firenze), di Giulio Chiarugi (Siena) e di Stanislao Bianchi (Siena). La chiara capacità di valutazione del reale valore dei maestri, in lui già spiccata nell'età giovanile, lo consigliarono a questo apparente vagabondare dall'uno all'altro centro di studi per potersi avvantaggiare delle guide migliori. Acquistare cognizioni, apprendere le varie tecniche per la ricerca e raffinarvisi; impadronirsi di tutti gli elementi di giudizio per l'indagine nei campi già da lui precocemente prescelti, la morfologia animale, la fisiologia, l'embriologia; questo è lo scopo ideale perseguito dal Giacomini nella scelta dei maestri e dei posti di studio.

Conseguita la libera docenza in Anatomia comparata presso l'Università di Pisa nel 1896, insegnò a titolo privato e per incarico Zoologia e Anatomia e fisiologia comparata a Siena e poi a Perugia dove tenne anche corsi di Entomologia.

Raggiunse nel 1903 per concorso la cattedra di Anatomia comparata nell'Università di Bologna e la tenne, con grande lustro per l'Ateneo bolognese, fino al giorno del suo collocamento a riposo per limite di età, nell'ottobre 1935. Non interruppe però neppure dopo la sua attività di ricercatore e continuò a profondere i tesori della sua competenza di maestro e ad adempiere a compiti accademici fino alla morte, avvenuta in Bologna il 19 ottobre 1944.

Era in possesso di una vasta e salda cultura biologica generale e chi, come io stesso, ebbe la ventura di intrattenersi con lui, sa con quanto acume e competenza Egli prontamente discutesse dei più disparati problemi, specialmente poi di quelli che riguardassero zoologia, anatomia, fisiologia. Rivolgersi al Giacomini per informazioni scientifiche, per chiarimenti, significava attingere a preziosissima fonte. Quanto Egli lasciò stampato non rappresenta che la parte selezionata, più profondamente meditata della notevole messe raccolta con le letture, con lo studio, con l'osservazione diretta.

La sua operosità si iniziò nel 1888 con le ricerche anatomo–embriologiche sulle glandule salivari degli uccelli. Sono ricerche assai minuziose, integrate da considerazioni ben fondate sul significato morfologico di questi organi e molto importanti anche per il reperto di noduli linfatici annessi alle glandule stesse, a complemento della conoscenza dell'apparecchio linfatico degli uccelli tuttora oggetto di studio.

Pure fondamentale è il lavoro sulla anatomia microscopica dell'ovidotto dei sauropsidi, specialmente per la dimostrazione dei processi secretivi del suo epitelio di rivestimento e per le relazioni intercorrenti fra tali processi ed i diversi involucri dei quali si provvede l'uovo nei vari settori dell'ovidotto stesso.

Di un suo soggiorno alla Stazione Zoologica di Napoli (1896) rimane nella sua produzione un'orma notevole; quella sulla istologia dell'ovario dei selaci, che più che un contributo, come modestamente l'ha intitolato l'autore, è uno studio approfondito anche della ovogenesi, della ovolisi e della formazione dei corpi lutei. Con tale lavoro si riconnette quello sui corpi lutei veri degli anfibî e degli uccelli (1896). Da questo complesso di ricerche il Giacomini è stato indotto alla conclusione generale che, in tutte le classi dei vertebrati, all'espulsione dell'uovo dal follicolo non segue la caduta della granulosa, ma questa rimane in sito e prende parte alla formazione della lutea vera; solo più tardi può disgregarsi e venir riassorbita.

La più diretta influenza sulla operosità del Giacomini del suo maestro Tafani, appare manifesta in quel gruppo di lavori della sua produzione che va dal 1891 al 1896, con una ripresa nel 1905–1906, lavori che riguardano gli annessi embrionali dei selaci, dei sauropsidi e dei mammiferi. Quanto più chiara e completa sarebbe la trattazione di questo astruso problema embriologico nei maggiori e più autorevoli trattati, se i risultati del Giacomini vi avessero avuto il loro giusto riconoscimento!

Con grande precisione e ricchezza di particolari il Giacomini espone le condizioni della gestazione di alcuni rettili, la genesi e la morfologia degli annessi embrionali anche nei confronti degli uccelli e dei mammiferi. Particolarmente notevole per le conclusioni fondamentali è il fatto che, mentre in alcune specie definibili come ovovivipare (di *Anguis*, di *Vipera*, di *Coronella*), si forma un guscio fibroso e non si stabiliscono connessioni particolari tra uovo e matrice; in altre specie invece, veramente vivipare, si forma mediante connessioni fra uovo e matrice, un organo placentare. In *Gongylus*, *Trachydosaurus*, *Cyclodus* si tratta di una placenta vitellina con una parte fetale (*onfalo corion*) od assorbente ed una parte materna (epitelio della camera incubatrice) secernente; in *Seps chalcides*, oltre alla placenta vitellina si forma anche una vera e propria placenta allantoidea.

Notevole poi è la conferma data dal Giacomini della esistenza, accennata dallo Studiati, di connessioni fra vasi allantoidei e vasi vitellini e la segnalazione di un particolare che era ancora ignorato, della presenza cioè di cumuli di cellule linfoidi disposte a manicotto intorno alle diramazioni, segnatamente arteriose, dei vasi vitellini.

Non devono certamente essere dimenticate le fini ricerche istologiche del Giacomini (dal 1896 al 1900) sul tubo digerente dei rettili, sulla struttura del pancreas, delle così dette glandule salivari e delle branchie dei petromizonti; quelle (1898) sulla innervazione dei miocommi e delle fibre muscolari dei miomeri dei teleostei, degli anfibî e dei sauropsidi, sulle terminazioni nervose nei

tendini e fibre muscolari degli arti degli anfibî, nella pelle delle dita di *Spelerpes* e di *Hyla*, nei fusi neuromuscolari dei sauropsidi.

Ma il campo nel quale sopra tutto eccelle l'attività del Giacomini è quello della endocrinologia comparata, trattata magistralmente tanto con indirizzo morfologico che funzionale. Le ricerche sopra quel complesso organico che viene definito come « capsule surrenali », ebbero inizio nel 1897 sulle capsule surrenali degli anfibî. Riportandosi al periodo d'allora di incertezze e di notizie incomplete, è da riconoscere al Giacomini il merito di aver chiarito la natura glandulare endocrina delle due parti componenti l'organo, e cioè la corticale e la midollare, quest'ultima con netto carattere di cromaffinità, e di aver precisato i caratteri istologici ed i rapporti col simpatico dei così detti nidi di cellule. Seguirono la nitida ed esauriente descrizione delle capsule surrenali dei ciclostomi (1902) con la conclusione che i ciclostomi posseggono due ben distinte serie di particolari organi secernenti a secrezioni interna estesi a quasi tutto il corpo, paragonabili nel loro insieme alle capsule surrenali dei gnatostomi, la brillante dimostrazione da lui data per il primo (1902) di sostanza midollare cromaffine nei teleostei disposta intorno alle vene cardinali e corrispondente ai corpi soprarenali degli elasmobranchi; l'analoga dimostrazione successivamente data, pure con titolo di primato, nei ganoidi (1904).

Continuò con indefesso fervore l'indagine sul sistema interrenale e cromaffine nei teleostei e dei Ganoidi fino al 1912 ed oltre. Per gli studiosi di tale argomento, l'immenso materiale raccolto e descritto con scrupolosa finezza dal Giacomini e le conclusioni dedotte sono tuttora e continueranno ad essere le basi fondamentali per ogni ulteriore ricerca; tanto che a coloro che non ne tennero il dovuto conto avvenne di decadere nell'irreale o nel superficiale. Merito particolare del Giacomini è stato quello della obbiettività e del senso critico che lo indussero ad eliminare preconcetti teorici sopra tutto in fatto di omologie ed a correggerne le deduzioni conseguenziali. Andò sempre più precisando la distribuzione del tessuto cromaffine nei vertebrati inferiori, stabilì l'omologia, in base anche ad indagini approfondite riguardanti lo sviluppo, fra l'interrenale anteriore dei teleostei avente sede nel rene cefalico e l'interrenale dei selaci e la corticale della capsula surrenale dei mammiferi; dimostrò invece il significato e la natura differente dell'interrenale posteriore o corpuscoli di Stannius, organi peculiari dei teleostei e degli euganoidi.

È in una ripresa delle sue ricerche sopra interrenale e organi cromaffini (dal 1928 al 1934) che viene dal G. approfondito l'argomento per quanto riguarda i ganoidi e che è particolarmente curato il problema dello sviluppo embrionale e delle omologie. Viene rigorosamente stabilito, in contrasto anche a vedute erroneamente ammesse come dogmi, che in *Accipenser*, oltre al tessuto cromaffine, è rappresentato soltanto l'interrenale anteriore omologo a quello dei teleostei e dei selaci, mentre mancano i così detti corpuscoli di Stannius, che invece sono presenti negli euganoidi (*Lepidosteus*, *Amia*). L'ultimo suo lavoro del 1939 tratta ancora del sistema cromaffine e stabilisce con precisione e con

particolareggiata descrizione nei rettili, la presenza di gruppi di cellule cromaffini in parte comprese nei gangli del cordone limitante del simpatico, in parte sparse al di fuori dei gangli, in prossimità dei reni.

Nel campo dello studio degli organi endocrini, si può considerare il GIACOMINI lo scopritore dei corpi postbranchiali dei teleostei, dei quali descrisse la morfologia e lo sviluppo.

Fondamentali e della massima importanza sono i suoi reperti sul nervo terminale ed in particolare dei salmonidi, avendone dimostrato l'esistenza, che precedentemente era stata negata (1914). Pure di grande valore è la memoria sull'organo di Jacobson, nervo vomeronasale e nervo terminale, formazioni brillantemente dimostrate e perseguite nel loro sviluppo negli sdentati (*Muletia novemcincta*) (1914), con la precisazione che le fibre del nervo vomeronasale prendono la loro origine da cellule allineate come quelle del n. olfattivo nell'epitelio dell'organo di Jacobson; che invece quelle del nervo terminale prendono origine da gruppi o ganglietti di cellule sensitive situate lungo il suo percorso; che alla innervazione dell'organo di Jacobson contribuisce anche il n. nasopalatino proveniente dal ganglio sfenopalatino e contenente, almeno in parte, fibre di natura simpatica.

La mentalità e la cultura biologica del GIACOMINI rafforzate dalla preparazione acquisita fin da giovane con gli studi medici, lo indussero ad applicare l'indagine sperimentale nel campo della endocrinologia, già da lui trattato magistralmente con indirizzo morfologico. È così che ininterrottamente, dal 1914 al 1930, studiò l'azione della tiroide, degli estratti tiroidei, della jodotirina e di vari preparati iodici sopra l'accrescimento ed altri fenomeni inerenti alla morfogenesi in larve di teleostei e di anfibî e poi nei polli; fece integrare i risultati personalmente ottenuti anche con ricerche suggerite ad allievi e da lui guidate. Degni di particolare rilievo sono: la facoltà preminente nel GIACOMINI di prevedere e di ovviare le insidie dell'esperimento ed il merito di essere stato Egli uno fra i primissimi, insieme al Cotronei in Italia, che raggiunsero dati di fatto concreti sulla funzione endocrina della tiroide, specialmente nella metamorfosi degli anfibî; primato italiano che troppo ingiustamente è dimenticato nelle citazioni bibliografiche.

Dimostrata l'azione acceleratrice della nutrizione con tiroide fresca nell'accrescimento e nella metamorfosi di larve di teleostei e di anfibî, il G. potè in seguito accertare che l'influenza della tiroide fresca è dovuta a proteine iodate in essa contenute; che influenza analoga hanno la iodotirina e quasi tutti gli organi o sostanze proteiche quando siano artificialmente iodati e forniti come alimenti; che invece nessuna azione hanno gli idrati di carbonio o le sostanze grasse iodate.

Non si limitò al rilievo dei risultati appariscenti e globali delle esperienze; ma volle anche approfondire con rigore e finezza di metodo e di tecnica, gli effetti intimi e strutturali sul germe e sui vari organi e tessuti dell'embrione e della larva sottoposti alla fine osservazione microscopica, conseguì così risultati di fondamentale importanza.

Anche le ricerche sperimentali sull'azione della nutrizione tiroidea o con sostanze iodate sull'accrescimento, sulla muta e sul piumaggio dei polli portarono non solo un interessante contributo biologico nei riguardi dell'ipertiroidismo sopra tutto, ma anche fornirono agli allevatori nozioni e norme preziosissime. Anche in questo campo, come in tutta la sua attività di scienziato e di maestro, tenne fede al principio che la scienza deve essere guida alla applicazione pratica e che la pratica deve considerare la scienza come il fondamento di ogni sua attività.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1946

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Matematica — *Enti geometrici definiti da sistemi differenziali.* Nota [1] del Corrisp. E. Bompiani.

1. Preliminari. – Luigi Bianchi, considerando il sistema di equazioni a derivate parziali del 2° ordine

$$\partial_{rs} z = \Gamma^t_{rs} \partial_t z + b_{rs} z , \qquad r, s, t = 1, \cdots, n$$

si è imbattuto per la prima volta nella teoria che oggi chiamiamo delle connessioni [2].

Il significato geometrico dei teoremi del Bianchi è stato dato recentemente da A. Maxia [3] interpretando $n + 1$ soluzioni del sistema dato come coordinate affini (non omogenee) di un punto, descrivente una V_n in uno spazio affine E_{n+1}.

Quando si passi a sistemi analoghi di ordine più elevato è naturale chiedersi quali nuovi enti geometrici siano da essi definiti nello spazio (numerico o topologico) delle variabili indipendenti e come si possano porre in relazione con la geometria di una V_n in uno spazio affine conveniente.

Questo doppio indirizzo è qui seguìto per i sistemi del 3° ordine: ma apparisce chiaro come vada continuato per ordini più elevati.

(1) Presentata nella seduta del 15 giugno 1946.

(2) L. Bianchi, *Sui sistemi di equazioni lineari ai differenziali totali.* «Rend. Acc. Lincei», s. I, vol. V, 1889, 312-323.

(3) A. Maxia, *Geometria affine di alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali studiati da L. Bianchi.* «Rend. Acc. Lincei», s. VIII, vol. I, 1946, 169-174.

La presente Nota è un contributo alla geometria delle equazioni a derivate parziali [4] tendente a liberare queste dalle accidentalità della rappresentazione analitica.

2. Enti geometrici associati ad un sistema differenziale. - Si consideri il sistema di equazioni a derivate parziali

$$(1) \qquad \partial_{hkl} z = \Gamma^{pq}_{hkl} \partial_{pq} z + \Gamma^{p}_{hkl} \partial_p z + \Gamma_{hkl} z \qquad \left(\partial_p z = \frac{\partial z}{\partial x^p} \text{ e anal.}\right)$$

nella funzione incognita z e nelle variabili x^i $(i, h, k, l, p, q = 1, \cdots, n)$ di cui sono funzioni i coefficienti: questi sono simmetrici rispetto agli indici in basso e i primi anche rispetto a quelli in alto.

Per un cambiamento di variabili x^i in $x^{i'}$, posto

$$(2.1) \qquad \mathfrak{A}^{i'}_{p} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \quad , \quad \mathfrak{A}^{i'}_{pq} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^p \partial x^q} \quad , \quad \mathfrak{A}^{i'}_{pqr} = \frac{\partial^3 x^{i'}}{\partial x^p \partial x^q \partial x^r}$$

si ha

$$(2.2) \qquad \partial_h z = \partial_{h'} z \, \mathfrak{A}^{h'}_{h} \quad , \quad \partial_{hk} z = \partial_{h'k'} z \, \mathfrak{A}^{h'}_{h} \mathfrak{A}^{k'}_{k} + \partial_{h'} z \, \mathfrak{A}^{h'}_{hk}$$

$$(2.3) \qquad \partial_{hkl} z = \partial_{h'k'l'} z \, \mathfrak{A}^{h'}_{h} \mathfrak{A}^{k'}_{k} \mathfrak{A}^{l'}_{l} + 3 \, \partial_{p'q'} z \, \mathfrak{A}^{(p'}_{(hk} \mathfrak{A}^{q')}_{l)} + \partial_{p'} z \, \mathfrak{A}^{p'}_{hkl}$$

ove

$$(2.4) \qquad 3 \, \mathfrak{A}^{(p'}_{(hk} \mathfrak{A}^{q')}_{l)} = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{A}^{l'p}_{hk} \mathfrak{A}^{q'}_{l} + \mathfrak{A}^{p'}_{kl} \mathfrak{A}^{q'}_{h} + \mathfrak{A}^{p'}_{lh} \mathfrak{A}^{q'}_{k} + \mathfrak{A}^{q'}_{hk} \mathfrak{A}^{p'}_{l} + \mathfrak{A}^{q'}_{kl} \mathfrak{A}^{p'}_{h} + \mathfrak{A}^{q'}_{lh} \mathfrak{A}^{p'}_{k} \right).$$

Sostituendo in I queste espressioni si ha il sistema trasformato

$$(I') \qquad \partial_{h'k'l'} z = \Gamma^{p'q'}_{h'k'l'} \partial_{p'q'} z + \Gamma^{p'}_{h'k'l'} \partial_{p'} z + \Gamma_{h'k'l'} z$$

ove

$$(2.5) \qquad \Gamma^{p'q'}_{h'k'l'} = \Gamma^{pq}_{hkl} \mathfrak{A}^{p'}_{p} \mathfrak{A}^{q'}_{q} \mathfrak{A}^{h}_{h'} \mathfrak{A}^{k}_{k'} \mathfrak{A}^{l}_{l'} - 3 \, \mathfrak{A}^{(ph}_{(h'} \mathfrak{A}^{q')}_{l)} \mathfrak{A}^{h}_{h'} \mathfrak{A}^{k}_{k'} \mathfrak{A}^{l}_{l'}$$

$$(2.6) \qquad \Gamma^{p'}_{h'k'l'} = \Gamma^{p}_{hkl} \mathfrak{A}^{p'}_{p} \mathfrak{A}^{h}_{h'} \mathfrak{A}^{k}_{k'} \mathfrak{A}^{l}_{l'} - \mathfrak{A}^{p'}_{hkl} \mathfrak{A}^{h}_{h'} \mathfrak{A}^{k}_{k'} \mathfrak{A}^{l}_{l'} + \Gamma^{pq}_{hkl} \mathfrak{A}^{p'}_{pq} \mathfrak{A}^{h}_{h'} \mathfrak{A}^{k}_{k'} \mathfrak{A}^{l}_{l'}$$

$$(2.7) \qquad \Gamma_{h'k'l'} = \Gamma_{hkl} \mathfrak{A}^{h}_{h'} \mathfrak{A}^{k}_{k'} \mathfrak{A}^{l}_{l'} .$$

Queste provano che:

1) *le* Γ_{hkl} *sono le componenti di un tensore* (e le indicheremo perciò con $\Gamma^{\cdots}_{hkl}$);

2) *le* Γ^{pq}_{hkl} *sono componenti di un ente geometrico*;

3) *le* Γ^{pq}_{hkl} *e le* Γ^{p}_{hkl} *prese insieme sono pure componenti di un ente geometrico.*

(4) Si vedano sull'argomento i seguenti lavori riassuntivi: E. Bompiani, *Geometria delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.* « Atti del IX Convegno Volta, 1939 » (Accademia d'Italia, 1943), 409-441; P. Buzano, *Bericht über die projektive Geometrie der partiellen Differentialgleichungen* « Abh. Math. Sem. der Hans. Univers. », Bd. 13, 1939, 257-272.

3. Confronto dei nuovi enti con le connessioni affini. – Per renderci conto della struttura dei nuovi enti ora introdotti, soddisfacenti alle *equazioni fondamentali* (2.5) e (2.6), confrontiamoli con le ordinarie connessioni affini.

Siano $\Gamma^{p}_{hk} = \Gamma^{p}_{kh}$ le componenti di una tale connessione simmetrica; per esse

$$\vartheta^{p'}_{hk} = \Gamma^{p}_{hk}\,\vartheta^{p'}_{p} - \Gamma^{p'}_{r's'}\,\vartheta^{r'}_{h}\,\vartheta^{s'}_{k}. \tag{3.1}$$

Eliminando le derivate seconde dalle (2.5) con le (3.1) si ha

$$\Gamma^{p'q'}_{h'k'l'} - 3\,\Gamma^{(p'}_{(h'k'}\,\delta^{q')}_{l')} = \{\,\Gamma^{pq}_{hkl} - 3\,\Gamma^{(p}_{(hk}\,\delta^{q)}_{l)}\,\}\,\vartheta^{p'}_{p}\,\vartheta^{q'}_{q}\,\vartheta^{h}_{h'}\,\vartheta^{k}_{k'}\,\vartheta^{l}_{l'}$$

e queste relazioni provano che le espressioni in { } sono le componenti di un tensore $S^{\cdots pq}_{hkl\cdots}$ simmetrico sia rispetto agli indici in basso che a quelli in alto.

Può quindi porsi

$$\Gamma^{pq}_{hkl} = 3\,\Gamma^{(p}_{(hk}\,\delta^{q)}_{l)} + S^{\cdots pq}_{hkl\cdots} = \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Gamma^{p}_{hk}\,\delta^{q}_{l} + \Gamma^{p}_{kl}\,\delta^{q}_{h} + \Gamma^{p}_{kl}\,\delta^{q}_{h} + \Gamma^{p}_{hl}\,\delta^{q}_{l} + \Gamma^{q}_{kl}\,\delta^{p}_{h} + \Gamma^{q}_{lh}\,\delta^{p}_{k}\right) + S^{\cdots pq}_{hkl\cdots}.$$

Per eliminare dalle (2.6) le derivate $\vartheta^{p'}_{pq}$, $\vartheta^{p'}_{hkl}$ e le Γ^{pq}_{hkl} bisogna servirsi delle (3.1) e delle loro conseguenze differenziali

$$\vartheta^{p'}_{hkl} = \vartheta_{l}\,\Gamma^{p}_{hk}\,\vartheta^{p'}_{p} - \partial_{l'}\,\Gamma^{p'}_{r's'}\,\vartheta^{r'}_{h}\,\vartheta^{s'}_{k}\,\vartheta^{l'}_{l} +$$

$$+ \Gamma^{p}_{hk}\,\vartheta^{p'}_{lp} - \Gamma^{p'}_{r's'}\,\vartheta^{r'}_{hl}\,\vartheta^{s'}_{k} - \Gamma^{p'}_{r's'}\,\vartheta^{s'}_{kl}\,\vartheta^{r'}_{h}$$

e delle (3.2). Così facendo si trova che le espressioni

$$\Gamma^{p}_{hkl} - \partial_{(l}\,\Gamma^{p}_{hk)} + 2\,\Gamma^{j}_{(hk}\,\Gamma^{p}_{l)j} + S^{\cdots rs}_{hkl\cdots}\,\Gamma^{p}_{rs}$$

sono componenti di un tensore che può indicarsi con $T^{\cdots p}_{hkl\cdots}$ simmetrico rispetto agli indici h, k, l.

Gli enti geometrici definiti dal sistema I (*oltre al tensore* $\Gamma^{\cdots}_{khl}$) *possono esprimersi a partire da un'arbitraria connessione affine simmetrica* Γ^{i}_{hk} *mediante due tensori convenienti nel modo seguente*:

$$\Gamma^{pq}_{hkl} = 3\,\Gamma^{(p}_{(hk}\delta^{q)}_{l)} + S^{\cdots pq}_{hkl\cdots} \tag{3.2}$$

$$\Gamma^{p}_{hkl} = \partial_{(l}\,\Gamma^{p}_{hk)} - 2\,\Gamma^{j}_{(hk}\,\Gamma^{p}_{l)j} - S^{\cdots rs}_{hkl\cdots}\,\Gamma^{p}_{rs} + T^{\cdots p}_{hkl\cdots}. \tag{3.3}$$

4. Determinazione di una connessione intrinseca al sistema I. – La connessione affine che figura nell'enunciato precedente è del tutto *arbitraria* (purchè simmetrica): una volta fissata rimangono definiti i tensori $S^{\cdots pq}_{hkl\cdots}$, $T^{\cdots p}_{hkl\cdots}$.

Domandiamoci ora se sia possibile definire *intrinsecamente*, cioè in base allo stesso sistema I, *una* connessione $'\Gamma^{i}_{hk}$: se ciò accade anche i due ten-

sori acquistano significato intrinseco e il sistema dato equivarrà geometricamente ad assegnare una connessione e tre tensori (a tre, quattro e cinque indici).

Poichè si ha sempre, date due connessioni simmetriche,

$$\Gamma^{i}_{hk} = {}'\Gamma^{i}_{hk} + \Psi^{\cdots i}_{hk\cdot} \tag{4.1}$$

ove $\Psi^{\cdots i}_{hk\cdot}$ è un tensore (simmetrico in h, k), le (3.2) espresse per la nuova connessione si scrivono

$$\Gamma^{pq}_{hkl} = 3\,{}'\Gamma^{(p}_{hk}\,\delta^{q)}_{l} + 3\,\Psi^{\cdots(p}_{(hk\cdot}\,\delta^{q)}_{l)} + S^{\cdots pq}_{hkl\cdot\cdot}. \tag{4.2}$$

Contraendo rispetto a q ed l si ha

$$\Gamma^{pq}_{hkq} = \frac{n+3}{2}\,{}'\Gamma^{p}_{hk} + {}'\Gamma^{i}_{j(h}\,\delta^{p}_{k)} + \frac{n+3}{2}\,\Psi^{\cdots p}_{hk\cdot} + \Psi^{\cdots j}_{j(h\cdot}\,\delta^{p}_{k)} + S^{\cdots pq}_{hkl\cdot\cdot} \tag{4.3}$$

e da questa, contraendo rispetto a p e k, si ha

$$\Gamma^{pq}_{hpq} = (n+2)\,{}'\Gamma^{j}_{jh} + (n+2)\,\Psi^{\cdots j}_{jh\cdot} + S^{\cdots rs}_{hrs\cdot\cdot}. \tag{4.4}$$

Si potrà fare perciò

$${}'\Gamma^{j}_{jh} = \frac{1}{n+2}\,\Gamma^{rs}_{hrs} \tag{4.5}$$

a patto di prendere $\Psi^{\cdots i}_{hk\cdot}$ tale che

$$\Psi^{\cdots}_{h} = \Psi^{\cdots j}_{jh\cdot} = -\frac{1}{n+2}\,S^{\cdots rs}_{hrs\cdot\cdot}. \tag{4.6}$$

Portando queste determinazioni nella (4.3) si ha

$$\Gamma^{pq}_{hkq} = \frac{n+3}{2}\,{}'\Gamma^{p}_{hk} + \frac{1}{n+2}\,\Gamma^{rs}_{rs(h}\,\delta^{p}_{k)} + \frac{n+3}{2}\,\Psi^{\cdots p}_{hk\cdot} - \frac{1}{n+2}\,S^{\cdots rs}_{rs(h\cdot\cdot}\,\delta^{p}_{k)} + S^{\cdots ps}_{hks\cdot\cdot} \tag{4.7}$$

e potrà farsi

$${}'\Gamma^{p}_{hk} = \frac{2}{n+3}\,\Gamma^{pq}_{hkq} - \frac{2}{(n+2)(n+3)}\,\Gamma^{rs}_{rs(h}\,\delta^{p}_{k)} \tag{4.8}$$

a patto di prendere

$$\Psi^{\cdots p}_{hk\cdot} = \frac{2}{(n+2)(n+3)}\,S^{\cdots rs}_{rs(h\cdot\cdot}\,\delta^{p}_{k)} - \frac{2}{n+3}\,S^{\cdots ps}_{hks\cdot\cdot}. \tag{4.9}$$

Poichè contraendo questa rispetto a p e k si riottiene la (4.6) questa condizione è compatibile con quelle già imposte e determina $\Psi^{\cdots p}_{hk\cdot}$ e quindi ${}'\Gamma^{p}_{hk}$, cioè rimane intrinsecamente determinata una connessione dal sistema I.

Se si fa uso di questa connessione come connessione di riferimento nelle (3.2) e (3.3), cioè si fa $\Psi^{\cdots p}_{hk\cdot} = 0$, quindi $\Psi^{\cdots j}_{hj\cdot} = 0$, la (4.6) dà $S^{\cdots rs}_{hrs\cdot\cdot} = 0$ e la (4.9) dà $S^{\cdots ps}_{hks\cdot\cdot} = 0$. Riassumendo:

Il sistema I *determina (oltre al tensore* $\Gamma^{\cdots}_{hkl}$*) una connessione affine simmetrica* Γ^{i}_{hk} *e tensori tali che*

$$\Gamma^{pq}_{hkl} = 3\,\Gamma^{(p}_{(hk}\,\delta^{q)}_{l)} + S^{\cdots pq}_{hkl\,\cdot\cdot} \tag{4.10}$$

$$\Gamma^{p}_{hkl} = \partial_{(l}\,\Gamma^{p}_{hk)} - 2\,\Gamma^{j}_{(hk}\,\Gamma^{p}_{l)j} - S^{\cdots rs}_{hkl\,\cdot\cdot}\,\Gamma^{p}_{rs} + T^{\cdots p}_{hkl} \tag{4.11}$$

$$S^{\cdots ps}_{hks\,\cdot\cdot} = 0\,. \tag{4.12}$$

Questa rappresentazione dei coefficienti di I *è unica.*

5. Condizioni d'integrabilità del sistema I. – Le condizioni d'integrabilità del sistema I si scrivono:

$$\partial_{[m}\,\Gamma^{\cdots}_{l]hk} + \Gamma^{rs}_{hk[l}\,\Gamma^{\cdots}_{m]rs} = 0$$

$$\partial_{[m}\,\Gamma^{p}_{l]hk} + \Gamma^{rs}_{hk[l}\,\Gamma^{p}_{m]rs} + \Gamma^{\cdots}_{hk[l}\,\delta^{p}_{m]} = 0$$

$$\partial_{[m}\,\Gamma^{pq}_{l]hk} + \Gamma^{rs}_{hk[l}\,\Gamma^{pq}_{m]rs} + \Gamma^{(r}_{hk[l}\,\delta^{s)}_{m]} = 0\,.$$

Queste si possono porre in forma intrinseca tensoriale servendosi delle ultime relazioni del numero precedente.

La prima, indicando con ∇_j derivate covarianti rispetto a Γ^{i}_{hk}, si scrive per esempio

$$\nabla_{[m}\,\Gamma^{\cdots}_{l]hk} = S^{\cdots rs}_{hk[m\,\cdot\cdot}\,\Gamma^{\cdots}_{l]rs}\,.$$

6. Immagine geometrica del sistema I sopra una varietà di uno spazio affine. – Quando si voglia dare del sistema I un equivalente geometrico (diverso da quello del teorema che chiude il n. 4, relativo ad una X_n) sopra una varietà di uno spazio affine si può estendere ad esso l'interpretazione, data da A. Maxia, del sistema analogo ad I, considerato dal Bianchi, di equazioni a derivate parziali del 2° ordine.

Il sistema I può scriversi anche

$$\partial_h\,\zeta = \zeta_h \quad , \quad \partial_{hk}\,\zeta = \zeta_{hk} \tag{6.1}$$

$$\partial_l\,x_{hk} = \Gamma^{pq}_{hkl}\,\zeta_{pq} + \Gamma^{p}_{hkl}\,\zeta_p + \Gamma_{hkl}\,\zeta\,, \tag{I}$$

di 1° ordine e lineare nelle funzioni incognite ζ, ζ_h, ζ_{hk}, delle variabili x^i $(i = 1, \cdots, n)$.

Si consideri ora una V_n in uno spazio affine A di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}+1$, descritta dal punto di coordinate affini non omogenee $\zeta^\alpha(x^1, \cdots, x^n)$ ove α (come gli altri indici greci che si introduranno) varia fra 1 ed $\frac{n(n+3)}{2}+1$. Supponiamo che la V_n in esame abbia $S(2)$ osculatore di dimensione massima, cioè $\frac{n(n+3)}{2}$, o, in altri termini le ζ^α non siano soluzioni di equazioni a derivate parziali lineari omogenee del 2° ordine.

Allo spazio improprio, di dimensione $\frac{n(n+3)}{2}$, di A appartengono i punti $\partial_h z$, $\partial_{hk} z$, cioè di coordinate $\partial_h z^\alpha$, $\partial_{hk} z^\alpha$: per finire d'individuarlo basterà dare un punto X, di coordinate X^α, indipendente dai precedenti. Questo punto si potrà intendere, in generale, funzione delle x^i stesse dalle quali dipendono il punto $z(x)$ di V_n e i suoi punti derivati già considerati. Geometricamente ciò vuol dire associare ad ogni punto di V_n una retta non appartenente allo S (2) osculatore in esso: questa retta (arbitraria) potrà dirsi *pseudonormale* alla S (2).

La dipendenza lineare di ogni altro punto improprio da quelli indicati, per ogni n–upla di valori delle x^i, porta che scritte le (6.1) devono valere, per la V_n e per le pseudonormali considerate, relazioni del tipo

$$(I') \qquad \begin{cases} \partial_l z_{hk} = \Gamma^{pq}_{hkl} z_{pq} + \Gamma^p_{hkl} z_p + \Gamma_{hkl} X \\ \partial_h X = \varphi^{pq}_h z_{pq} + \varphi^p_h z_p + \varphi_h X \end{cases}$$

qualunque sia l'apice α che si dia a z e ad X.

Si tratta ora di vedere, per poter considerare la (I) da questo punto di vista, se si può sempre, con una conveniente scelta delle pseudonormali considerare la (I) come caso particolare di (I').

La più generale scelta di un punto improprio 'X assegna alle sue coordinate la forma

$$(6.2) \qquad {}'X^\alpha = \tau (\gamma^{pq} z^\alpha_{pq} + \gamma^p z^\alpha_p + X^\alpha)$$

ove $\gamma^{pq} = \gamma^{qp}$, γ^p e τ sono coefficienti arbitrari funzioni del punto x di V_n.

Si consideri ora il determinante d'ordine $\frac{n(n+3)}{2} + 1$

$$(6.3) \qquad \Delta = | X z_1 \cdots z_n z_{11} z_{12} z_{13} \cdots z_{nn} | \neq 0$$

formato con le coordinate X^α, $z^\alpha_1, \cdots$ dei punti indicati; e s'indichi con ξ_α l'elemento reciproco di X_α, con z^α_r quello di z^r_α, con z^{rs}_α quello di z^α_{rs}.

Per la loro definizione si ha:

$$(6.4) \qquad \xi_\alpha X^\beta + z^p_\alpha z^\beta_p + z^\alpha_{pq} = \delta^\beta_\alpha$$

$$(6.5) \qquad \xi_\alpha X^\alpha = 1 \quad , \quad \xi_\alpha z^\alpha_r = 0 \quad , \quad \xi_\alpha z^\alpha_{rs} = 0$$

$$(6.6) \qquad z^p_\beta X^\alpha = 0 \quad , \quad z^p_\alpha z^\alpha_q = \delta^p_q \quad , \quad z^p_\alpha z^\alpha_{rs} = 0$$

$$(6.7) \qquad z^{pq}_\alpha X^\alpha = 0 \quad , \quad z^{pq}_\alpha z^\alpha_r = 0 \quad , \quad z^{pq}_\alpha z^\alpha_{rs} = \delta^{pq}_{rs}$$

ove le somme relative a coppie di indici, pq, vanno eseguite rispetto alle combinazioni e non alle disposizioni (cioè considerando $pq \equiv qp$) e δ^{pq}_{rs} vale 1 se $pq \equiv rs$ (quindi $p = r$, $q = s$ oppure $p = s$, $q = r$) e zero in caso contrario.

Tenuto conto di ciò si vede, per la (6.4), che la scelta

$$(8) \qquad \tau = \xi_\alpha \zeta^\alpha \quad , \quad \tau\gamma^p = \zeta^p_\alpha \zeta^\alpha \quad , \quad \tau\gamma^{pq} = \zeta^{pq}_\alpha \zeta^\alpha$$

dà

$$(6.9) \qquad {}'X^\alpha = \zeta^\alpha$$

e con ciò la prima delle (I') (scritta per 'X) coincide con la (I) (e per la seconda dev'essere $\varphi^{pq}_h = 0$, $\varphi^p_h = \delta^p_h$, $\varphi_h = 0$).

La pseudonormale definita dalle (6.9) è quella che congiunge l'origine O, che è un punto arbitrario dello spazio, con il punto di V_n che si considera. Quindi:

Il sistema (I) *equivale alla geometria di una* V_n *in uno spazio affine ad* $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ *dimensioni quando si assumano come pseudonormali le rette per i punti di* V_n *e per un punto fisso* (5).

7. Sistema aggiunto al sistema (I). – L'interpretazione affine ora data permette di associare al sistema (I) un sistema aggiunto, rappresentante la stessa varietà come inviluppo d'iperpiani. Infatti per le (6.5) le ξ^α sono coordinate (non omogenee) dello $S(2)$ osculatore, che è un iperpiano, nel punto $\zeta(x)$.

Il sistema (I), analogo ad (I), soddisfatto dalle ξ_α si dirà *aggiunto* al sistema dato (I).

Per trovarlo si derivi rispetto ad x^h la (6.4) tenendo conto che $\partial_h X^\beta = \zeta^\beta_h$ e si saturi l'apice β moltiplicando successivamente l'equazione ottenuta per ξ^β, ζ^r_β, ζ^{rs}_β. Sostituite le $\partial_k \zeta_{pq}$ con le espressioni I e tenuto conto delle identità (6.5–7) si trova

$$(7.1) \qquad \begin{cases} \partial_l \xi_\alpha = -\zeta^{hk}_\alpha \Gamma^{\cdots}_{hkl} \\ \partial_l \zeta^r_\alpha = -\zeta^{hk}_\alpha \Gamma^r_{hkl} - \delta^r_l \xi_\alpha \\ \partial_l \zeta^{rs}_\alpha = -\zeta^{hk}_\alpha \Gamma^{rs}_{hkl} - \delta^r_l \zeta^s_\alpha - \delta^i_l \zeta^r_\alpha . \end{cases}$$

Si derivi due volte la prima di queste equazioni eliminando ad ogni passo le $\partial_l \zeta^r_\alpha$, $\partial_l \zeta^{rs}_\alpha$ mediante le altre due; si ottiene (omettendo ormai l'indice α)

$$(7.2) \qquad \begin{cases} \partial_h \xi = -\Gamma^{\cdots}_{pqh} \zeta^{pq} \\ \partial_{hk} \xi = -A_{hk\,,\,pq} \zeta^{pq} + \Gamma^{\cdots}_{hkp} \zeta^p \\ \partial_{hkl} \xi + \Gamma^{\cdots}_{hkl} \xi = -B_{hkl\,,\,pq} \zeta^{pq} + C_{hkl\,,\,p} \zeta^p \end{cases}$$

(5) Si può anche dire che il sistema (I) equivale alla geometria centro-affine di V_n, cioè alla geometria di V_n in uno spazio proiettivo ad $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ dimensioni in cui siano fissati un punto e un iperpiano non appartenentisi.

e quindi il risultato dell'eliminazione di z^{pq}, z^{p} può mettersi nella forma

$$(\bar{I}) \qquad \begin{matrix} 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} \\ n \end{matrix} \left| \begin{matrix} \partial_r \xi & \overbrace{\cdots \Gamma^{\cdots}_{pqr} \cdots}^{pq} & \overbrace{\cdots 0 \cdots}^{p} \\ \partial_{rs} \xi & \cdots A_{rs,pq} \cdots & \cdots \Gamma^{\cdots}_{rsp} \cdots \\ \partial_{hkl} \xi + \Gamma^{\cdots}_{hkl} \xi & \cdots B_{hkl,pq} \cdots & \cdots C_{hkl,p} \cdots \end{matrix} \right| = 0$$

ove r e p variano da 1 ad n, rs e pq variano descrivendo tutte le combinazioni con ripetizione a due a due di $1, \cdots, n$.

Si ha:

$$(7\cdot3) \qquad \begin{cases} A_{hk,pq} = \partial_k \Gamma^{\cdots}_{pqh} - 2\,\Gamma^{\cdots}_{rsh}\,\Gamma^{rs}_{qpk} \\ B_{hkl,pq} = \partial_l A_{hk,pq} - 2\,A_{hk,ij}\,\Gamma^{ij}_{qpl} + \Gamma^{\cdots}_{hki}\,\Gamma^{i}_{pql} \\ C_{hkl,p} = \partial_l \Gamma^{\cdots}_{hkp} + A_{hk,lp} \end{cases}$$

e la simmetria rispetto ad hk e ad hkl è assicurata dalle condizioni d'integralità di (I).

Si potrebbe dare al sistema ($\bar{I}$) aspetto differente introducendo gli elementi reciproci di quelli del determinante che si ottiene dal primo membro di ($\bar{I}$) sopprimendovi la prima colonna e l'ultima linea.

È geometricamente evidente che *le condizioni d'integrabilità dei sistemi aggiunti* (I) *e* ($\bar{I}$) *sono le stesse, e che il sistema aggiunto dell'aggiunto è il sistema* I.

A differenza dei sistemi del 2° ordine è da notare che *il sistema* (I) *non può essere autoaggiunto se non è* $\Gamma^{\cdots}_{pqr} = 0$.

Ma in questo caso l'interpretazione precedente perde interesse perchè la V_n non appartiene ad uno spazio ad $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ dimensioni, ma solo ad $\frac{n(n+3)}{2}$, perchè, come mostrano le $\partial_h \xi_\alpha = 0$, lo S (2) osculatore generico è fisso e perciò contiene la V_n [6].

(6) Si noti che anche nel caso dei sistemi del 2° ordine studiati dal Bianchi e dal Maxia bisogna escludere che sia $b^{\cdots}_{rs} = 0$ non potendosi definire, se $b^{\cdots}_{rs} = 0$, un sistema aggiunto. La varietà rappresentativa V_n è un S_n (tangente fisso in ogni punto di V_n).

Meccanica. — *Il superamento della barriera del suono in Aviazione.* Nota I [1] del Socio G. A. Crocco.

Il reattore propulsivo. – In uno studio sulle alte velocità in Aviazione, comunicato all'Accademia dei Lincei nel 1926 [2], fu tracciato il problema della *superaviazione*, cioè di un'aviazione a velocità maggiori di quella del suono, economicamente ottenuta mediante il volo a quote stratosferiche. Nel 1931 [3] fu poi precisato quale agente risolutivo di tale possibilità uno speciale propulsore a reazione, a captazione d'aria esterna, il cui principio era stato schematicamente indicato da Lorin sin dal 1913.

In un simile propulsore, che usufruisce della autopressione dell'aria captata e di un successivo soprariscaldamento per incrementarne la velocità di uscita, il rendimento risulta crescente con la velocità dell'aeroplano; ed a velocità maggiori di quelle del suono eguaglia e supera quello dell'ordinario gruppo motore–elica.

La difficoltà principale dell'attuazione di questo congegno puramente termico, privo di organi meccanici in moto, proveniva dal suo scarso rendimento alle piccole velocità: per cui rimaneva pur sempre necessario associarlo a un gruppo motore–elica ausiliario per la partenza e l'avviamento.

Oggi, com'è noto, questa difficoltà è stata superata mediante l'adozione di un turbo–compressore rotante; che, fornendo fin dalla partenza la pressione necessaria, rende autonomo il propulsore a reazione, o come oggi si dice il *reattore*; esonerando l'aereo dalla necessità di ricorrere all'elica ed al motore alternativo.

Appare quindi intuitivo che, opportunamente raggiunta una certa velocità di volo, possa sostituirsi al turbo–compressore il propulsore aerotermodinamico puro: cioè possa operarsi il passaggio, come oggi si direbbe, dal *turboreattore* all'*autoreattore*.

La presente Nota si propone di aggiornare l'importante problema, e di indicare su questa via le possibilità concettuali dell'Aviazione ipersonora.

Da un tal punto di vista, svolgeremo la trattazione numerica del turboreattore e dell'autoreattore introducendo alcune ipotesi limiti semplificanti.

Ammetteremo anzitutto che nella camera di combustione del reattore la velocità dell'aria che incontra i bruciatori sia trascurabile; che la sua sopraelevazione di temperatura, τ, per l'auto compressione; e quella, ϑ, per effetto della prevalenza meccanica del compressore si ottengano adiabaticamente; e che siano costanti la prevalenza, ϑ, e il rendimento cinetico della canalizzazione. Supporremo inoltre che, nell'equilibrare la potenza richiesta

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) G. A. Crocco, *Possibilità di superaviazione*, 7 febbraio 1926.

(3) Id., *Corpi aerodinamici a resistenza negativa*, «Rend. Lincei», 12 giugno 1931.

dal compressore, la turbina risenta una caduta di temperatura esattamente eguale a ϑ; ed infine che lo scarico finale raggiunga una pressione esterna eguale a quella ambiente.

Siano allora T_0, V_0, p_0 la temperatura assoluta, la velocità dell'aria e la pressione all'esterno; T_1, p_1 la temperatura e la pressione dovuta alla autocompressione; T_2, p_2 la temperatura e la pressione raggiunta dopo il compressore; T_3 la temperatura che si ottiene dopo l'incremento ΔT fornito dai bruciatori a pressione $p_3 = p_2$; T_4, p_4 la temperatura e la pressione all'uscita dalla turbina; ed infine T_5, V_5, $p_5 = p_0$, la temperatura, la velocità dell'aria e la pressione all'uscita dall'effusore; tutte misurate in gradi centigradi e in kg. per mq.

Le velocità intermedie dell'aria V_1, V_2, V_3 si suppongono nei calcoli trascurabili di fronte a V_0. Supponendo poi una sovrapposizione di effetto termico fra l'incremento di temperatura τ dovuto al ristagno di velocità e l'incremento ϑ dovuto alla prelevanza nel compressore, comunque si distribuiscano lungo la canalizzazione parte fissa e parte rotante, porremo $T_1 = T_0 + \tau$; $T_2 = T_0 + \tau + \vartheta$; $T_3 = T_2 + \Delta T$; $T_4 = T_3 - \vartheta$; e ricaveremo T_5, per una supposta parità di rapporto fra le pressioni p_0 e p_2; p_4 e p_0 dalla relazione adiabatica $T_5 T_2 = T_3 T_0$.

Se pertanto è g l'accelerazione della gravità, E l'equivalente meccanico della caloria, C_p il calore specifico a pressione costante, ricaveremo in definitiva, per questo schema idealmente semplice di reattore, la velocità di uscita, V_5, dalla

$$(1) \qquad \frac{V_5^2}{2g\,E c_p} = \frac{T_3(\tau+\vartheta)}{T_0+\tau+\vartheta} - \vartheta = \frac{\Delta T(\tau+\vartheta)}{T_0+\tau+\vartheta} + \tau;$$

da cui sottrarremo le perdite dovute alla canalizzazione, εV_0^2, nell'ipotesi di assenza d'urto sia all'ingresso dell'aria che in ogni punto della canalizzazione medesima. Accenneremo fra poco alla ipotesi di ingresso con urto.

La (1) fornisce la velocità di uscita, $V_5 = U_0$, per il funzionamento del *turboreattore* a punto fisso ($V_0 = 0$; $\tau = 0$), per cui dà:

$$(2) \qquad \frac{U_0^2}{2g\,E c_p} = \Delta T \frac{\vartheta}{T_0+\vartheta};$$

nella quale si introdurrà un fattore di rendimento globale per tener conto delle perdite di canalizzazione.

La (1) fornisce altresì la velocità d'uscita dell'*autoreattore* ($\vartheta = 0$); cioè

$$(3) \qquad \frac{(V_5)_A^2}{2g\,E c_p} = \tau + \Delta T \frac{\tau}{T_0+\tau}.$$

In tutte queste espressioni si calcola τ con la $V_0^2 = 2g\,E c_p \cdot \tau$.

Introdurremo ora nella espressione generale (1) la posizione simbolica $V_5^2 - V_0^2 = \sigma V_0^2$; che ci definisce un coefficiente, σ, di prevalenza cinetica utile al calcolo ed al confronto dei reattori. Introducendovi le perdite di

canalizzazione, εV_o^2; e tenendo conto della espressione di τ; potremo allora scrivere le (1) sotto le forme adimensionali

$$(4) \qquad \sigma + \varepsilon = \frac{\Delta T}{\tau} \frac{\tau + \vartheta}{T_o + \tau + \vartheta}\,; \quad (\sigma + \varepsilon)_A = \frac{\Delta T}{T_o + \tau}\,;$$

di cui la prima vale genericamente per il turboreattore e la seconda si riferisce all'autoreattore ($\vartheta = o$).

Entrambe queste espressioni, valevoli per il caso dell'entrata dell'aria senza urto, consentono di calcolare la forza propulsiva del reattore per τ diverso da zero; conoscendo il fattore di perdita ε e valutando opportunamente la massa d'aria entrante nel diffusore durante l'unità di tempo.

Perciò, dato lo scopo di questo studio, limiteremo il calcolo a velocità non inferiori alla velocità del suono nell'aria ambiente; e supporremo che la massa d'aria si esprima mediante il prodotto della densità esterna dell'aria, ρ, per la velocità V_o e per una luce d'ingresso frontale che chiameremo *imboccatura* e indicheremo con ω_o. L'imboccatura ω_o sarà quindi definita dalla assunzione che la massa entrante risulti $\rho\,\omega_o\,V_o$. Tale massa si supporrà eguale a quella uscente, comunque calcolata, trascurando l'apporto di massa del combustibile.

Ora, per le ipotesi che sono a base del precedente calcolo e che implicitamente conducono a non superare in nessun punto del reattore la velocità del suono, l'imboccatura ω_o, per ingresso senza urto, si dovrà supporre variabile o meglio *aggiustabile* col variare della velocità V_o; ed immaginarsi seguìta da una sezione ristretta ω_1, ove si raggiunga la velocità locale del suono e che sia proporzionata alla luce frontale A di accesso alla ruotante del compressore, supposta invariabile; e dove non dovrà mai venir superata la velocità dell'aria prestabilita dal costruttore. Se pertanto si indicano con M_o ed M_a i *numeri di Mach* corrispondenti alla velocità dell'aria nell'imboccatura ω_o e nella luce di accesso fissa A, e si prende come rapporto dei calori specifici $K = 1{,}4$; si dovrà avere tra la luce variabile ω_o e la luce fissa A la relazione

$$(5) \qquad \frac{\omega_o}{A} = \frac{M_a}{M_o}\left(\frac{1 + 0{,}2\,M_o^2}{1 + 0{,}2\,M_a}\right)^3\,;$$

che consente di calcolare l'imboccatura necessaria per ogni velocità di cammino.

Se invece si suppone che ω_o sia già una sezione ristretta costante della canalizzazione e che l'ingresso dell'aria avvenga in conseguenza *con urto frontale*, in tal caso le pressioni a valle andranno calcolate con le leggi dell'urto [4], e la formulazione della velocità d'uscita dell'aria dal reattore risulterà alquanto

(4) L. Crocco, *Singolarità della corrente iperacustica* ... « Aerotecnica », n. 6, vol. XVII, giugno 1937.

peggiorata. Si può tuttavia riportarsi sempre alla (1) introducendovi un parametro δ definito da

$$\delta \frac{(1 + 0,2\,M_o^2)\,(7\,M_o^2 - 1)^{5/7}}{4,3\,M_o^2}; \tag{6}$$

per $K = 1,4$; e scrivendo al posto della (4)

$$(\sigma + \varepsilon)\,\tau = \Delta T\left(1 - \frac{\delta\,T_o}{T_o + \tau + \vartheta}\right) - (1 - \delta)\,T_o; \tag{7}$$

valevole per il caso di imboccatura con urto. Ma in questo caso la semplicità dello schema costruttivo dà luogo a una maggiore complicazione dello schema simbolico.

Così precisata comunque la definizione dell'imboccatura ω_o, che risulterà la chiave costruttiva delle possibilità del reattore, possiamo ora esprimerne la spinta F mediante la

$$F = \rho\,\omega_o\,V_o\,(V_5 - V_o) = \rho\,\omega_o\,V_o^2 \cdot C_F; \tag{8}$$

dove il *coefficiente di spinta* C_F, per la posizione che definisce la prevalenza cinetica σ, sarà dato da

$$C_F = -1 + \sqrt{1 + \sigma}; \quad \sigma = C_F\,(2 + C_F); \tag{9}$$

mentre al *coefficiente di portanza* che riferisce il peso di un aereo, Q, alla superficie alare, potrà sostituirsi occorrendo un nuovo coefficiente che indicheremo con ψ e che lo riferisce alla definita imboccatura ω_o. Ne faremo uso nella terza parte di questo studio.

Le formulazioni precedenti estendono la nozione di *corpo aerotermodinamico* (5) ai reattori con prevalenza meccanica e termica simultanea; ma sono da ritenere valide soltanto per velocità ipersonore.

Del campo subsonoro potremo considerare soltanto il funzionamento a punto fisso, cioè per $V_o = 0$, ricorrendo a noti risultati di misure sperimentali, le quali conducono ad assegnare alla velocità d'entrata dell'aria nel reattore, attraverso la luce A, un valore pari a circa il quarto della velocità di uscita U_o, rendimento compreso. Si ha così, con buona approssimazione, posto $A = \omega_o$;

$$F_o = \rho\,\omega_o \frac{U_o^2}{4}; \tag{10}$$

mentre la velocità U_o, per le massime velocità periferiche consentite dalla resistenza meccanica degli organi rotanti, risulta al banco di prova di un ordine di grandezza superiore a 600 metri al secondo.

Non è però precisabile in questa schematica impostazione concettuale una legge di passaggio dalla spinta a punto fisso a quella calcolabile per $M_o = 1$.

(5) Nota citata.

Una essenziale considerazione va fatta a questo punto circa la sopraelevazione di temperatura ΔT dalla quale dipende la prevalenza cinetica σ e quindi il coefficiente di spinta C_F. Tale incremento ΔT risulta infatti limitato unicamente dalla temperatura massima raggiungibile nella camera di combustione. Stabilita questa temperatura massima a seconda delle modalità costruttive del reattore, l'incremento ΔT diminuisce rapidamente col crescere della velocità di cammino e della conseguente temperatura di autocompressione, fino ad annullarsi. Cosicchè anche σ e C_F decrescono e finiscono coll'annullarsi.

Ma vi è una differenza notevole per il caso del turboreattore in confronto coll'autoreattore. Nel primo caso la ΔT è contenuta dalla massima temperatura sopportabile dalle palette della turbina; per cui potremo scrivere

$$T_0 + \vartheta + \tau + \Delta T = \boxed{T_c} \tag{11}$$

e ritenere $\boxed{T_c}$, attualmente, dell'ordine di grandezza di 1000° assoluti. Invece nell'autoreattore, evitando parti metalliche nella camera di combustione, la ΔT può essere maggiore non soltanto perchè $\vartheta = 0$, ma sopratutto perchè la massima temperatura sopportabile da pareti refrattarie può raggiungere cifre oltre ai 2000°. Porremo in questo caso

$$T_0 + \tau + \Delta T = \boxed{T_A}. \tag{12}$$

È interessante tuttavia cercare per quale valore di τ, cioè di V_0, l'autoreattore possa fornire la stessa prevalenza cinetica σ del turboreattore, malgrado l'assenza di prevalenza meccanica; e quindi la stessa forza propulsiva, nel caso si abbia $T_A = T_c$. Dovrà aversi

$$\boxed{T_c}\,\frac{\tau + \vartheta}{T_0 + \tau + \vartheta} - \vartheta = \boxed{T_A}\,\frac{\tau}{T_0 + \tau}$$

da cui si deduce, posto $\boxed{T_A} = \boxed{T_c}$, la

$$\tau^2 + (2\,T_0 + \vartheta)\,\tau - T_0\left[\boxed{T_c} - (T_0 + \vartheta)\right] = 0\,;$$

che definisce τ. Per $T_c = 1000°$; $T_0 = 225°$ (stratosfera); $\vartheta = 120°$; si ottiene $\tau = 191°$; il che si verifica per una velocità di 610 m/sec; cioè poco più del doppio della velocità del suono nella stratosfera, che si prende eguale a 300 metri/sec.

Al disotto di questo valore, $\tau = 191°$, un turboreattore della indicata prevalenza $\vartheta = 120°$ fornisce una spinta maggiore di un autoreattore sottoposto alla medesima temperatura massima $\boxed{T_c} = 1000°$; ma poichè $\boxed{T_A}$ può sempre superare $\boxed{T_c}$ in un autoreattore a ciò predisposto ne segue

che l'eguaglianza di spinta può aver luogo anche a velocità minori. Così a velocità di 450 m/sec basta $\boxed{T_A} = 1210°$ per equivalere a $\boxed{T_c} = 1000°$; e a 360 metri basta $\boxed{T_A} = 1480$. È quindi possibile fin da quest'ultimo valore di V_o che supera di appena un quinto la velocità del suono nella stratosfera, sostituire, con opportuna manovra, l'autoreattore al turboreattore e mantenerlo poi vantaggiosamente a velocità superiori.

Il quadro che segue mostra questo vantaggio nel confronto fra un turboreattore con ingresso senza urto e $\boxed{T_c} = 1000°$ ed un autoreattore con $\boxed{T_A} = 1500°$. Il confronto vale per la stratosfera ove si suppone $T_o = 225°$. Le perdite sono valutate prendendo $\varepsilon = 0,1$. La prevalenza del compressore è $\vartheta = 120°$.

M_o	τ gradi C	Turboreattore				Autoreattore			
		T_2 gradi C	ΔT	σ	C_F	T_2	ΔT	σ	C_F
1	45	165	610	5.64	1.57	270	1230	4.55	1.35
1.2	65	185	590	4.00	1.24	290	1210	4.07	1.25
1.5	101	221	554	2.61	0.90	326	1174	3.50	1.12
2	180	300	475	1.41	0.55	405	1095	2.60	0.90
2.5	280	400	375	0.76	0.33	505	995	1.87	0.70
3	405	525	250	0,33	0.16	630	870	1.28	0.51
4	720	840	—	—	—	945	550	0.59	0.26

Si rileva dal quadro che, a parità di imboccatura e di quota, la spinta dell'autoreattore nelle condizioni termiche anzidette e per un numero di Mach $M_o = 3,5$ è più che *tripla* di quella del corrispondente turboreattore. Per $M_o = 4$ l'autoreattore si presenta ancora efficiente mentre il turbo risulta impossibile. Combinazioni costruttive dei due tipi, in serie o in quantità, si intravedono vantaggiose.

Ma occorre ormai valutare le resistenze che i reattori dovranno incontrare in queste velocità ipersonore per chiarire ulteriormente il loro funzionamento aviatorio. Il che faremo nella Nota II.

Fisica. — *Nuova formulazione del principio di Huygens–Fresnel*, Nota [1] di E. Perucca e L. A. Radicati, presentata dal Socio E. Perucca.

1. Sia $f(x, y, z, t)$ una funzione del posto x, y, z, e del tempo t, che soddisfa all'equazione « della propagazione per onde »

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{V^2} \Delta f \tag{1}$$

ove V si immagina costante ed ha significato di velocità di propagazione dell'onda. Vale la formula di Kirchhoff [2]

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{df}{dn} + \left(\frac{1}{Vr} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} f \right) \frac{dr}{dn} \right]_{t - r/V} dS \tag{2}$$

che dà i valori di f in un punto $P(x, y, z)$ all'istante t, in funzione dei valori che $f, \frac{df}{dn}, \frac{\partial f}{\partial t}$ assumono all'istante $t - v/V$ in ciascun punto A di una superficie chiusa S racchiudente P; r è la distanza AP; dS è l'elemento di superficie S intorno ad A, n è un asse normale a dS in A e volto verso l'esterno di S.

Fisicamente $f(x, y, z, t)$ può essere una delle seguenti grandezze:

1. Una qualsiasi delle componenti dello spostamento nel caso di onde elastiche, sia longitudinali o di dilatazione, che trasversali o di distorsione.

2. Una delle componenti dei vettori $\vec{E}$ e $\vec{H}$ nel caso di onde elettromagnetiche.

3. Una delle componenti del potenziale vettore nel caso di onde trasversali.

4. Il potenziale scalare per onde di dilatazione.

5. La dilatazione per onde di dilatazione.

Qui non interessa precisare quale di queste grandezze si consideri; per fissare le idee ci si può riferire al caso di onde elastiche di dilatazione.

La (2) è in sostanza una semplice identità matematica cui soddisfano le funzioni che sono soluzioni della (1): essa è quindi logicamente inattaccabile e come tale da preferirsi al principio di Huygens–Fresnel.

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1946.

(2) Cfr., per esempio, E. Persico, *Introduzione alla Fisica Matematica*, p. 292, Zanichelli, Bologna, 1941; a parte qualche irrilevante variazione di simboli.

2. Il principio di Huygens, nella forma modificata da Fresnel, viene ancor comunemente invocato per svolgere una teoria elementare dei fenomeni di diffrazione. La forma consueta data a questo principio è la seguente: « *Le vibrazioni che si propagano all'esterno di una superficie* S, *chiusa, all'interno della quale si trova la sorgente di onde* X, *sono identiche a quelle che si avrebbero sopprimendo questa sorgente e sostituendola con delle sorgenti convenienti distribuite sulla superficie* S » La natura di queste sorgenti è precisata dal postulato di Fresnel: « Un punto A della superficie S agisce come una sorgente, la cui ampiezza di vibrazione e la cui fase, sono precisamente ampiezza e fase della vibrazione prodotta in A dalla sorgente X » (3).

3. La differenza fra formula di Kirchhoff e principio di Huygens–Fresnel non sta nel fatto del tutto irrilevante che S nel primo caso sia stata assunta in modo da circondare il punto P, nel secondo in modo da circondare la sorgente X o più generalmente tutte le sorgenti. La (2) vale anche con siffatta superficie S e con convenienti condizioni all'infinito; il principio di Huygens può enunciarsi anche per una superficie S circondante P; l'essenziale è che S separi le sorgenti dal punto P.

Il principio di Huygens–Fresnel, d'accordo con ben noti fatti sperimentali qualitativi citati in suo appoggio diretto, appare più aderente all'intuizione fisica del fenomeno, della propagazione per onde, e il supporre S circondante X conduce nel modo più naturale a identificare poi S con una superficie d'onda delle onde emesse dalla sorgente X supposta puntiforme.

Al contrario della formula di Kirchhoff, il principio di Huygens–Fresnel, nella forma di § 2 è dichiarato insoddisfacente per due motivi:

1. la fase della vibrazione generata in P dall'interferenza delle onde elementari emesse dai singoli punti di S risulta errata di $\pi/2$;

2. perchè risulti un'onda retrograda nulla come vuole l'esperienza, occorre completare il postulato di Fresnel con l'ipotesi ulteriore di una opportuna dipendenza dell'intensità delle onde elementari dalla direzione di propagazione. Di questa ulteriore ipotesi manca una giustificazione fisica.

Il primo di questi inconvenienti è stato eliminato nella teoria elementare della diffrazione svolta da Perucca (4). Non così il secondo.

4. Non sembra sia stato segnalato che l'enunciato consueto di § 2 del principio di Huygens, anzicchè insoddisfacente, è talvolta in assoluto contrasto con l'esperienza.

Si immagini ad esempio un'onda piana Σ muoventesi in una certa direzione x con velocità V, e impulsiva, cioè avente un profilo $f = f(x)$

(3) Cfr., per esempio, G. Bruhat, *Cours d'Optique*, p. 164. Masson, Paris, 1931.

(4) E. Perucca, *Fisica generale e sperimentale*. II vol., § 120, p. 211, UTET, Torino, 1942.

a $t = \text{cost}$ del tipo indicato in fig. 1. Sia a l'intervallo dell'asse delle x interessato all'onda; a è, per così dire, lo « spessore » dell'onda impulsiva.

Si cerchi di calcolare lo stato di vibrazione in un punto P servendosi del principio sopracitato quando come superficie S si prenda una sfera con centro P e raggio arbitrario r, ma grande rispetto ad a, tanto che in figura lo « spessore » di Σ è stato disegnato addirittura trascurabile. Se t è l'istante in cui l'onda Σ passa per P, all'istante $t - r/V$ essa è tangente alla sfera in A_1 (fig. 2) mentre per valori del tempo maggiori di $t - \frac{r}{V}$ l'onda è secante alla sfera. Quindi per ogni istante compreso fra $t - r/V$ e t, lo stato di vibrazione in una zona sferica $C_1 C_2$ è diverso da zero e dappertutto concorde. Pertanto in P, giungono eccitazioni certamente non nulle per tutto l'intervallo di tempo $t - r/V + r/V , t + r/V$.

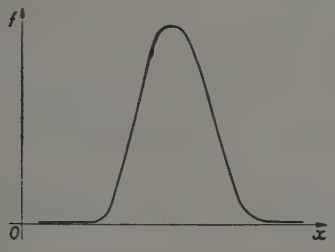


Fig. 1.

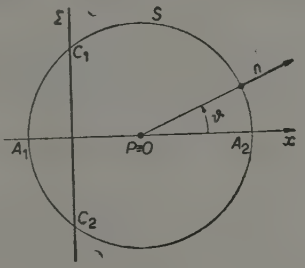


Fig. 2.

Dunque dall'applicazione del principio di Huygens–Fresnel, pure escludendo onde retrograde e senza fare questione di fasi, risulta che in P non passa un'onda impulsiva di durata a/V come effettivamente avviene, ma P è in stato eccitato per tutto l'intervallo di tempo $t, t + r/V$ (con r arbitrario!).

5. Naturalmente la formula di Kirchhoff porta al risultato esatto. Infatti per un'onda piana

$$f(x , y , z , t) = f(x - Vt)$$

nel caso di fig. 2 si ha

$$\frac{dr}{dn} = 1 \quad ; \quad \frac{df}{dn} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -V \frac{\partial f}{\partial x}$$

e il 2° membro della (2) è

$$(3) \qquad \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial x} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{r^2} f \right]_{t - r/V} dS =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\left(\frac{x}{r} - 1 \right) f \right]_{-r}^{r} \right\}_{t - r/V} = f(-Vt)$$

ossia lo stato di vibrazione in P ($x = 0$) è proprio $f(0 - Vt)$, cioè quello voluto dalla propagazione dell'onda piana. Nel caso dell'onda impulsiva, la f nel punto $P \equiv O$, cioè $f(-Vt)$, risulta $\neq 0$ solo per quei valori di t, per cui all'istante $t - r/V$, l'onda piana impulsiva con il suo spessore a copre il punto A_1 (fig. 2).

6. Scopo di questa Nota è mostrare come sia possibile modificare l'enunciato del principio di Huygens–Fresnel in modo da porlo in accordo con i fatti sperimentali, e quindi con la formula di Kirchhoff.

Dalla (2) si vede che ciascun punto A della superficie S è centro di emissione:

a) di onde generate dalla variazione della f da punto a punto nella direzione $n = AP$: la loro ampiezza è proporzionale a $\frac{df}{dn}$ e diminuisce in ragione inversa alla distanza $r = AP$. Queste onde si possono chiamare *onde di pressione* per l'analogia evidente con le onde di pressione di un gas;

b) di onde generate dalla variazione della f con il tempo (*onde di velocità*). La loro ampiezza è proporzionale a $\frac{\partial f}{\partial t}$ e diminuisce in ragione inversa alla distanza $r = AP$;

c) di onde generate dallo spostamento f dei punti della superficie S dalla posizione di riposo (*onde di spostamento*).

Le onde *c*) si smorzano molto più rapidamente di quelle *a*) e *b*), poichè la loro ampiezza diminuisce in ragione inversa al quadrato della distanza r. Si potrà quindi trascurare le onde *c*) negli stessi limiti in cui ciò si fa di consueto.

Da quanto sopra, appare evidente come si debba rinunciare al postulato di Fresnel di § 2, e si debba sostituire alle ambigue « sorgenti convenienti » del principio di Huygens, la precisazione delle onde *a*) e *b*); (per una teoria elementare cfr. § 10).

7. Così la fase di vibrazione in P non è quella che si deduce dalla fase di vibrazione di f in A e dalla distanza $r = AP$ come vuole il postulato di Fresnel. La fase di vibrazione in P è quella dovuta a $\frac{df}{dn}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ alla distanza r.

Nel caso di onde sinusoidali ciò fa spostare di $\pi/2$ la fase di vibrazione in P; scompare così l'errore di fase rimproverato al postulato di Fresnel.

8. Così l'onda retrograda viene logicamente eliminata senza l'aggiunta di un'ipotesi ad hoc. Fissiamo per semplicità l'attenzione sul caso di onde piane (fig. 2) e sui punti A_1 e A_2. Mentre per l'area intorno ad A_1 le onde *a*) e *b*) sommandosi si esaltano, per l'area intorno ad A_2 si elidono.

Ciò deriva dal fatto che mentre in A_1 la normale ad S è orientata in verso discorde alla propagazione dell'onda, in A_2 è orientata in verso concorde. Tenendo conto del fatto che nella (3) le onde *a*) e *b*) figurano con segno diverso, si vede come solo quando la normale ad S e l'asse x sono orientate in verso discorde si abbia esaltazione per sovrapposizione delle due onde.

Si può dire intuitivamente che la mancanza di onde regressive deriva dall'elisione delle onde di pressione con quelle di velocità.

9. Così per l'onda piana impulsiva di § 4, si calcoli lo stato di vibrazione nel punto P all'istante $t' < t$ a cui corrisponde la fig. 2, cioè quando l'onda impulsiva è in Σ, servendosi del principio di Huygens nella nuova forma qui proposta. Tutti gli elementi dell'area della sfera, tranne quelli della corona circolare $C_1 C_2$ portano contributo nullo, perchè in essi, $f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}$ sono nulli.

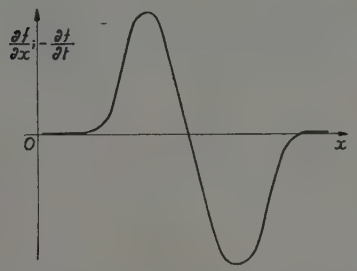


Fig. 3.

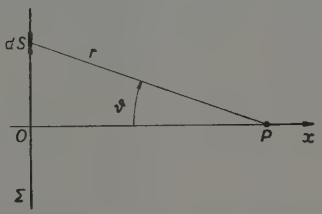


Fig. 4.

Gli elementi della corona circolare portano ora anch'essi in totale contributo nullo, perchè nell'onda impulsiva $f = f(x)$ $(t = \text{cost})$ di fig. 1, le due derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ hanno entrambe l'andamento di fig. 3. Quindi il contributo delle varie parti di quella corona è in parte positivo e in parte negativo e si comprende come la risultante possa essere nulla. Il ragionamento non è del tutto rigoroso, ma l'errore che si commette è dello stesso ordine di quello che si è fatto a § 6 trascurando le onde *c*).

10. L'enunciato di § 6 per il principio di Huygens è ancora troppo complicato perchè si possa farlo base di una teoria elementare della diffrazione.

Si può semplificarlo notevolmente nel caso di un'onda primaria piana Σ (fig. 4) quando si trascurino le onde *c*) e come superficie S si prenda la stessa superficie d'onda. Si possono allora esprimere le due onde *a*) e *b*) in funzione di $\frac{\partial f}{\partial x}$ e il principio di Huygens si enuncia così:

Lo stato di vibrazione in P *è la risultante algebrica delle vibrazioni* dX *dovute alle onde partenti da ciascun elemento di superficie* dS *dell'onda* Σ. *Se* dX *è la vibrazione dovuta a* dS è:

$$dX = \frac{1}{4\pi} \frac{(\cos\theta + 1)}{r} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{t-r/V} dS; \tag{4}$$

per un'onda piana sinusoidale è in particolare [5]

$$f = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Quindi è

$$dX = \frac{\cos\theta + 1}{2\lambda r} a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{r}{\lambda} + \frac{1}{4}\right) dS. \tag{6}$$

La (6) è proprio la formula di partenza della teoria della diffrazione svolta da Perucca [4] (a parte qualche irrilevante cambiamento di simboli). Ma le funzioni $f_1(\theta), f_2(\lambda)$ che erano lasciate a priori imprecisate da quest'Autore sono qui state fissate in previsione di accordare la (6) con la formula di Kirchhoff. È

$$f_1(\theta) = \frac{\cos\theta + 1}{2} \tag{7}$$

$$f_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda}. \tag{8}$$

Perucca mostra come per far tornare i risultati si debbano assumere appunto $f_1(\theta) \approx 1$ per θ piccolo (è questo il solo caso trattato nella teoria elementare della diffrazione) e $f_2(\lambda) = 1$. Qui molto più soddisfacentemente la (8) risulta necessaria conseguenza delle (4) e (5). La (7) appare ancora come una posizione arbitraria, che può giustificarsi però per mezzo della formula di Kirchhoff.

In conclusione dal principio di Huygens nella forma (4) è possibile dunque derivare una teoria elementare della diffrazione del tutto soddisfacente.

(5) Per uniformarci all'uso consueto si è qui usata la (5) per un'onda piana in luogo dell'espressione di § 5. La differenza fra le due espressioni non proviene che da un'orientamento diverso degli assi.

Fisica. — *Sulla polarizzazione della luce del cielo.* Nota II [1] del Corrisp. A. Carrelli.

§ 1. Modifiche alla teoria di Hurion [2]. – Hurion ha ulteriormente perfezionata la teoria di Soret ed è giunto a risultati più conclusivi, in quanto ha ricavato in particolare l'azione dipendente da un cerchio diffondente situato nel piano del Sole. L'ipotesi fondamentale di Hurion è quella di un cerchio diffondente omogeneo, ed in base a tale ipotesi supponendo che a rappresenti l'ampiezza dipendente dalle particelle diffondenti situate in tale cerchio relativamente all'unità di lunghezza, le tre componenti dell'intensità sono date dalle relazioni:

$$X = 2\pi a \frac{1}{8} \quad ; \quad Y = \frac{1}{2} + 2\pi a \quad ; \quad Z = \frac{1}{2} + 2\pi \frac{3}{8} .$$

Per ricavare il grado di depolarizzazione nel piano del Sole in un punto di altezza φ, Hurion introduce due parametri n e m dati dalle relazioni:

$$n = \frac{Y - Z}{Z} \quad ; \quad m = \frac{Z - X}{Z}$$

e trova che il grado di depolarizzazione $1 - p$ è dato da

$$1 - p = \frac{m \cos^2 \varphi - n \operatorname{sen}^2 \varphi}{2 - (m \cos^2 \varphi - n \operatorname{sen}^2 \varphi)},$$

inoltre la tangente dell'angolo φ_1, che è il complemento dell'angolo α e cioè la distanza angolare dei punti di Brewster e Babinet dal Sole, e del punto di Arago (come dell'altro punto simmetrico rispetto a quello d'Arago ma non riscontrato sperimentalmente) dall'antisole è dato da:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{m}{n} = \frac{Z - X}{Y - Z} .$$

Sostituendo ad X , Y , Z i valori dati dalle formule scritte si ottiene che

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{4 + 2 \cdot 2\pi a}{5 \cdot 2\pi a} .$$

Di qui si ricava che nell'ipotesi del cerchio diffondente omogeneo la posizione dei quattro punti neutri dipende da un unico parametro a, e questi quattro punti hanno a coppie posizioni simmetriche rispetto al piano determinato dall'asse Sole-Antisole e dalla retta orizzontale perpendicolare a detto asse.

(1) Presentata nella seduta del 15 giugno 1946.

(2) Per la Bibliografia vedi Nota I, questo vol., pag. 493.

Nell'applicazione che però fa della sua teoria l'Hurion per lo studio della polarizzazione della luce del cielo utilizza i due parametri sopra definiti, m ed n. Ma in base alle relazioni precedenti si può ricavare il valore di m per esempio in funzione del valore di n, si ha infatti

$$(1) \qquad m = \frac{5 - n}{5},$$

quindi in sostanza interviene un parametro unico.

Già nell'applicazione che fa della teoria ad esperienze condotte con soluzioni colloidali, Hurion fa uso di due parametri distinti m ed n, senza confrontare se i due valori sono tali da soddisfare alla loro definizione, e cioè funzioni ben definite di un unico parametro a di valori in accordo con la (1); in effetti per soluzioni colloidali risulta per esempio per $n = 0.4$ un valore teorico di $m = 0.91$, mentre sperimentalmente dalle misure da lui compiute si ottiene $m = 0.721$. Inoltre utilizzando le misure da lui fatte sulla polarizzazione del cielo si può ricavare questa tabellina, da cui risulta come non sia possibile spiegare i dati sperimentali con un unico parametro.

n	m_1	m_2
0.12	0.96	0.306
0.22	0.95	0.758
0.24	0.95	0.594
0.16	0.97	0.594
0.15	0.97	0.747
0.12	0.97	0.939
0.11	0.97	0.699
0.10	0.98	0.703

È dunque necessario da un punto di vista sperimentale l'impiego di due parametri m ed n distinti, e non soddisfacenti la (1), per spiegare l'andamento ricavato direttamente, che in tal modo però viene descritto in maniera accettabile.

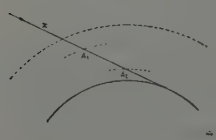


Fig. 1.

Vediamo ora quali elementi sono da modificare nella teoria di Hurion: l'ipotesi che bisogna lasciare cadere è evidentemente quella della simmetria del cerchio diffondente ammettendo invece una diversità di distribuzione di pulviscolo. Ricaviamo in primo luogo le conseguenze che derivano da questa posizione più generale in rapporto alle posizioni dei punti neutri. Infatti la simmetria del cerchio

diffondente potrebbe al massimo accettarsi qualora si consideri il Sole nel piano dell'orizzonte, ma non è più possibile tale ipotesi semplificatrice quando il Sole è fuori da questo piano, poichè come si può vedere nella fig. 1, nella parte opposta al Sole si è nella zona della bassa atmosfera, e quindi nella zona dove il pulviscolo è maggiore.

Com'è noto sia dal Soret che dall'Hurion, supponendo l'esistenza di un cerchio diffondente nel piano dei raggi solari e nell'ipotesi che tali raggi provengono nella direzione x (x negativo), le tre intensità nelle tre direzioni sono date da:

$$X = \int a \operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \omega \, d\omega \quad ; \quad Y = \int a \, d\omega \quad ; \quad Z = \int a \cos^4 \omega \, d\omega .$$

Di qui indicando con A l'intensità della prima diffusione, e ponendo

$$\varepsilon = \int a(\omega) [\cos^4 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \omega] \, d\omega \quad ; \quad \eta = \int a(\omega) [1 - \cos^4 \omega] \, d\omega$$

si ha per il valore della $\operatorname{tg} \varphi_1$ l'espressione

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{\frac{1}{2} A + \varepsilon}{\eta} = \frac{1}{2} \frac{A}{\eta} + \frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{A}{2} \frac{1}{k\varepsilon} + \frac{1}{k} \quad x = \frac{\eta}{\varepsilon} .$$

Nell'ipotesi dell'Hurion

$$k = \frac{\eta}{\varepsilon} = \frac{\int (1 - \cos^4 \omega) \, d\omega}{\int (\cos^4 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \omega) \, d\omega} = \frac{5}{2} .$$

Se $a(\omega)$ varia con legge lineare in funzione di ω, e cioè

$$a(\omega) = l + m\omega$$

si ottiene

$$\varepsilon = l \int (\cos^4 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \omega) \, d\omega + m \int \omega (\cos^4 \omega - \operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \omega) \, d\omega =$$

$$= 2\pi \frac{l}{4} \left(1 + 4\pi \frac{m}{2l} \right)$$

$$\eta = l \int (1 - \cos^4 \omega) \, d\omega + m \int \omega (1 - \cos^4 \omega) \, d\omega = 2\pi \, \frac{5}{8} \, l \left(1 + 4\pi \, \frac{m}{2l} \right)$$

quindi il rapporto $\frac{\eta}{\varepsilon}$ è dato ancora da $\frac{5}{2}$ indipendentemente dal valore del rapporto $\frac{m}{l}$ e cioè della variazione del quantitativo del pulviscolo. Conseguentemente

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{1}{2} A \frac{1}{\varepsilon k} + \frac{1}{k}$$

varia solo al variare di ε (supposto naturalmente A costante), effettivamente per $\frac{m}{l}$ crescente cresce ε e quindi $_{\bullet}\varphi_1$ diminuisce, e cresce l'altezza α dei punti neutri, dunque in ultima analisi sia un aumento del pulviscolo (il che significa un aumento di l), sia un aumento del rapporto $\frac{m}{l}$ aumenta l'altezza dei punti neutri.

Supponiamo ora che la legge di variazione sia anche più rapida e cioè che si abbia

$$a(\omega) = l + m\omega^2 .$$

Sostituendo si ha

$$\varepsilon = l\int (\cos^4\omega - \operatorname{sen}^2\omega\cos^2\omega)\,d\omega + m\int \omega^2(\cos^4\omega - \operatorname{sen}^2\omega\cos^2\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{2\pi}{4}l + m\left(\frac{2}{3}\pi^3 + \frac{9}{16}\pi\right)$$

$$\eta = l\int (1 - \cos^4\omega)\,d\omega + m\int \omega^2(1 - \cos^4\omega)\,d\omega =$$

$$= 2\pi\frac{5}{8}l + m\left(\pi^2 + \frac{17}{32}\pi\right)$$

$$\varepsilon = 2\pi\frac{l}{4}\left[1 + 13.9\frac{m}{l}\right] \qquad \eta = 2\pi\frac{5}{8}l\left[1 + 8.27\frac{m}{l}\right]$$

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = k = \frac{5}{2}\,\frac{1 + 8.27\,\frac{m}{l}}{1 + 13.9\,\frac{m}{l}} ;$$

al crescere di $\frac{m}{l}$ e cioè della dissimetria in questo caso k diminuisce; d'altra parte al crescere di $\frac{m}{l}$ cresce ε, e, dato che al crescere di $\frac{m}{l}$ è più rapido l'aumento di ε rispetto a quello di k, si conclude che $\operatorname{tg}^2\varphi_1$ *decresce*, e ciò porta ad un aumento dell'altezza dei punti neutri.

Si conclude dunque che non solo l'aumento del pulviscolo, ma anche l'aumento della dissimetria produce un aumento dell'altezza dei punti neutri.

§ 2. Dalla teoria di Hurion c'è ancora da ricavare un'interessante conseguenza anche utilizzando due parametri m ed n distinti, e cioè come dati sperimentali, che non soddisfano alle relazioni che si ricavano dalla loro stessa definizione. Questa conseguenza riguarda la relazione fra depolarizzazione nel piano del cerchio diffondente e l'altezza dei punti d'Arago e Babinet quando il Sole è all'orizzonte. Infatti se è soddisfatta la condizione ($\varphi_0 = 0$)

la depolarizzazione nel piano verticale ($\lambda = 0, \varphi = 0$) e precisamente all'antisole è data da:

$$1 - p_1 = \frac{Y}{Y + Z}$$

e la depolarizzazione sempre per $\varphi = 0$, ma per $\lambda = 90°$, e cioè nel piano normale a quello del Sole, è data da

$$1 - p_2 = \frac{Y}{Y + X};$$

da queste due relazioni si ricava che

$$\frac{1}{1 - p_1} = \frac{Z}{Y} + 1 \qquad \frac{1}{1 - p_2} = \frac{X}{Y} + 1$$

e quindi

$$\frac{1}{1 - p_1} - \frac{1}{1 - p_2} = \frac{Z - X}{Y}.$$

Inoltre

$$\frac{1}{1 - p_1} - 1 = \frac{Z}{Y} \qquad \frac{1}{1 - p_1} - 2 = \frac{Z - Y}{Y} \qquad 2 - \frac{1}{1 - p_1} = \frac{Y - Z}{Y}$$

da cui finalmente

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{Z - X}{Y - Z} = \frac{\dfrac{1}{1 - p_1} - \dfrac{1}{1 - p_2}}{2 - \dfrac{1}{1 - p_1}}.$$

Di qui si ricava che in base a misure di polarizzazione può ricavarsi la posizione del punto d'Arago (e quindi anche di Babinet) anche seguendo la via empirica e cioè usando due parametri m ed n.

§ 3. Estenzione della teoria di Hurion. – La teoria di Hurion riprendendo il concetto informatore di Soret suppone che ogni particella nel piano orizzontale sia circondato da un anello diffondente situato in questo piano, di cui la particella è centro. Da questa posizione iniziale deriva subito come conseguenza la perfetta simmetria dei quattro punti neutri. Noi vogliamo far cadere questa ipotesi semplificatrice, ed in luogo di considerare soltanto l'anello diffondente, poichè ci limitiamo a calcolare non tutta la polarizzazione del cielo, e cioè non vogliamo procedere alla determinazione dello stato di polarizzazione della vòlta celeste, ma ci limitiamo alla determinazione della posizione dei punti neutri, vogliamo calcolare l'effetto come dipendente non più dalla presenza di un anello ma di un cerchio, limitatamente ai punti situati nella direzione dei raggi solari. Supponiamo quindi che il piano della fig. 2 sia il piano orizzontale e che il Sole si trovi in questo piano ($\varphi_0 = 0$),

e che in questo piano ci sia pulviscolo. Sia $O_1 O_2$ la direzione dei raggi solari, e P_1 e P_2 due punti uno che diremo solare, situato nella parte del Sole, e l'altro antisolare, entrambi a distanza l da O; si considerino inoltre due punti M_1 e M_2 simmetrici rispetto alla normale in O a $O_1 O_2$; calcoliamo il contributo totale della luce diffusa dal cerchio per tutti i punti come P_1, e per tutti i punti come P_2; evidentemente se l'intensità della luce diffusa che arriva sui punti come P_1 è diversa dalla intensità della luce diffusa che arriva sui punti come P_1 è come se l'anello diffondente per i punti come P_1 è diverso dall'anello relativo a P_2 e quindi cade la simmetria perfetta fra il punto di Babinet e quello d'Arago. I raggi solari arrivano al limite dell'atmosfera in A: calcoliamo in primo luogo l'intensità della luce che arriva in M_1; detta I_0 l'intensità in A ed h il coefficiente d'assorbimento, che consideriamo costante (e cioè facciamo l'ipotesi in prima approssimazione, che il cerchio diffondente sia omogeneo) l'intensità in M_1 è $I_0 e^{-h AM_1}$, supponiamo che lungo r_1 per unità di lunghezza ne venga diffusa la frazione $k(\omega, r_1)$ quindi per il tratto dr si ha un contributo

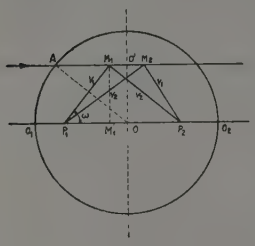


Fig. 2.

$$I_0 k(\omega, r_1) e^{-h AM_1} dr,$$

l'intensità che giunge in P_1 è quindi data da

$$I_0 k(\omega, r) e^{-h(AM_1 + r_1)} dr.$$

Facciamo lo stesso calcolo per il punto M_2, si ha che l'intensità che arriva su P_1 proveniente sia da M_1 che da M_2 è data da

$$I_0 k(\omega, r) \{ e^{-h(AM_1 + r_1)} + e^{-h(AM_2 + r_2)} \} = A.$$

Analogamente l'intensità che arriva su P_2 è data da

$$I_0 k(\omega_1 r) \{ e^{-h(AM_1 + r_2)} + e^{-h(AM_2 + r_1)} \} = B.$$

Supponiamo ora che la frazione $q(\omega, r)$ di questa intensità per unità di lunghezza sia diffusa lungo $O_1 O_2$; si vede che facendo l'integrazione rispetto ad r, e poi moltiplicando per $d\omega$ e facendo l'integrazione rispetto ad ω si ottiene l'intensità totale che O riceve sia dalla parte del Sole che dalla parte dell'antisole, e quindi se queste due intensità sono diverse si conclude che la posizione del punto di Babinet deve risultare diversa da quella di Arago.

Per la determinazione di A e di B calcoliamo in primo luogo AM_1: indichiamo con a il raggio del cerchio, si ha:

$$AM_1 = AO' - M_1 O' \quad ; \quad M_1 O' = P_1 O - P_1 M_1;$$

$$AO' = \sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \quad ; \quad M_1 O' = l - r_1 \cos \omega$$

analogamente

$$AM_2 = AO' + M_2O' = \sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + l - r_1 \cos \omega$$

e quindi

$$A = e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} - l + r_1 \cos \omega + r_1\}} + e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + l - r_1 \cos \omega + r_2\}}$$

$$B = e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} - l + r_1 \cos \omega + r_2\}} + e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + l - r_1 \cos \omega + r_1\}}.$$

Poniamo

$$a = e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} - l + r_1 \cos \omega + r_1\}} \quad ; \quad b = e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + l - r_1 \cos \omega + r_2\}}$$

$$a' = e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} - l + r_1 \cos \omega + r_2\}} \quad ; \quad b' = e^{-h\{\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega} + l - r_1 \cos \omega + r_1\}}.$$

Si tratta di stabilire se $a + b$ e $a' + b'$ sono uguali fra di loro oppure quand'è maggiore.

Poniamo ancora

$$e^{-h\sqrt{a^2 - r_1^2 \operatorname{sen}^2 \omega}} = c_1 \qquad e^{-h(l - r_1 \cos \omega)} = c_2;$$

si vede subito che c_2 è uguale 1 quando $M_1 = M_2$ e cioè per i punti situati sulla OO', per tutti gli altri punti è < 1 quindi anche $c_2^2 < 1$ e quindi

$$c_2 < \frac{1}{c_2}.$$

Di qui deriva che

$$c_1 c_2 < \frac{c_1}{c_2};$$

moltiplicando questa disuguaglianza per $e^{-hr_1} - e^{-hr_2}$, differenza che è sempre positiva perchè dalla definizione di r_1 e r_2 risulta $r_1 < r_2$, si ha

$$c_1 c_2 (e^{-hr_1} - e^{-hr_2}) < \frac{c_1}{c_2} (e^{-hr_1} - e^{-hr_2})$$

e quindi

$$c_1 c_2 e^{-hr_1} + \frac{c_1}{c_2} e^{-hr_2} < c_1 c_2 e^{-hr_2} + \frac{c^1}{c_2} e^{-hr_1}$$

ma

$$c_1 c_2 e^{-hr_1} + \frac{c_1}{c_2} e^{-hr_2} = a + b \quad ; \quad c_1 c_2 e^{-hr_2} + \frac{c_1}{c_2} e^{-hr_1} = a' + b';$$

si conclude che per tutti i punti solari e cioè per i punti P_1 la intensità è minore che per i punti P_2 in altre parole tutti i punti solari è come se fossero circondati da un anello con minor numero di particelle; quindi la posizione del punto di Arago è diversa, e precisamente piu alta di quella di Babinet per effetto di questa dissimetria d'illuminazione.

Bisogna però a queste considerazioni aggiungere ancora delle altre, e cioè bisogna tener presente che oltre all'esistenza di un cerchio diffondente nel piano orizzontale v'è sempre in atto un processo di doppia diffusione, a cui è imputabile, come si è visto, un fenomeno di depolarizzazione. L'effetto di questo processo di doppia diffusione è quello di far tendere all'uguaglianza le tre componenti X, Y e Z, dove X come precedentemente è la componente lungo la direzione dei raggi solari. Ora un aumento di X a parite di Z, od un aumento di X maggiore di quello di Z porta ad una diminuzione di m. Le misure dirette mostrano infatti che per un dato n, m è più piccolo del valore che è stato calcolato non tenendo conto della depolarizzazione.

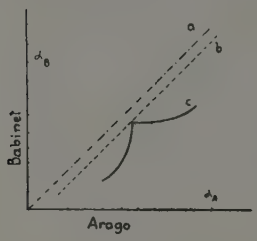


Fig. 3.

Ma la depolarizzazione può anche influire nel senso da produrre un aumento sulle due componenti Y e Z; queste due componenti per la presenza dell'anello hanno valori distinti, ma possono tendere all'uguaglianza per effetto della depolarizzazione, e questa tendenza all'uguaglianza porta ad una diminuzione di n; dunque per effetto della depolarizzazione diminuisce sia m che n e cioè varia $\mathrm{tg}^2\varphi_1$ e quindi l'altezza α dei punti neutri in maniera non facilmente prevedibile. È più probabile che la depolarizzazione porti ad un uguagliamento o quasi delle due componenti Y e Z e quindi ad una diminuzione, tenuto conto della relazione che dà φ_1, dell'altezza dei punti neutri. Naturalmente l'effetto della depolarizzazione è più cospicuo dalla parte del Sole, e per i punti al di sotto di essi, e quando questa è molto forte può annullare addirittura la presenza dell'anello, e quindi può portare alla scomparsa del punto di Brewster, come in effetto molto spesso si verifica.

Premesse queste considerazioni generali fondate su elementi che possono considerarsi abbastanza accettabili, e visto che l'altezza e la presenza del punto di Brewster devono essere molto variabili, vediamo se è possibile prevedere l'andamento dei punti di Babinet e d'Arago. Evidentemente a Sole alto, o almeno non nel piano dell'orizzonte, è da prevedere sia per l'effetto dell'illuminazione sia per la maggiore depolarizzazione presente dalla parte del Sole sia per la dissimetria, che il punto di Babinet sia più basso di quello di Arago.

Man mano che il Sole giunge all'orizzonte in primo luogo aumenta l'altezza dei due punti, ma altresì diminuisce la dissimetria, ed è prevedibile che le altre cause rimangono immutate, quindi si conclude che la differenza fra l'altezza di Babinet e quella d'Arago debba diminuire.

Quando il Sole scompare cessa l'azione depolarizzante sul punto d'Arago, e quindi è prevedibile che la sua altezza aumenti di più di quella del punto di Babinet.

Come già si è visto la teoria di Hurion, basata su considerazioni piuttosto semplici, porta a stabilire che l'altezza dipende dalla presenza di maggiore o minore quantità di pulviscolo, ma che le posizioni per i due punti sono uguali fra di loro, quindi se come ascisse si riportano le posizioni di Arago e come ordinate quelle di Babinet i punti figurativi dovrebbero stare allineati su di una retta inclinata a 45°, e passante per l'origine (linea *a* della fig. 3). La presenza di cause di dissimetria supposte costanti e che, come si è visto, portano ad una diminuzione dell'altezza del punto di Babinet, lascia prevedere che i punti risultano allineati su di una retta parallela alla

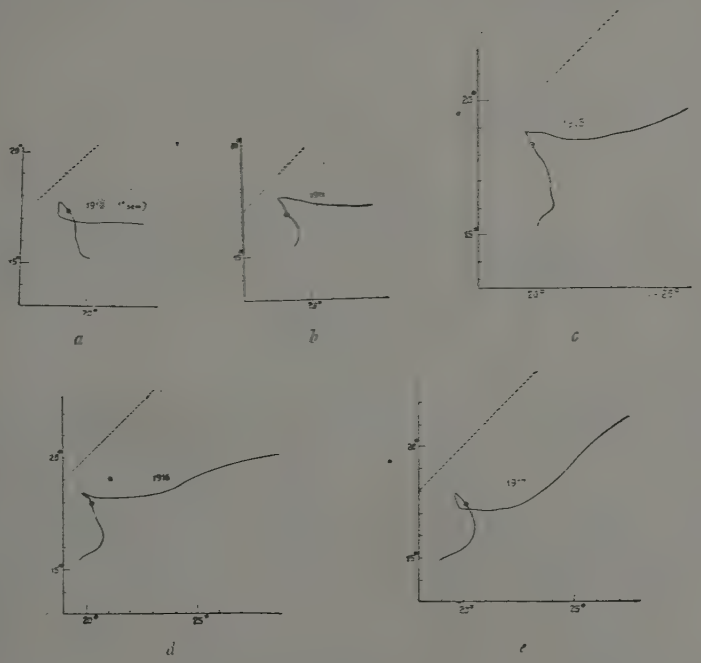


Fig. 4.

precedente, ma spostata in basso (linea *b* della fig. 3). Ma come si è accennato è da prevedere che le cause di dissimetria siano variabili col variare dell'altezza solare, e precisamente quando il Sole è alto i punti si abbassano, e di più Babinet rispetto ad Arago, quando il Sole si abbassa e va sotto l'orizzonte i valori aumentano, ed aumenta di più Arago rispetto a Babinet, e quindi è da prevedere schematicamente l'andamento riportato nella linea *c* della fig. 3.

Passiamo ora al confronto con l'andamento sperimentale. È possibile a tal fine utilizzare molto materiale omogeneo raccolto con molte cure

dal Platania [3] a Catania negli anni 1910–18. In tal periodo il Platania ha proceduto a compilare medie annuali, da cui risultano andamenti per molti anni normali, per alcuni anni nettamente irregolari. Noi ci riferiamo a quegli anni che sono considerati come normali, e come vedesi, le misure dànno un andamento che non è molto diverso da quello che si è tracciato, in base a considerazioni piuttosto semplici.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni di accumulazione approssimate di un insieme di funzioni continue.* Nota [1] di B. Pettineo, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

Sia F un insieme di infinite funzioni $f(x)$, ciascuna definita in un certo intervallo ed ivi continua.

Diciamo che $\varphi(x)$ è una « funzione di accumulazione *approssimata* » dell'insieme F, se essa gode delle seguenti proprietà: dati ad arbitrio due numeri positivi ρ ed ε, esiste un insieme Φ di infinite funzioni $f(x)$ i cui intervalli di definizione differiscano da quello della $\varphi(x)$ per due segmenti entrambi di lunghezza minore di ε ed inoltre, se $f(x)$ è una qualsivoglia funzione dell'insieme Φ, valga la disuguaglianza

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \rho$$

in tutti i punti comuni ai due intervalli di definizione delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, ad eccezione, al più, di un insieme di punti rinchiudibili in una successione di intervalli di lunghezza complessiva minore di ε [2].

Ci proponiamo di stabilire in questa Nota una condizione *necessaria e sufficiente* affinchè l'insieme F delle date funzioni possegga almeno una funzione di accumulazione approssimata ed a tale fine, come abbiamo fatto in una Nota precedente [3], faremo ricorso alla teoria delle successioni di insiemi, ideata dal prof. Cipolla [4].

(3) G. Platania, *Risultati dalle osservazioni di polarizzazione atmosferica eseguite a Catania 1910–1918.* « Rend. Acc. dei Lincei », s. V, vol. XIV, fasc. II (1923).

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1946.

(2) La nozione così introdotta è intimamente legata all'importante concetto di *convergenza approssimata* (od *in misura*), dovuto a F. Riesz (*Sur les suites de fonctions mesurables*, « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », Paris, 1909). Ha luogo invero la proposizione: « Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme di funzioni continue $f(x)$ possegga almeno una funzione di accumulazione approssimata, è che esista una successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ *convergente approssimativamente* ad una certa funzione ».

(La terminologia adottata è del Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna, Casa Editrice Zanichelli).

(3) B. Pettineo, *Sull'esistenza di funzioni di accumulazione di un insieme di funzioni continue*, « Rendiconti Accad. dei Lincei », questo vol., p. 301.

(4) M. Cipolla, *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni*, « Atti dell'Accad. Gioenia in Catania », serie 5ª, vol. VI.

Sia data una successione di insiemi

$$(1) \qquad F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$$

di funzioni $f(x)$, ciascuna definita in un certo intervallo ed ivi continua; supponiamo:

1° che ciascun termine F_n della (1) contenga il successivo F_{n+1}

2° che ad ogni coppia di numeri positivi ρ, ε si possano far corrispondere un insieme F_n ed un numero positivo δ, tali che gli intervalli di definizione di due qualsiasi funzioni di F_n differiscano per due segmenti entrambi di lunghezza minore di ε e si abbia inoltre, per ogni funzione $f_n(x)$ del detto insieme:

$$|f_n(x) - f_n(x')| \leq \rho$$

qualunque siano i punti x, x' comuni a tutti gli intervalli di definizione delle $f_n(x)$ e tali che si abbia:

$$|x - x'| \leq \delta,$$

ad eccezione di un insieme di punti rinchiudibili in una successione di intervalli di lunghezza complessiva minore di ε.

Diremo allora che la (1) è una «successione di insiemi di funzioni *quasi similmente* continue».

L'importanza della nozione così introdotta è subito messa in rilievo dal seguente teorema:

«Condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme di funzioni $f(x)$, continue ed *ugualmente limitate* (5), possegga almeno una funzione di accumulazione approssimata, è che esista una successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ quasi similmente continue».

Dimostriamo che la condizione è necessaria.

Sia dunque $\varphi(x)$ una funzione di accumulazione approssimata del dato insieme di funzioni $f(x)$, definita in un intervallo (a, b). Consideriamo due successioni ρ_n ed ε_n convergenti a zero di numeri positivi decrescenti; definiamo, in conseguenza, una successione di insiemi (1) di funzioni $f(x)$ dal dato insieme, assumendo per F_n l'insieme delle funzioni $f(x)$ i cui intervalli di definizione differiscano da (a, b) per due segmenti entrambi di lunghezza minore di ε_n e tali che si abbia:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \rho_n$$

qualunque sia il punto x comune ai due intervalli di definizione delle funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, ad eccezione di un insieme X' (variabile da funzione a funzione) di punti rinchiudibili in una successione di intervalli di lunghezza complessiva minore di ε_n.

(5) Tali, cioè, che si abbia: $|f(x)| < L$ (essendo L un certo numero positivo) qualunque sia la funzione $f(x)$ e per qualsivoglia valore x dell'intervallo in cui tale funzione è definita.

Poichè le successioni ρ_n ed ε_n sono decrescenti, l'insieme F_n contiene il successivo. Inoltre, come si deduce alla stessa definizione di $\varphi(x)$, esiste un numero positivo δ_n, tale che si abbia:

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \rho_n$$

per ogni coppia x, x' di punti di (a, b) sottoposti alla condizione

$$(2) \qquad |x - x'| \leq \delta_n,$$

ad eccezione, al più, dei punti di un insieme X rinchiudibile in una successione di intervalli di lunghezza complessiva minore di ε_n.

Si avrà allora, qualunque siano i punti x, x' comuni ad (a, b) ed all'intervallo di definizione della generica funzione $f(x)$ di F_n, ma non appartenenti ad X, nè ad X′:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x')| + |\varphi(x') - f(x')| \leq 3\rho_n,$$

purchè, beninteso, abbia luogo la (2).

Osservando ora che l'insieme costituito dai punti dei due insiemi X ed X′ è rinchiudibile in una successione di intervalli di lunghezza complessiva minore di $2\varepsilon_n$ e che gli intervalli di definizione di due qualsiasi funzioni dell'insieme F_n differiscono per due segmenti entrambi di lunghezza minore di $2\varepsilon_n$, si può concludere facilmente che la (1) è proprio una successione di insiemi infiniti di funzioni $f(x)$ quasi similmente continue.

Occorrerebbe adesso dimostrare che la condizione è sufficiente, ma la dimostrazione ci riserviamo di farla conoscere, a parte, quanto prima.

Matematica. — *Ancora sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni.* Nota [1] di G. Scorza Dragoni, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

In questa Nota mi propongo di indicare alcune semplici conseguenze di un mio recente teorema [2] sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo t del piano, che conservi il senso delle rotazioni e sia privo di punti uniti. La prima di queste conseguenze comprende quel teorema come caso particolare, nel senso che fa vedere come esso non valga soltanto per gli archi di traslazione di t costituiti da spezzate di un numero finito di lati, ciascuno avente la direzione di uno degli assi, bensì valga anche per

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1946.

(2) G. Scorza Dragoni, *A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni*, [in corso di stampa in questi «Rendiconti»].

un qualunque arco di traslazione di t [3]. Sicchè la prima conseguenza si può formulare nel modo seguente:

Sia t un autoomeomorfismo, conservante il senso delle rotazioni e privo di punti uniti, di un piano ambiente π, in cui si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali [4]. *Sia λ un arco di traslazione della t; $\sigma(\lambda)$ la traiettoria generata da λ; $\sum(\lambda)$ uno dei due campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$. Allora:*

o esiste uno pseudoarco di traslazione di prima specie τ, che gode delle seguenti proprietà: l'arco di traslazione contenuto in τ è un segmento, con la direzione di uno degli assi cartesiani; l'origine L *di τ appartiene a λ; $\tau - L$ è interno a $\sum(\lambda)$;*

oppure esiste una semilinea semplice, aperta l, che gode delle seguenti proprietà: l non incontra la propria immagine, $t(l)$, nella t; il tratto finale di l è una semiretta, con la direzione di uno degli assi cartesiani; l'origine L *di l appartiene a λ; $l - L$ è interna a $\sum(\lambda)$.*

Invece la seconda (ed ultima) proposizione afferma in sostanza che:

Il ruolo del punto L, *di cui nell'enunciato precedente, può essere assunto da un punto qualunque di λ.*

La dimostrazione del primo teorema è qui data nel n. 2; quella del secondo nel n. 3; il n. 1 contiene delle osservazioni.

1. Nella Nota citata in [2], ho dimostrato che il primo teorema è vero, se λ è costituito da un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi cartesiani; ed ho fatto vedere che, allora, questa proprietà si può imporre anche a τ e ad l (per la quale uno dei lati è una semiretta) e che L si può supporre interno a λ.

Nella dimostrazione del n. 2 è implicito che:

si può supporre che τ ed l siano costituite da spezzate di un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi cartesiani, anche se λ è un arco di traslazione qualunque di t, perchè non si pretenda di far assumere il ruolo di L *ad un punto di λ prefissato ad arbitrio;*

mentre nella dimostrazione del n. 3 è implicito che:

se λ è esso stesso una spezzata del solito tipo, si può supporre che tali siano anche τ ed l e che L *coincida con un punto di λ prefissato ad arbitrio, purchè interno a λ.*

2. Sia A un punto di λ, interno a λ; B un punto interno a $t^2(\lambda)$. L'arco α di $\sigma(\lambda)$ di estremi A e B [perfettamente individuato da questa

(3) Per la terminologia, rimando alle mie seguenti Memorie: *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IV (1933), pp. 159-212]; *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré* [ibidem; pp. 213-269; se ne veda specialmente il § 2] Nel seguito, queste due Memorie saranno rispettivamente ricordate con le sigle M. I. e M. II.

(4) Non è difficile convincersi che gli assi cartesiani si possono supporre anche obliqui, sia in loc. cit. (2), che qui.

condizione, chè $\sigma(\lambda)$ è una linea semplice, a norma di un teorema di Brouwer, cfr. M. I, nn. 8 e 9], l'arco α, dico, contiene $t(\lambda)$ nell'interno.

Inoltre, sia β una curva semplice e aperta, di estremi A e B, che abbia soltanto gli estremi sulla curva $\alpha' = \lambda + t(\lambda) + t^2(\lambda)$.

L'esistenza di β ed il fatto che l'interno di β si può supporre interno a $\sum(\lambda)$ si possono dedurre tutt'e due da un teorema di Brouwer ricordato a p. 167 di M. I; precisamente da quello, secondo il quale, se F è un punto di $\sum(\lambda)$ e G uno di $\sigma(\lambda)$, esiste una curva semplice e aperta di estremi F e G, i cui punti diversi da G siano interni a $\sum(\lambda)$.

La distanza di β da $t(\lambda)$ è positiva per costruzione, diciamola d_0. Ed è pure positiva quella, d_0', di β da $\sigma(\lambda) - \alpha'$. Infatti è positiva quella di A e B da $\sigma(\lambda) - \alpha'$, come segue dal primo teorema di Brouwer ricordato nel n. 9 di M. I, a p. 166; mentre del pari positiva è quella di ogni arco interno a β, in quanto interno all'insieme aperto $\sum(\lambda)$, della cui frontiera fa parte $\sigma(\lambda)$.

Sia ora P un punto interno di β; d_1 la distanza dell'arco δ_1 di β di estremi A e P da $t^2(\lambda)$; d_2 quella dell'arco δ_2 di β di estremi P e B da λ.

Sia d un numero positivo minore di d_0, d_1, d_2 e d_0'.

Consideriamo una spezzata s_1, di estremi A e P, costituita da un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi, e tale che ogni punto di s_1 abbia da δ_1 una distanza inferiore a d. L'esistenza di s è palese. Ed è anche evidente che s_1 non incontra $\sigma(\lambda) - \lambda$, mentre incontra λ, e sia anzi C il primo punto di λ, che si incontra su s_1 a partire da P. I punti dell'arco di s_1 di estremi P e C distinti da C sono allora tutti interni a $\sum(\lambda)$, cfr. M. I n. 9, perchè tale è P.

In maniera analoga si definiscono s_2 e D a partire da δ_2 e B; e si dica Q il primo punto di s_2 che si incontra su s_1 a partire da C, di guisa che Q è distinto da C e D. La spezzata semplice aperta β_1, che si ottiene associando l'arco di s_1 di estremi C e Q e quello di estremi Q e D di s_2, è costituita da un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi; è contenuta in $\sum(\lambda)$, a meno degli estremi. Invece l'arco α_1 di $\sigma(\lambda)$, di estremi C e D, contiene $t(\lambda)$ nell'interno. Ma C appartiene a λ; D a $t^2(\lambda)$; quindi α_1 contiene $t(C)$ nell'interno.

Ne segue [cfr. M. I, n. 22] che β_1 contiene uno pseudoarco di traslazione di prima specie, τ_1, di origine C, contenuto in $\sum(\lambda)$, a meno di C. L'arco di traslazione λ_1, contenuto in τ_1 a norma di quanto è detto nel n. 16 di M. I, non contiene C, epperò è interno a $\sum(\lambda)$.

Inoltre λ_1 è una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi; quindi è lecito applicare il teorema della mia Nota citata alla traiettoria $\sigma(\lambda_1)$, generata da λ_1, ed a quel campo $\sum(\lambda_1)$, adiacente a $\sigma(\lambda_1)$, che non contiene $\sigma(\lambda) + \tau_1$. L'esistenza di $\sum(\lambda_1)$, insieme col fatto che $\sum(\lambda_1)$ è interno a $\sum(\lambda)$, segue per esempio da quanto è detto nel n. 11 di M. II.

Denoti ω_1 uno pseudoarco di traslazione o una semilinea, che soddisfacciano alle condizioni volute dal teorema nei riguardi di λ_1 e $\sum(\lambda_1)$. Sia L_1 l'origine di ω_1 ed ω la somma di ω_1 e della porzione di τ_1 di estremi C ed L_1. Allora dalle cose dette nel § 3 e nella nota (58) di M. II è facile dedurre che ω è uno pseudoarco di traslazione quale τ od una semilinea quale l. E il primo teorema è stabilito, in modo da giustificare anche la prima delle affermazioni del n. 1.

3. Per dimostrare anche il secondo teorema, manteniamo le ipotesi e le notazioni del numero precedente; ed osserviamo che C è interno a λ, perchè ogni punto di s_1 ha una distanza minore di d da δ_1 (e da β), e che, se ω è uno pseudoarco di traslazione, l'arco di traslazione λ_0 contenuto in ω è interno a $\sum(\lambda)$, analogamente a quanto si è rilevato per λ_1 e $\sum(\lambda)$.

Se ν è l'arco di λ avente un estremo in C e l'altro in un punto L di λ, fissato ad arbitrio, riesce quindi $\nu \cdot t(\nu) = 0$, $\nu \cdot \lambda_0 = 0$.

Inoltre è chiaro che risulta pure $\nu \cdot t(\omega) = 0$, perchè $t(\omega)$ e $\sigma(\lambda)$ hanno in comune soltanto $t(c)$, interno a $t(\lambda)$ e quindi esterno a ν; del pari è $\omega \cdot t(\nu) = 0$.

Consideriamo ora una curva c di estremi L e C, tale che:

la distanza di c da ν sia tanto piccola da aversi $c \cdot t(c) = 0$, $c \cdot t(\omega) = 0$, $t(c) \cdot \omega = 0$ ed eventualmente $c \cdot \lambda_0 = 0$, al pari delle $\nu \cdot t(\nu) = 0$, $\nu \cdot t(\omega) = 0$, $\omega \cdot t(\nu) = 0$ e della eventuale $\nu \cdot \lambda_0 = 0$;

che:

i punti di c abbiano da ν una distanza minore della distanza, positiva a norma del teorema di Brouwer ricordato all'inizio del n. 9 di M. I, di λ da $\sigma(\lambda) - (t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda))$;

e che:

i punti di c diversi dagli estremi [e quindi esterni e $\sigma(\lambda)$] siano interni a $\sum(\lambda)$.

Tutte queste condizioni possono evidentemente essere soddisfatte, se $t^{-1}(\lambda) + \lambda + t(\lambda)$ è un segmento. E questa circostanza non rappresenta una limitazione essenziale, a norma di teoremi noti (5). Epperò l'esistenza di c è certa.

Ciò premesso, si percorra c a partire da L, fino al primo punto K comune a c e ω. Dopo di che si percorra ω a partire da K, con l'avvertenza, se $K \neq C$, di spostarsi nel verso che non conduce a C. Sia k la curva o la semilinea che così si ottiene. Essa gode di tutte le proprietà di τ o di l, a seconda che ω era uno pseudoarco quale τ o una semilinea quale l, meno eventualmente di quella di avere soltanto l'origine su $\sigma(\lambda)$, atteso che $c + \omega$ e $\sigma(\lambda)$ hanno comuni e C e L. Ma $c + \omega$ e $\sigma(\lambda)$ in C si toccano, poichè c

(5) Si vegga, per esempio, B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Topologie*, I, [Springer, Berlino (1923)], cap. II, § 1, teorema IX; e cap. II, § 2.

ed ω giacciono entrambe dalla stessa banda di $\sigma(\lambda)$, in quanto l'interno di c e di ω appartengono a $\sum(\lambda)$. Inoltre, se ω è uno pseudoarco di traslazione, C è esterno all'arco di traslazione contenuto in ω. Quindi, se k contiene C, previa una piccola deformazione di k nell'intorno di C, è facile dedurre da k uno pseudoarco quale τ od una semilinea quale l, avente l'origine nel punto L di λ. E anche il secondo teorema dell'introduzione è dimostrato.

Le considerazioni per ottenere anche il secondo risultato del n. 1, sono ormai evidenti; e perciò non vale la pena di insistervi.

Matematica (Geometria). — *Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali.* Nota II di V. E. Galafassi, presentata [1] dal Socio L. Berzolari.

La presente Nota II costituisce la continuazione di una Nota I recante lo stesso titolo. Vengono qui trattate questioni di realità relative alle famiglie (reali) di curve algebriche delle rigate razionali a generatrici reali, secondo quanto era già stato annunciato nella Nota I stessa [2].

4. – Dimostreremo dapprima che in ogni famiglia reale $[\alpha, \beta]$ di curve algebriche giacenti sopra una superficie rigata normale generale a generatrici reali, esistono curve reali dotate del massimo numero $p + 1$ di circuiti. I procedimenti dimostrativi si valgono del metodo di « piccola variazione » in relazione specialmente alla rappresentazione piana minima (qui supposta reale) della rigata: questi procedimenti risulteranno pertanto simili a quelli usati per esempio dallo stesso Harnack [3], onde ci sarà consentito procedere speditamente.

Trattiamo nel presente numero il caso di r pari.

Si considerino dapprima le famiglie $[\alpha, 1]$. Per esse è $p=0, p+1=1$, e l'esistenza di curve massimali cioè dotate di $p + 1$ circuiti è immediata, anzi ogni curva reale di queste famiglie è massimale, perchè essendo $\beta = 1$ cioè dispari esiste almeno un circuito e quindi proprio uno. È tuttavia opportuno dimostrare l'esistenza di curve massimali dotate di ulteriori particolarità. Precisamente, con riferimento alla rappresentazione piana minima:

a) *Per α pari*, l'esistenza di curve (piane) reali $C^{\alpha+1}$ (di ordine $\alpha + 1$) con punto α-plo in Q, la cui parte reale consti di Q come punto

(1) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », fasc. 7-8 p. 827. Per facilitare i richiami si prosegue qui la numerazione della Nota I, anche per quanto concerne le formule.

(3) Cfr. loc. cit., in (2) della Nota I.

isolato e di un circuito $\tau_{\alpha+1}$ (non passante per Q) e dotato di *fronte lineare* di ordine $\alpha + 1$ rispetto ad una retta s generica (4).

Perciò basta ad esempio assumere una curva spezzata in $\frac{\alpha}{2}$ coppie di rette immaginario–coniugate uscenti da Q ed una retta reale s (non uscente da Q), ed applicare a questa curva una piccola variazione introducendo come seconda curva fondamentale del fascio, che interviene in tale metodo, una curva (sempre di ordine $\alpha + 1$) spezzata in $\alpha + 1$ rette reali, α delle quali uscenti da Q. Si ottiene così, con un segno qualunque della piccola variazione, una curva $C^{\alpha+1}$ del tipo richiesto; infatti, per quanto concerne la parte reale, mentre Q si conserva come punto isolato, la retta s dà luogo ad un circuito $\tau_{\alpha+1}$ dotato (rispetto alla retta s stessa) di fronte (lineare) di ordine $\alpha + 1$.

b) *Per α dispari*, esistenza di $C^{\alpha+1}$ ecc., la cui parte reale consti di un sol circuito $\tau_{\alpha+1}$ con punto semplice in Q e dotato di fronte lineare di ordine $\alpha + 1$.

Perciò basta assumere una curva (di ordine $\alpha + 1$) composta di una curva C^{α} come ottenuta in *a*) e di una retta reale t uscente da Q, e sottoporre questa curva a piccola variazione (di segno qualunque) introducendo come seconda curva fondamentale del fascio una curva spezzata nella retta s ed in α rette uscenti da Q, $\alpha - 1$ delle quali distribuite in coppie di immaginario–coniugate ed una reale.

Dopo ciò si possono costruire con procedimento ricorrente curve reali massimali di qualunque famiglia $[\alpha, \beta]$. A tale scopo si indichi con $C^{\alpha+\beta}$ una curva (piana) reale (di ordine $\alpha + \beta$) con punto α–plo in Q, la cui parte reale consti di $p + 1$ circuiti, uno dei quali $\tau_{\alpha+\beta}$ sia dotato di fronte lineare di ordine $\alpha + \beta$ rispetto ad una retta generica s. Inoltre nessun circuito passi per Q se α è pari, mentre, se α è dispari, solo uno (eventualmente lo stesso $\tau_{\alpha+\beta}$) passi per Q semplicemente. Poichè le $C^{\alpha+1}$ costruite in *a*) e *b*) sono curve del tipo descritto, basterà far vedere come si possa con metodo ricorrente dedurre da una $C^{\alpha+(\beta-1)}$ una $C^{\alpha+\beta}$.

Ciò è possibile per esempio sottoponendo a piccola variazione la curva (di ordine $\alpha + \beta$) spezzata nella $C^{\alpha+(\beta-1)}$ e nella retta s, assumendo come seconda curva del fascio una curva spezzata in α rette reali per Q e β rette reali non uscenti da Q, facendo però in modo che – per $\alpha+(\beta - 1)$ dispari – le $\alpha + \beta$ intersezioni (reali) di tali rette colla s siano tutte situate in uno

(4) Si dice che un circuito piano ω presenta rispetto ad una retta reale a una *fronte* (lineare) di ordine r quando ω ed a presentano r intersezioni (reali) egualmente ordinabili su ω ed a. Questa ed altre nomenclature che useremo in seguito sono già state usate dal prof. BRUSOTTI in numerosi suoi lavori. Cfr. ad esempio di tale A.: *Sulla generazione delle curve piane di genere p dotate di p + 1 circuiti.* «Rend. R. Ist. Lomb.», *43* (1910) pp. 143-156; ed anche: *Nuovi metodi costruttivi di curve piane di ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti.* Note IV e V, Ibid., *49* (1916), pp. 495–510 e pp. 577-588.

stesso degli $\alpha + \beta - 1$ segmenti che il circuito $\tau_{\alpha+\beta-1}$ determina su s colle sue intersezioni, e - per $\alpha + \beta - 1$ pari - che giacciano tutte nel segmento di s che risulta di *seconda specie* (5) rispetto a $\tau_{\alpha+\beta-1}$. - Allora infatti per considerazioni già svolte in circostanze analoghe, per esempio da Harnack, si ha un incremento di

$$\alpha + \beta - 1$$

circuiti, come - per la (6) - appunto occorre, e permangono di più per la $C^{\alpha+\beta}$ così ottenuta, le proprietà analoghe a quelle che presentava la $C^{\alpha+(\beta-1)}$ e che consentono la continuazione del processo ricorrente; tutto questo quando il segno della piccola variazione venga scelto convenientemente.

I varî procedimenti esposti riguardano la rappresentazione piana (minima) della V_2^{r-1}, ma è immediata la loro traduzione in procedimenti interessanti la V_2^{r-1} obiettiva, appena si aggiunga esplicitamente a quanto si è ricordato al numero precedente che le rette del piano rappresentativo non uscenti da Q sono immagini di direttrici di ordine $\frac{r}{2}$ (sezioni iperpiane a meno di $\frac{r-2}{2}$ generatrici) della V_2^{r-1}.

Osservazione. - Data l'indole esistenziale del presente lavoro, ci si limita ad illustrare un solo metodo atto a costruire curve massimali. Sarebbe peraltro agevole ideare altri metodi pur rispondenti allo scopo: per esempio usando (sempre con riferimento alla rappresentazione piana) curve massimali dotate di fronti quadratiche o di più fronti lineari come fecero in analoghe circostanze D. Hilbert ed L. Brusotti per non citare altri (6). Tali procedimenti potrebbero però giovare a stabilire la possibilità di determinate configurazioni per i circuiti delle curve delle rigate; e sotto questo aspetto potrebbe anche tornare opportuno trascurare all'ultimo stadio del processo ricorrente illustrato sopra, quelle imposizioni che assicurano la creazione della nuova fronte, eventualmente sostituendole con altre più utili al nuovo scopo (7).

5. - Sia ora r dispari.

Ancora ci varremo di un procedimento ricorrente per stabilire in ogni famiglia $[\alpha, \beta]$ l'esistenza di curve reali massimali. A tale scopo si indichi ora con $C^{\alpha+\beta}$ una curva (piana) reale (di ordine $\alpha + \beta$) con punto α-plo in Q e β-plo in T, la cui parte reale consti di $p + 1$ circuiti, uno dei quali $\tau_{\alpha+\beta}$ sia dotato di fronte lineare di ordine α rispetto ad una retta s uscente

(5) Cfr. L. Brusotti (4).

(6) Cfr., per esempio, D. Hilbert, *Ueber die reellen Züge algebraischer Kurven.* « Math. Ann. », *38* (1891), pp. 115-138; L. Brusotti, per esempio lav. cit. in (4).

(7) Così si è fatto in circostanze analoghe. Cfr., per esempio, V. E. Galafassi, *Casi notevoli di configurazioni per i circuiti di* C^m *reali sopra superficie cubiche generali reali*, « Rend. R. Ist. Lomb. », *75* (1941-1942), pp. 366-372, e *77* (1943-1944) pp. 105-136.

da T. Inoltre nessun circuito passi per Q se α è pari, mentre uno solo (eventualmente lo stesso $\tau_{\alpha+\beta}$) passi semplicemente per Q se α è dispari; vi sia poi un circuito che abbia punto β–plo in T, senza escludere che tale circuito sia lo stesso $\tau_{\alpha+\beta}$: allora però uno solo dei β segmenti ad estremi coincidenti in T nei quali viene ripartito $\tau_{\alpha+\beta}$ dal punto T stesso, sia interessato nella fronte di $\tau_{\alpha+\beta}$.

Ciò posto se si considerano le $C^{\alpha+1}$ del numero precedente e si assume come punto T una delle intersezioni estreme di $\tau_{\alpha+1}$ con s, queste forniscono curve $C^{\alpha+1}$ anche nel senso del presente numero, onde basterà vedere come si possa dedurre da una $C^{\alpha+(\beta-1)}$ una $C^{\alpha+\beta}$.

Per questo basta sottoporre a piccola variazione la curva (di ordine $\alpha+\beta$) spezzata nella $C^{\alpha+(\beta-1)}$ e nella retta s, assumendo come seconda curva fondamentale del fascio una curva spezzata in β rette reali (od anche a coppie immaginario–coniugate) uscenti da T, ed α opportune rette reali uscenti da Q. Precisamente le α intersezioni (reali) di queste con s siano situate in uno stesso degli α segmenti determinati su s dalla fronte di $\tau_{\alpha+\beta-1}$, e per esempio se α è pari non si tratti del segmento in cui sta il punto T, e se α è dispari si tratti precisamente di tale segmento ed in questo le α intersezioni delle rette assunte non siano separate da T. In queste condizioni, con un segno opportuno della piccola variazione, si ottiene invero una $C^{\alpha+\beta}$ del tipo detto, essendo fra l'altro $\alpha-1$ l'incremento che il processo introduce nel numero dei circuiti, come per la (9) appunto occorre.

Anche questo procedimento è di immediata traduzione sulla rigata, ed è da ritenersi estesa al presente numero l'osservazione del numero precedente.

6. - Vogliamo ora dimostrare che su V_2^{r-1} generali a generatrici reali, esistono in ogni famiglia reale $[\alpha, \beta]$ anche curve reali dotate del minimo numero di circuiti, minimo che sarà zero od uno secondochè i numeri α e β siano entrambi pari o rispettivamente almeno uno di essi sia dispari.

Sempre in relazione alla rappresentazione piana minima nel caso di α e β entrambi pari, si raggiunge lo scopo sottoponendo ad opportuna piccola variazione la curva spezzata in $\alpha/2$ coppie di rette immaginario–coniugate uscenti da Q e $\beta/2$ coppie di rette immaginario–coniugate non uscenti da Q, e – se r è dispari – uscenti da T, ed assumendo come seconda curva fondamentale una curva dello stesso tipo. Si ottiene così una curva la cui parte reale consta di soli punti isolati (il punto Q e – se r è dispari – anche il punto T).

Nel caso α dispari, β pari (rispettivamente α pari, β dispari) basta ripetere le considerazioni precedenti sostituendo $\alpha-1$ ad α (rispettivamente $\beta-1$ a β) ed aggiungere una retta reale uscente da Q (rispettivamente non uscente da Q e – se r è dispari – uscente da T), la quale dà luogo all'unico circuito della parte reale della curva dedotta per piccola variazione.

Infine se α e β sono entrambi dispari, basta sostituire nelle considerazioni svolte per α e β pari, $\alpha - 1$ ad α e $\beta - 1$ a β, ed aggiungere una retta reale per Q ed una retta reale non uscente da Q e – per r dispari – uscente da T.

Anche i procedimenti qui usati sono di immediata traduzione sulla rigata.

Possiamo così concludere che il numero k dei circuiti di una curva reale di ogni famiglia (reale) di curve della rigata normale generale a generatrici reali può assumere tanto il valore massimo quanto il valore minimo. Allora rimane più in generale provata la possibilità di far assumere a k ogni intero compreso fra il minimo ed il massimo [8]; utilizzando un'osservazione fatta da L. Brusotti in circostanze analoghe [9].

7. – Il risultato con cui si chiude il numero precedente può poi estendersi anche alle famiglie reali di curve delle rigate normali (a generatrici reali) non generali. Infatti si è ricordato al n. 2 che le superficie rigate normali non generali possono dedursi dalle generali con variazione continua, onde con variazione continua verranno dedotte le curve di una famiglia di curve della rigata non generale da quelle della famiglia di curve della rigata generale, aventi gli stessi caratteri, per esempio, come qui conviene, gli stessi valori di n e β. Ed è poi facile vedere, per esempio, nella rappresentazione piana ricordata a n. 2, come una curva reale che segua genericamente e con continuità la variazione continua della rigata generale non debba per passaggio al limite perdere od acquistare circuiti. Ed alle famiglie che si aggiungono provvedono metodi analoghi a quelli già seguiti.

Il risultato si estende inoltre ad ogni superficie rigata razionale (a generatrici reali) anche non normale, perchè notoriamente ogni rigata razionale di ordine $r - 1$ di uno spazio S_r con $r' < r$ si può dedurre per proiezione da una rigata normale dello stesso ordine di S_r. E siccome tale proiezione è biunivoca senza eccezioni nel campo complesso, lo sarà anche in relazione ad elementi reali, onde se esiste sulla rigata normale a generatrici reali una curva della famiglia (n, β) con k circuiti, esisterà anche

(8) È da notare che nel risultato qui raggiunto rientra quello stabilito da L. Brusotti in (4) di Nota I, per quanto si riferisce alle quadriche a punti iperbolici ($r = 3$).

(9) Cfr. L. Brusotti, *Discriminanti e fasci nella topologia proiettiva del piano.* « Rend. R. Ist. Lomb. », 51 (1918), pp. 367-473; *Sulla curva completa intersezione di due superficie algebriche reali.* Ib., 51 (1928), pp. 470-476; e (8) p. 119; cfr. anche V. E. Galafassi, *Sulle C^m reali della superficie cubica generale reale intersezioni complete o quasi.* Ib., 75 (1941-42), pp. 366-372. Trattasi dell'osservazione seguente. Dalla curva rispondente al caso di minimo potrà passarsi a quella rispondente al caso di massimo con variazione continua dei coefficienti, e quindi col passaggio attraverso tutti i valori intermedî di k. Il che certamente avviene se tale variazione continua si svolge in modo generico, cosicchè l'eventuale trapasso da un valore di k ad un altro sia dovuto alla comparsa di un punto doppio ordinario, e sia quindi un trapasso da k a $k \pm 1$, ecc.

sulla rigata razionale che proviene da quella per proiezione reale una curva con k circuiti appartenente ad una famiglia con gli stessi caratteri n e β [10].

8. – Infine notiamo esplicitamente che nel risultato del presente lavoro si esaurisce una notevole questione riguardante le curve algebriche reali di ordine n dello S_r, dotate del massimo numero di circuiti compatibile con l'ordine, massimo che per i risultati di G. Castelnuovo e di A. Harnack già citati (cfr. n.i 2 e 4) è fornito dall'espressione:

$$(11) \qquad \chi\left\{n - \frac{r+1}{2} - \chi\frac{r-1}{2}\right\} + 1$$

essendo χ il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$.

Precisamente rimane provato che tale valore massimo può raggiungersi, perchè tale valor massimo coincide con quello relativo alle famiglie (n, β) con $\beta = \chi + 1$, di curve della rigata normale, fra le quali appunto si è dimostrato l'esistenza di curve reali massimali [11].

Vogliamo anche aggiungere che l'espressione (11) non differisce da un'altra espressione fornita dallo Schroeckh [12], e relativa alla medesima questione. Trattasi della espressione seguente

$$(12) \qquad \frac{1}{2(r-1)}\{n^2 - nr - n + \rho + \rho r - \rho^2\} + 1$$

essendo ρ il numero congruo ad n (mod $r-1$), scelto fra i numeri $1, 2, \cdots, r-1$.

La coincidenza fra la (11) e la (12) si può stabilire per via aritmetica.

(10) Per la rigata cubica di S_3 questioni di tale indole sono state trattate da M. P. Gugliada, nella parte non pubblicata della sua dissertazione di laurea (*La «piccola variazione» della rigata cubica reale*. Pavia, 1943). Per la parte pubblicata cfr. M. P. Gugliada, *I tipi di superficie cubica generale reale dedotti per «piccola variazione» di una rigata cubica reale*. «Rend. R. Ist. Lomb.», 77 (1943-44), pp. 15-23.

(11) È ben noto che per $r = 2$, $r = 3$ la soluzione della questione trovasi rispettivamente in A. Harnack (2) da Nota I e in D. Hilbert (6).

(12) Cfr. Ch. Schroeckh, *Die Höchstzahl der reellen Züge einer Raumkurve n-ter Ordnung in m Dimensionen*. «Diss.», Kiel, 1917. Per il raffronto tra l'espressione fornita nel citato lavoro e la (12) del testo occorre sostituire r e ρ ad m ed r rispettivamente.

Di tale lavoro non conosco però che la breve recensione pubblicata in «Jahrbuch über die Fort. d. Math.», *46* (1923-24), p. 1015, dovuta a O. Toeplitz, e non mi risulta perciò noto quale sia il metodo seguito dallo Schroeckh per conseguire il risultato.

Matematica. — *Sulla curvatura media di una varietà immersa in un'altra.* Nota [1] di L. Castoldi, presentata dal Socio L. Berzolari.

1. Un'interessante proprietà della curvatura media di una superficie dello spazio ordinario è stata rilevata alcuni anni addietro dal prof. Calonghi [2], indi riottenuta con metodo vettoriale della sig.na Pelosi [3], infine nuovamente dedotta e generalizzata dai proff.ri Manarini [4] e Burgatti [5] che ne rilevavano lo stretto e semplice legame con una relazione vettoriale facile a stabilirsi mediante l'uso di operatori superficiali precedentemente introdotti dal Burgatti stesso.

Sostanzialmente, dal punto di vista degli Autori citati, la curvatura media di una superficie in un suo punto P veniva a identificarsi col rapporto tra un conveniente integrale curvilineo esteso ad un circuito infinitesimo racchiudente P e l'area della porzione di superficie limitata dal contorno stesso.

Nella presente Nota, ponendoci da un punto di vista sostanzialmente diverso, ci proponiamo di mettere in luce un altro e semplice significato della curvatura media, in una data direzione, di una varietà qualunque immersa in uno spazio ambiente, mettendo a raffronto le estensioni di elementi corrispondenti, opportunamente definiti, della varietá stessa e di varietà ad essa geodeticamente parallele nella direzione voluta [6]. Attorno a ciò esporremo partitamente nei numeri seguenti, trattando dapprima di

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1946.

(2) M. Calonghi, *Sulla curvatura media delle superficie.* «Rend. Acc. dei Lincei», 1° sem. 1930, pp. 554-558.

(3) L. Pelosi, *Sulla curvatura media delle superficie.* Ibid. 2° sem. 1930, pp. 283-285.

(4) M. Manarini, *Sulla curvatura media di una superficie e sugli operatori lungo una linea.* Ibid. 2° sem. 1930, pp. 639-644.

(5) P. Burgatti, *A proposito della Nota del dott. Manarini: Sulla curvatura media ecc.* Ibid. 2° sem. 1930, pp. 625-631. Il Calonghi stesso ha generalizzato e approfondito in seguito la questione nella sua Memoria: *Sulla curvatura delle varietà degli spazi riemanniani.* «Ann. di Mat. pura e applicata», Serie IV, to. XIII (1934-35).

(6) Il punto di vista da cui qui ci poniamo ci è suggerito da una nota formula di Gauss relativa alla teoria fisico-matematica dei fenomeni di capillarità e di cui una dimostrazione trovasi in W. Blaschke, *Differentialgeometrie* (1924) §§ 89 e 93, pp. 166 e 173. (Si confronti anche: P. Frank, R. V. Mises, *Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Plysik*, vol. II (1935), p. 393).

Meno strettamente connesso col contenuto della presente Nota è un risultato dovuto al prof. Bompiani e riguardante un significato della seconda forma fondamentale in una assegnata direzione di una V_n in V_m, per il quale rinviamo alla Memoria: E. Bompiani, *Studi sugli spazi curvi. La 2ª forma fondamentale di una V_m in V_n.* «Atti del R. Istituto Veneto», vol. LXXX (1921), p. 1132.

un'ipersuperficie, indi di varietà qualunque immerse in altre, giacchè le considerazioni svolte in quel caso particolare risulteranno facilmente estensibili al caso generale.

2. Sia dunque V_m lo spazio ambiente, con elemento lineare definito dalla forma quadratica fondamentale

$$(1) \qquad ds^2 = e a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta \ (7)$$

Il simbolo e rappresenta qui l'unità positiva o negativa secondochè in corrispondenza degli incrementi dy^α, la forma differenziale $a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ assume valore positivo o negativo. Sulla natura di detta forma non facciamo dunque, a priori, alcuna ipotesi restrittiva.

Relazioni della forma

$$(2) \qquad y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^{m-1})$$

con caratteristica della matrice jacobiana $\left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\|$ (8) uguale ad $m - 1$, definiscono un'ipersuperficie V_{m-1}, immersa nella V_m data.

Ponendo, per gli spostamenti in V_{m-1}:

$$(3) \qquad a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy = g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

risulta definito il tensore metrico fondamentale in V_{m-1}:

$$(4) \qquad g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, y_i^\alpha\, y_j^\beta,$$

dove si è posto, secondo l'uso:

$$y_i^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}.$$

Premesso ciò, e indicato con ξ^α il versore normale alla V_{m-1}, è noto che, considerata la congruenza Γ di geodetiche normali a V_{m-1}, prendendo sulle linee di Γ punti geodeticamente equidistanti da V_{m-1} si perviene a costruire una famiglia F di ipersuperficie « geodeticamente parallele » a V_{m-1}, intersecate ortogonalmente dalle geodetiche di Γ (9). Per distinguere

(7) Adottiamo qui e nel seguito la convenzione ormai consueta di sottintendere i simboli di sommatoria allorchè essi hanno per effetto la saturazione di indici tensoriali.

(8) In tutto il seguito di questo numero designeremo con lettere latine indici assumenti i valori $1, 2, \cdots, m-1$; con lettere greche indici assumenti i valori $1, 2, \cdots, m$.

(9) Si suppone qui che le geodetiche di Γ non siano curve di lunghezza nulla e che inoltre si verifichino per la assegnata V^0_{m-1} le condizioni di regolarità che assicurano l'esistenza in V_m di uno « strato » attorno ad essa per ogni punto del quale passa una e una sola geodetica di Γ. D'ora in poi, trattando di V_{m-1} appartenenti ad F, intenderemo sempre riferirci a quelle di esse che appartengono allo strato anzidetto.

la V_{m-1} data dalle altre della famiglia F, designeremo d'ora in poi la prima con V^0_{m-1}.

Assumendo le V_{m-1} di F come nuove ipersuperficie coordinate $y'^m = \text{cost.}$, e come coordinata y'^m l'arco di geodetica di Γ contato a partire da V^0_{m-1}, a quest'ultima competerà l'equazione $y'^m = 0$, e, per effetto della trasformazione di coordinate in tal modo effettuata, l'elemento lineare in V_m assumerà la forma

$$ds^2 = e\,[e_1\,(dy'^m)^2 + a'_{ij}\,dy'^i\,dy'^j], \tag{5}$$

dove e_1 è il valore che compete ad e in corrispondenza a uno spostamento lungo le geodetiche di Γ. Le a'_{ij} sono, a priori, funzioni di tutte le y'^α, e, per un dato valore di y'^m, la forma quadratica $ea'_{ij}\,dy'^i\,dy'^j$ definisce il quadrato dell'elemento lineare sulla corrispondente V_{m-1} di F.

A un'ulteriore trasformazione di coordinate, la cui importanza è essenziale nell'agevolare le successive deduzioni, si è condotti considerando la corrispondenza biunivoca puntuale che si stabilisce tra V^0_{m-1} e ciascuna delle V_{m-1} di F allorchè si considerino come corrispondenti in V^0_{m-1} e nella generica V_{m-1} di F due punti appartenenti alla medesima geodetica di Γ. In tal senso denomineremo anche « corrispondenti » un elemento ipersuperficiale dS^0 (o una porzione finita S^0) di V^0_{m-1} e un'analogo elemento dS (o porzione finita S) di una V_{m-1} generica di F in quanto risultino costituiti da punti corrispondenti.

L'accennato ulteriore cambiamento di variabili consiste nell'attribuire valori uguali alle coordinate y'^i di tutti i punti situati sulle V_{m-1} di F e corrispondenti a un medesimo punto P_0 di V^0_{m-1}.

Effettuata questa trasformazione e denotate con x^i le coordinate nuovamente introdotte sulle V_{m-1} di F e con y^m la y già designata con y'^m, la forma (5) si scriverà definitivamente

$$ds^2 = e\,[e_1\,(dy^m)^2 + a_{ij}\,dx^i\,dx^j], \tag{6}$$

dove va soltanto notato che i nuovi coefficienti a_{ij} si identificano, per $y^m = 0$, con le g_{ij} fornite da (4).

Premesso ciò, poniamo, con riferimento a un generico sistema di coordinate:

$$y^\alpha_{i;j} = \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i\,\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} h \\ i\,j \end{matrix} \right\}_g y^\alpha_h + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma\ \beta \end{matrix} \right\}_a y^\beta_i\,y^\gamma_j, \tag{7}$$

dove i simboli di Christoffel contrassegnati coll'indice g si intendono calcolati rispetto alla forma (4) e quelli coll'indice a rispetto alla forma (1). Le relazioni

$$\Omega_{ij} = a_{\alpha\beta}\,y^\alpha_{i;j}\,\xi^\beta \tag{8}$$

definiscono allora su V^0_{m-1} il noto tensore simmetrico di curvatura euleriana.

I parametri $\lambda^i_{h|}$ $(h = 1, 2, \cdots, m-1)$ delle direzioni principali definite in V^0_{m-1} da Ω_{ij} soddisfano alle relazioni

$$(9) \qquad (R_h \Omega_{ij} - g_{ij}) \lambda^i_{h|} = 0$$

dove le R_h sono i raggi principali di curvatura di V^0_{m-1}, determinati dall'equazione di tipo secolare

$$| R_h \Omega_{ij} - g_{ij} | = 0 .$$

Per il significato stesso delle direzioni principali è:

$$\Omega_{ij} = \sum_1^{m-1}{}_h \, e_h \frac{1}{R_h} \lambda_{h|i} \lambda_{h|j} ,$$

da cui, ricordando che è $\lambda_{h|i} \lambda_{h|j} g^{ij} = e_h$, risulta:

$$(10) \qquad \Omega \equiv \Omega_{ij} g^{ij} = \sum_1^{m-1}{}_h \frac{1}{R_h} ;$$

la quale, badando alla nota espressione del secondo membro, attribuisce all'invariante Ω il significato di curvatura media della V_{m-1} (10).

Con la particolare scelta del sistema di coordinate per cui vale l'espressione (6) dell'elemento lineare in V_m, le componenti del versore normale sono $\xi^m \neq 0$, $\xi^i = 0$, e vale inoltre per esse la relazione $e_1 [e_1 (\xi^m)^2] = 1$, da cui segue $\xi^m = \pm 1$. Scegliendo il verso della normale a V^0_{m-1} concorde col verso degli archi y^m crescenti, si dovrà assumere $\xi^m = 1$. Le (8), tenuto conto delle (7), con calcoli di facile esecuzione diventano

$$(8') \qquad \Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y^m} \right)_0 ,$$

l'indice o significando che la derivata entro parentesi va calcolata nei punti di V^0_{m-1}. Conseguentemente, in virtù di (10) si ha:

$$(11) \qquad \Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial y^m} \right)_0 , \text{ ossia } \Omega \sqrt{g} = -\left(\frac{\partial \sqrt{a}}{\partial y^m} \right)_0 .$$

D'altra parte, indicato con $\mathcal{C}$ un conveniente campo di valori delle x^i, l'integrale

$$S = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{a} \, dx^1 \, dx^2 \cdots dx^{m-1} ,$$

(10) Il sistema Ω_{ij} è l'ente tensoriale corrispondente alla nota omografia $\sigma = \frac{d\boldsymbol{n}}{d\mathrm{P}}$ di Burali-Forti e l'invariante Ω ne è l'invariante primo: $\sigma_1 = \mathrm{div}\, \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ versore normale a V^0_{m-1}).

ove si ponga mente alla dipendenza di $\sqrt{a}$ da y^m e il campo $\mathfrak{C}$ si consideri fisso, rappresenta l'estensione della porzione S di una generica delle V_{m-1} di F corrispondente a una determinata porzione S^o di V^o_{m-1}. Ammesse poi verificate da $\sqrt{a}$ e da $\frac{\partial \sqrt{a}}{\partial y^m}$ le condizioni di continuità che consentono la derivazione sotto il segno di integrale, e tenendo conto che i limiti di $\mathfrak{C}$ non dipendono da y^m, otteniamo:

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial y^m} dx^1 dx^2 \cdots dx^{m-1} = \frac{\partial S}{\partial y^m}.$$

Ponendo in quest'ultima $y^m = 0$ e facendo uso della seconda delle (11), si ottiene immediatamente

$$\int_{\mathfrak{C}} \Omega dS^o = -\left(\frac{\partial S}{\partial y^m}\right)_o,$$

da cui, al tendere a zero della porzione S^o di V^o_{m-1}:

$$\Omega = -\lim_{S^o \to o} \frac{1}{S^o} \left(\frac{\partial S}{\partial y^m}\right)_o, \tag{12}$$

che è la formula fondamentale cui volevamo pervenire.

Il suo significato geometrico è evidente: Colle denominazioni precedentemente introdotte, essa esprime che *La curvatura media di* V^o_{m-1} *in un suo punto* P *è, a meno del segno, la derivata, calcolata su* V^o_{m-1}, *rispetto all'arco di geodetica normale, dell'estensione dell'elemento corrispondente in* F *all'elemento unitario di* V^o_{m-1}, *racchiudente* P.

3. L'estensione del risultato conseguito al caso di una V_n qualunque immersa in una V_m non presenta alcuna difficoltà.

Introdotta una $(m-n)$-pla di versori $\xi^\alpha_{\sigma i}$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, m-n)$ ortogonali e normali a V_n, indi i tensori simmetrici di curvatura euleriana $\Omega_{\sigma|ij}$ mediante relazioni analoghe alle (8):

$$\Omega_{\sigma|ij} = a_{\alpha\beta}\, y^\alpha_{i;j}\, \xi^\beta_{\sigma i} \ (11), \tag{13}$$

si definisce notoriamente come curvatura media di V_n nella direzione normale $\xi^\alpha_{\sigma i}$ l'invariante, analogo a (10)

$$\Omega_\sigma = g^{ij}\, \Omega_{\sigma|ij}. \tag{14}$$

(11) Nel presente numero gli indici latini assumono: valori da 1 a n.

Se poi: $\xi^\alpha = \sum_1^{m-n} {}_\sigma\, t_\sigma\, \xi^\alpha_{\sigma i}$ è un qualunque versore normale a V_n, la corrispondente curvatura media Ω_ξ, definita mediante relazioni simili a (13) e (14), è:

$$\Omega_\xi = g^{ij}\, a_{\alpha\beta}\, y^\alpha_{i\,j}\, \xi^\beta = \sum_1^{m-n} {}_\sigma\, t_\sigma\, \Omega_\sigma \,. \tag{15}$$

Importa osservare che, come risulta da (15), la definizione di curvatura media di una V_n in una qualsivoglia direzione normale ξ^α non differisce da quella data in (8) e (10) per la curvatura media di un'ipersuperficie. D'altra parte, assegnata comunque una direzione ξ^α normale a V_n (che d'ora in poi designeremo con V_n^0) e considerata in V_m la congruenza Γ delle geodetiche normali a V_n^0, indi introdotta la famiglia F delle V_n « geodeticamente parallele a V_n^0 nella direzione ξ^α », al variare dell'arco di geodetica normale, contato a partire dal punto d'incontro con V_n^0, la generica V_n descrive una V_{n+r} nella quale, per l'osservazione precedente, potremo istituire tutte le considerazioni già svolte riguardo alla curvatura media di un'ipersuperficie. Possiamo quindi concludere senz'altro che: *La curvatura media di una* V_n^0 *in un suo punto* P *e nella direzione normale* ξ^α *è, a meno del segno, la derivata, calcolata in* P, *rispetto all'arco di geodetica normale di direzione* ξ^α, *dell'estensione dell'elemento corrispondente, in* F, *all'elemento unitario di* V_n^0 *racchiudente* P.

Ciò vale, in particolare, quando si assume, come direzione ξ^α, quella che denoteremo con $\bar{\xi}^\alpha$ e che suol designarsi come « normale di curvatura media », caratterizzata dal fatto che in tale direzione la curvatura media risulta stazionaria [12]. Rendendo esplicite le condizioni di stazionarietà per la funzione

$$\Omega = \sum_1^{m-n} {}_\sigma\, t_\sigma\, \Omega_\sigma \tag{16}$$

delle variabili t_σ soggette alla relazione vincolare $\sum_1^{m-n} {}_\sigma\, e_\sigma\, (t_\sigma)^2 = e$, dove e è il valore che compete a questa quantità nella direzione ξ^α di componenti t_σ, si perviene facilmente alla seguente espressione di $\bar{\xi}^\alpha$:

$$\bar{\xi}^\alpha = k \sum_1^{m-n} {}_\sigma\, e_\sigma\, \Omega_\sigma\, \xi^\alpha_{\sigma i}\,, \text{ con } k = \frac{1}{\sqrt{\bar{e} \sum_1^{m-n} {}_\sigma\, e_\sigma\, \Omega_\sigma^2}}\,, \tag{17}$$

(12) Per altre proprietà relative alla normale di curvatura media, si confronti la Memoria di E. Bompiani, *Studi sugli spazi curvi. La seconda forma fondamentale di una* V_m *in* V_n. « Atti del R. Ist. Veneto », vol. LXXX, pp. 1113-1145 (1921).

dove l'ambiguità di segno del radicale che compare in k corrisponde alle due possibili scelte per il verso di $\bar{\xi}^\alpha$, ed $\bar{e}$ significa il valore di e che compete a $\bar{\xi}^\alpha$

Nel caso che la forma fondamentale $a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ sia definita positiva, o, almeno assuma segno positivo per ogni spostamento in direzione normale a V_n°, le considerazioni precedenti, unitamente a note proprietà della curvatura media direzionale, permettono di concludere che il valore assoluto della curvatura media assume un massimo effettivo nella direzione della normale di curvatura media.

La « curvatura media » di V_n, definita come curvatura media nella direzione $\bar{\xi}^\alpha$, assume, in virtù di (16) e (17), la forma:

$$\Omega = \sqrt{\bar{e} \sum_1^{m-n} {}_\sigma \bar{e}_\sigma \, \Omega_\sigma^2}\,. \tag{18}$$

Il suo significato geometrico, dal punto di vista da cui qui ci poniamo, si desume immediatamente dal precedente enunciato generale, il che ci dispensa dall'insistervi ulteriormente.

Matematica. — *Interdipendenza tra serie convergenti e serie divergenti.* Nota [1] di B. Pettineo, presentata dal Socio M. Picone.

Scopo di questa breve Nota è di stabilire un elementare principio di interdipendenza sulle serie numeriche, in base al quale ad ogni proposizione sulle serie convergenti si possa far corrispondere una proposizione sulle serie divergenti (e viceversa).

1. Consideriamo una serie divergente $\sum u_n$ e denotiamo con U_n la somma dei suoi primi n termini. Supponiamo che si abbia sempre: $U_n \neq 0$ e poniamo:

$$R_n = \frac{1}{U_n}\,. \tag{1}$$

Interpretando R_n come *resto* dopo l' n^{imo} termine di una serie convergente $\sum a_n$, dalla relazione $a_n = R_{n-1} - R_n$ (per $n > 1$), si deduce:

$$a_n = \frac{1}{U_{n-1}} - \frac{1}{U_n}$$

e quindi:

$$a_n = \frac{u_n}{U_{n-1}\, U_n}\,. \tag{2}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1946.

Viceversa, se $\sum a_n$ è una serie convergente ed R_n è il suo resto dopo l'n^{imo} termine, supposto $R_n \neq 0$, poniamo:

$$U_n = \frac{1}{R_n}. \tag{3}$$

Se interpretiamo U_n come somma dei primi n termini di una serie divergente $\sum u_n$, dalla relazione $u_n = U_n - U_{n-1}$, si deduce:

$$u_n = \frac{a_n}{R_{n-1} R_n}. \tag{4}$$

Ciò dimostra che ad ogni proposizione sulle serie convergenti $\sum a_n$ si può fare corrispondere una proposizione sulle serie divergenti $\sum u_n$, la quale proposizione si ottiene immediatamente dalla prima, sostituendo al resto R_n della serie $\sum a_n$ l'inverso $1/U_n$ della somma dei primi n termini della serie $\sum u_n$ e sostituendo (per conseguenza) al termine a_n l'espressione $u_n/U_{n-1} U_n$. Viceversa, le formule (3) e (4) consentono di passare da una proprietà delle serie divergenti ad una proprietà delle serie convergenti.

Chiameremo *interdipendenti* due teoremi sulle serie numeriche quando l'uno si può ottenere dall'altro per mezzo delle formule (1) e (2), ovvero (3) e (4).

2. Sono, per esempio, interdipendenti i seguenti due teoremi (l'uno di Abel e l'altro di Dini):

I. « Se la serie $\sum u_n$ a termini positivi è divergente, denotando con U_n la somma dei suoi primi n termini, la serie $\sum u_n/U_n$ è pure divergente ed essa, qualora il suo termine generale tenda a zero, diverge come $\log U_n$ ».

II. « Se la serie $\sum a_n$ a termini positivi è convergente, denotando con R_n il suo resto dopo l'n^{imo} termine, la serie $\sum a_n/R_{n-1}$ è divergente ed essa, qualora il suo termine generale tenda a zero, diverge come $\log 1/R_n$ ».

Continuando a denotare con $\sum u_n$ (con $\sum a_n$) una serie divergente (convergente) a termini positivi e con U_n (con R_n) la somma dei suoi primi n termini (il suo resto dopo l'n^{imo} termine) e supponendo che il rapporto u_n/U_n (il rapporto a_n/R_{n-1}) tenda a zero, si possono facilmente dimostrare i seguenti teoremi:

I. « La serie $\sum u_n/U_n^t$ converge se $t > 1$, diverge come $U_n^{1-t}/(1-t)$ se $t < 1$ ».

II. « La serie $\sum a_n/R_n^\vartheta$ converge se $\vartheta < 1$, diverge come $1/[(\vartheta-1) R_n^{\vartheta-1}]$ se $\vartheta > 1$ ».

Orbene, queste due proposizioni si possono dedurre l'una dall'altra in base al nostro principio di interdipendenza.

Infatti, dalla prop. I si deduce che la serie $\sum a_n/\left(R_{n-1}R_n^{1-t}\right)$ converge se $t>1$, diverge come $1/[(1-t)R_n^{1-t}]$ se $t<1$. Ma tale serie converge o diverge *con la stessa rapidità* della serie $\sum a_n/R_n^{2-t}$, giacchè si ha:

$$\lim_{n,N_1}\frac{R_n}{R_{n-1}}=\lim_{n,N_1}\left(1-\frac{a_n}{R_{n-1}}\right)=1.$$

Basta porre allora $\vartheta=2-t$, per avere la prop. II.

In modo analogo, ponendo in corrispondenza ad ogni numero intero positivo h:

$$\overset{h}{\log}U_n=\begin{cases}\log U_n & \text{se } h=1\\ \overset{h-1}{\log}\log U_n & \text{se } h>1,\end{cases}$$

si possono dedurre l'uno dall'altro i due teoremi:

I. « La serie

$$\sum\frac{u_n}{U_n\log U_n\overset{2}{\log}U_n\cdots\overset{h}{(\log U_n)^t}}$$

converge se $t>1$, diverge come $\overset{h+1}{\log}U_n$ se $t=1$, diverge come $\overset{h}{(\log U_n)}^{1-t}/(1-t)$ se $t<1$ (qualunque sia l'intero positivo h) ».

II. « La serie

$$\sum\frac{a_n}{R_n\log\frac{1}{R_n}\overset{2}{\log}\frac{1}{R_n}\cdots\overset{h}{\left(\log\frac{1}{R_n}\right)^t}}$$

converge se $t>1$, diverge come $\overset{h+1}{\log}\frac{1}{R_n}$ se $t=1$, diverge come $\left(\overset{h}{\log}\frac{1}{R_n}\right)^{1-t}\Big/(1-t)$ se $t<1$ (qualunque sia l'intero positivo h) ».

Ha luogo infine il seguente teorema:

« Se esiste un numero positivo $K<1$, tale che si abbia: $a_n/R_n<K$ (da un certo valore dell'indice n in poi) e se h_n è una successione qualsiasi di numeri interi positivi, tale che $\overset{h_n}{\log}\frac{1}{R_n}$ sia una successione a termini positivi, allora la serie

$$\sum\frac{a_n}{R_n\log\frac{1}{R_n}\overset{2}{\log}\frac{1}{R_n}\cdots\overset{h_n}{\log}\frac{1}{R_n}}$$

è divergente ».

Tale teorema si deduce da quest'altro (da noi recentemente stabilito [2]): « Se esiste un numero positivo $K < 1$, tale che si abbia: $u_n | U_n < K$ (da un certo valore dell'indice n in poi) e se h_n è una successione qualsiasi di numeri interi positivi, tale che $\log^{h_n} U_n$ sia una successione a termini positivi, allora la serie

$$\sum \frac{u_n}{U_n \log U_n \log^2 U_n \cdots \log^{h_n} U_n}$$

è divergente ».

Meccanica. — *Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose.* Nota I [1] di G. Krall, presentata dal Socio C. Somigliana.

1. Premesse. – Il problema delle vibrazioni elastiche di uno scafo galleggiante in un fluido sede di propagazioni ondose è, io credo, un problema aperto per il costruttore navale. Esistono, è ben vero, due ricerche in merito, quanto mai pregevoli e rifinite; una di F. M. Lewis [2], l'altra di I. L. Taylor [3], ma in esse si considera un aspetto particolare del problema: un ellissoide o un cilindro vibra in un fluido *perfetto, indefinito,* secondo una configurazione assegnata, ad esempio quella w_ϱ che assume vibrando nel vuoto secondo una sua frequenza fondamentale ν_ϱ. Allora si può calcolare, secondo un classico teorema del Kirchhoff [4], l'aumento virtuale $\Delta\mathcal{T}$, dovuto al fluido, dell'energia cinetica $\mathcal{T}$ corrispondente a w_ϱ nel vuoto. Si trae per la frequenza variata ν^*_ϱ, mentre per ipotesi $w^*_\varrho = w_\varrho$, la relazione ovvia approssimata,

$$\nu^{*2}_\varrho : \nu^2_\varrho = \mathcal{T} : (\mathcal{T} + \Delta\mathcal{T})$$

i valori di $\mathcal{T}$ e $\Delta\mathcal{T}$ essendo naturalmente riferiti alla stessa fase, ad esempio all'annullarsi delle elongazioni e scritti per $\nu^*_\varrho = \nu_\varrho = 1$.

Se ciò costituisce un rispettabile criterio per il calcolo delle frequenze di uno scafo subacqueo, un sommergibile ad esempio, può lasciar non pienamente soddisfatti per uno scafo galleggiante in superficie ed in genere in ogni caso in cui interessa dominare l'elasto–dinamica della nave come può avvenire talvolta in sede di progetto o in taluni casi di vibrazioni forzate ribelli agli interventi ordinari.

(2) Cfr. le mie Note: *Una classe di serie divergenti,* « Annali di Mat. », vol. XXIV, 4ª serie; *Estensione di una classe di serie divergenti,* « Rendiconti Accad. dei Lincei », vol. I, a. 1946.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1946.

(2) I. Lewis, « Inst. Naval. Arch. », 1923.

(3) I. L. Taylor, « Inst. Naval. Arch. », 1930 e « Phil. Mag. », Ian. 1939.

(4) G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mechanik,* XIX Vorl., Lipsia, 1897.

In questa Nota io mi permetto segnalare l'impostazione che ho data al problema e la soluzione che, attraverso un compromesso di cui dirò subito, ne ho ricavata. Mi limiterò ad alcuni risultati essenziali, tratti dalle mie *Lezioni sull'Idro-aerodinamica delle vibrazioni dei corpi elastici* alla Facoltà d'Ingegneria Navale dell'Università di Trieste, che appaiono nelle *Monografie Scientifiche* della stessa Facoltà.

Al lettore cultore della materia non sfuggirà la suggestione che su me ha avuto una celebre ricerca del Rayleigh (5) sulla azione di un fluido sopra una piastra circolare rigida oscillante, per traslazione, sotto ad un richiamo elastico. Gli aumenti d'inerzia, gli smorzamenti riscontrati in quel classico esempio e via via ritrovati in problemi, fondamentali per ogni cultore di fisica-matematica, da Poincaré, Love, Lamb (6), Laura (7), riappaiono, come è naturale, per lo scafo elastico di cui si tratta. Le conclusioni cui sono pervenuto sono sintetizzabili in formole veramente definitive, facilmente accessibili all'applicazione numerica grazie al conforto dei grafici e tabelle che ho appositamente preparati lavorando in margine a progetti navali di cui per qualche anno mi sono occupato con assiduità.

Ma veniamo al compromesso. Ammetterò che il fluido sia solidificato in superficie con esclusione per l'area di galleggiamento ω della carena di cui si tratta, proprio così come nel problema del Rayleigh in cui la piastra oscilla nel foro di un piano rigido. Non sembra che alle frequenze in cui si lavora e per le dimensioni di ω in rapporto alle lunghezze d'onda, una tale ipotesi debba infirmare molto i risultati. Ad ogni buon conto resta, con quanto segue, non solo risolto il problema, invero alquanto particolare, della nave galleggiante contornata dai ghiacci, ma vien anche fatto un passo sensibile verso la soluzione effettiva, che ancora non mi riesce afferrare, perchè considera, esternamente ad ω, in luogo dell'annullarsi superficiale della derivata normale del potenziale di velocità Φ, la condizione effettiva, indicata da Airy nello studio delle onde di superficie che portano il suo nome,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 .$$

Se la nozione del potenziale Φ corrispondente dovesse riuscire, le modifiche da apportare ai risultati conseguiti non riguarderanno molto la struttura generale della problematica qui considerata (8).

(5) Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, 2ª ed., vol. II, § 302, London, 1925.

(6) Poincaré, *Leçons sur la theorie de l'Elasticité*, p. 160 e seg.

(7) Laura, «Rend. Acc. Lincei», Roma, 1912, pp. 754-759.

(8) Ciò almeno quando questa contempli la *dissipatività* in generale e quindi, in particolare, quella corrispondente alle *onde di superficie* generate dalle pressioni di ω sul fluido. Se tali pressioni si valutano, in prima approssimazione, secondo la presente schematizzazione è possibile arrivare a risultati concreti. In merito cfr. le citate *Lezioni*.

2. Equazioni per il moto di un corpo elastico immerso in un fluido. – Consideriamo uno scafo elastico di cui sia Ω la superficie immersa, Ω' la superficie emergente.

Senza far ipotesi sulla struttura elastica, scriviamo le equazioni dell'equilibrio nella forma nota e con noti simboli,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} = X - \gamma_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

Al contorno sussistono le condizioni

$$X_x \cos \widehat{nx} + X_y \cos \widehat{ny} + X_z \cos \widehat{nz} = \begin{cases} 0 & \text{su } \Omega', \\ X_n & \text{su } \Omega, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

con

$$X_n = p \cos \widehat{nx} \quad , \quad Y_n = p \cos \widehat{ny}, \cdots; \qquad (3)$$

essendo la pressione p legata al potenziale di velocità Φ dalla relazione

$$p = -\gamma_a \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (4)$$

con densità del fluido ($\gamma_a g = 1{,}026$ t. m^{-3}, $g = 9{,}81$ m. sec^{-2}).

A sua volta, Φ soddisfa l'equazione dei piccoli moti

$$\Delta\Phi - \frac{1}{V_a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (5)$$

essendo V_a la velocità del suono nel fluido di cui si tratta.

Le condizioni ai limiti cui deve soddisfare Φ sono

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{du}{dt} \cos \widehat{nx} + \frac{dv}{dt} \cos \widehat{ny} + \frac{dw}{dt} \cos \widehat{nz} \qquad (6)$$

su Ω, e, ove si indichi con g l'accelerazione della gravità,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad (7)$$

sul pelo libero; infine,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad (8)$$

all'infinito.

3. Integrazione per il semispazio. Caso delle carene a fondo piatto. – Per semplificare il problema sostituiamo alla Ω la proiezione ω (l'area di galleggiamento) sul piano del pelo libero $z = 0$.

Poichè $\cos \widehat{n\,x} = \cos \widehat{n\,y} = 0$, $\cos \widehat{n\,z} = 1$, sarà su ω

$$(6\,a) \qquad \frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{dw}{dt}$$

e sul resto del piano varrà la (7) (cfr. fig. 1 e 2), oppure, ove si pensi esistente un piano rigido (cfr. fig. 3) formato ad esempio da un lastrone di ghiaccio,

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 .$$

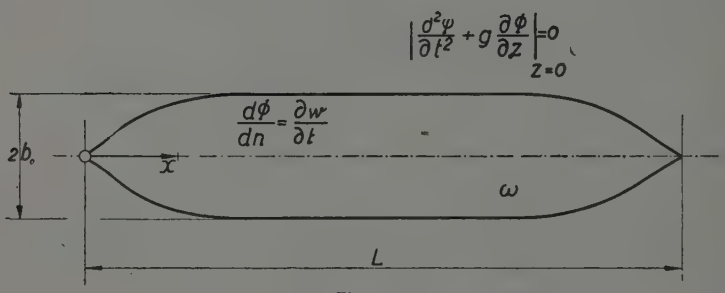


Fig. 1.

Si ha allora per Φ, soluzione della (5), posto $\frac{dw}{dt} = W$,

$$(9) \qquad \Phi(P, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\omega} W\left(t - \frac{r(P, P')}{V_a}\right) \frac{d\omega(P')}{r(P, P')} .$$

Calcolando p con la (4), per tale espressione (9) di Φ le (1) vengono a costituire, attraverso le condizioni (2) al contorno, un sistema di equazioni integrodifferenziali di cui passiamo, con stretto riguardo al caso specifico di uno scafo navale, a considerare la trattazione sino al concreto.

4. Lo scafo si assimila ad un' asta elastica libera agli estremi. — È ormai pacifico che le vibrazioni flessionali di uno scafo si studiano schematizzandolo ad un'asta libera agli estremi, con resistenza ed inerzia funzioni di un'unica coordinata x, misurata lungo l'asse a contare ad esempio dall'estremo di sinistra che si fa coincidere con la *perpendicolare addietro*.

Per un'asta, sotto semplificazioni ormai codificate, le equazioni (1) e (2) si riducono all'equazione nel solo spostamento w, (cfr. fig. 2)

$$(10) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\mathfrak{J}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t)$$

con $E, \mathfrak{J}, \mu, q$, modulo d'elasticità, momento di inerzia della sezione resistente, masse e forze perturbanti per unità di lunghezza, desumibili dal *diagramma dei pesi* e dai *diagrammi dei motori*.

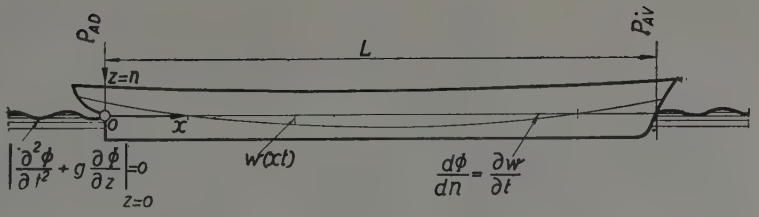


Fig. 2.

Agli estremi $x = 0$ e $x = L$ si annulla il momento flettente ed il taglio, quindi

$$(11) \qquad E\mathfrak{J} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\bigg|_{x=0,L} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(E\mathfrak{J} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\bigg|_{x=0,L} = 0 .$$

Alla distribuzione $q(x, t)$ si aggiunge quella reattiva del fluido che, se $2\,b(x)$ è la larghezza della nave, vale

$$\Delta q = -\int_{-b(x)}^{b(x)} p(x, y)\, dy - 2\,\gamma_a\, g\, b(x) \cdot w$$

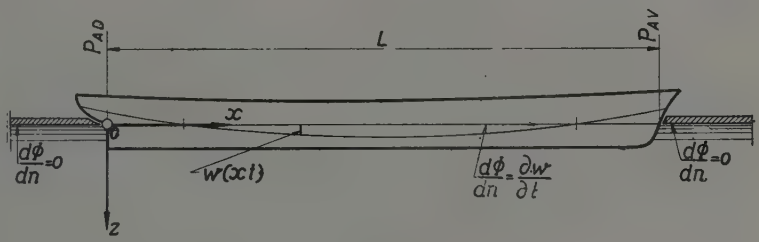


Fig. 3.

con p espresso dalla (4). In tal guisa si perviene all'equazione integrodifferenziale in w, valida nelle condizioni della fig. 3,

$$(12) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\mathfrak{J} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) - 2\,\gamma_a\, g\, b(x)\, w -$$

$$- \frac{\gamma_a}{2\pi} \int_{-b}^{b} dy \iint_{\omega} \frac{\partial^2 w\left(x', t - \dfrac{r(P, P')}{V_a}\right)}{\partial t^2} \cdot \frac{d\omega'}{r(P, P')} ,$$

essendo

$$r(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y'^2)}$$

ferme restando le condizioni (11) agli estremi.

4. Perturbazione armonica. – Per affrontare una tale equazione cominciamo con l'ammettere che l'azione perturbante sia armonica del tipo

$$q(x, t) = q(x) \cdot e^{i\nu t} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

$n = \frac{\nu}{2\pi}$ essendo il numero di giri.

Posto

$$w(x, t) = \overline{w}(x) \cdot e^{i\nu t}$$

con $\overline{w}$ funzione della sola x, la (19) diviene, abbandonando la sopralineazione, che riterremo sottointesa,

$$(12\,a) \qquad \frac{d^2}{dx}\left(E\mathfrak{J}\frac{d^2 w}{dx^2}\right) - \mu\nu^2 w = q(x) - 2\,b(x)\,g\gamma_a\,w + \\ + \frac{\gamma_a \nu^2}{2\pi}\int_{-b(x)}^{b(x)} dy \int_{\omega} w(x') \cdot \frac{e^{-i\varkappa r(P, P')}}{r(P, P')}\, d\omega(P').$$

con

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \quad \lambda = V_a \cdot \frac{2\pi}{\nu}.$$

essendo λ la lunghezza d'onda.

5. Applicazione dei metodi diretti del Calcolo delle variazioni per la ricerca di soluzioni della (12 *a*). – Una tale equazione si affronta utilmente con i metodi diretti del Calcolo delle variazioni. Qui considererò quello del Ritz detto anche delle *serie minimizzanti*. All'uopo occorre scrivere un *principio variazionale equivalente* (e ragionevole) alla (12 *a*).

Ove si rilevi la simmetria di

$$\frac{e^{i\varkappa r(PP')}}{r(P, P')}$$

rispetto a P e P', si trova, equivalente, l'equazione variazionale

$$(13) \qquad \delta\left\{\int\left[E\mathfrak{J}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 (\mu\nu^2 - 2\,b(x)\,g\gamma_a)\,w^2 - 2\,q(x)\cdot w\right] dx - \right. \\ \left. - \frac{\gamma_a \nu^2}{\pi} \cdot \int_{\omega}\int_{\omega} w(x)\,w(x') \cdot \frac{e^{-i\varkappa r(P, P')}}{r(PP')}\, d\omega(P)\, d\omega(P')\right\} = 0.$$

con la convenzione di calcolare l'integrale (ed ogni suo derivato) rispetto a $d\omega(P)$ e $d\omega(P')$ computando una sola volta la coppia $d\omega(P)\,d\omega(P')$. Se si computasse anche la commutata $d\omega(P')\,d\omega(P)$ il fattore sarebbe $\frac{\gamma_a \nu^2}{2\pi}$ in luogo di $\frac{\gamma_a \nu^2}{\pi}$.

Per calcolare l'estremale w, poniamo

$$w(x) = \sum_{1}^{N}{}_{\varrho} A_\varrho w_\varrho(x)$$

con A_ϱ coefficenti incogniti e le w_ϱ soddisfacenti alle condizioni (11) agli estremi $x = 0$ ed $x = L$. Assumeremo le autofunzioni dell'asta omogenea libera agli estremi, che si impongono quasi naturalmente. In merito cfr. le Tabelle I, II; in esse il riferimento è preso dal mezzo nave anzichè a partire dalla P_{ad}.

Posto, sempre con riguardo alla fig. 3,

$$x = \xi L \quad , \quad y = \eta L \quad , \quad E\mathfrak{J} = E\mathfrak{J}_0 \cdot j(\xi)$$

$$(14) \quad e_{\varrho\tau} = \frac{E\mathfrak{J}_0}{L^3} \cdot \varepsilon_{\varrho\tau} \quad , \quad m_{\varrho\tau} = \mu_0 L \cdot \mu_{\varrho\tau} \quad , \quad b_{\varrho\tau} = 2\gamma_a L b_0 \beta_{\varrho\tau} \quad , \quad q_\varrho = q_0 L \cdot f_\varrho .$$

con

$$\varepsilon_{\varrho\tau} = \int_0^1 j(\xi) \frac{d^2 w_\varrho}{d\xi^2} \frac{d^2 w_\tau}{d\xi^2} d\xi \quad , \quad \mu_{\varrho\tau} = \int_0^1 \frac{\mu}{\mu_0} w_\varrho w_\tau d\xi ,$$

$$\beta_{\varrho\tau} = \int_0^1 \frac{b}{b_0} w_\varrho w_\tau d\xi \quad , \quad f_\varrho = \int_0^1 \frac{q}{q_0} w_\varrho d\xi ,$$

$$\Phi_{\varrho\tau} = (\varphi_{\varrho\tau} + i\varphi'_{\varrho\tau}) \frac{L^3}{2\pi} \gamma_a \quad , \quad \rho(P, P') = \frac{r(P, P')}{L}$$

$$(14\,a) \quad \begin{cases} \varphi_{\varrho\tau} = \iiiint w_\varrho(\xi) w_\tau(\xi) \dfrac{\cos 2\pi \dfrac{L}{\lambda} \rho(PP')}{\rho(P, P')} d\xi\, d\eta\, d\xi'\, d\eta' , \\ \varphi'_{\varrho\tau} = \iiiint w_\varrho(\xi) w_\tau(\xi) \dfrac{\sin 2\pi \dfrac{L}{\lambda} \rho(P, P')}{\rho(P, P')} d\xi\, d\eta\, d\xi'\, d\eta' , \end{cases}$$

$\xi, \eta; \xi', \eta'$ essendo le coordinate di un punto P rispettivamente P' di ω; ferma restando l'osservazione riguardo al calcolo fatta alla (13),

$$\nu = \bar{\nu} \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}_0}{\mu_0 L^4}} \quad ; \quad \frac{1}{\pi} \frac{L^2 \gamma_a}{\mu_0} = \chi \quad , \quad \frac{2\gamma_a g b_0 L^4}{E\mathfrak{J}_0} = \eta_a$$

$$(14\,b) \qquad \frac{L^3}{E\mathfrak{J}_0} \int_0^L q(x) w_\varrho(x) dx = \psi_\varrho ;$$

segue da (13), il sistema di equazioni algebriche lineari nelle A_ϱ, a coefficenti complessi,

$$(15) \qquad \sum_\tau \{\varepsilon^*_{\varrho\tau} - \mu^*_{\varrho\tau} \bar{\nu}^2 + i\bar{\nu}^2 c_{\varrho\tau}\} A_\tau = \psi_\varrho , (\varrho = 1, 2, \cdots;) , (i = \sqrt{-1}) ,$$
$$(\varrho = 0, 1, 2, \cdots, N)$$

con

$$(14\,c) \qquad \mu^*_{\varrho\tau} = \mu_{\varrho\tau} + \chi\varphi_{\varrho\tau} \quad , \quad \varepsilon^*_{\varrho\tau} = \varepsilon_{\varrho\tau} + \eta_a\,\beta_{\varrho\tau} \quad , \quad c_{\varrho\tau} = \chi\varphi'_{\varrho\tau}$$

per $\lambda \to \infty$ (o praticamente tale in raffronto alle dimensioni dello scafo),

$$(14\,d) \qquad \chi\varphi_{\varrho\tau} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\gamma_a\,L^2}{\mu_o}\,\Theta_{\varrho\tau} \quad , \quad \varphi'_{\varrho\tau} = 0$$

con $\Theta_{\varrho\tau}$ dato dalla espressione, caratterizzante un *autopotenziale*,

$$\Theta_{\varrho\tau} = \iiiint \frac{w_\varrho(\xi)\,w_i(\xi')}{\rho(P\,,P')}\,d\xi\,d\eta\,d\xi'\,d\eta'$$

e nelle (15) si contemplano allora soli coefficenti reali. Ove si trascuri la inerzia del fluido, le (15) divengono

$$(15\,a) \qquad \sum_\tau \{\varepsilon^*_{\varrho\tau} - \mu_{\varrho\tau}\,\bar{\nu}^2\}\,A_\tau = \psi_\varrho \,. \quad (\varrho = 0\,,1\,,2\cdots,N)$$

Le (15) o (15 *a*) contemplano oltre alle vibrazioni elastiche (per $\varrho \geqq 2$) le oscillazioni rigide di emersione ($\varrho = 0$) e beccheggio ($\varrho = 1$), che vengono così *concatenate* alle prime.

6. Oscillazioni proprie (libere). – Mentre per il moto forzato la frequenza ν è assegnata, in quanto le vibrazioni si suppongono sincrone con l'azione perturbante, per il moto oscillatorio libero si dà la difficoltà che i coefficenti delle (15), $\mu^*_{\varrho\tau}$ e $c_{\varrho\tau}$ sono, attraverso $\varphi_{\varrho\tau}$ e $\varphi'_{\varrho\tau}$ funzioni della lunghezza d'onda λ e quindi della incognita frequenza ν. Poichè in ogni caso tale dipendenza è poco sensibile per valori di $\lambda = 2\,\pi V_a : \nu$ dell'ordine delle dimensioni lineari massime dell'*area di galleggiamento* ω e poichè ciò effettivamente avviene nel problema che si considera, riterremo i suddetti coefficenti $\mu^*_{\varrho\tau}$ e $c_{\varrho\tau}$ calcolati per un $\bar{\nu}^{(o)}_\alpha$, prima approssimazione del valore $\bar{\nu}_\alpha$ che si ricerca, corrispondente al caso del fluido incompressibile, cioè per $V_a = \infty$.

Tale valore $\bar{\nu}^{(o)}_\alpha$ è, per definizione, l'α^{ima} radice dell'equazione delle frequenze di (15) per $c_{\varrho\tau} = 0$, dunque

$$(16) \qquad \| \varepsilon^*_{\varrho\tau} - \bar{\nu}^2\,\mu^*_{\varrho\tau} \| = 0$$

con

$$\mu^*_{\varrho\tau} = \mu_{\varrho\tau} + \chi\,[\varphi_{\varrho\tau}]_{V_a=\infty} = \mu_{\varrho\tau} + \chi\Theta_{\varrho\tau}\,.$$

Risulta così per il calcolo della seconda, e praticamente definitiva, approssimazione della α^{ima} frequenza $\bar{\nu}_\alpha$, l'equazione

$$(16\,a) \qquad \left\| \varepsilon_{\varrho\tau} - \bar{\nu}^2_\alpha \left[\mu^*_{\varrho\tau}\left(\bar{\nu}^{(o)}_\alpha\right) - i c_{\varrho\tau}\left(\bar{\nu}^{(o)}_\alpha\right)\right] \right\| = 0\,.$$

Indicata con

$$\bar{\nu}_\alpha = \bar{\omega}_\alpha + i\bar{h}_\alpha$$

la radice ricercata si avrà dall'originario sistema (15) una n^{pla} di soluzioni $A_\varrho^{(\alpha}$ che scriveremo compendiosamente nella forma

$$A_\varrho^{(\alpha)} = R_{\varrho\alpha}\, e^{i\delta_{\varrho\alpha}}.$$

Ciò posto, introducendo le ovvie scritture

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}_o}{\mu_o L^4}}\,\bar{\omega}_\alpha \quad ; \quad h_\alpha = \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}_o}{\mu_o L^4}}\,\bar{h}_\alpha$$

si avrà per $w(x,t)$, ove si pensi ordinatamente svolto il calcolo delle $\bar{\nu}_\alpha$ e corrispondenti $A_\varrho^{(\alpha)}$ sullo schema precedente,

$$w(x,t) = \sum_\alpha \sum_1^N{}_\varrho\, R_{\varrho\alpha}\, e^{-h_\alpha t} \cos(\omega_\alpha t - \delta_{\varrho\alpha}) \cdot w_\varrho(x).$$

Che i coefficenti h_α risultino positivi, e quindi il moto oscillatorio a carattere smorzato, è una conseguenza spontanea dell'impostazione stessa del problema, trattandosi di una propagazione di onde, irradiate da ω e quindi di una dispersione di energia del sistema vibrante.

Dopo le generalità conviene stringere ulteriormente i risultati con maggior riguardo al caso specifico, all'approssimazione normalmente richiesta, ed alle normali possibilità di calcolo.

All'uopo riporto nelle Tabelle I, II le w_ϱ e le corrispondenti w''_ϱ. Queste consentono il calcolo dei coefficenti $\mu_{\varrho\tau}$ e $\varepsilon_{\varrho\tau}$ per un qualunque *diagramma dei pesi e dei ferri*. L'origine delle coordinate è posta al mezzo nave.

Se per questi diagrammi si ammettono leggi semplici del tipo

$$(16) \qquad \frac{\mu(\xi)}{\mu_o} = 1 - m_1\xi - m_2\xi^2 \qquad \frac{J(\xi)}{J_o} = 1 - k_1\xi - k_2\xi^2$$

$m_1, m_2; k_1, k_2$ essendo costanti da determinare in base ai dati, si hanno Tabelle di cui è ovvia l'utilità.

In una Nota successiva (Nota II) darò queste Tabelle ed un cenno sugli accorgimenti di calcolo e le necessarie illustrazioni per affrontare agilmente i presenti sviluppi.

TABELLA I. — *Autofunzioni* w_0. (L'origine $\xi = 0$ è al mezzo nave).

ξ	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
+ 0,500	1,000	+ 0,500	— 1,41451	— 1,41419	+ 1,41663
+ 0,475	»	+ 0,475	— 1,25021	— 1,13640	+ 1,02645
+ 0,450	»	+ 0,450	— 1,08607	— 0,85975	+ 0,64175
+ 0,425	»	+ 0,425	— 0,92242	— 0,58684	+ 0,27061
+ 0,400	»	+ 0,400	— 0,75997	— 0,32167	— 0,07331
+ 0,375	»	+ 0,375	— 0,59934	— 0,06889	— 0,37644
+ 0,350	»	+ 0,350	— 0,44055	+ 0,16619	— 0,62432
+ 0,325	»	+ 0,325	— 0,34434	+ 0,37811	— 0,80584
+ 0,300	»	+ 0,300	— 0,13853	+ 0,56180	— 0,90909
+ 0,275	»	+ 0,275	+ 0,05055	+ 0,71267	— 0,93329
+ 0,250	»	+ 0,250	+ 0,14062	+ 0,82696	— 0,87839
+ 0,225	»	+ 0,225	+ 0,26768	+ 0,90198	— 0,75065
+ 0,200	»	+ 0,200	+ 0,38501	+ 0,93622	— 0,56131
+ 0,175	»	+ 0,175	+ 0,49153	+ 0,92955	— 0,32581
+ 0,150	»	+ 0,150	+ 0,58146	+ 0,88320	— 0,06278
+ 0,125	»	+ 0,125	+ 0,66795	+ 0,79975	+ 0,20732
+ 0,100	»	+ 0,100	+ 0,73475	+ 0,68297	+ 0,46368
+ 0,075	»	+ 0,075	+ 0,78982	+ 0,53836	+ 0,68667
+ 0,050	»	+ 0,050	+ 0,83821	+ 0,37156	+ 0,85922
+ 0,025	»	+ 0,025	+ 0,85043	+ 0,18963	+ 0,96846
0,000	1,000	0,000	+ 0,85959	0.0000	+ 1,0000
— 0,025	1,000	— 0,025	+ 0,85043	— 0,18963	+ 0,96846
— 0.050	»	— 0,050	+ 0,83821	— 0,37156	+ 0,85922
— 0,075	»	— 0,075	+ 0,78982	— 0,53836	+ 0,68667
— 0.100	»	— 0,100	+ 0,73475	— 0,68297	+ 0,46368
— 0,125	»	— 0,125	+ 0,66795	— 0,79975	+ 0,20732
— 0,150	»	— 0,150	+ 0,58146	— 0,88320	— 0,06278
— 0,175	»	— 0,175	+ 0,49153	— 0,92955	— 0,32581

Segue: TABELLA I.

ξ	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
— 0,200	1.000	— 0,200	+ 0,38501	— 0,93622	— 0,56131
— 0,225	»	— 0,225	+ 0,26768	— 0,90198	— 0,76065
— 0,250	»	— 0,250	+ 0,14062	— 0,82696	— 0,87839
— 0,275	»	— 0,275	+ 0,05055	— 0,71267	— 0,93329
— 0,300	»	— 0,300	— 0,13853	— 0,56180	— 0,90909
— 0,325	»	— 0,325	— 0,35434	— 0,37811	— 0,80584
— 0,350	»	— 0,350	— 0,44055	— 0,16619	— 0,62432
— 0,375	»	— 0,375	— 0,59934	+ 0,06889	— 0,37644
— 0,400	»	— 0,400	— 0,75997	+ 0,32167	— 0,07331
— 0,425	»	— 0,425	— 0,92242	+ 0,58684	+ 0,27061
— 0,450	»	— 0,450	— 1,08607	+ 0,85975	+ 0,64175
— 0,475	»	— 0,475	— 1,25021	+ 1,13640	+ 1,02645
— 0,500	»	— 0,500	— 1,41451	+ 1,41419	+ 1,41663

TABELLA II. *Derivate 2e delle* w_0. (L'origine $\xi = 0$ è al mezzo nave).

ξ	w_2''	w_3''	w_4''
+ 0,500	0	0	0
+ 0,475	— 0,21286	— 1,57054	+ 5,95085
+ 0,450	— 0,81657	— 5,84346	+ 21,14355
+ 0,425	— 1,75938	— 12,16050	+ 42,28952
+ 0,400	— 2,99171	— 19,87380	+ 65,84389
+ 0,375	— 4,46164	— 28,35239	+ 88,80946
+ 0,350	— 6,14068	— 37,00314	+ 108,37764
+ 0,325	— 7,92026	— 45,26044	+ 122,15335
+ 0,300	— 9,79885	— 52,62478	+ 128,91184
+ 0,275	— 11,72767	— 58,66047	+ 127,27602
+ 0,250	— 13,65463	— 63,00845	+ 117,19511
+ 0,225	— 15,53855	— 65,40008	+ 99,13338

Segue: TABELLA II.

ξ	w_2''	w_3''	w_4''
+ 0,200	— 17,33878	— 65,65307	+ 74,25996
+ 0,175	— 19,01914	— 63,68993	+ 44,29410
+ 0,150	— 20,54579	— 59,52523	+ 11,37094
+ 0,125	— 21,88973	— 53,26793	— 22,11924
+ 0,100	— 23,05461	— 45,10774	— 53,70641
+ 0,075	— 23,93083	— 35,34564	— 83,02061
+ 0,050	— 24,81168	— 24,30037	— 103,88246
+ 0,025	— 25,01978	— 12,37435	— 117,08872
0,000	— 25,12454	0,00	— 120,20077
— 0,025	— 25,01978	+ 12,37435	— 117,08872
— 0,050	— 24,81168	+ 24,30037	— 103,88246
— 0,075	— 23,93083	+ 35,34564	— 83,02061
— 0,100	— 23,05461	+ 45,10774	— 53,70641
— 0,125	— 21,88973	+ 53,26793	— 22,11924
— 0,150	— 20,55679	+ 59,52523	+ 11,37094
— 0,175	— 19,01914	+ 63,68993	+ 44,29410
— 0,200	— 17,33878	+ 65,65307	+ 74,25996
— 0,225	— 15,53855	+ 65,40008	+ 99,13338
— 0,250	— 13,65463	+ 63,00845	+ 117,19511
— 0,275	— 11,72767	+ 58,66047	+ 127,27602
— 0,300	— 9,79885	+ 52,62478	+ 128,91184
— 0,325	— 7,92026	+ 45,26044	+ 122,15335
— 0,350	— 6,14068	+ 37,00314	+ 108,37764
— 0,375	— 4,46164	+ 28,35239	+ 88,80946
— 0,400	— 2,99171	+ 19,87380	+ 65,84389
— 0,425	— 1,75938	+ 12,16105	+ 42,28952
— 0,450	— 0,81657	+ 5,84346	+ 21,14355
— 0,475	— 0,21286	+ 1,57054	+ 5,95085
— 0,500	0	0	0

Astronomia. — *Nuovi elementi, perturbati e migliorati, delle orbite di due pianetini.* Nota [1] di P. Sconzo, presentata dal Socio G. Armellini.

1. Nella presente Nota comunico brevemente i risultati ottenuti dal calcolo di elaborazione delle orbite dei due pianetini (623) Edda e (720) Bohlinia, che fanno parte del gruppo dei pianetini di eccentricità debolissima [2]. Il primo di questi pianetini fu scoperto a Taunton (Mass., U. S. A.) da Metcalf, [3] nel 1908, ed il secondo ad Heidelberg da Kaiser [4], nel 1911. A fondamento del calcolo ho posto le seguenti osservazioni, relative, per entrambi i pianeti, a nove fra le ultime opposizioni osservate:

	N°	Data (T. U.) (5)	Posizione α	1950,0 δ	Luogo	Pubblicazione
(673)	1	1927 Settembre $23^d.9401$	$11^h.623$	+ 7°.970	Mosca	B. Z. 1928, 27
	2	1930 Aprile 25 .9433	202 .280	—10 .928	Königstuhl	» 1930, 22
	3	1932 Novembre 5 .9329	34 .490	+14 .498	Simeïs	R. I. 680, (6)
	4	1934 Febbraio 7 .9910	136 .565	+11 .990	Barcellona	» 942
	5	1935 Maggio 9 .9190	231 .957	—18 .520	Johannesb.	» 1278
	6	1936 Agosto 15 .9294	330 .205	— 7 .513	Simeïs	» 1432
	7	1939 Marzo 11 .9951	161 .550	+ 3 .567	Bergedorf	» 1939
	8	1940 Giugno 11 .0034	258 .900	—20 .683	Johannesb.	» 2253
	9	1942 Dicembre 10 .9553	95 .440	+20 .475	Königstuhl	» (7)
(720)	1	1928 Gennaio 29 .0969	135 .863	+20 .580	Königstuhl	B. Z. 1928, 6
	2	1930 Agosto 15 .8305	320 .098	—19 .270	Johannesb.	U. C. 84
	3	1931 Novembre 6 .9414	44 .827	+17 .617	Simeïs	A.N. 245, (223)
	4	1933 Gennaio 21 .9678	147 .918	+16 .683	Torino	R. I. 754
	5	1934 Maggio 11 .9154	234 .087	—20 .532	Johannesb.	» 992
	6	1936 Novembre 16 .9376	52 .660	+20 .227	Budapest	» 1493
	7	1938 Marzo 1 .8592	150 .775	+15 .433	Uccle	B. A. B. 2, (233)
	8	1939 Maggio 23 .8443	242 421	—22 .750	Johannesb.	R. I. 2006
	9	1943 Febbraio 26 .9611	161 .938	+10 .980	Barcellona	» 2492

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1946.

(2) Il compito di occuparmi di questo gruppo di pianetini mi è stato affidato, gentilmente, dalla Direzione dell'Istituto Copernicano (A. R. I.).

(3) « A. N. », 179, 94. Il pianetino si trova pure fotografato in una lastra ottenuta all'Osservatorio di Heidelberg il 21 settembre 1908. Cfr. « A. N. », 179, 44.

(4) « A. N. », 189, 363.

(5) È stato tenuto conto del tempo di aberrazione.

(6) L'indicazione dell'osservazione, contenuta nel « B. A. B. » 1, (169), sembra essere errata.

(7) Nuova misura più precisa, comunicatami, amichevolmente, dal dott. K. Reinmuth, che sostituisce quella pubblicata in « R. I. », 2433. (Il pianetino si trova ad un angolo della lastra).

Con gli elementi di partenza, presi dal *Planetenheft* per il 1944, ho calcolato dapprima le perturbazioni speciali approssimate di Giove, relative al periodo 1926-1943. A cagione dei valori molto piccoli delle eccentricità, le perturbazioni, specialmente degli elementi M ed ω, assumono importi molto rilevanti e per questo ho cambiato gli elementi molte volte, durante il calcolo, tenendo conto delle perturbazioni stesse, via via accumulatesi (in media ogni biennio, e, nelle zone di massima vicinanza con Giove, più spesso).

Relativamente alle date delle singole osservazioni della tabella precedente, ho ottenuto:

	N°	ΔM	Δω	ΔΩ	Δ*i*	80 Δμ	Δφ
(673)	1	— 0°.105	+ 0°.239	— 0°.202	+ 0°.004	—0°.0064	— 0°.085
	2	—10 .544	+10 .756	— 0 .231	+ 0 .009	+0 .0155	— 0 .155
	3	—16 .192	+16 .508	— 0 .256	+ 0 .009	+0 .0151	— 0 .166
	4	—18 .380	+18 .820	— 0 .255	+ 0 .009	+0 .0161	— 0 .173
	5	—26 .159	+26 .607	— 0 .286	+ 0 .011	—0 .0055	— 0 .124
	6	—24 .940	+25 .398	— 0 .286	+ 0 .012	+0 .0222	— 0 .049
	7	—20 .879	+21 .541	— 0 .307	+ 0 .011	—0 .0006	— 0 .021
	8	—19 .167	+19 .868	— 0 .315	+ 0 .012	+0 .0148	— 0 .004
	9	—13 .782	+14 .730	— 0 .323	+ 0 .011	+0 .0022	+ 0 .054
(720)	1	+ 0 .289	— 0 .213	— 0 .004	0 .000	—0 .0010	+ 0 .039
	2	+ 0 .190	— 0 .248	— 0 .014	— 0 .001	—0 .0052	+ 0 .087
	3	— 0 .500	+ 0 .454	— 0 .021	0 .000	+0 .0048	+ 0 .109
	4	+ 0 .351	— 0 .363	— 0 .030	0 .000	—0 .0089	+ 0 .143
	5	+ 4 .003	— 4 .211	— 0 .040	0 .000	—0 .0059	+ 0 .191
	6	+ 6 .703	— 6 .875	— 0 .039	— 0 .001	—0 .0053	+ 0 .179
	7	+ 7 .578	— 7 .810	— 0 .053	— 0 .001	—0 .0077	+ 0 .172
	8	+ 8 .942	— 9 .203	— 0 .057	— 0 .001	+0 .0022	+ 0 .167
	9	+17 .103	—17 .494	— 0 .194	— 0 .007	—0 .0064	+ 0 .036

2. Poi ho proceduto al calcolo di miglioramento delle due orbite, col noto metodo approssimato di *Tietjen*, il cui grado di esattezza è stato sufficiente nel caso presente. Per il pianeta (673) è stato però necessario migliorare, a parte, per una maggiore concordanza in δ con le osservazioni, gli elementi Ω ed *i*. Per il pianeta (720) le equazioni di condizione furono risolte due volte, successivamente, e precisamente la seconda volta introducendo in esse i residui Δα e Δδ, ottenuti mediante la prima risoluzione.

Qui dò i risultati finali, relativi alle correzioni differenziali degli elementi:

(673) $dM = +6^{\circ}.829$, $d\omega = -5^{\circ}.789$, $d\Omega = -0^{\circ}.868$,
$d\varphi = +0^{\circ}.067$, $d\mu = -0''.202$, $di = +0^{\circ}.001$.
(720) $dM = -3^{\circ}.852$, $d\omega = +3^{\circ}.532$,
$d\varphi = -0^{\circ}.019$, $d\mu = +0''.463$.

Tenendo conto di queste correzioni e delle perturbazioni, i residui, sempre nel senso osservazione–calcolo, risultano:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
3)	$\Delta\alpha$	$-0^{\circ}.031$	$+0^{\circ}.026$	$+0^{\circ}.060$	$+0^{\circ}.009$	$-0^{\circ}.012$	$+0^{\circ}.009$	$-0^{\circ}.022$	$+0^{\circ}.053$	$-0^{\circ}.021$
	$\Delta\delta$	−0 .010	−0 .050	+0 .035	−0 .038	−0 .013	+0 .036	−0 .027	+0 .020	−0 .002
0)	$\Delta\alpha$	+0 .012	+0 .013	+0 .025	+0 .049	+0 .021	−0 .061	+0 .030	+0 .009	−0 .018
	$\Delta\delta$	+0 .017	+0 .038	−0 .011	−0 .041	−0 .012	−0 .005	−0 .050	−0 .012	−0 .026

che sono da considerarsi molto soddisfacenti nell'ordine usuale di approssimazione in questo genere di calcoli [8].

3. Ho proseguito, infine, i calcoli delle perturbazioni, per calcolare le effemeridi delle opposizioni del 1945 e ss. e qui riporto i nuovi elementi definitivi, per le epoche e le osculazioni, segnate a fianco di ciascun pianetino:

(673) *Edda* — 1945 Luglio 4.0 (T. U.)

M	188° .536	ω	228° .901
φ	0 .744	Ω	227 .483
μ	751″ .569	*i*	2 .837
a	2 .8143		

(720) *Bohlinia* — 1945 Settembre 22.0 (T. U.)

M	214° .790	ω	95° .836
φ	0 .925	Ω	36 .434
μ	722″ .953	*i*	2 389
a	2 .8880		

Per entrambi gli elementi sono eclitticali ed il riferimento è all'equinozio normale 1950.0.

(8) Comunicati questi risultati alla Direzione dell'« A. R. I. », essi sono stati approvati e mi è stato comunicato che i due pianetini, in avvenire, saranno considerati pianetini « S ».

Astronomia. — *Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali* [1]. Nota II di A. Colacevich, presentata [2] dal Socio G. Abetti.

B) *Le stelle con piccola velocità spaziale nel complesso della distribuzione statistica delle velocità stellari.*

Un primo calcolo approssimato del numero delle stelle che casualmente risultano con piccola velocità rispetto al Sole può essere eseguito assumendo una distribuzione casuale nello spazio delle velocità stellari, una volta che queste siano state liberate dal riflesso del moto del Sole. Tale via è stata seguita da alcuni autori [3], [4]. Tale ipotesi però non è verificata in pratica poichè esistono i cosidetti *moti preferenziali* e bisogna preliminarmente stabilire la posizione dell'apice del moto del Sole rispetto al vertice dei moti preferenziali. Il metodo seguìto dallo scrivente in un'altra Nota [5] del 1940 si basa sulla distribuzione delle velocità lineari trasverse (T_o) come sono state calcolate da F. H. Seares [6] dalle quali viene calcolata la distribuzione delle velocità spaziali rispetto al Sole. Neppure questo metodo tien conto dei moti preferenziali altro che in modo indiretto, in quanto la distribuzione delle T_o dovrebbe essere un elemento statistico più corrispondente ai bisogni della ricerca che la distribuzione media delle velocità spaziali intrinseche (cioè già corrette per il moto del Sole) delle stelle. Questo metodo conduce a risultati numerici in ottimo accordo con quelli qui raggiunti. Questo accordo è dovuto al fatto che la distribuzione delle T_o del Seares dà valori per difetto nella frequenza mentre le formule usate per il passaggio alle velocità spaziali dànno valori di frequenza in eccesso, questo eccesso è in accordo con quanto è stato chiarito da Cecchini [4].

La via normale per stabilire se il numero delle stelle con piccola velocità è indice di un ammasso oppure rientra nel quadro più generale delle velocità stellari è di esaminare il complesso di queste velocità spaziali proprie delle stelle (corrette per il moto del Sole). Nella fig. 2 ogni punto rappresenta l'apice del moto di una stella. Si vede ad occhio un addensa-

(1) Lavoro eseguito nell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(2) Nella seduta del 15 giugno 1946. (v. Nota I, p. 831).

(3) K. Graf Ferrari, *Zur Frage der Realität des "Sonnenhaufens"*. « Astronom. Nachrichten », Bd. 268 (1939).

(4) G. Cecchini, *Inconsistenza di un "ammasso del Sole" in senso fisico.* « Contributi Oss. Torino », N. 1 (1944).

(5) A. Colacevich, *Sul numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole.* « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, 1940.

(6) F. H. Seares, *The distributions functions for stellar velocity.* « Contr. M. Wilson », 272 (1924); *Mean parallaxes of stars of small proper motions.* « Contr. M. Wilson », 272, (1924).

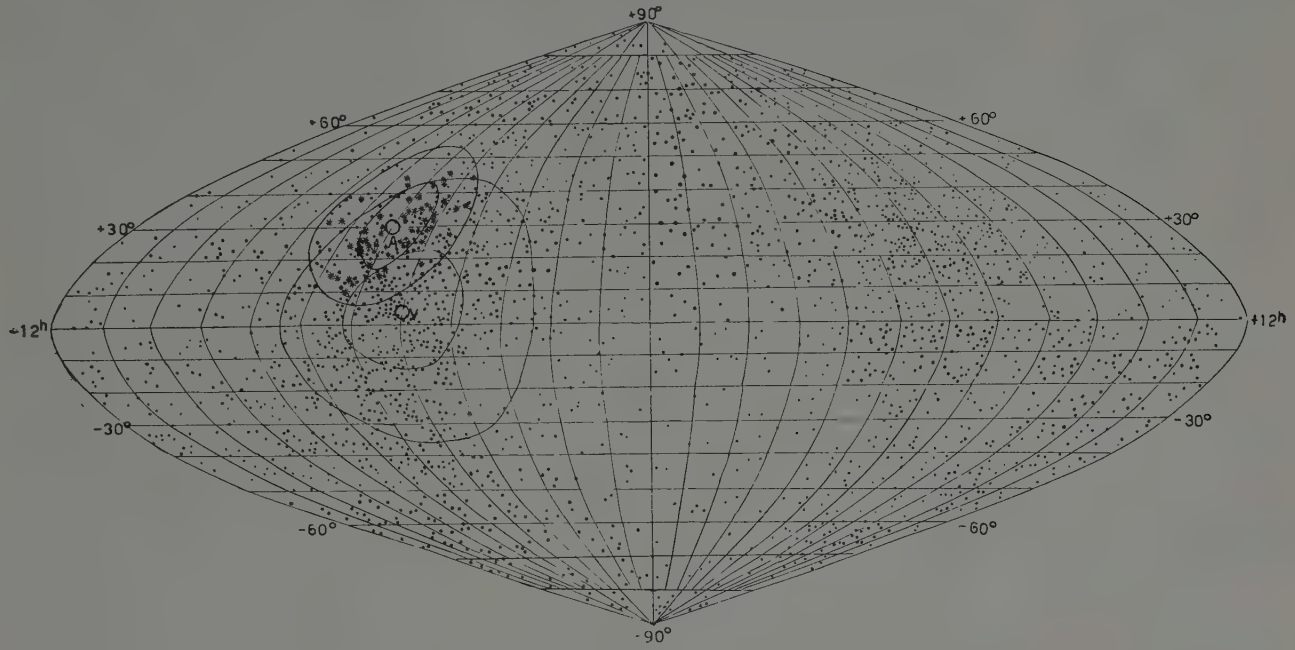


Fig. 2.

mento delle direzioni secondo due direzioni che sono quelle dei moti preferenziali. Nella proiezione sono dati i paralleli di declinazione ed i meridiani di ascensione retta, per quest'ultima si ha 0^h nel centro della figura e vanno crescendo di ora in ora verso destra, 12 ore all'estremo. Così l'apice (A) del moto del Sole è indicato con un cerchio in corrispondenza di 18^h e $+30°$. A 25° circa da A vi è il vertice V di una corrente preferenziale, quella che si può dire è personificata dall'ammasso di moto dell'Orsa Maggiore. Le altre caratteristiche della figura verranno spiegate fra breve.

Evidentemente la massima distanza angolare tra l'apice del moto di una stella e quello del Sole, se V è la velocità spaziale della stella rispetto al Sole, non può superare il valore θ dato da $\text{sen}\,\theta = V/18$. Se prendiamo V pari rispettivamente a 4 ed a 7 km/sec otteniamo rispettivamente θ pari a 13° e a 23°. Nella figura 2 sono segnati, centro in A, tutti quei punti per cui si ha θ uguale a 13° e 23°. Le stelle che hanno velocità spaziale rispetto al Sole minore di 7 km/sec. sono segnate con asterischi. La loro distribuzione nella zona più interna, che diremo A, è data nella Tabella I sotto N_A e sono 31 in tutto, quelle nella zona esterna B son date sotto N_B e sono 29 in tutto. Le stelle nelle zone A e B sono complessivamente 200, di queste 65 in A e 135 in B.

Le aree nelle calottine sferiche, in parte dell'area complessiva della sfera, comprese nella zona A e in A + B si calcolano facilmente e risultano 0.0124 e 0.0385. Se la distribuzione delle stelle fosse uniforme, delle 2459 stelle 30 dovrebbero cadere in A e 64 in B; esse sono perciò 2.1 volte più numerose del valore medio. Questo addensamento delle velocità stellari è visibile a prima vista ed è come vedremo subito dovuto alla vicinanza del vertice V che dista da A non più di 25°.

Questo addensamento è esteso a tutta una zona. Infatti centro nel vertice in tutta una zona sferica concentrica e che contiene la zona A, e quindi ha un'ampiezza di 26°, vi sono 394 stelle. L'area di questa zona è pari a 0.0925 di quella della sfera; essa dovrebbe quindi contenere 227 stelle, la densità è quindi 1.73 volte quella media. Queste 394 stelle sono così distribuite nei quattro quadranti: I Quadrante (est–nord del vertice) 85 stelle, II Quadrante (ovest–nord) 124, III Quadrante (ovest–sud) 121, IV Quadrante (est–sud) 64. Se la distribuzione fosse uniforme su tutto il cielo dovrebbero aversi $227 : 4 = 57$ stelle per ogni quadrante, quindi se ne ha una quantità 1.5, 2.2, 2.1, 1.1 volte maggiore. I due quadranti ad ovest sono molto più popolati di quelli ad est, questo addensamento non è però specifico per la zona occupata dal Sole.

Un altro elemento di giudizio lo si ha dal confronto della distribuzione del modulo delle velocità spaziali in questa zona con la distribuzione delle velocità nelle zone più ristrette A e B. Nella fig. 3 è data la distribuzione di tutte le velocità stellari attorno al vertice del moto preferenziale, comprese

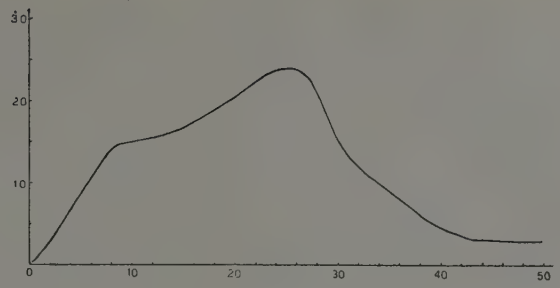


Fig. 3

entro il cerchio maggiore, che sono circa 600, fino alla velocità di 50 km/sec. ed arrivano a 632 tenendo conto anche di quelle (non rappresentate nel grafico) con velocità maggiore di 50 km/sec. L'intervallo di velocità che più interessa è quello compreso tra $18 - 7 = 11$ km/sec. e $18 + 7 = 25$ km/sec. dove cadono tutte le stelle con piccola velocità rispetto al Sole. Si contano nelle zone fino a 10 km/sec., in quella da 11 a 25 km/sec. ed in quella da 25 a 50 km/sec. rispettivamente 90, 305, 205 stelle. Si contano rispettivamente negli stessi limiti per le velocità 30 stelle nelle zone A + B (11 nella sola zona A), 128 (41), 42 (13). Riducendo le stelle trovate in tutta la zona di corrente preferenziale per il confronto con questi dati si dovrebbero avere invece 30 (10), 102 (32), 68 (22) stelle. Vi è una lieve predominanza quindi di stelle nella zona a noi interessante a scapito delle maggiori velocità, cioè quelle effettivamente trovate sono 1.25 volte più numerose di quelle che si dovrebbero trovare se la distribuzione delle velocità fosse uniforme in tutta la zona.

Concludendo, lo studio della distribuzione statistica delle velocità spaziali porta alle seguenti conclusioni:

a) Nella zona dell'apice del Sole vi è una naturale concentrazione degli apici delle velocità stellari dovuto al moto preferenziale e tale aumento è rappresentato da un fattore 2.1 ed è esteso a tutta una zona molto più vasta di quella occupata dagli apici delle stelle con piccola velocità rispetto al Sole.

b) Nella zona occupata dagli apici delle stelle con piccola velocità vi è una leggera prevalenza di stelle con velocità tra 11 e 25 km/sec. (corrette già per il moto del Sole) che contribuisce ad aumentare il numero delle stelle con piccola velocità. Questa prevalenza è fissata dal fattore 1.25.

Le conclusioni qui raggiunte sono indirettamente confermate anche in altre ricerche che trattano del moto delle stelle. Citiamo qui il lavoro di R. E. Wilson e H. Raymond (7) dove vien messo in evidenza il fatto che

(7) R. E. Wilson e H. Raymond, *The Space motions of 4233 stars.* « Astron. Journ. », XL, 1930, pp. 121, 122, 126.

il Sole si muove in una direzione che è circa 30° più a nord del vertice della corrente dell'Orsa Maggiore e che ciò porta notevole influenza nella velocità del Sole; anche quella ricerca contiene vari diagrammi molto evidenti circa gli apici dei moti. Una simile conferma generale la porta il Gliese nel lavoro già citato [8].

Particolare importanza ha rilevare che esiste nel complesso di stelle con piccola velocità spaziale il gruppo delle stelle dell'ammasso della *Coma Berenices*. Esso è stato particolarmente studiato da V. R. Ölander [9] sulla base dei moti propri. Questo autore trova che 57 stelle su 566 esaminate in quella costellazione fanno parte dell'ammasso e tutte le 57 sono più splendenti della $7^{a}.2$ grandezza, mentre per le altre si mostrano evidenti le correnti preferenziali. Le sei stelle della *Coma Berenices* che compaiono nell'elenco di questa Nota dovrebbero quindi contarsi una sola volta, riducendo il numero delle stelle indipendenti a $60-5 = 55$ e con il Sole 56. Anche N. H. Rasmuson [10] ha trovato in questa zona ricca di apici stellari varie correnti di stelle di tipo spettrale B che secondo Ölander [9] non sono però altro che correnti spurie dovute a puro effetto parallattico e che neanche il Gliese [8] conferma.

Le conclusioni statistiche, confortate anche dalle ricerche di Ölander e Gliese, sono anche per questo lavoro negative circa l'esistenza di una particolare corrente stellare a cui sia legato il nostro Sole. Però tanto il nostro Sole che le stelle del cosidetto *ammasso del Sole* (o *corrente di Stroobant*) fanno parte del grande moto preferenziale che in senso stretto è definito dalla corrente dell'Orsa Maggiore ma che in senso largo abbraccia una alta percentuale di stelle. Il cosidetto *ammasso del Sole* risulta una componente non differenziata di questo moto preferenziale.

A completamento della statistica dei moti diamo qui le distribuzioni dei tipi spettrali e delle parallassi per le 632 stelle prima considerate del moto preferenziale.

Sp.	O–B5	B6–B9	A	dF	gF	dG	gG	dK	gK	gM	Tot.
N.	62	24	188	51	29	15	59	9	170	25	632
N′	6	2	18	5	3	1	6	1	16	2	60

Parall.	0–49	50–99	100–199	200–399	oltre 400	Tot.
N.	43	151	230	143	65	632
N′	4	14	22	14	6	60

(8) W. Gliese, *Die Untersuchung der Raumgeschwindigkeiten des FK3*. « Astronom. Nachrichten », Bd. 272 (1941).

(9) V. R. Ölander, *Die Eigenbewegungsverhältnisse des Sternhaufens in der Coma Berenices*. « Soc. Scient. Fennica, Comm. Phys.-Math. », IV, 11.

(10) N. H. Rasmuson, *A research in moving Clusters*. « Medd. Lund », II, 26; *A new research on the Scorpio–Centaurus-Cluster*. « Medd. Lund », II, 47 *b*.

Il numero trovato è N mentre N' indica il numero che dovrebbe trovarsi su 60 stelle e che deve essere confrontato con i dati poco dopo la Tab. I.

La notevole abbondanza delle stelle di tipo O-B5 è dovuta alla cosiddetta corrente del gruppo *Scorpio-Centaurus* di Rasmuson. Nelle stelle a piccola velocità vi è una relativa abbondanza di stelle di tipo A, gF e gG a scapito di quelle gK, in confronto a quelle del moto preferenziale in genere, che con molta probabilità possono attribuirsi al caso. Se si tien conto che nelle 24 stelle di tipo A quattro sono della corrente della *Coma Berenices*, tale numero potrebbe essere ridotto a 21 con un migliore accordo interno.

Anche le differenze che si riscontrano nella distribuzione delle parallassi sono con tutta probabilità dovute al caso. Avrebbe evidentemente particolare significato il caso di un numeroso gruppo di stelle particolarmente vicino al Sole; anche considerando solo le parallassi maggiori di 0''.020 la differenza trovata non supera 9 stelle su 29.

Tenendo conto di questi nuovi elementi la conclusione rimane, dal punto di vista del ricercatore, immutata e precisamente che i lievi eventuali scostamenti trovati tra le distribuzioni dei dati per le stelle a piccola velocità e quelle del moto preferenziale non presentano differenze atte a stabilire l'esistenza di un ammasso di moto del Sole.

C) *Confronto con alcuni lavori precedenti e conclusione.*

I lavori precedenti che qui interessano sono stati eseguiti sulla base delle 6739 stelle contenute nel catalogo delle velocità radiali di Moore. In genere cambiando il materiale esaminato non si può dire che le caratteristiche dei risultati rimangono inalterati. I moti preferenziali però sono un fenomeno generale nel moto delle stelle e così si può ritenere con buona approssimazione, e similmente a quanto fanno anche altri autori [6], che sarà sufficiente moltiplicare i dati qui trovati per $2.74 = 6739 : 2459$, per passare da un materiale all'altro. Si dovrebbe tenere conto del numero delle doppie e dei membri di ammassi in entrambi i materiali, ma si ritiene per brevità che essi influenzino in modo proporzionale i due materiali. Si trovano allora i dati nella tabella I a p. 835 indicati con N_1 ed N_2 a seconda che si prendano come base di partenza i valori di N' e di N della tabella stessa. Per il confronto sembrerebbe più logico prendere i dati N_1 che sono stati ricavati con criteri più analoghi a quelli adoperati dai precedenti ricercatori. Lo scrivente nella sua precedente Nota [5] aveva trovato $N = 182$ che come si disse è in ottimo accordo con i dati di questa nuova ricerca. Gialanella nella sua ricerca originale [11] trovò 122 stelle. Bisogna però tenere presente che certamente non tutte le 6739 stelle da lui esaminate avevano

(11) L. Gialanella, *Nuove ricerche sull'" ammasso del Sole "*. Nota I. «Rend. Lincei», vol. XXVI, 1937; Nota II. «Rend. Lincei», vol. XXVII, 1938; Nota III. «Rend. Acc. d'Italia», ser. VII, vol. I, 1940.

parallasse nota. Un conteggio da me fatto su stelle prese a caso in quel catalogo indica che su 100 stelle solamente 75 hanno parallasse data dal catalogo di Schlesinger. Se in più teniamo presente che non tutte le stelle hanno un valore finale assicurato per la velocità radiale e che a talune stelle deboli può mancare anche il moto proprio, si può ritenere che almeno un quarto delle stelle[12] non sia stato utile agli scopi di quella ricerca e che cioè essa si basi su 5054 stelle ossia all'incirca su 5000 stelle soltanto. Quindi se tutte le stelle avessero servito allo scopo invece di 122 stelle egli ne avrebbe trovate 163 che ben si accorda con quelle da me previste. Piccole discordanze tra i due dati possono essere dovute ad una reale discordanza interna dei due materiali usati. Questo numero venne ulteriormente ridotto da L. Rovera ricalcolando per le 122 stelle di Gialanella i valori delle velocità spaziali in base ai dati di più recenti e sicuri cataloghi. Questo riesame avrebbe però dovuto essere applicato a tutte le stelle perchè in questo modo stelle escluse da Gialanella avrebbero con tutta probabilità potuto far parte del catalogo di Rovera. Su questo catalogo ridotto di Rovera sono state applicate da G. Cecchini nuove norme per l'inclusione di stelle nella lista di quelle con piccola velocità e portando così il numero complessivo delle stelle a 65. Anche in questo caso si può dire che se i criteri adottati da Cecchini fossero stati estesi a tutte le 6739 stelle contenute nel catalogo di Moore il risultato finale sarebbe stato del tutto diverso. La risposta definitiva potrebbe essere data solamente applicando i criteri adoperati ad Arcetri alle 6739 stelle di Moore e, dato il carattere sistematico dei moti preferenziali, è probabile che il numero complessivo delle stelle non risulterebbe lontano da quello previsto cioè fra 160 e 200. Si può concludere che l'elenco di Cecchini indica un numero di stelle che con grande probabilità fa parte del gruppo di stelle con piccola velocità ma non il numero complessivo.

Passando alla parte di calcolo statistico ci limiteremo alle conclusioni che si possono ottenere applicando il metodo adoperato da Cecchini [6] (che è quello precedentemente applicato in modo schematico da Graf Ferrari [3]. Secondo il calcolo ivi seguito, che si può applicare in caso di distribuzione uniforme, sono previste 12 stelle con velocità inferiore a 4 km/sec. e 61 con velocità inferiore a 7 km/sec. sulle 6739 stelle complessive, assumendo il moto del Sole pari a 18 km/sec.

Il calcolo viene eseguito prendendo come dato di partenza la distribuzione media delle velocità stellari da cui è stato eliminato il moto del Sole.

Dato però che la densità degli apici dei moti stellari nelle zone occupate dalle stelle con piccola velocità spaziale, come in fig. 2, è, per quanto si è trovato, 2. 1 volte quella media, i dati di Cecchini devono essere mol-

(12) Dopo l'invio alla stampa di questa Nota, il prof. L. Gialanella, che qui vivamente ringrazio, mi comunicò per lettera i suoi dati a riguardo che concordano molto bene con il mio conteggio.

tiplicati per 2.1 portando il numero calcolato delle stelle a 25 e 129 rispettivamente.

Bisogna ora esaminare se la curva di distribuzione adottata da Cecchini contiene nelle parti che interessano la ricerca un uguale numero di stelle. Le curve di distribuzione (v. fig. 3) che vale per le stelle del moto preferenziale contiene 1.17 più stelle di quella adottata da Cecchini tra 11 e 25 km/sec. rispetto al complesso delle stelle, per cui si otterrebbero 29 e 151 stelle rispettivamente.

Se infine si tien conto della specifica abbondanza di stelle tra 11 e 25 km/sec. trovata nella zona A + B rispetto a quella media dei moti preferenziali (abbondanza è bene rilevare che è dovuta anche alla specifica abbondanza di stelle che poi non contribuiscono tutte ad aumentare il numero di quelle appartenenti a stelle con piccola velocità) si ha che la curva di frequenza deve essere moltiplicata, per ciò che si è detto precedentemente, per 1.25 se si vuole confrontare i dati qui trovati con quelli ricavabili con il procedimento adottato da Cecchini. Si trovano allora che vi dovrebbero essere 36 stelle con velocità inferiore a 4 km/sec. e 188 stelle con velocità inferiore a 7 km/sec.

Questi risultati sono in ottimo accordo con quelli qui trovati. Se questo numero di stelle effettivamente esista entro le 6739 stelle può essere detto solo da un diretto ed accurato spoglio dei dati; se le caratteristiche del moto di queste stelle rimangono in linea di massima quelle trovate ad Arcetri per le 2459 stelle ciò dovrebbe senz'altro risultare.

Riassumendo e concludendo si può dire che in questa Nota si è esaminato il problema del cosidetto ammasso solare o corrente di Stroobant e che gli elementi trovati a favore sono scarsi ed incerti e possono attribuirsi alla naturale dispersione dei dati. Però il Sole e tutte le stelle del cosidetto ammasso solare fanno parte del moto preferenziale delle stelle secondo Kapteyn e precisamente del moto definito della corrente dell'Orsa Maggiore. L'apice del moto del Sole cade a circa 25° dal vertice della corrente e l'abbondanza dei vertici è nella zona occupata dal Sole circa doppia di quella media.

Le discordanze con altri autori vengono chiarite e, tenendo conto delle varie cause che possono dare origine a quelle, l'accordo finale tra i diversi modi di fare questa statistica può ritenersi soddisfacente.

Fisica. — *Vacuometro radiometrico a filo*[1]. Nota[2] di A. Rostagni e P. Bassi, presentata dal Socio E. Perucca.

1. In una Nota precedente[3] uno di noi ha dato alcuni cenni costruttivi e di funzionamento di un vacuometro a foglia pendente fondato sul principio radiometrico, con compensazione delle deviazioni. Tale vacuometro consente di misurare con buona sensibilità le pressioni in un campo eccezionalmente esteso, da 10^{-7} torr a qualche torr[4].

Caratteristica comune ai dispositivi radiometrici per la misura delle pressioni è quella che la curva di taratura presenta un ramo ascendente a partire dalle pressioni più basse, ed un ramo discendente alle pressioni superiori, separati naturalmente da un massimo. Questo fatto, se consente il vantaggio di sfruttare due volte l'ampiezza della scala di deviazioni dello strumento (essendo facile, in generale decidere in quale dei rami, vale a dire in quale campo di pressioni, ci si trova), implica tuttavia l'inconveniente di una riduzione di sensibilità nell'intorno del punto di massimo.

La posizione del massimo dipende con legge non semplice dalle dimensioni del dispositivo. Colle dimensioni più comodamente realizzabili nel dispositivo a compensazione citato (larghezza della foglia alcuni mm., spessore alcuni μ, diametro del tubo qualche cm.) il massimo cade, in aria, fra 2 e $4 \cdot 10^{-2}$ torr; la riduzione di sensibilità si rileva per un intervallo di $1 \div 2 \cdot 10^{-2}$ torr. Ciò implica un'incertezza di un fattore 2 al più sul valore di p nel punto più sfavorevole. Nella maggior parte delle applicazioni dei vacuometri non si usa dare molto peso a una tale incertezza: ma ciò non toglie che in certi casi essa possa recare fastidio.

Abbiamo pensato perciò alla possibilità di eliminare l'inconveniente, senza alterare le caratteristiche essenziali di semplicità e di versatilità dello strumento, facendo spostare il massimo decisamente verso le pressioni più alte. Per raggiungere lo scopo abbiamo provato a sostituire alla foglia un filo sottile, guidati sia da considerazioni teoriche sia da precedenti osservazioni di Westphal[5] su radiometri a filo.

2. Dopo varie prove siamo giunti alla disposizione illustrata in fig. 1. Il filo f di vetro, del diametro di 1 o più 10^{-3} mm. è saldato per le due estremità ad una bacchetta che ne forma il supporto, saldata a sua volta in A al tubo che la contiene. Come nel dispositivo a foglia questo tubo è

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico dell'Università di Padova.
(2) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1946.
(3) A. Rostagni, «Ric. scient.», *14*, 416, 1943.
(4) 1 torr = 1 mm. Hg.
(5) W. Westphal, «Zs. f. Phys.», *4*, 221, 1921.

munito di un raccordo a cono smerigliato che ne consente le rotazioni intorno ad un asse orizzontale *xx*. Lungo questo asse è puntato un microscopio con oculare micrometrico, solidale col sistema.

La parete esterna del tubo è riscaldata elettricamente sul tratto BB. Ad eliminare disturbi elettrostatici è apparsa sufficiente una foglia d'alluminio che avvolge il tubo passando sotto il riscaldatore, munita di finestre per l'osservazione. La rotazione del sistema intorno all'asse *xx* consente di compensare le deviazioni del filo, riportandone l'immagine sullo zero del micrometro.

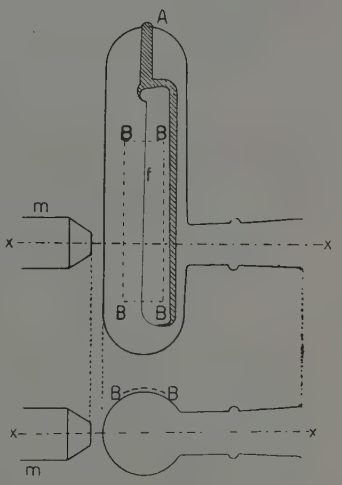


Fig. 1.

Poichè il filo è fermato ad entrambi gli estremi, l'apparecchio può venire trasportato e sottoposto a scosse, ed anche a variazioni rapide di pressione, senza pericolo di rottura del filo, nè di alterazione nella taratura. Come protezione contro i violenti ritorni d'aria, conseguenti a rottura di qualche tubo, sarà sempre conveniente l'uso di una delle solite valvole in vetro sulla conduttura di collegamento.

3. L'andamento delle deviazioni (o meglio degli angoli di compensazione) in funzione di p, o di log p, risulta simile a quello ottenuto per la foglia [6]: ma col massimo spostato nel senso voluto. Per esempio, col filo attualmente in uso, che riteniamo abbia un diametro di poco superiore a 10^{-3} mm., in un tubo di 27 mm. di diametro, il massimo si presenta nell'aria ad una pressione di 1 torr circa.

In fig. 2 si vedono alcune curve di taratura relative a questo filo, per diversi valori della corrente di riscaldamento: sulle ascisse è riportato log p (p in torr), sulle ordinate l'angolo α d'inclinazione del tubo, richiesto per riportare a zero il filo. Le curve continue si riferiscono all'aria, le punteggiate all'idrogeno.

Nel corso delle misure è stata determinata pure la differenza di temperatura ΔT fra la parete riscaldata e quella opposta, per mezzo di una coppia termoelettrica. Tale differenza, a corrente di riscaldamento costante, varia un po' colla pressione, sopratutto nell'idrogeno, in ragione della elevata conducibilità del gas. A scopo indicativo riportiamo qui i valori medî determinati per l'aria (a $p = 10^{-3}$ torr)

i	A	0,15	0,25	0,50	0,80	1,20
ΔT	°C	2,1	5,6	27,2	79	187

(6) A. Rostagni, loc. cit.

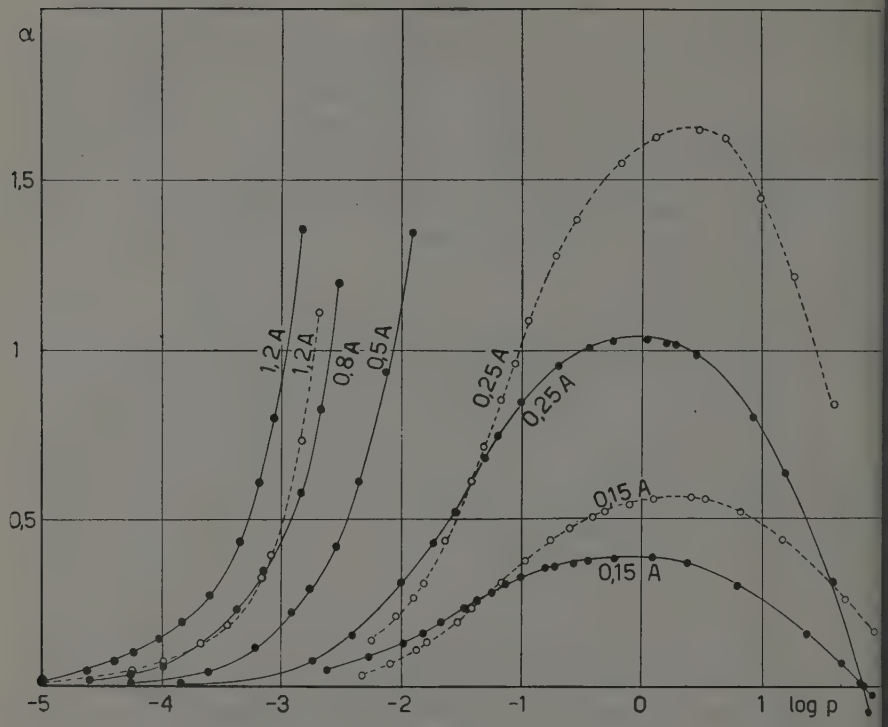


Fig. 2.
p in torr α in radianti

Il fascio di curve di fig. 2 copre tutto il campo da 10^{-5} ad oltre 50 torr. Il massimo si riscontra per l'aria, come è stato rilevato, a 1 torr, per l'idrogeno a 3 torr circa. Per ogni intervallo di valori di p al disotto del massimo vi è una curva più adatta per sensibilità.

Le curve relative all'aria a 75 torr tagliano l'asse delle ascisse e scendono a valori negativi della compensazione. Per l'idrogeno si deve presentare lo stesso fatto oltre i 100 torr. Poichè per ora interessava essenzialmente il comportamento del dispositivo come vacuometro, si è rinviato lo studio più minuto di queste particolarità.

In fig. 3 sono riprodotte delle curve in funzione di p (anzichè di log p) relative all'aria, a pressioni inferiori a $2 \cdot 10^{-4}$. L'andamento appare lineare finchè la compensazione α non supera 0,1 rad. Col valore di 1,2 A della corrente riscaldante (e meglio ancora con valori superiori, sino a 1,4 che sono tollerati dal dispositivo) si può comodamente misurare sino a 10^{-6} torr. Questa possibilità è concreta e direttamente sfruttabile in quanto il dispositivo,

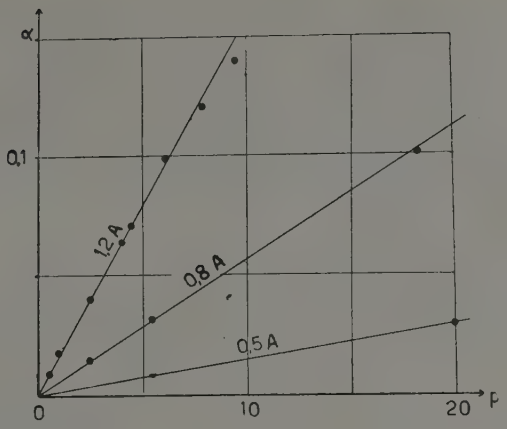


Fig. 3.

p in 10^{-5} torr α in radianti

interamente in vetro, senza mastici nè altre sostanze eterogenee, non ha tendenza ad occludere gas, e si trova nelle migliori condizioni per venire degassato per riscaldamento sotto vuoto.

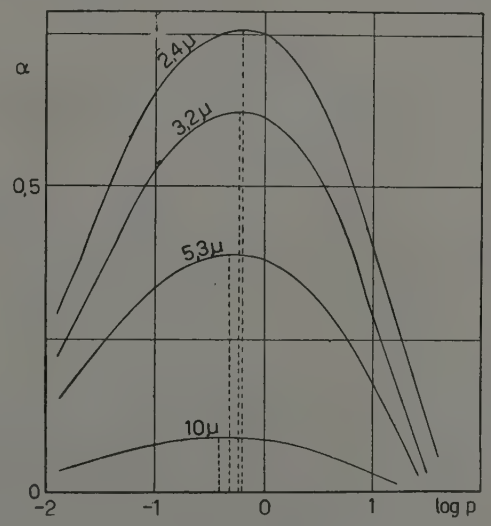


Fig. 4.

p in torr α in radianti

Un'idea della precisione consentita dalle misure si può ricavare dalla distribuzione dei punti lungo le curve in entrambe le figure, tenendo presente che essi sono stati ottenuti anche a distanza di tempo.

4. La dipendenza della sensibilità e della posizione del massimo dal diametro del filo è stata determinata con una serie di misure in un vacuometro di 29 mm. di diametro interno. Con 4 fili di $2{,}4 \cdot$ $3{,}2 \cdot$ $5{,}3 \cdot$ $10{,}0 \cdot 10^{-3}$ mm. di diametro ed una corrente di riscaldamento costante (0,3 A), in aria, si hanno gli andamenti rappresentati in fig. 4, coi massimi rispettivamente a $6{,}5 \cdot$ $6 \cdot$ $5 \cdot$ $4 \cdot 10^{-1}$ torr, corrispondenti ad angoli di compensazione di 0,750; 0,617; 0,386; 0,093 rad.

Fisica. — *Sulle coincidenze triple accidentali.* Nota [1] di G. Lovera, presentata dal Corrisp. A. Pochettino.

Mentre per le coincidenze doppie accidentali tra due contatori funzionanti in un circuito a coincidenza è quasi universalmente accettata la formula:

$$n_{12} = 2\tau\nu_1\nu_2 \tag{1}$$

(n_{12}: numero di coincidenze doppie al minuto; ν_1, ν_2: numeri di impulsi al minuto ricevuti, separatamente, dai due contatori; τ: tempo di separazione o potere risolutivo), nel caso delle coincidenze triple viene bensì usata una formula analoga

$$n_{123} = K\tau^2\nu_1\nu_2\nu_3 \tag{2}$$

ma circa il valore del coefficiente K non esiste l'accordo tra i vari autori. Benchè i più usino K = 3, altri attribuiscono a K il valore 1, 4, 6 [2] (senza peraltro giustificarne il motivo).

Dal punto di vista teorico, diverse deduzioni della formula (2) concordano nell'assegnare a K il valore 3 [3], purchè sia soddisfatta la condizione $\nu\tau \ll 1$ per i singoli contatori. In proposito, Juilfs [3] ha osservato che, mentre gli impulsi singoli hanno una durata τ, i tempi di sovrapposizione di due impulsi indipendenti che dànno luogo ad una coincidenza accidentale possono variare tra 0 e τ, con valore medio $\frac{\tau}{2}$. Se invece si considerano anche le coincidenze doppie accidentali come impulsi di durata τ, si giunge, seguendo il procedimento di Juilfs, alla formula (2) con K = 4: si comprende quindi come questo valore debba esser preso in considerazione, qualora si ammetta la costanza di tutti gli impulsi (singoli, o di coincidenze doppie accidentali): il che corrisponde appunto alla deduzione

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1946.

(2) Per la bibliografia sull'argomento, v. Frongia e Romagnino, « N. Cimento », *1* (s. IX), 85, 1943, n. 2.

(3) Schiff, « Phys. Rev. », *50*, 88, 1936; Eckart e Shonka, « Phys. Rev. », *53*, 752, 1938; Juilfs, « Phys. Zs. », *40*, 697, 1939.

fatta da Frongia e Romagnino (e da questi controllata sperimentalmente). Nessuna giustificazione esiste invece per gli altri valori attribuiti a K.

Tutte le deduzioni ora citate sono basate sull'ipotesi, o dichiarata, o ammessa implicitamente, che τ sia costante per gli impulsi singoli: e questo o perchè tale proprietà è insita nel funzionamento del dispositivo cui la statistica si applica, ovvero, più generalmente, perchè si suppone $\nu\tau$ così piccolo, che sia trascurabile il numero dei casi in cui un impulso, seguendone un altro entro un intervallo di tempo minore di τ, sia in grado di influenzare il tempo di separazione del sistema contatore–amplificatore–numeratore, conseguente al primo impulso. Insieme, viene pure ammesso, tacitamente, che una coincidenza casuale abbia sempre probabilità eguale ad uno di essere registrata, per quanto piccolo sia il tempo di sovrapposizione di tutti gli impulsi che la compongono.

Invece, recentemente O. Piccioni [4] ha osservato che, sopratutto nei dispositivi in cui ci si propone di realizzare dei valori molto piccoli di τ, se non si ricorre a particolari accorgimenti, la probabilità che sia registrata una coincidenza spuria varia con la durata del tempo di sovrapposizione degli impulsi che la compongono, e può essere inferiore all'unità anche quando questi sono esattamente coincidenti.

Nella presente Nota, mi propongo di dimostrare che, in quest'ultima eventualità, è possibile che si verifichino per K dei valori differenti da 3 (e da 4), anche per $\nu\tau \ll 1$; mi atterrò all'impostazione del problema delle coincidenze dovuta a Schiff [4], opportunamente estesa al caso presente.

Detto x il ritardo dell'ultimo degli impulsi singoli, che costituiscono una coincidenza casuale, rispetto al primo, chiamo $p(x)$ la probabilità, che questa ha di essere effettivamente registrata, con la condizione che

$$\text{(3)} \qquad \text{per} \quad 0 \leqq x \leqq \tau \quad \text{sia} \quad 0 \leqq p(x) \leqq 1$$

essendo τ il ritardo massimo tra due o più impulsi che possono ancora dar luogo ad una coincidenza spuria.

Considero anzitutto le coincidenze doppie. Siano ν_1 e ν_2 i numeri di impulsi per minuto nei due contatori 1 e 2. La probabilità che il contatore 1 inizi una coincidenza casuale con un impulso subito nell'intervallo di tempo $t \div t + dt$, seguito da un impulso nel contatore 2 (inizialmente inattivo) nell'intervallo $t + \vartheta \div t + \vartheta + d\vartheta$, e che questa coincidenza sia registrata, è

$$\text{(4)} \qquad dw_1 = \underset{\text{(I)}}{\nu_1\, dt} \cdot \underset{\text{(II)}}{e^{-\nu_2 \tau}} \cdot \underset{\text{(III)}}{e^{-\nu_2 \vartheta}\, d\vartheta} \cdot \underset{\text{(IV)}}{p(\vartheta)}$$

dove, ordinatamente, il significato dei vari fattori è il seguente:

I) è la probabilità che il contatore 1 riceva un impulso nell'intervallo $t \div t + dt$;

(4) O. Piccioni, «N. Cim.», 1, (s. IX), 56, 1943.

II) è la probabilità che il contatore 2 non si sia innescato in un intervallo τ precedente l'innesco del contatore 1 che deve *iniziare* la coincidenza (5);

III) è la probabilità che il contatore 2 si inneschi con un ritardo ϑ rispetto al contatore 1, come prodotto della probabilità che nell'intervallo ϑ il contatore rimanga inattivo, per la probabilità che riceva un impulso nell'intervallo successivo $\vartheta \div \vartheta + d\vartheta$;

IV) è la probabilità che la coincidenza caratterizzata da un ritardo ϑ sia registrata.

Analogamente, la probabilità totale della registrazione di una coincidenza casuale iniziata dal contatore 2 è:

$$dw_2 = \nu_2\, dt \cdot e^{-\nu_1 \tau} \cdot e^{-\nu_1 \vartheta}\, \nu_1\, d\vartheta \cdot p(\vartheta). \tag{4'}$$

Il numero complessivo delle coincidenze casuali nell'unità di tempo (da $t = 0$ a $t = 1$) risulta perciò:

$$n_{12} = e^{-\nu_2 \tau} \int_0^1 \nu_1\, dt \int_0^\tau e^{-\nu_2 \vartheta}\, p(\vartheta)\, \nu_2\, d\vartheta + e^{-\nu_1 \tau} \int_0^1 \nu_2\, dt \int_0^\tau e^{-\nu_1 \vartheta}\, p(\vartheta)\, \nu_1\, d\vartheta = \tag{5}$$

$$= \nu_1\, e^{-\nu_2 \tau} \int_0^\tau e^{-\nu_2 \vartheta}\, p(\vartheta)\, \nu_2\, d\vartheta + \nu_2\, e^{-\nu_1 \tau} \int_0^\tau e^{-\nu_1 \vartheta}\, p(\vartheta)\, \nu_1\, d\vartheta.$$

Ora, se $\nu_2 \tau \ll 1$, si può scrivere:

$$\int_0^\tau e^{-\nu_2 \vartheta}\, p(\vartheta)\, \nu_2\, d\vartheta = \int_0^\tau (1 - \nu_2 \vartheta)\, p(\vartheta)\, \nu_2\, d\vartheta \tag{6}$$

e poichè, essendo $p(\vartheta) \leq 1$, sarà

$$\int_0^\tau \nu_2 \vartheta p(\vartheta)\, \nu_2\, d\vartheta \leq \nu_2^2 \int_0^\tau \vartheta\, d\vartheta = \frac{(\nu_2 \tau)^2}{2} \tag{7}$$

il secondo termine dell'integrale (6) risulta trascurabile rispetto al primo, sicchè resta:

$$\int_0^\tau e^{-\nu_2 \vartheta}\, p(\vartheta)\, \nu_2\, d\vartheta = \nu_2 \int_0^\tau p(\vartheta)\, d\vartheta = \nu_2 \tau \bar{p}(\tau) \tag{8}$$

(5) A rigore, bisognerebbe aggiungere qui un termine rappresentante la probabilità che, pur essendo il contatore 2 innescato in questo intervallo, questa prima coincidenza non sia registrata: però, nell'ipotesi, cui ci atterremo, di $\nu\tau \ll 1$, i termini, cui darebbe luogo questa correzione, risultano trascurabili rispetto ai termini principali.

dove

$$\bar{p}(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} p(\vartheta)\, d\vartheta \tag{9}$$

rappresenta il valor medio di $p(\vartheta)$ tra 0 e τ. Una formula analoga alla (8), salvo la sostituzione di ν_1 a ν_2, vale per il secondo addendo della (5), nell'ipotesi $\nu_1 \tau \ll 1$.

Quindi, trascurando le potenze di $\nu_1 \tau$ e $\nu_2 \tau$ superiori alla prima, dalla (5), tenuto conto della (8), si ottiene facilmente:

$$n_{12} = 2\bar{p}(\tau)\, \nu_1 \nu_2 \tau. \tag{10}$$

Nel caso ideale di $p(x)$ costantemente uguale ad 1 per x compreso tra 0 e τ, evidentemente $\bar{p}(\tau) = 1$, e la (10) coincide allora con la (1). Postulando, anche nel caso più generale, la validità della (1), scritta con la notazione:

$$n_{12} = 2\bar{\tau}\, \nu_1 \nu_2 \tag{1'}$$

si viene a definire un valore medio $\bar{\tau}$ del tempo di risoluzione, dato da:

$$\bar{\tau} = \bar{p}(\tau)\, \tau \tag{11}$$

dipendente dal valore medio della funzione di probabilità $p(x)$.

Passiamo ora alle coincidenze triple: siano tre contatori 1, 2, 3. La probabilità che il contatore 1 inizi una coincidenza casuale con un impulso subìto nell'intervallo $t \div t + dt$, seguìto da un impulso del contatore 2 nell'intervallo $t + \vartheta \div t + \vartheta + d\vartheta$ e da un impulso nel contatore 3 nell'intervallo $t + \zeta \div t + \zeta + d\zeta$, e che essa sia registrata, è:

$$dw_1 = [1 - (1 - e^{-\nu_2 \tau})(1 - e^{-\nu_3 \tau})]\, \nu_1\, dt \cdot e^{-\nu_2 \vartheta}\, \nu_2\, d\vartheta \cdot e^{-\nu_3 \zeta}\, \nu_3\, d\zeta \times \tag{12}$$

$$\times \begin{cases} p(\vartheta) & \text{se } \vartheta > \zeta \\ p(\zeta) & \text{se } \zeta > \vartheta \end{cases}$$

dove il primo fattore, entro parentesi quadre, rappresenta la probabilità che, nell'intervallo τ precedente l'innesco del contatore 1, uno almeno degli altri contatori non abbia subìto un impulso, e che non ci sia quindi una coincidenza; gli altri fattori hanno significato già noto.

Il numero complessivo delle coincidenze casuali nell'unità di tempo risulta perciò:

$$n_{123} = [1 - (1 - e^{-\nu_2 \tau})(1 - e^{-\nu_3 \tau})] \int_0^1 \nu_1\, dt \int_0^{\tau} e^{-\nu_1 \vartheta} \left\{ p(\vartheta) \int_0^{\vartheta} e^{-\nu_3 \zeta}\, \nu_3\, d\zeta + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \int_{\vartheta}^{\tau} e^{-\nu_3 \zeta}\, p(\zeta)\, \nu_3\, d\zeta \right\} \nu_2\, d\vartheta + \cdots + \cdots$$

dove i puntini tengono il posto di due termini analoghi, ottenuti permutando circolarmente gli indici 1, 2, 3.

Supposto ancora $\nu_1 \tau \ll 1$, $\nu_2 \tau \ll 1$, $\nu_3 \tau \ll 1$, trascurandone le potenze superiori alla seconda si ottiene, con procedimento analogo a quello seguìto per le coincidenze doppie:

$$n_{123} = 3\,[2\,M_1(\tau)]\,\tau^2\,\nu_1\,\nu_2\,\nu_3 \tag{14}$$

dove

$$M_1(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\int_0^\tau x p(x)\,dx \tag{15}$$

rappresenta il momento del primo ordine di $p(x)$ nell'intervallo $0 \div \tau$. Nel caso ideale di $p(x) = 1$ per x compreso tra 0 e τ, risulta immediatamente $M_1(\tau) = 1/2$ e la (14) diviene allora

$$n_{123} = 3\,\tau^2\,\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\,. \tag{16}$$

Invece, nell'eventualità più generale qui contemplata, scritta la (14) nella forma

$$n_{123} = K\,\bar{\tau}^2\,\nu_1\,\nu_2\,\nu_3$$

e preso per τ, come si fa in pratica, il valore calcolato mediante le coincidenze doppie, cioè, nel nostro caso, dato dalle (10) e (11), si ottiene

$$K = 3\,\frac{2\,M_1(\tau)}{[\bar{p}(\tau)]^2}. \tag{17}$$

Il coefficiente K dipende ora, attraverso $\bar{p}(\tau)$ e $M_1(\tau)$, dalla funzione di probabilità $p(x)$, e si riduce in particolare al valore $K = 3$ per $p(x) = 1$ tra 0 e τ.

Come esempio, si sono calcolati i valori di K per il caso semplice che la $p(x)$ assuma la forma:

$$p(x) = a_0\left[1 - \left(\frac{x}{\tau}\right)^n\right] \tag{18}$$

dove $a_0 \leqq 1$ rappresenta l'aliquota delle coincidenze effettivamente registrate quando tutti gli impulsi sono rigorosamente coincidenti ($x = 0$). Si ha allora, tenuto conto delle (9) e (15):

$$K = 3\,\frac{(n+1)^2}{a_0\,n\,(n+2)}. \tag{19}$$

e nella Tabella I sono riportati i valori di K per diversi valori di a_0 e di n.

TABELLA I. $K = 3\dfrac{(n+1)^2}{a_0 n (n+2)}$

n \ a_0	1	0,9	0,8	0,7
1	4,00	4,44	5,00	5,71
2	3,37	3,75	4,22	4,82
3	3,20	3,55	4,00	4,57

Risulta così messa in evidenza, per le coincidenze triple casuali, la possibilità che il coefficiente della formula (2) assuma in pratica valori diversi da 3 (anche se sono soddisfatte le condizioni $\nu_i \tau \ll 1$), quando, seguendo il procedimento usuale, si prende per τ il valore calcolato sui dati sperimentali delle coincidenze doppie, ammettendo per esse la validità della (1). Se poi la funzione di probabilità $p(x)$ ha l'andamento ideale $p(x) = 1$ per $0 \leq x \leq \tau$, $p(x) = 0$ per $x > \tau$, si è ricondotti al valore $K = 3$.

Ringrazio i ch.mi prof. Pochettino e prof. Persico per il loro interessamento alla presente ricerca.

Fisica. — *Sulla interazione elettromagnetica ritardata di due particelle di Dirac–Pauli.* Nota [1] di A. BORSELLINO e di P. CALDIROLA, presentata dal Corrisp. A. AMERIO.

1. Com'è noto, una particella che obbedisca all'equazione relativisticamente invariante di Dirac [2]

$$[\gamma^\mu \Pi_\mu - iMc]\psi = 0 \tag{1}$$

ha necessariamente spin 1/2 (in unità $h/2\pi$) e momento magnetico uguale ad un magnetone di Bohr: $\mu_0 = \dfrac{eh}{4\pi Mc}$. Si sa d'altra parte che il protone ed il neutrone, pur avendo spin 1/2, hanno momenti magnetici anomali, non legati cioè alla carica nel modo stabilito dall'equazione di Dirac. Ora è stato mostrato da Pauli [3] che l'equazione di Dirac può essere modificata, conservandone l'invarianza relativistica, in modo che essa risulti valida per una particella

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1946.

(2) V. ogni trattato di meccanica quantistica, per esempio E. PERSICO, *Fondamenti di meccanica atomica*. Bologna, p. 442. Si noti che μ è qui indice « muto » di sommatoria da 1 a 4.

(3) « Hand. der Phys. », XXIV/1, p. 232; « Rev. Mod. Phys. », 1941, *13*, 203.

di spin 1/2 e momento magnetico arbitrario. Ciò si ottiene aggiungendo all'operatore che figura nel primo membro della (1) un termine dipendente direttamente dalle componenti $F_{\mu\nu}$ del campo elettromagnetico (questo peraltro vi figura già con i potenziali elettromagnetici Φ_μ tramite le $\Pi_\mu = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c}\Phi_\mu$).

L'equazione, che così si ottiene, è:

$$\left[\gamma^\mu \Pi_\mu - iMc - \frac{1}{c}\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\right]_{\mu>\nu}\psi = 0 \tag{2}$$

di cui λ è una costante arbitraria delle dimensioni di un momento magnetico. Il momento magnetico della particella risulta allora uguale a $\mu_0 + \lambda$.

L'equazione (2) di Dirac–Pauli si presta allo studio degli effetti elettromagnetici relativistici dovuti a protoni o a neutroni (per questa particella tali effetti sono tutti dovuti al solo momento magnetico anomalo λ) [4]. Essa è stata anche utilizzata per studiare gli effetti dovuti ad eventuali mesoni carichi di spin 1/2 e momento magnetico nullo, esistenti nei raggi cosmici [5].

Nello studio dei processi che hanno interesse per il campo di energie dei raggi cosmici (bremsstrahlung, coppie), occorre tener conto degli effetti del ritardo dell'interazione fra le due particelle urtanti. Ci è sembrato perciò utile esaminare, come premessa per uno studio di questi processi in base alla elettrodinamica quantistica, l'interazione elettromagnetica ritardata fra due particelle di Dirac-Pauli. Abbiamo ottenuta una espressione che si può considerare come l'estensione al caso delle particelle di Dirac–Pauli della nota formula di Möller, che dà l'elemento di matrice dell'energia di interazione ritardata fra due particelle di Dirac.

2. L'interazione di una particella di Dirac-Pauli col campo elettromagnetico si deduce dalla (2) col solito procedimento. Separando le componenti di spazio da quella di tempo del quadrivettore $\Pi_\mu = p_\mu - \frac{e}{c}\Phi_\mu$, e passando alle matrici ordinarie $\alpha^k = i\gamma^4\gamma^k$ $(k = 1, 2, 3)$ e $\beta = \gamma^4$ di Dirac, la (2), indicando con $H = -icp_4$ l'operatore di Hamilton, diventa:

$$\left\{c\left(\alpha, p - \frac{e}{c}A\right) + e\Phi - \lambda\beta\left[(\sigma, H) - i(\alpha, E)\right]\right\}\psi = H\psi \tag{3}$$

(4) P. Caldirola, «Ist. Lomb.», 1944, 77, 1 (momenti magnetici delle particelle elementari).

(5) S. B. Batdorf-R. Thomas, 1941, 59, 621 (effetto Compton; bremsstrahlung; la sezione efficace di bremsstrahlung è qui però ottenuta col metodo dei «fotoni virtuali» dalla sezione d'urto Compton).

essendo $\mathbf{A}, \Phi$ i potenziali vettore e scalare del campo, $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ il campo elettrico e il campo magnetico, mentre $\sigma^k = -i\alpha^l \alpha^m = -i\gamma^l \gamma^m$ sono le matrici di Pauli (k, l, m permutazione ciclica dei numeri 1, 2, 3). L'energia di interazione della particella col campo è perciò:

$$H' = -e(\alpha, \mathbf{A}) + e\Phi - \lambda\beta[(\sigma, \mathbf{H}) - i(\alpha, \mathbf{E})]. \tag{4}$$

Per ottenere l'interazione elettromagnetica fra due particelle, basta nella (1) introdurre i valori $\mathbf{A}_2, \Phi_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{E}_2$ delle grandezze del campo dovuto alla seconda nel punto occupato dalla prima. Segnando con l'indice 1 le grandezze dipendenti dalla prima particella, l'interazione H' si può dividere [6] nell'interazione coulombiana ordinaria $V = e_1 \Phi_2 = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}$ e nell'interazione:

$$\mathcal{H} = -e_1(\alpha_1, \mathbf{A}_2) - \lambda_1 \beta_1 [(\sigma_1, \mathbf{H}_2) - i(\alpha_1, \mathbf{E}_2)]. \tag{5}$$

I campi figuranti in questo termine possono essere decomposti ora in sole onde trasversali e quindi con la quantizzazione, l'interazione (5), seguendo il procedimento di Bhete-Fermi, si può ottenere per scambio di fotoni fra le due particelle. Il termine (5) include perciò gli effetti del ritardo dell'interazione fra le due particelle. Consideriamo ora il caso che per effetto dell'interazione H' le due particelle passino dagli stati iniziali di impulsi p_{01}, p_{02} agli stati finali p_1 e p_2. Trattando l'energia di interazione H' come una perturbazione, piccola rispetto alle energie proprie delle particelle, la probabilità della transizione considerata è proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice H'_{AF} relativo agli stati imperturbati, iniziale A e finale F del sistema delle due particelle. Chiamando u_{01}, u_{02}, u_1, u_2 le ampiezze di Dirac per le due particelle in questi stati (in cui le particelle sono considerate come libere, e quindi vale l'equazione ordinaria di Dirac), l'elemento di matrice relativo alla parte « statica » (coulombiana) dell'interazione risulta lo stesso che nel caso di due particelle di Dirac [7]:

$$V_{AF} = \frac{4\pi\hbar^2 e_1 e_2}{|p_{01} - p_1|^2} u^*_{01} u^*_{02} u_1 u_2 \tag{6}$$

essendo $p_{01} - p_1 = -(p_{02} - p_2)$ la variazione d'impulso della prima particella, di segno opposto a quella della seconda.

L'elemento di matrice di $\mathcal{H}$ si può ottenere, usando il metodo di Bethe e Fermi [7]

$$\mathcal{H}_{AF} = \frac{\mathcal{H}_{AI} \cdot \mathcal{H}_{IF}}{E_A - E_I} + \frac{\mathcal{H}_{AII} \cdot \mathcal{H}_{IIF}}{E_A - E_{II}} \tag{7}$$

(6) Vedi, per esempio E. Fermi, «Rev. Mod. Phys.», 1932, *4*, 131; oppure W. Heitler, *The quantum theory of radiation*. Oxford, 1936, pp. 51 e 65.

(7) Vedi W. Heitler, loc. cit., p. 98; adoperiamo anche per il resto le notazioni di questo autore, avvertendo che però qui esprimiamo i momenti in unità ordinaria, e non in unità di energia.

essendo I e II due stati virtuali intermedi attraverso cui il sistema – senza conservazione dell'energia – passa nella transizione da A ad F. (E_A, E_I, E_{II} sono le energie del sistema in questi stati).

Nella transizione $A \to I$ la prima particella emette un fotone di impulso $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_{01} - \boldsymbol{p}_1$, che è assorbito dalla seconda nella transizione $I \to F$; nella transizione $A \to II$ la seconda particella emette un fotone di impulso $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{p}_{02} - \boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{k}$, successivamente assorbito dalla prima nella transizione $II \to F$. Gli elementi di matrice relativi a queste transizioni risultano:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{H}_{AI} = -e_1 \left(\dfrac{2\pi\hbar^2 c}{k}\right)^{1/2} u^*_{01} \left\{ 1 + \dfrac{\lambda_1}{e_1 \hbar} \beta_1 [k + (\alpha_1, \boldsymbol{k})] \right\} (\alpha_1, \boldsymbol{e}_k)\, u_1 \\ \mathcal{H}_{1F} = -e_2 \left(\dfrac{2\pi\hbar^2 c}{k}\right)^{1/2} u^*_{02} \left\{ 1 - \dfrac{\lambda_2}{e_2 \hbar} \beta_2 [k + (\alpha_2, \boldsymbol{k})] \right\} (\alpha_2, \boldsymbol{e}_k)\, u_2 \\ \mathcal{H}_{AII} = -e_2 \left(\dfrac{2\pi\hbar^2 c}{k}\right)^{1/2} u^*_{02} \left\{ 1 + \dfrac{\lambda_2}{e_2 \hbar} \beta_2 [k - (\alpha_2, \boldsymbol{k})] \right\} (\alpha_2, \boldsymbol{e}_k)\, u_2 \\ \mathcal{H}_{IIF} = -e_1 \left(\dfrac{2\pi\hbar^2 c}{k}\right)^{1/2} u^*_{01} \left\{ 1 - \dfrac{\lambda_1}{e_1 \hbar} \beta_1 [k - (\alpha_1, \boldsymbol{k})] \right\} (\alpha_1, \boldsymbol{e}_k)\, u_1 \end{cases}$$

in cui si è indicato con $\boldsymbol{e}_k$ il versore di polarizzazione del fotone di impulso $\boldsymbol{k}$.

Indicando con $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ le energie delle particelle (considerate come libere) negli stati iniziale e finale, si ha:

$$(9)\qquad E_A - E_I = \varepsilon_{01} - \varepsilon_1 - ck \qquad E_A - E_{II} = \varepsilon_{02} - \varepsilon_2 - ck.$$

Introducendo le espressioni (8) e (9) in (7) si ottiene così:

$$(10)\quad \mathcal{H}_{AF} = e_1 e_2 \frac{2\pi\hbar^2 c}{k} u^*_{01} u^*_{02} \left\{ \frac{\left\langle 1 + \dfrac{\lambda_1}{e_1 \hbar} \beta_1 [k + (\alpha_1, \boldsymbol{k})] \right\rangle \left\langle 1 - \dfrac{\lambda_2}{e_2 \hbar} \beta_2 [k + (\alpha_2, \boldsymbol{k})] \right\rangle}{\varepsilon_{01} - \varepsilon_1 - ck} + \right.$$
$$\left. + \frac{\left\langle 1 - \dfrac{\lambda_1}{e_1 \hbar} \beta_1 [k - (\alpha_1, \boldsymbol{k})] \right\rangle \left\langle 1 + \dfrac{\lambda_2}{e_2 \hbar} \beta_2 [k - (\alpha_2, \boldsymbol{k})] \right\rangle}{\varepsilon_{02} - \varepsilon_2 - ck} \right\} (\alpha_1, \boldsymbol{e}_k)(\alpha_2, \boldsymbol{e}_k)\, u_1 u_2$$

3. L'elemento di matrice totale H'_{AF} si ottiene sommando al termine dell'interazione coulombiana (6) i termini (10) che si ottengono per le diverse polarizzazioni $\boldsymbol{e}_k$.

Supponiamo ora che tra lo stato iniziale A e quello finale F l'energia sia conservata e indichiamo con $\varepsilon = \varepsilon_{01} - \varepsilon_1 = -(\varepsilon_{02} - \varepsilon_2)$, l'energia ceduta dalla prima particella alla seconda insieme all'impulso $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_{01} - \boldsymbol{p}_1$.

Si trova allora per l'elemento di matrice totale, dopo eseguita la somma rispetto alle due orientazioni del versore di polarizzazione $\boldsymbol{e}_k$ normali a $\boldsymbol{k}$:

$$(11)\qquad H'_{AF} = \frac{4\pi\hbar^2 e_1 e_2}{k^2 - \dfrac{\varepsilon^2}{c^2}} u^*_{01} u^*_{02} [1 - (\alpha_1, \alpha_2) + \Lambda]\, u_1 u_2.$$

Per brevità abbiamo indicato con Λ l'espressione

$$(12)\quad \Lambda = -\frac{\lambda_1}{e_1\hbar}\beta_1\left[\frac{\varepsilon}{c}+(\alpha_1,\boldsymbol{k})\right]\left[(\alpha_1,\alpha_2)-\frac{1}{k^2}(\alpha_1,\boldsymbol{k})(\alpha_2,\boldsymbol{k})\right]$$
$$-\frac{\lambda_2}{e_2\hbar}\beta_2\left[-\frac{\varepsilon}{c}-(\alpha_2,\boldsymbol{k})\right]\left[(\alpha_1,\alpha_2)-\frac{1}{k^2}(\alpha_1,\boldsymbol{k})(\alpha_2,\boldsymbol{k})\right]$$
$$+\frac{\lambda_1\lambda_2}{e_1e_2\hbar^2}\beta_1\beta_2\left[\frac{\varepsilon}{c}(\alpha_1,\boldsymbol{k})+\frac{\varepsilon}{c}(\alpha_2,\boldsymbol{k})+k^2+(\alpha_1,\boldsymbol{k})(\alpha_2,\boldsymbol{k})\right]$$
$$\left[(\alpha_1,\alpha_2)-\frac{1}{k^2}(\alpha_1,\boldsymbol{k})(\alpha_2,\boldsymbol{k})\right].$$

Per particelle normali di Dirac ($\lambda_1=\lambda_2=0$) si ha $\Lambda=0$, e la (11) si riduce alla nota espressione di Möller dell'interazione relativistica (ritardata). Il termine in Λ rappresenta quindi il contributo dei momenti magnetici anomali delle particelle.

Utilizzando la relazione $(\alpha,\mathbf{A})(\alpha,\mathbf{B})=(\mathbf{A},\mathbf{B})+i\sigma\times\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ in cui $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono vettori permutabili, la (12) si può anche mettere nella forma:

$$(12')\quad \Lambda = -\frac{\lambda_1}{e_1\hbar}\beta_1\left[\frac{\varepsilon}{c}(\alpha_1,\alpha_2)-\frac{\varepsilon}{c}(\alpha_1,\boldsymbol{k})(\alpha_2,\boldsymbol{k})+i\boldsymbol{k}\times\alpha_2\wedge\sigma_1\right]$$
$$-\frac{\lambda_2}{e_2\hbar}\beta_2\left[-\frac{\varepsilon}{c}(\alpha_1,\alpha_2)-\frac{\varepsilon}{c}(\alpha_1,\boldsymbol{k})(\alpha_2,\boldsymbol{k})+i\boldsymbol{k}\times\alpha_1\wedge\sigma_2\right]$$
$$+\frac{\lambda_1\lambda_2}{e_1e_2\hbar^2}\beta_1\beta_2\left[-k^2+k^2(\alpha_1,\alpha_2)-k^2(\sigma_1,\sigma_2)+\right.$$
$$\left.+(\sigma_1,\boldsymbol{k})(\sigma_2,\boldsymbol{k})+i\frac{\varepsilon}{c}\boldsymbol{k}\times(\alpha_1\wedge\sigma_2+\alpha_2\wedge\sigma_1)\right]$$

che mette in evidenza i vari termini di accoppiamento.

Per particelle neutre ($e_1=e_2=0$) compare nella (11) solamente il terzo termine della (12) o della (12'). L'interazione elettromagnetica è in tal caso dovuta unicamente ai momenti magnetici anomali delle due particelle (interazione elettromagnetica di 2 neutroni). Se una delle particelle è neutra e dotata di momento magnetico anomalo ($e_1=0$, $\lambda_2\neq 0$), mentre l'altra è carica ma ha momento magnetico normale ($e_2\neq 0$, $\lambda_2=0$), allora nella (11) comparirà il solo primo termine della (12') (neutrone–elettrone). Se la prima particella fosse anche carica ($e_1\neq 0$, $\lambda_1\neq 0$), comparirebbero oltre i termini ordinari dell'espressione di Möller, il primo e l'ultimo termine della (12') (protone–elettrone).

La (12) o la (12') non è formalmente simmetrica nella dipendenza dalle due particelle. Ciò è dovuto al fatto che $\boldsymbol{k}$, ε indicano le variazioni dell'impulso e dell'energia della prima particella; la simmetria è ristabilita osservando che $-\boldsymbol{k}$, $-\varepsilon$ sono le corrispondenti variazioni per la seconda particella. Si noti infine che nel caso di due particelle identiche con il calcolo fatto non si viene a tener conto dell'effetto di scambio delle particelle stesse.

Fisica. — *Sul secondo massimo della curva degli sciami della radiazione cosmica* [1]. Nota [2] di M. Della Corte, presentata dal Corrisp. L. Tieri.

La teoria degli sciami di Bhabha e Heitler successivamente perfezionata da Arley [3] rende conto in modo corretto del primo tratto della curva di Rossi degli sciami della radiazione cosmica. Per grandi spessori del diffusore intervengono altri fenomeni dipendenti dalla componente dura per i quali sussistono ancora notevoli incertezze. Sembra ormai sperimentalmente accertata l'esistenza di un secondo massimo verso i 15 cm. di piombo, assai meno pronunziato del primo e da attribuirsi forse alla presenza di sciami di mesotroni. Malgrado le numerose esperienze [4, 5, 6, 7] eseguite con contatori, camere di *ionizzazione* [8] e camere di Wilson, i risultati ottenuti finora sono difficilmente interpretabili e spesso decisamente contrastanti. Così, mentre Bothe e Schmeiser [9] hanno dimostrato con misure con contatori che il secondo massimo esiste ed è dovuto prevalentemente a sciami di due particelle con apertura angolare molto stretta, esperienze eseguite in condizioni molto simili da Forrò e Ozoral [10] hanno dato risultati del tutto negativi. Clay [11, 12] e collaboratori hanno trovato che il secondo massimo si presenta per sciami di apertura angolare relativamente grande pur non escludendone la presenza anche per sciami stretti. Risultati completamente negativi hanno ottenuto anche Rossi [13] e Altmann Wolker e Hess [14] per aperture angolari comprese fra 4° e 60°. Con la camera di Wilson il secondo massimo è stato messo in evidenza da Broussard e Groves [15] e

(1) La presente ricercá è stata eseguita con i mezzi forniti dal C. N. R. all'Istituto di Fisica dell'Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1946.

(3) N. Arley, *On the theory of stocastics processes and their application to the theory of cosmic radiation*, G. E. C. Gads Forlag Copenhagen 1943.

(4) Ackemann e Hummel, « Naturw. », *22*, 169 (1934).

(5) De Vos, « Nature », *145*, 387 (1940).

(6) Nielsen e Morgan, « Phys. Rew. », *55*, 995 (1939).

(7) Drigo, « Ric. Sc. », *5*, 88 (1934).

(8) Mohr e Stafford, « Nature », *149*, 385 (1942).

(9) K. Schmeiser e W. Bothe, « Ann. der. Phys. », *32*, 161 (1938).

(10) Forrò e Ozoral, « Naturw. », *31*, 140 (1943).

(11) J. Clay, A. Venema, K. H. J. Jonker, « Physica », VII, 673 (1940).

(12) J. Clay, A. van Gemert, J. T. Viersma, « Physica », III, 627 (1936).

(13) Rossi B. e L. Janossy, « Rew. of Mod. Phys. », *11*, 281 (1939).

(14) G. O. Altmann, H. N. Wolker, V. F. Hess, « Phys. Rew. », *58*, 1011 (1940).

(15) L. Broussard, A. C. Groves, « Phys. Rew. », *60*, 413 (1941).

Degli articoli citati in (14) (15) (8) ne abbiamo avuto notizia solo attraverso i « Physik. Berichte », poichè a causa della situazione internazionale non ci sono pervenute le corrispondenti riviste.

presentato sia da tutti gli sciami registrati indipendentemente dal numero di particelle, sia dagli sciami di due sole particelle aventi un'apertura maggiore di 20°. Per sciami più stretti gli errori sperimentali nelle misure dei predetti autori sono troppo notevoli per poter decidere dell'esistenza o meno del massimo.

Questa diversità di risultati è probabilmente da attribuire alle notevoli difficoltà che si presentano nell'interpretazione corretta delle esperienze con contatori nelle quali, così come sono state eseguite, è molto difficile tener conto sia del fattore geometrico sia della diversa sensibilità dei dispositivi per sciami di diverso numero di particelle.

Nell'intento di portare un contributo alla chiarificazione del problema abbiamo ritenuto interessante ricercare il secondo massimo della curva di Rossi usando un dispositivo sperimentale un poco diverso dal normale che ci permette di tener conto di alcuni fattori la cui valutazione è impossibile nelle comuni esperienze con contatori.

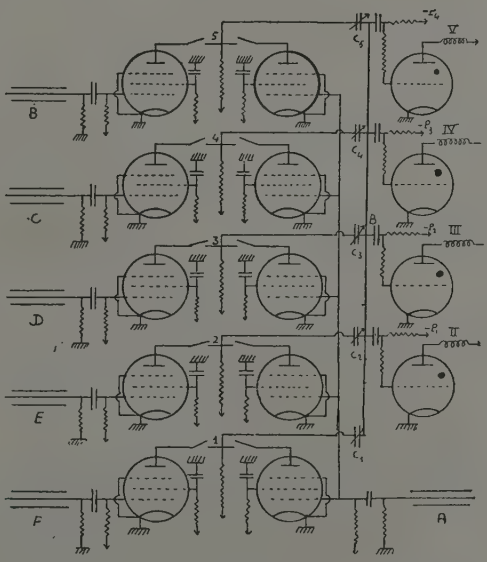


Fig. 1.

Descrizione dell'esperienza. – Il dispositivo sperimentale è rappresentato in scala in fig. 3.

I contatori A in parallelo sono posti in coincidenza con ciascuno dei contatori B C D E F (lo schema di principio della registrazione è indicato in fig. 1). Facendo lavorare in saturazione ciascuno dei pentodi in coincidenza e scegliendoli accuratamente in modo che abbiano caratteristiche il

più possibile uguali, si può ottenere che nei punti 1, 2, 3, 4, 5 gli impulsi dei singoli rami abbiano, con buona approssimazione, la stessa ampiezza. Questi punti sono collegati ciascuno ad una delle armature di 5 condensatori variabili aventi l'altra armatura in comune. Regolando opportunamente le capacità di questi condensatori si può ottenere che anche nel punto B gli impulsi dei singoli rami siano uguali. Se due o più rami dànno contemporaneamente un impulso, l'impulso in Bh ha una ampiezza proporzionale al numero di rami che hanno dato una coincidenza. Tale proporzionalità può essere facilmente verificata con un oscillografo catodico.

Per la numerazione gli impulsi vengono inviati alle griglie di 4 thyratron polarizzate in modo da contare ciascuno gli impulsi corrispondenti

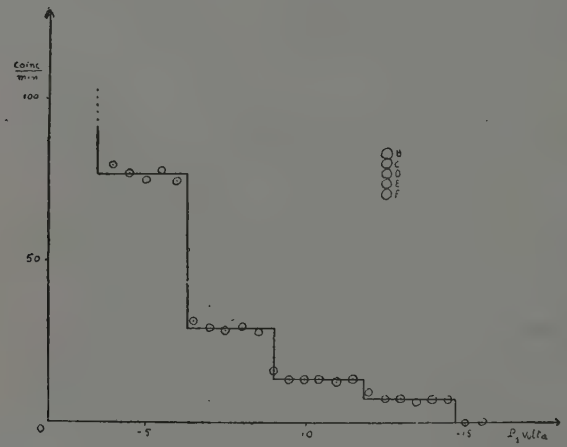


Fig. 2.

ad una coincidenza tripla, quadrupla ecc. fra i contatori A e due, tre ecc. qualsiasi dei contatori B C D E F. Per eliminare ogni interazione fra i thyratron abbiamo inserito in serie alle griglie di questi delle resistenze di 0,3 Meg che l'esperienza ci ha dimostrato sufficienti allo scopo. Una prova del buon funzionamento di questo dispositivo di coincidenze multiple fra i contatori B C D E F, è stata ottenuta disponendo i contatori stessi in un piano verticale, collegando alla registrazione un solo thyratron e contando il numero di coincidenze per valori successivamente decrescenti della sua polarizzazione di griglia. In questo modo vengono registrate successivamente le coincidenze doppie, triple, quadruple e quintuple. Il risultato è mostrato in fig. 2. L'uguaglianza fra le lunghezze dei gradini e la loro orizzontalità garantiscono dell'uguaglianza fra gli impulsi dei singoli rami

e della proporzionalità fra gli impulsi corrispondenti a coincidenze di diverso ordine.

Abbiamo usato contatori con pareti di ottone di 0,5 mm. lunghi cm. 40, racchiusi in vetro e riempiti della nota miscela di Argon e Alcool. Particolare cura è stata posta nella stabilizzazione delle tensioni sia dei contatori che della registrazione. Le polarizzazioni di griglia dei thyratron sono state continuamente controllate e tutto il dispositivo è stato frequentemente verificato all'oscillografo. Gli spessori del diffusore sono stati variati ogni 30 minuti circa.

L'esperienza è stata eseguita in una stanza del primo piano dell'Istituto di Fisica dell'Università di Firenze con uno spessore di muratura sovrastante i contatori di 150 gr/cm². Durante l'intera esperienza, che si è protratta per circa due mesi non sono state riscontrate sensibili anomalie di funzionamento.

Tabella I.

cm Pb	II	III	IV	V
0,5	90.2 ± 3.5	16.72 ± 1.46	4.47 ± 0.76	1.66 ± 0.42
1	121.– ± 4.05	29.2 ± 1.95	9.02 ± 1.14	2.43 ± 0.59
2	110.24 ± 3 3	28.1 ± 1.65	9.91 ± 1.05	3.2 ± 0.56
3	87.3 ± 3.5	22.28 ± 1.71	9.23 ± 1.10	2.90 ± 0.62
5	60.3 ± 2.5	13.25 ± 1.10	4.57 ± 0.75	1.77 ± 0.47
9.5	48.1 ± 1.9	9.27 ± 0.83	3.74 ± 0.53	1.64 ± 0.35
13	45.1 ± 1.9	7.36 ± 0 75	2.97 ± 0.47	0.89 ± 0.26
15	46.1 ± 1.8	6.46 ± 0.67	2.27 ± 0.40	0.82 ± 0 24
17	43.7 ± 1.7	5.88 ± 0.63	2.19 ± 0.38	0.75 ± 0.23
21	45 6 ± 1.8	7 99 ± 0.74	2.92 ± 0.45	0.76 ± 0.23

Risultati sperimentali. - Col dispositivo sperimentale descritto si sono registrate le coincidenze (II) triple fra i contatori A e due qualsiasi dei contatori B C D E F, (III) quadruple fra i contatori A e tre qualsiasi dei contatori in basso, e così le quintuple (IV) e le sestuple (V). Tali coincidenze sono state misurate per diversi spessori del diffusore S ed i risultati sono riportati in tabella I ed in fig. 3. Le coincidenze II sono state corrette per le casuali. La presenza dei contatori A e degli schermi di piombo posti lateralmente ai contatori B C D E F rende poco sensibile

il sistema agli sciami laterali e perciò abbiamo ritenuto il loro contributo trascurabile. L'angolo massimo di apertura degli sciami registrati era di circa 18°, ma poichè l'angolo sotteso da due contatori adiacenti era di 4°, è evidente che nella registrazione delle coincidenze II il dispositivo è particolarmente sensibile per sciami di stretta apertura angolare.

Dai risultati dell'esperienza si ottengono le curve di transizione per sciami generati dalla componente molle e dalla componente penetrante e contenenti un numero di particelle $N \geqq 2$, $N \geqq 3$, $N \geqq 4$, $N \geqq 5$. Esse presentano il noto andamento, e si può osservare come in accordo con la

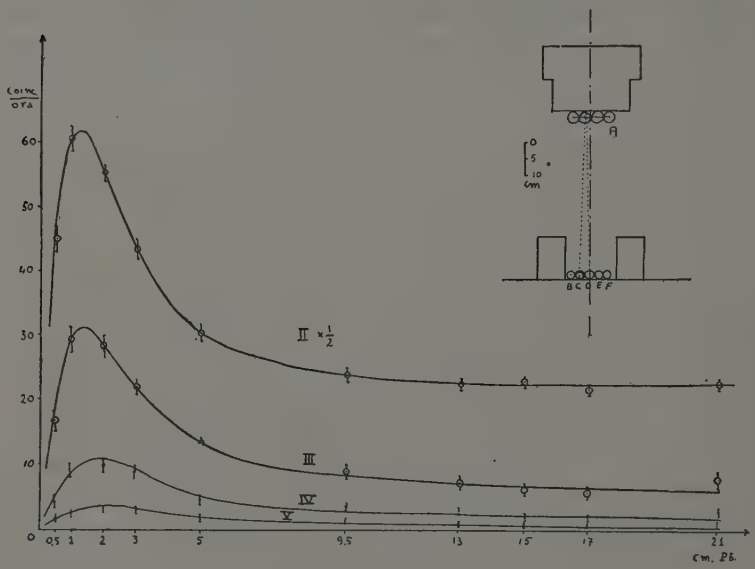


Fig. 3.

teoria, la posizione del primo massimo vada spostandosi leggermente verso i grandi spessori al crescere di N; non si nota in modo evidente la presenza di un secondo massimo.

È interessante notare che il rapporto fra il numero di coincidenze II ad 1,5 cm. Pb ed a 15 cm. Pb abbia un valore assai vicino a quello che si può dedurre dalle misure di Schmeiser [16] eseguite in condizioni simili alle nostre. Le differenze II-III e III-IV dovrebbero rappresentare gli sciami contenenti solamente due e tre particelle, ma in realtà esse non dànno che molto approssimativamente l'andamento di questi sciami; perchè, se è vero

(16) K. Schmeiser, « Zeitscr. f. Phys. », *112*, 501 (1939).

che le II sono dovute a sciami di almeno due particelle, esse non contengono quegli sciami di due, tre, ecc. particelle che per effetto di coerenza incidono su uno solo dei contatori in basso. Questo effetto di coerenza è tanto più notevole quanto maggiore è l'ordine di coincidenza e di ciò possiamo renderci conto, almeno qualitativamente, supponendo che le particelle dello sciame siano distribuite con ugual probabilità su tutta la superficie dei 5 contatori B, C, D, E, F e calcolando la probabilità che uno sciame di N particelle ha di dare una coincidenza ordine $\leqq N$. La tabella II dà un andamento di tale probabilità col numero di particelle dello sciame e con l'ordine di coincidenza.

Tabella II.

N. di Particelle nello sciame	Probabilità di avere una coincidenza				
	singola	doppia	tripla	quadrupla	quintupla
1	1	—	—	—	—
2	0,2	0,8	—	—	—
3	0,04	0,48	0,48	—	—
4	0,008	0,224	0,578	0,192	—
5	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$	0,096	0,48	0,384	0,038
6	$3{,}2 \cdot 10^{-4}$	0 039	0,346	0,499	0,115
7	$6{,}4 \cdot 10^{-5}$	0,016	0,231	0,538	0,215
8	$1{,}28 \cdot 10^{-5}$	0,006	0,148	0,522	0,323

Possiamo tener conto approssimativamente di questo effetto di coerenza nel seguente modo: Poichè da una precedente ricerca [17] risulta che gli sciami generati sotto spessori di circa 1 cm. di Pb sono dovuti in gran parte alla componente molle e che per essa sono assai ben verificati i calcoli eseguiti da Arley supponendo la validità per le particelle dello sciame della statistica di Pòlya, è ragionevole confrontare i valori del rapporto $\frac{\text{sciami con } N \geqq 2}{\text{sciami con } N \geqq 3}$ dedotto dalle nostre misure per i primi cm. di Pb con quello calcolabile dalle curve teoriche di Arley.

Tale confronto è mostrato in fig. 4. Ammettendo che la differenza fra le due curve sia da attribuirsi ad effetto di coerenza e che il numero di

(17) Della Corte M., « Nuovo Cim. », (in corso di stampa).

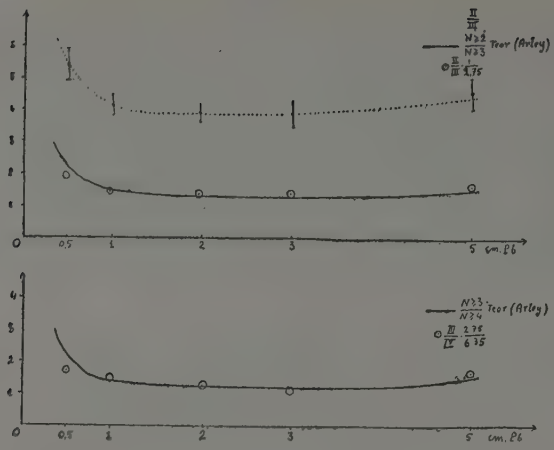


Fig. 4.

particelle non registrate per questo effetto sia proporzionale al numero di sciami registrati, cioè che il valore vero del rapporto sia dato da:

$$\frac{\mathrm{II}\,(1+\alpha)}{\mathrm{III}\,(1+\beta)}$$

si può, facendo coincidere il valore sperimentale con il valore teorico per lo spessore di 1 cm. di Pb, determinare il rapporto $\frac{(1+\alpha)}{(1+\beta)}$.

Poichè da quanto abbiamo detto l'effetto di coerenza cresce con l'ordine di coincidenza, possiamo considerare α trascurabile in confronto a β ed allora le coincidenze $\mathrm{II} - (1+\beta)\,\mathrm{III}$ daranno le curve di Rossi per sciami contenenti solamente due particelle. In modo analogo, noto $(1+\beta)$ possiamo determinare il fattore di correzione per le coincidenze IV e conseguentemente la curva di Rossi per sciami di tre particelle.

Nelle figure 5 e 6 sono riportati i risultati ottenuti per $(1+\beta) = 2{,}75$ e $(1+\gamma) = 6{,}35$. Come si vede, gli sciami di due sole particelle mostrano chiaramente il secondo massimo mentre non sembra che esso esista per sciami di tre particelle. La curva di Rossi per sciami di tre particelle ha però solo un valore indicativo poichè per questa gli errori sperimentali sono assai notevoli.

Poichè l'effetto di coerenza dipende evidentemente dall'apertura angolare dello sciame e poichè gli sciami sotto forti spessori hanno un'origine diversa da quelli del primo tratto della curva di Rossi, può sembrare ingiustificato assumere un fattore di correzione costante per tutta la curva.

Per chiarire questo punto abbiamo misurato il numero di coincidenze triple (II*) fra i contatori A e i contatori contigui C D. Poichè nelle II sono comprese 4 volte le coincidenze fra contatori contigui più le coinci-

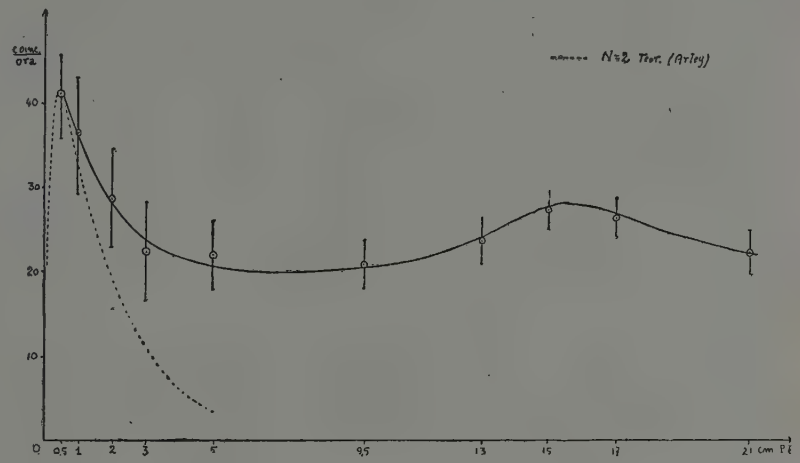


Fig. 5.

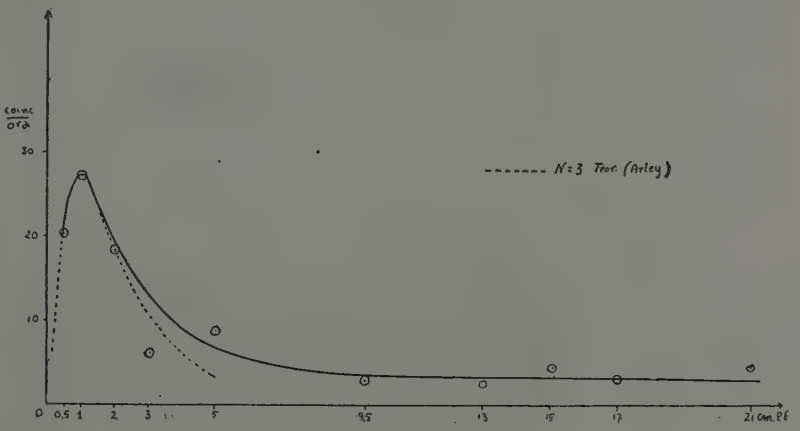


Fig. 6.

denze fra due contatori non contigui, il rapporto $\frac{4\,II^*}{II}$ dà una indicazione approssimativa del numero di sciami di apertura angolare minore di 4°.

Poichè si è ottenuto per 1 e 15 cm. di Pb rispettivamente i valori 69% e 77%, si può ritenere che per questi due spessori gli sciami registrati col nostro dispositivo non hanno aperture angolari molto diverse e che

comunque sotto forti spessori prevalgono gli sciami stretti. Conseguentemente si dovrebbe introdurre un coefficiente di correzione maggiore di quello assunto, ciò che porterebbe ad una esaltazione del secondo massimo.

Da quanto abbiamo esposto risulta giustificato attribuire le divergenze riscontrate dai vari autori nelle ricerche con contatori sul secondo massimo della curva di Rossi alla diversa sensibilità dei dispositivi sperimentali per sciami di diverso numero di particelle. Si è dimostrato inoltre che gli sciami di due particelle mostrano certamente il secondo massimo e che probabilmente questo manca per sciami di tre particelle.

Ringrazio il prof. Laureto Tieri, Direttore dell'Istituto di Fisica della Università di Firenze, per il suo costante interessamento alla presente ricerca, e il dott. Domenico Losco per l'aiuto prestatomi nella costruzione e nella messa a punto del dispositivo sperimentale.

Fisica. — *Sulla misura della densità dei neutroni termici*[1]. Nota[2] di E. CORINALDESI, presentata dal Corrisp. G. C. TRABACCHI.

Fra le misure relative ai neutroni termici, quelle di densità rivestono una importanza notevole, cosicchè può essere utile soffermarsi a criticare i metodi con cui vengono ordinariamente eseguite e studiare in qual modo si può ovviare a taluni errori sistematici, da cui sono affette.

Per le misure di densità, come è noto, si fa uso di rivelatori, capaci di attivarsi quando siano esposti per un tempo conveniente all'azione dei neutroni termici. L'attivazione si produce in quanto il rivelatore assorbe un numero di neutroni termici, che dipende evidentemente dal valore che alla densità spetta nel luogo in cui il rivelatore viene posto.

Il problema consistente nel risalire dall'attivazione alla densità, è di solito risolto in maniera grossolana; spesso infatti non si tiene neppure conto della perturbazione che la presenza del rivelatore produce nella distribuzione dei neutroni; può essere utile studiare sistematicamente l'entità di tale perturbazione e le relazioni intercorrenti fra la densità *imperturbata* ed i risultati di una misura. Questo è il compito del presente lavoro.

Cominciamo ad impostare il nostro problema osservando che la densità $n(x, y, z)$ dei neutroni termici soddisfa all'equazione:

$$(1) \qquad D\,\Delta n - \frac{n}{\tau} = -q\,.$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Roma – Centro di Fisica Nucleare del C. N. R.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1946.

Abbiamo indicato con D il coefficiente di diffusione ($D = v\lambda/3$ dove λ è il cammino libero medio e v la velocità media dei neutroni termici), con τ la vita media e con $q(x, y, z)$ il numero dei neutroni termici che si producono nell'unità di volume per unità di tempo. Indicando con $l = \sqrt{\tau D}$ il tratto di diffusione ($\cong 2$ cm.) e ponendo $-\tau q(x, y, z) = S(x, y, z)$ la (1) può anche essere scritta nella forma

$$l^2 \Delta n - n = S.$$

Il nostro compito sarà quello di risolvere la (1) nel caso in cui è presente il rivelatore; imponendo cioè delle condizioni al contorno esprimenti il fatto che questo assorbe una frazione del numero dei neutroni che lo attraversano.

1. *Condizioni al contorno; caso del rivelatore piano indefinito.* – Una schematizzazione necessaria del problema consiste nel trascurare gli effetti derivanti dal fatto che i neutroni possono attraversare il rivelatore sotto angoli diversi, avendo perciò una probabilità di essere assorbiti dipendente dalla direzione di incidenza. Se il rivelatore giace nel piano $z = 0$ di un sistema cartesiano, potremo supporre che i neutroni si muovano tutti nella stessa direzione con velocità $v/\sqrt{3}$ nel verso dell'asse z o nel verso opposto [3]: siano n_+ ed n_- i neutroni delle due specie contenuti nell'unità di volume. Se n è la densità dei neutroni si ha evidentemente:

$$n = n_+ + n_- . \tag{2}$$

Si ha pure:

$$-D \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{v}{\sqrt{3}} (n_+ - n_-). \tag{3}$$

Da (2) e da (3) segue:

$$n_\pm = \frac{1}{2} \left(n \mp \frac{D\sqrt{3}}{v} \frac{\partial n}{\partial z} \right). \tag{4}$$

Abbiamo supposto che il rivelatore ricopra una certa regione del piano $z = 0$. Il numero dei neutroni che lo attraversano è ridotto nel rapporto $e^{-\delta}$, dove δ dipende dallo spessore e dalla sostanza da cui il rivelatore è costituito [4]; lo supporremo in generale funzione di x e di y. Si ha pertanto:

$$\begin{cases} \left(n - \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \dfrac{\partial n}{\partial z} \right)_{z=0+} = e^{-\delta} \left(n - \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \dfrac{\partial n}{\partial z} \right)_{z=0-} \\ \left(n + \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \dfrac{\partial n}{\partial z} \right)_{z=0+} = e^{\delta} \left(n + \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \dfrac{\partial n}{\partial z} \right)_{z=0-} \end{cases} \tag{5}$$

(3) E. Fermi, «Ric. Scient.», VII, 13 (1936).
(4) $\delta = \sqrt{3} \times$ spessore $\times$ coefficiente di assorbimento.

Nei punti del piano $z = 0$ non occupati dal rivelatore, le (5) sono ancora valide quando in esse si ponga $\delta = 0$.

Come abbiamo osservato precedentemente, prima dell'introduzione del rivelatore sussiste una certa distribuzione di neutroni imperturbata con densità $n_0(x, y, z)$ soddisfacente alla (1).

La soluzione più generale della (1) si può esprimere come somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente e di un integrale particolare. Come integrale particolare possiamo scegliere proprio la $n_0(x, y, z)$.

Cominciamo col supporre che un rivelatore di spessore uniforme ricopra tutto il piano $z = 0$ e che inoltre n_0 dipenda solo da z.

La soluzione generale della (1) è in tal caso:

$$(6) \qquad \begin{cases} n(z) = n_0(z) - A_+ e^{-z/l} & \text{per } z > 0 \\ n(z) = n_0(z) - A_- e^{z/l} & \text{per } z < 0. \end{cases}$$

Determinando A_+ ed A_- in base alle (5) si ottiene

$$(7) \qquad A_\pm = \frac{\varepsilon l}{1 + \varepsilon l} n_0(0) \mp \frac{\varepsilon l}{\varepsilon + \frac{3l}{\lambda^2}} \left(\frac{dn_0}{dz}\right)_0$$

dove si è posto: $\frac{\sqrt{3}}{\lambda} \operatorname{tgh} \frac{\delta}{2} = \varepsilon$.

Il numero φ dei neutroni assorbiti dall'unità di superficie del rivelatore nell'unità di tempo è:

$$(8) \qquad \varphi = D \left\{ \left(\frac{dn}{dz}\right)_{0+} - \left(\frac{dn}{dz}\right)_{0-} \right\}.$$

Nel nostro caso si ha:

$$(9) \qquad \varphi = \frac{2 D \varepsilon}{1 + \varepsilon l} n_0(0).$$

pertanto φ dipende solo da $n_0(0)$ e non da $\left(\frac{dn_0}{dz}\right)_0$.

Per una distribuzione dovuta ad una generazione q costante si avrebbe $n_0 = q\tau = \text{costante}$, $\frac{dn_0}{dz} = 0$, $A_+ = A_-$: sarebbe quindi

$$(10) \qquad n(0) = \frac{q\tau}{1 + \varepsilon l}.$$

In mancanza della trattazione relativa, per i rivelatori di dimensioni finite si potrebbe usare nella pratica la formola (9), commettendo però un errore che sarà valutato nell'ultimo paragrafo del presente lavoro.

2. *Rivelatore circolare.* - Per misurare la densità dei neutroni termici vengono spesso usati rivelatori di forma circolare; studieremo pertanto

questo caso supponendo, per semplificare il problema, che si abbia un mezzo illimitato con una q costante: è quindi $n_0 = q\tau =$ costante. In sostanza questa ipotesi equivale a supporre che la densità imperturbata non vari sensibilmente su lunghezze dell'ordine di grandezza delle dimensioni del rivelatore e supponendo che si abbia una simmetria di rotazione intorno all'asse ζ l'equazione della diffusione diventa

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 n}{\partial \zeta^2} - \beta^2 n = -\frac{q}{D} R^2 \tag{11}$$

dove R è il raggio del rivelatore, $\xi = r/R$, $\zeta = z/R$, $\beta = R/l$.

Una soluzione particolare è evidentemente $n = q\tau$. Per la risoluzione dell'equazione omogenea corrispondente separiamo le variabili ponendo $n = \psi(\xi)\chi(\zeta)$. Si trova che $\chi(\zeta)$ è la combinazione di due esponenziali del tipo esp $[k\zeta]$ ed esp $[-k\zeta]$; $\psi(\xi)$ è una funzione cilindrica di ordine zero dell'argomento $\xi\sqrt{k^2 - \beta^2}$ la quale, dovendo restare finita per $\xi = 0$, non può essere una funzione di Neumann. Pertanto supponendo che sia $k > 0$ si hanno le soluzioni fondamentali

$$e^{\mp k\zeta} I_0(\xi\sqrt{k^2 - \beta^2}) = e^{\mp\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\zeta} I_0(\alpha\xi) \tag{12}$$

con $k^2 - \beta^2 = \alpha^2$, valide rispettivamente per $\zeta > 0$ e per $\zeta > 0$.

La soluzione più generale della (11) può essere posta nella forma

$$\begin{cases} n^{(+)}(\xi,\zeta) = -\int_0^\infty g^{(+)}(\alpha) I_0(\alpha\xi) e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\zeta}\, d\alpha + q\tau \text{ per } \zeta > 0 \\ n^{(-)}(\xi,\zeta) = -\int_0^\infty g^{(-)}(\alpha) I_0(\alpha\xi) e^{+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\zeta}\, d\alpha + q\tau \text{ per } \zeta < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Poichè per ragioni di simmetria deve essere $n^{(+)}(\xi,\zeta) = n^{(-)}(\xi,-\zeta)$ ne segue che:

$$g^{(+)}(\alpha) = g^{(-)}(\alpha) = g(\alpha).$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno possiamo semplificare le (5) tenendo conto della simmetria rispetto al piano $\zeta = 0$; essendo

$$n^{(+)}(\xi,0) = n^{(-)}(\xi,0) \quad , \quad \left(\frac{dn^{(+)}}{d\zeta}\right)_0 = -\left(\frac{dn^{(-)}}{d\zeta}\right)_0$$

troviamo

$$\begin{cases} \left(\frac{dn^{(+)}}{d\zeta}\right)_0 = \eta n^{(+)}(\xi,0) \\ \left(\frac{dn^{(-)}}{d\zeta}\right)_0 = -\eta n^{(-)}(\xi,0) \end{cases} \tag{14}$$

con $\eta = \sqrt{3}\,\frac{R}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}$. Evidentemente è $\eta = 0$ per $\xi > 1$.

Sostituendo le (13) nelle (14) per $g(\alpha)$ si trova la seguente equazione integrale:

$$(15) \qquad \int_0^\infty g(\alpha)\,(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\eta)\,I_0(\alpha\xi)\,d\alpha = \eta q\tau .$$

La risoluzione di questa equazione porta alla conoscenza tanto di $n^{(+)}(\xi,\zeta)$ quanto di $n^{(-)}(\xi,\zeta)$: d'ora in poi la nostra attenzione sarà dedicata soltanto alla prima di queste due funzioni (che per brevità indicheremo con n) in quanto che l'altra è ad essa legata in maniera molto semplice, come risulta dalle (13).

3. *Soluzione approssimata dell'equazione integrale.* – La (15) può essere risolta con un metodo approssimato, che consente di raggiungere una precisione soddisfacente. Questo metodo consiste in sostanza nel fare uso della formola [5]:

$$(16) \qquad \int_0^\infty I_\nu(\alpha)\,I_0(\alpha\xi)\,\alpha^{1-\nu}\,d\alpha = \begin{cases} 0 \text{ per } \xi > 1 \\ \dfrac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\,(1-\xi^2)^{\nu-1} \text{ per } 0<\xi<1. \end{cases}$$

Si può cercare di rappresentare la $\left(\dfrac{\partial n}{\partial\zeta}\right)_0$, che si annulla per $\xi>1$, come una somma del tipo

$$(17) \qquad \left(\frac{\partial n}{\partial\zeta}\right)_0 = \sum_\nu a_\nu \int_0^\infty I_\nu(\alpha)\,I_0(\alpha\xi)\,\alpha^{1-\nu}\,d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ per } \xi > 1 \\ \displaystyle\sum_\nu a_\nu \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\,(1-\xi^2)^{\nu-1} \text{ per } 0<\xi<1. \end{cases}$$

Da questa espressione per $\left(\dfrac{\partial n}{\partial\zeta}\right)_0$ segue

$$(18) \qquad n(\xi,\zeta) = -\sum_\nu a_\nu \int_0^\infty \frac{I_\nu(\alpha)\,I_0(\alpha\xi)}{\alpha^{\nu-1}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\zeta}\,d\alpha + q\tau .$$

Le costanti a_ν devono essere scelte in modo da soddisfare la (15); dovrà dunque essere

$$(19) \qquad \sum_\nu a_\nu \frac{(1-\xi^2)^{\nu-1}}{2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu)} = \eta\left\{ q\tau - \sum_\nu a_\nu \int_0^\infty \frac{I_\nu(\alpha)\,I_0(\alpha\xi)}{\alpha^{\nu-1}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha \right\}.$$

(5) NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, 1904, p. 198.

Gli integrali nel secondo membro di quest'ultima equazione si possono calcolare esattamente solo per certi valori di ξ e di ν: per esempio per $\xi = 0$ e ν qualsiasi e per $\xi = 1$ e $\nu = 1$ (6).

Se di ognuno dei suddetti integrali fosse noto uno sviluppo in serie di potenze di ξ, si potrebbe cercare di determinare i coefficienti a_ν mediante un confronto delle potenze di ξ di eguale grado nei due membri della (19); non essendo possibile dare in forma semplice un tale sviluppo, si può procederè limitando le somme nella (19) ad un numero finito di termini e rappresentando gli integrali nell'intervallo $0 < \xi < 1$ per mezzo di polinomi di grado pari nella ξ. In questo lavoro la somma è stata arrestata al terzo termine e si è fatto uso di polinomi di quarto grado. Per determinare i coefficienti di questi ultimi è stato necessario calcolare gli integrali per un certo numero di valori della ξ (precisamente cinque) per via numerica o, dove è stato possibile, esattamente. I polinomi così ottenuti rappresentano la dipendenza da ξ degli integrali nell'intervallo considerato con un errore non maggiore dell' 1%. Introducendo tali polinomi nella (19) e confrontando i coefficienti delle potenze di ξ nei due membri, si ottiene subito un sistema di tre equazioni lineari nelle incognite a_1, a_2, a_3 la cui risoluzione è elementare.

I coefficienti a_ν sono proporzionali a $q\tau$; essi, come risulta dalla (19), dipendono da η e da β; l'uso di queste due variabili riesce di particolare utilità allo scopo di ottenere risultati indipendenti dal valore di costanti fisiche quali sono λ ed l.

4. *Calcolo del numero totale dei neutroni assorbiti.* – Il numero dei neutroni assorbiti nell'unità di tempo dall'unità di superficie del rivelatore, come risulta dalla (8) e tenendo conto delle semplificazioni permesse dalle nostre ipotesi, è

$$2D\left(\frac{\partial n}{\partial \chi}\right)_0. \tag{20}$$

(6) Si ha (Nielsen, loc. cit., p. 214):

$$\int_0^\infty \frac{I_1(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}\left\{ i\left(I^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}i\right)\right)^2 - I^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}i\right)Y^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}i\right)\right\}$$

da cui, facendo uso di note formole, si riesce anche a calcolare

$$\int_0^\infty \frac{I_\nu(\alpha)}{\alpha^{\nu-1}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha.$$

In tal modo sono noti i valori che i nostri integrali assumono per $\xi = 0$. Da Nielsen, p. 233 si ricava anche una formola per

$$\int_0^\infty \frac{I_1(\alpha)\,I_0(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha.$$

Il numero totale dei neutroni assorbiti dal rivelatore nell'unità di tempo è dunque

$$\Phi = 2D\int_S \left(\frac{\partial n}{\partial \chi}\right)_0 dS. \tag{21}$$

Nel nostro caso si ha:

$$\Phi = 2\pi DR \sum_\nu \frac{a_\nu}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\nu}. \tag{22}$$

I risultati del calcolo di Φ in funzione di $q\tau$ per diversi valori di R sono riassunti nella figura 1. Si è preferito fornire i valori della grandezza

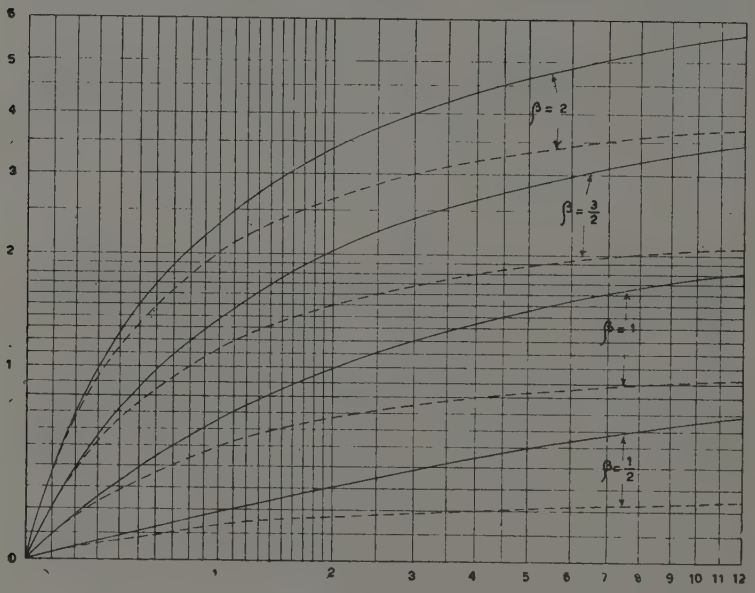


Fig. 1.

In ordinate: $\Phi/2\pi DlQ\tau$.
In ascisse: $\sqrt{3}\,\frac{l}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}$.
Φ = numero di neutroni assorbiti dal rivelatore nell'unità di tempo;
$q\tau$ = densità imperturbata;
l = tratto di diffusione;
λ = cammino libero medio;
D = coeff. di diffusione;
$\delta = \sqrt{3} \times$ spessore $\times$ coeff. di assorbimento.

$\Phi/(2\pi Dl\,q\tau)$ in funzione di $\sqrt{3}\,\frac{l}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}$, sempre allo scopo di non dover fare uso di valori particolari per λ e per l. Nella figura, accanto alle curve corrette, sono stati rappresentati i risultati che si otterrebbero facendo uso

della (9) (curve tratteggiate), ossia di una formola relativa ad un rivelatore di dimensioni infinite; si avrebbe in tal caso:

$$(23) \qquad \frac{\Phi}{2\pi\, D l\, q\tau} = \beta^2 \frac{\sqrt{3}\,\frac{l}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}}{1+\sqrt{3}\,\frac{l}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}}.$$

Lo scarto percentuale fra le curve continue e le corrispondenti tratteggiate va diminuendo al crescere del raggio del rivelatore, come è naturale.

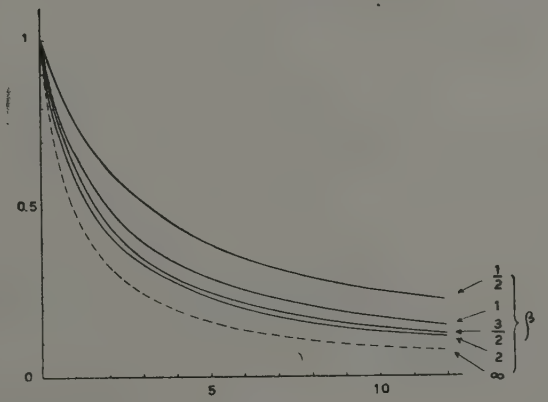


Fig. 2.

In ascisse: $\sqrt{3}\,\frac{l}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}$, dove l è il tratto di diffusione, λ il cammino libero medio, $\delta = \sqrt{3} \times$ spessore $\times$ coeff. assorbimento.
In ordinate: $\overline{n}/q\tau$.

Il rapporto fra la media dei valori che la densità perturbata n assume per $\zeta = 0$ e per $\xi < 1$ (cioè sul rivelatore) e la densità imperturbata $q\tau$ è rappresentato nella figura 2; detto rapporto si ricava facilmente dai risultati riassunti nella figura 1. Infatti

$$(24) \qquad \Phi = 2D\int_S \left(\frac{\partial n}{\partial \zeta}\right)_0 dS = 2D\int_S \left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}\cdot n\right) dS =$$

$$= 2\pi\, DR^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}\right)\cdot \overline{n}$$

e quindi

$$(25) \qquad \left(\frac{\Phi}{2\pi\, D l\, q\tau}\right) : \left(\sqrt{3}\,\frac{l}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}\right) = \beta^2 \frac{\overline{n}}{q\tau}.$$

Per confronto è stata anche disegnata la curva per il caso del rivelatore infinito (curva tratteggiata nella figura 2): dalla (10) si ricava:

$$\bar{n} / q\tau = n(0) / q\tau = 1 / \left(1 + \sqrt{3}\,\frac{l}{\lambda}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\delta}{2}\right).$$

Si può constatare che lo scarto fra i valori forniti dalle curve continue e quelli ricavati dalla curva tratteggiata è, specie per valori piccoli del raggio del rivelatore, abbastanza forte. Ciò sembra giustificare l'esecuzione dei calcoli di cui abbiamo esposto i risultati.

È mio gradito dovere ringraziare i Professori E. Amaldi e G. C. Wick per i loro consigli e per l'interessamento dimostratomi.

Geologia. — *Il problema strutturale del Monte Soratte* (Lazio). Nota[1] di E. Beneo, presentata dal Corrisp. G. Checchia Rispoli.

L'antica notorietà del Monte Soratte è dovuta principalmente alla sua ubicazione ed al suo aspetto singolarmente vistoso. Infatti, questo ripido costone calcareo della lunghezza di 5 chilometri e con asse NO–SE, si erge a guisa di uno scafo rovesciato sovrastando di 350 metri (poco meno di 700 metri s. m.) l'intero altipiano sulla destra del Tevere, a 50 chilometri a nord di Roma, fra la Via Flaminia ed il fiume stesso.

Ma non è altrettanto nota la sua configurazione geologica, nonostante la vicinanza con vie di grande traffico. La letteratura sull'argomento è estremamente povera[2] e lungi dal portare qualche decisivo contributo alla risoluzione del nostro problema. Solo in questi ultimi tempi è apparsa una Nota di C. Maxia su questi « Rendiconti »[3] riguardante la zona compresa fra il Monte Belvedere ed il Monte del Cardinale, fra Fiano Romano ed il Soratte, dove l'A. parla quasi incidentalmente di quest'ultimo, ma ne prospetta, sia pure a grandi linee, la possibile conformazione. Il Maxia, basandosi sulle vergenze opposte da lui notate fra i banchi del Soratte e quelli affioranti più a SE (Monte del Cardinale), è del parere che « questi due rilievi si completerebbero in una cupola anticlinalica, spezzata e dislocata lungo la linea di cresta, che si può seguire per circa 15 chilometri ». Nel corso della presente Nota vedremo come le cose siano in realtà assai più complesse.

(1) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1946.

(2) Rimando alla accurata *Bibliografia geologica del Lazio* di C. Maxia, pubblicata quale supplemento, nel « Bollettino dell'Ufficio Geologico d'Italia », vol. LXI, Roma, 1943.

(3) C. Maxia, *Sopra alcuni calcari a Nord di Roma*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. I, serie VIII, vol. I, Roma, 1946.

Non è neppure conosciuto il fatto che il Soratte ed i calcari di Fiano Romano [4] sono uniti da una serie ininterrotta di bassi affioramenti, descritti, però, in parte dal Maxia (v. loc. cit.). Tali affioramenti possono sfuggire ad un semplice sguardo panoramico poichè si confondono, nel paesaggio ondulato, con le circostanti coperture plioceniche (calcari di tipo travertinoide e brecciole) e quaternarie (tufi vulcanici). Formano, con il Monte Soratte, un allineamento con direzione generale NO–SE.

Le difficoltà maggiori incontrate per il presente tentativo di risoluzione del problema strutturale sono di due ordini:

estrema scarsità di fossili determinabili;

andamento confuso dei banchi nella parte «vistosa» del Monte.

Tuttavia, con pochissimi elementi si è potuto stabilire a grandi linee la stratigrafia, quanto è sufficiente, insieme con alcuni fondamentali capisaldi geometrici, per una ricostruzione generale.

La grande massa del Soratte nel versante occidentale ed in quasi tutto quello orientale è formata da calcari bianchi subcristallini attribuibili al Lias inferiore. I rari banchi ad andamento misurabile, annegati in una estrema confusione di fratture e faglie in ogni senso, hanno direzione NO–SE e vergenza costante a SO con inclinazioni variabili. La base del versante orientale, insieme con l'altura di S. Oreste, il contiguo Monte Piccolo e gran parte degli affioramenti sull'allineamento SE verso Fiano, sono formati da calcari compatti grigi o giallo chiari, selciferi, i cui banchi, quasi sempre bene individuabili, hanno direzione generale NO–SE e vergenza a NE, opposta alla precedente. Sono attribuibili al Lias medio, insieme con altre varietà meno diffuse. Si accompagnano ai calcari suddetti affioramenti minori di altre rocce. Eccone l'elenco:

A circa 2 chilometri a NO di S. Oreste, alla base del versante orientale del Soratte, si hanno calcari compatti rossi, selciferi, in piccoli banchi passanti a calcari marnosi giallastri i cui rapporti con i calcari bianchi del Lias inferiore ad essi topograficamente sovrastanti, non sono determinabili data la presenza di copertura detritica. Sempre alla base dello stesso versante, 500 metri più a SE, si hanno breccie dolomitiche (cava di sabbia dolomitica) e calcari nerastri con venature di calcite, molto simili al «portoro» apuano. Con qualche parvenza di continuità l'affioramento calcareo–dolomitico, che ha potenza di qualche metro, sale obliquamente lungo il versante fino quasi alla cresta (S. Oreste). Nel versante opposto, alle prime case del paese, si ha un piccolo ed unico affioramento isolato di calcari scuri. È probabile trattarsi effettivamente di Retico od almeno della parte basale del Lias. A SE di S. Oreste, oltre il Monte Piccolo, si hanno modesti affioramenti sparsi dei soliti calcari rossi e gialli, i quali sembrano addossarsi ai calcari del Lias medio in apparente concordanza. Dolomie e calcari scuri sono,

(4) V. il Foglio 144 «Palombara Sabina» della Carta Geologica. Roma, 1888.

invece, bene rappresentati in quei paraggi, al Monte del Cardinale ed oltre, verso Fiano, come ha pure osservato il Maxia (v. loc. cit.). Date le coperture posteriori non è possibile scorgere quali sono i rapporti che intercedono fra queste rocce ed i calcari compatti del Lias medio.

Il singolare fatto delle opposte vergenze al Soratte fra i banchi del Lias inferiore ed i *sottostanti* calcari del Lias medio, trova la sua chiara spiegazione nella presenza di un vistoso disturbo osservabile in ogni suo particolare a S. Oreste. Si tratta di una fascia milonitica di 2 a 3 metri di spessore sormontata da una zona breccioide assai potente alla quale si accompagnano i citati affioramenti dolomitici. L'erosione ha in parte riesumato la sottostante superficie di scorrimento che ha andamento NO–SE (leggermente obliquo rispetto all'asse longitudinale del Soratte) e vergenza a NE (20 a 30°). La fascia milonitica, mentre si immerge dopo poco sotto la copertura tufàcea nel versante occidentale, la si riscontra a più riprese lungo il versante opposto, sottostante o confusa con l'allineamento dolomitico.

La faglia di S. Oreste permette intanto di affermare che fanno parte del substrato i calcari rossi selciferi, i calcari compatti del Lias medio tanto del Monte Soratte quanto dell'allineamento collinare di SE (Monte del Cardinale ecc.), mentre sono scorsi su di essi i calcari del Lias inferiore e parte delle dolomie (e rocce connesse).

Rimanevano fuori del quadro tettonico così costruito gli affioramenti dolomitici della zona del Monte del Cardinale. Il loro collocamento nel quadro medesimo poteva quindi dar luogo a serie difficoltà. Viceversa queste sono state superate mediante l'osservazione dei terreni attraversati da una galleria che fa parte del costruendo acquedotto del Peschiera.

Il tronco che ci interessa si inizia sotto l'alveo del fosso Orescuro in località Cerreto (q. 150 circa) e termina nella valle del Fosso di S. Martino in località Molaccia (q. 130 circa) dopo un percorso di oltre 3 chilometri, sotto una copertura massima di 100 metri, poco a Nord del Monte del Cardinale. L'asse della galleria e quello dell'allineamento calcareo Soratte–Fiano sono ortogonali. Le condizioni di osservazione non potevano, quindi, essere migliori se si pensa che dal Cerreto verso la Molaccia la galleria viene a tagliare in traverso banco le formazioni, da letto a tetto. Purtroppo il rivestimento in muratura era in istato di avanzata costruzione all'epoca della visita (marzo del corrente anno 1946) ma aveva il pregio di non essere continuo e di lasciare ogni tanto alcuni tratti scoperti dai quali si sono potute fare alcune osservazioni di capitale importanza sulla natura e sull'andamento dei terreni, anche se i loro rapporti reciproci non hanno potuto essere stabiliti con la sicurezza che sarebbe stata desiderabile.

Iniziando il percorso dal Cerreto, dopo il solito Pliocene calcareo e sabbioso e dopo un lungo tratto di rivestimento (oltre la progressiva 1.000),

si entra nei calcari rossi e giallastri, noti anche in affioramento. Hanno il solito andamento NO–SE e debole pendenza verso SO. Dopo altro tratto di rivestimento si entra in marne scistose rosse (scaglia rossa) che conservano l'andamento della formazione precedente. Poi la muratura nasconde un interessante passaggio, a tetto, dalla scaglia rossa ad una scaglia grigia con interstrati di calcari nerastri talora zeppi di nummuliti. L'andamento è costantemente il medesimo. È da notare a questo punto che i due terreni suddetti non affiorano affatto nella zona e perciò possono considerarsi fino ad ora sconosciuti.

Dopo la progressiva 1.600 (5) il rivestimento continua fino alla 2.000 dopo la quale si entra in piene brecce calcareo–dolomitiche con venature di calcite, gli stessi terreni, cioè, che in affioramento si sono attribuiti al Retico od almeno al Lias inferiore, parte basale. Se i rapporti fra le varie formazioni finora incontrate sono incogniti (e le linee tettoniche non ne soffrono per questo), i rapporti fra la scaglia nummulitica ed i calcari dolomitici non possono essere che tettonici (faglia). A questo punto si può aggiungere che i terreni successivamente incontrati (muratura permettendo) fino allo sbocco della Molaccia, non hanno alcun interesse per il nostro problema, trattandosi delle solite, tranquille formazioni plioceniche.

Non essendovi alcuna ragione per attribuire alla faglia della galleria un andamento diverso da quella affiorante a S. Oreste, ed ammettendo che il contatto Scaglia–Dolomia avvenga verso la progressiva 1.800, il suo affioramento si verificherebbe al riposo della striscia dolomitica della zona di Monte del Cardinale, come lo dimostra una semplice costruzione geometrica e come, con sicurezza si constaterebbe potendo asportare una porzione della copertura tufaceo-calcarea. Ricostruendo l'intersezione della superficie di faglia con quella topografica (supponendo piana la prima) ed eseguendo il medesimo lavoro per la faglia di S. Oreste, ricordando, inoltre che siffatte superfici di contatto meccanico, pur conservando un certo allineamento direzionale, non rappresentano dei piani che eccezionalmente e per brevi tratti, è facile convincersi che le due faglie suddette non costituiscono, in realtà, che un unico elemento tettonico, pur tenendo conto che la distanza fra S. Oreste ed il Monte del Cardinale non è inferiore ai 4 chilometri.

La dolomia degli affioramenti a SE del Soratte rientra, quindi, automaticamente nel quadro tettonico generale che può riassumersi nel seguente modo:

L'esame dei fatti accertati mediante l'osservazione sul terreno ci porta, in primo luogo, a rilevare che nella massa medesima del Soratte sono presenti due serie di pendenze opposte e, quello che più conta, *direttamente sovrapposte*.

(5) Queste misure progressive di lunghezza sono molto approssimative perchè sono state semplicemente dedotte da quelle parziali segnate, talvolta, dai minatori sulle pareti della galleria con la lampada.

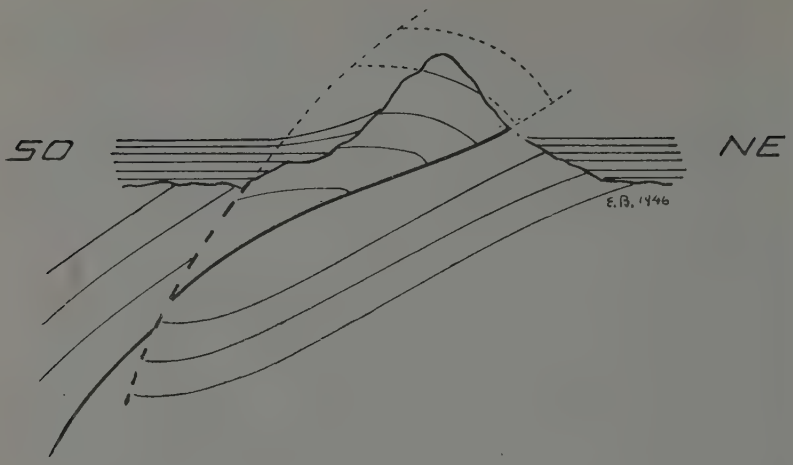


Fig. 1.

Le due vergenze sono separate da un taglio obliquo, ben netto, visibilissimo specialmente a S. Oreste e seguibile nei due versanti. La direzione del taglio forma con l'asse longitudinale del Soratte un certo angolo. Questo fatto, insieme con le differenti profondità alle quali è giunta l'erosione, ci può spiegare la presenza di certi affioramenti (dolomia) e le singolarità di certi contatti fra la massa sovrascorsa e quella sottostante.

Se noi consideriamo la dolomia (e rocce connesse) quale terreno più antico fra quelli affioranti e teniamo conto delle diversità di pendenze a vergenza unica rilevate nella parte superiore del Soratte, la dolomia medesima non può rappresentare che il nucleo di una piega anticlinale ribaltata, troncata dalla faglia di S. Oreste. Una conferma a questa affermazione la si ha esaminando la galleria–acquedotto che, come è stato detto, è situata a 4 chilometri a SE di S. Oreste (e cioè del Soratte), 350 metri più in basso. Fra i terreni incontrati la scaglia nummulitica e la dolomia assumono importanza grandissima, specialmente per i rapporti che intercorrono fra le due rocce. La dolomia, situata a tetto della scaglia, non può che appartenere ad un elemento tettonico sovrascorso e la scaglia medesima ad altro elemento in posto di cui rappresenta la sommità. La somiglianza fra questo motivo e quello del Soratte risulta all'evidenza. Una ricostruzione geometrica porta inoltre a dimostrare che la faglia della galleria e quella di S. Oreste non sono che la medesima cosa. Per tutte le ragioni enumerate, la struttura del Soratte è, molto probabilmente, quella rappresentata schematicamente in figura. La diversità dei contatti è pure spiegabile con la diversità delle quote a cui si verificano i contatti medesimi. Basta, per convincersene, consultare la figura suddetta.

In accordo col Maxia (v. loc. cit.), la dislocazione del Soratte precede i depositi pliocenici, ma è probabile che l'assetto definitivo di questo monte sia avvenuto poco dopo il deposito delle brecciole e dei calcari a tipo travertinoide rappresentanti il limite superiore di quel periodo, dato che questi calcari, alla base orientale del Monte Piccolo sono vergenti a ponente di una ventina di gradi. Si dovrebbe ammettere, perciò, un movimento di rotazione intorno ad un asse posto a levante, ma sulla cui ubicazione altro non può dirsi. Rimane così incognita l'entità del presunto sollevamento che, se realmente avvenuto, dovrebbe avere creato una frattura a ponente (rappresentata in figura) che, spezzando la faglia preesistente ed in origine alquanto più raddrizzata, avrebbe portato quest'ultima nell'attuale posizione. La frattura sarebbe stata, in seguito, ricoperta dai tufi i quali nel versante occidentale raggiungono la quota 400, mentre nel versante opposto non si trovano più alti di 200 metri, data la funzione di arresto esercitata dal Soratte contro i prodotti piroclastici eruttati dal gruppo vulcanico Sabatino-Cimino, posto, precisamente, ad occidente di esso [6].

Biologia. — *Sull'ibridazione tra «Bufo viridis» e «Bufo vulgaris». Esperienze di trapianto tra ibridi e normali*[1]. Nota I[2] di T. Perri, presentata dal Socio F. Silvestri.

Le ricerche sulle ibridazioni di due specie di rospi, comuni in Italia, hanno condotto ai seguenti risultati: gli ibridi *Bufo vulgaris* ♀ *Bufo viridis* ♂ sono vitali e giungono alla metamorfosi; invece gli ibridi in senso inverso, cioè *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂, hanno scarsa vitalità e si sviluppano al massimo fino allo stadio di giovani larve. Questa diversità di comportamento fu studiata da vari autori: Pflüger, Born, G. Hertwig, Montalenti; quest'ultimo ha esaminato minutamente (1932, 1933[3]) le alterazioni degli ibridi *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂.

L'ipotesi di G. Hertwig (che rilevo dal Montalenti) è basata tra l'altro sul presupposto che i nuclei elaborino un'enzima specifico per la digestione del tuorlo della propria specie; fatto non dimostrato, com'è giustamente rilevato dal Montalenti, che non accetta tale teoria. Il Montalenti, spiega il diverso comportamento che si ha nei due incroci, fondandosi sulla diversa velocità di sviluppo nelle due specie (in *viridis* maggiore che in *vulgaris*); egli ritiene, in base a varie argomentazioni, che qualora nell'uovo penetri

(6) L'argomento della presente Nota sarà trattato un poco più diffusamente nel «Bollettino della Società Geologica Italiana», vol. LXV, che uscirà alla fine dell'anno in corso.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1946.

(3) «Physiol. Zool.», vol. VI, 1933.

uno spermio a minor velocità di sviluppo (come in *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂) si debba avere appunto un danno notevole e di gran lunga maggiore che nel caso inverso, cioè quando si abbia la penetrazione nell'uovo di uno spermio a maggior velocità di sviluppo (come in *B. vulg.* ♀ × *B. vir.* ♂).

Altri autori (Jucci, Holtfreter) avevano pensato ad una incompatibilità biochimica che dovrebbe tradursi in un diverso comportamento nei trapianti tra queste due specie, con risultati meno buoni nella combinazione *B. vulg.* su *B. vir.* Si entra così nel vivo di un interessante problema: rapporti tra possibilità di trapianti e possibilità d'incroci tra specie diverse; problema già impostato dal Giardina, che nel 1905 (4) osservò che all'incompatibilità manifestantesi nei trapianti tra *Bufo* e *Discoglossus* corrisponde il risultato che gli ibridi tra *Bufo* e *Rana* giungono al massimo agli stadi di morula; e che alla possibilità (Harrison, 1898) di portare fino alla metamorfosi un innesto di due specie di rana corrisponde la facilità con cui si ottengono larve ben formate mediante incrocio di due specie di rana fra di loro o di rospo fra di loro. Ricerche di Cotronei e Perri (5) mostrarono che l'abbozzo oculare sia di *B. viridis* trapiantato su *B. vulgaris*, sia di *B. vulgaris* trapiantato su *B. viridis*, giunge alla metamorfosi contemporaneamente al portatore: ne conclusero che non vi è parallelismo tra ibridazioni e trapianti. Risulta infatti dalle ricerche dei diversi autori che si sono occupati di trapianti o di ibridazioni, che i trapianti sono possibili in tante combinazioni ove le ibridazioni (e non per cause puramente meccaniche) non riescono; si ha inoltre che dove non sono possibili i trapianti, anche le ibridazioni dànno risultati scarsissimi o nulli.

* * *

Ho ritenuto opportuno riprendere in esame gli ibridi, nei due sensi, tra *Bufo viridis* e *Bufo vulgaris*, allo scopo di studiare il loro comportamento quando siano trapiantati sull'una o sull'altra specie; così questo lavoro si riconnette, per alcuni aspetti, alle dinanzi citate esperienze di trapianto, tra le due specie, di Cotronei e Perri, in quanto affronta ancor più direttamente i rapporti tra ibridazioni e trapianti.

Nelle esperienze di quest'anno ho ampiamente usato la tecnica dei trapianti, sia per conoscere il comportamento di singoli organi oltre la sopravvivenza dell'intero organismo, sia per studiare le eventuali incompatibilità tra gli ibridi e le due singole specie. Per ora ho sperimentato solo su ibridi *B. vir.* ♀ × *B.* vulg. ♂ con trapianti embrionali e larvali (6) da ibrido su *Bufo* normali, e da embrione di B. *viridis* normale su embrione ibrido;

(4) «Mon. Zool. Ital.», vol. 16, 1905.

(5) T. Perri, «Boll. di Zool.» vol. 7, 1936 (con Nota aggiunta di G. Cotronei); G. Cotronei e T. Perri, ivi vol. 12, 1941.

(6) I trapianti larvali mi furono eseguiti dallo studente F. Chelli, interno in questo Istituto.

adunque le ibridazioni le ho eseguite nei due sensi, ma per i trapianti ho scelto, per cominciare, l'ibrido che precedenti ricerche mostravano meno vitale, cioè *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂.

Ibridazione B. vulgaris ♀ × *B. viridis* ♂. – La eseguii una sola volta e vi riscontrai notevole mortalità; numerosi individui si dimostrarono notevolmente alterati; di 46 larve che avevo appositamente isolate, solo 25 giunsero alla metamorfosi

Gli individui alterati presentavano gradi vari di inibizione, specie cefalica; da questi si passa gradualmente a quelli apparentemente normali, che giungono alla metamorfosi.

Questi casi sono interessanti perchè mostrano che in una certa percentuale di individui si manifestano incompatibilità anche nell'ibridazione *B. vulg.* ♀ × *B.* vir. ♂; e perciò si stabilisce un avvicinamento con i risultati dell'ibridazione (non vitale) *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂.

Ibridazione B. viridis ♀ × *B. vulgaris* ♂. – La eseguii tre volte. Due di esse furono eseguite il 25 marzo e presentarono un comportamento molto simile: già dopo 7 giorni sopravvivevano pochissimi individui; dopo una ventina di giorni anche i più resistenti erano morti; nessuno raggiunse lo stadio larvale. Uno solo di questi due lotti fu usato per esperimenti. La terza ibridazione, che pure servì per trapianti, fu eseguita il 9 aprile e gli ibridi vissero, al massimo, un mese; vi ebbi varie larve.

Osservai, come già precedenti autori, che questi ibridi presentavano fenomeni d'inibizione specie negli organi cefalici. In alcuni casi si formò una propaggine, determinata da due fessure che vanno tra gli abbozzi olfattori e la cavità buccale; tale formazione, già descritta dal Montalenti, è molto somigliante a quella che io descrissi recentemente in esperienze di Röntgen–irradiazione di embrioni di *Bufo viridis*. In due larve notai fusione degli abbozzi olfattori. Nelle larve vissute abbastanza a lungo si osservano, all'esame microscopico, gli abbozzi degli arti anteriori e posteriori; in una di queste, i posteriori sporgevano per poco meno di un millimetro. Altre due larve furono trattate con preparati tiroidei e ne risentirono gli effetti in grado discreto (tecnica preconizzata, ma poi non attuata, dal Montalenti).

Trapianti da ibridi B. viridis ♀ × *B. vulgaris* ♂ *su Bufo normali.* – Espongo ora i risultati delle esperienze cui ho particolarmente volto la mia attenzione.

Da individui ibridi (ibridazione del 25 marzo) scelti tra quelli in migliori condizioni, allo stadio di bottone codale, trapiantai su embrioni di *B. vulgaris* la vescicola ottica primaria insieme con un pó di circostante encefalo. I portatori furono fissati a distanza varia di tempo: dalla fine di aprile (cioè dopo che tutti i controlli erano morti) sino alla fine di maggio. I casi esami-

nati sono sette. In un portatore, fissato a due mesi dal trapianto, ho osservato un occhio in ottime condizioni, ben differenziato in tutte le sue parti; in un altro, a circa un mese dal trapianto, un occhio molto piccolo con stratificazione; infine, in un portatore già metamorfosato, una piccolissima massa di tessuto retinico circondata da *tapetum*. In vari casi ho notato presenza di tessuto encefalico; in tutti di tessuto cartilagineo. Sono notevoli due casi in cui dalla zona dove era stato eseguito il trapianto si sviluppò un arto ben differenziato nelle sue varie parti (7): in un caso non vi sono più tracce del trapiantato, nell'altro tessuto nervoso.

Anche su embrioni di *B. viridis* eseguii il trapianto di vescicola ottica primaria di ibrido. Ne ho esaminato sette casi, i cui donatori appartenevano all'ibridazione del 9 aprile, fissando i portatori dopo un mese dal trapianto, quando i donatori e gli altri ibridi dello stesso lotto erano già morti. Ho notato in tre di questi casi un occhietto piccolo, in cui si riconoscono strati retinici, circondato da *tapetum* e solo una volta con cristallino. Negli altri casi o nulla o appena qualche residuo riferibile al trapianto.

Su embrioni di *B. viridis* eseguii pure, da ibridi del 9 aprile, il trapianto di bottone codale. In tutti si sviluppò la coda; ma dopo un mese solo in 4–5 casi (su una diecina) si conservava la coda trapiantata con le sue parti assili, e noto che in uno di questi il portatore presentava gli arti posteriori notevolmente sviluppati, segno di notevole sopravvivenza del trapiantato.

Pensai essere utile, accanto a questi trapianti embrionali, eseguire trapianti larvali, partendo cioè da individui che già per sè stessi avevano mostrato notevole resistenza. Furono eseguiti trapianti di occhio da ibridi (del 9 aprile) già giunti allo stadio di larva, nel cavo orbitario (svuotato dell'occhio normale) di larva *B. vulgaris* in tre casi, e di *B. viridis* in un altro. Per i trapianti su *vulgaris*, un portatore fu fissato a larva avanzata, gli altri due a metamorfosi ultimata; in tutti l'occhio trapiantato si presenta in ottime condizioni e allo stesso stadio di sviluppo dell'occhio normale; è di volume un pò minore (v. figura annessa). Nel trapianto su *B. viridis*, l'occhio dapprima aumentò di volume, ma poi presentò segni d'involuzione: all'esame microscopico, fissato il portatore dopo completata la metamorfosi, si riscontra un cristallino di notevoli dimensioni, circondato da *tapetum*, mentre della retina rimangono solo poche cellule.

Da questi trapianti di ibrido su normale, risulta adunque che il trapiantato può sopravvivere anche di molto agli ibridi dello stesso lotto. Vi è tuttavia una variabilità molto ampia di risultati, che ricorda da vicino la variabilità di sopravvivenza degli ibridi stessi. Va aggiunto che partendo da ibridi per se stessi più resistenti (che avevano già raggiunto lo stadio larvale), il trapiantato può giungere a metamorfosarsi in condizioni ottime e molto

(7) È noto che ciò facilmente verificasi negli Urodeli in seguito a trapianti. Per gli Anuri, ne conosco un caso solo descritto da Filatow in *Bufo vulgaris*.

prossime alle normali, come si è visto. Risulta adunque molto probabile che l'avanzamento subìto dal trapiantato sia in stretto rapporto con le sue condizioni al momento del trapianto; cioè a dire che nell'organismo normale in cui vien portato a vivere estrinsechi, senza aumentarle, le capacità che aveva in se stesso.

In *vulgaris* i risultati sono stati migliori che in *viridis*; sarà compito di successive ricerche vederne il significato, potendo anche trattarsi di fatto meramente causale; tanto più che il numero delle esperienze finora eseguite non è abbastanza elevato.

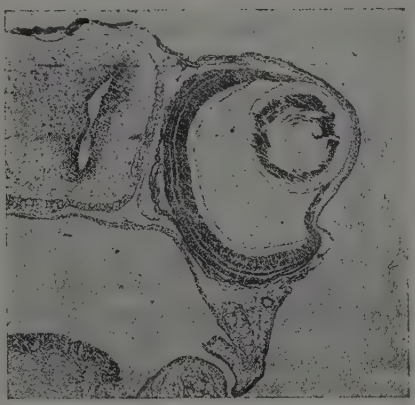


Fig. 1 – Occhio di larva *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂ trapiantata nel cavo orbitario di larva di *B. vulgaris* normale. L'occhio si è metamorfosato contemporaneamente al normale.

Trapianto della vescicola ottica di B. viridis su ibrido. – Queste esperienze hanno più particolarmente lo scopo di saggiare l'importanza delle variazioni biochimiche ambientali degli embrioni ibridi. Trapiantando su ibridi poco vitali (*B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂) la vescicola ottica primaria di *viridis* normale, ho notato che questa si sviluppa in maniera pressochè normale, con chiara stratificazione, e di gran lunga meglio che l'occhio dell'ibrido portatore, che in genere non presenta nessuna stratificazione.

Ciò mostra che dette variazioni ambientali o non esistono oppure sono così lievi da non influire sullo sviluppo di un abbozzo oculare normale, concordemente con quanto detto nel paragrafo precedente [8].

(8) Per una migliore conoscenza delle variazioni biochimiche degli ibridi, ho già iniziato esperienze di trapianto da ibrido, e parallelamente da *B. viridis* normale, su *Rana esculenta*, tenendo esatto conto del volume trapiantato. Una più approfondita conoscenza del comportamento degli ibridi e delle due singole specie in questi trapianti su *Rana esculenta*, o su altre specie, non può che agevolare la comprensione dell'intero problema.

Conclusioni. – Riassumendo i risultati avanti esposti, concludo limitandomi a porre in evidenza i due fatti seguenti.

1) Nel trapianto embrionale o larvale dell'occhio di ibrido *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂ su *Bufo* normale, il trapiantato può sopravvivere e può giungere alla metamorfosi.

2) L'abbozzo oculare di *B. viridis* trapiantato su embrione ibrido *B. vir.* ♀ × *B. vulg.* ♂ si sviluppa pressochè come su normale.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 16 ottobre 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria). — *Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno* ∞^k *rette.* Nota [1] del Corrisp. E. Bompiani.

In una interessante Nota dallo stesso titolo della presente E. G. Togliatti ha classificato [2] le V_4 con ∞^4 rette trovando che esse possono essere: 1° luoghi di ∞^2 piani, 2° luoghi di ∞^1 quadriche V_3^2 di S_4, 3° le V_4^3 di S_7 già considerate da Gaetano Scorza [3].

L'interesse del risultato e il desiderio di trovarne una dimostrazione più diretta che potesse dare suggerimenti per la risoluzione di problemi analoghi mi hanno indotto a redigere la presente Nota.

1. Spazi tangenti ad una V_k rigata. — La rigata luogo di (almeno) ∞^{k-1} rette in S_n sia descritta dal punto x di coordinate omogenee

$$x^i = \varphi^i(u) + v\psi^i(u) \qquad i = 1, \cdots, n+1$$

ove u sta ad indicare il complesso delle variabili indipendenti u^α con $\alpha = 1, \cdots, k-1$.

Lo S_k tangente nel punto (u^α, v) è individuato dalla generatrice (φ, ψ) per esso e dai punti

$$\psi_\alpha(u) + v\psi_\alpha(u) \qquad \left(\text{p. es. } \varphi_\alpha = \partial_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}\right)$$

per i valori delle u e di v relativi al punto. Al variare di questo lungo la generatrice si ha lo S_k tangente congiungendo la generatrice ai punti di $k-1$ punteggiate riferite proiettivamente a quella di contatto.

(1) Presentata nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) E. G. Togliatti, *Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno* ∞^k *rette.* « Atti Acc. Torino », vol. LVII, 1921.

(3) G. Scorza, *Le varietà a curve sezioni ellittiche.* « Ann. di Mat. », ser. III, to. XV, pp. 217–263.

Sicchè si ha in generale un S_1 — cono in S_{2k-2} d'ordine $k-1$. Ma se tutti quegli S_k hanno in comune un S_ϱ il cono sta in $S_{2k-\varrho}$ ed è d'ordine $k-\varrho$.

2. Tangenti tripunte. – Cerchiamo gli elementi E_2 di flesso per un punto x. Se esistono essi sono determinati dalla condizione $\|x, dx, d^2x\| = 0$, cioè più esplicitamente da

$$\|\varphi + v\psi, (\varphi_\alpha + v\psi_\alpha)\,du^\alpha + \psi\,dv, (\varphi_\alpha + v\psi_\alpha)\,d^2u^\alpha + (\varphi_{\alpha\beta} + v\psi_{\alpha\beta})\,du^\alpha\,du^\beta + 2\psi_\alpha\,du^\alpha\,dv\| = 0.$$

Gli E_1 ad essi relativi, se esistono, sono dati da

$$\|\varphi, \psi, \varphi_\alpha + \psi_\alpha, (\varphi_{\alpha\beta} + v\psi_{\alpha\beta})\,du^\alpha\,du^\beta + 2\psi_\alpha\,du^\alpha\,dv\| = 0.$$

Essi appartengono dunque, nello S_k tangente in x, a coni quadrici. Le equazioni conglobate nella precedente sono soddisfatte sempre da $du^\alpha = 0$ (cioè dalla generatrice per x, com'è evidente). Esse sono in numero di $n-k$ e non ammettono in generale infinite soluzioni appena $n \geqq 2k-1$.

Si noti che tenute fisse per esempio le prime $k+1$ colonne della precedente matrice e formati i determinanti con esse e con ciascuna delle rimanenti, le equazioni dei coni delle tangenti tripunte sono del tipo

$$A^j_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta + B^j_\alpha\,du^\alpha\,dv = 0 \qquad j = k+2, \cdots, n+1;$$

e possono interpretarsi come equazioni di quadriche in S_{k-1} (in cui sono coordinate $du^1 : \cdots : du^{k-1} : dv$). Se queste non individuano un sistema ∞^{n-k-1} ma di dimensione $n-k-1-\sigma$ è perchè fra esse sussistono σ relazioni indipendenti; esse dànno luogo a relazioni del tipo

$$\lambda_j A^j_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \lambda_j B^j_\alpha = 0$$

per σ diversi sistemi (indipendenti) di λ_j.

Queste relazioni per un sistema di λ_j, tenuto presente che le $A^j_{\alpha\beta}$ (e così le B^j_α) sono determinanti d'ordine $k+2$ con le prime $k+1$ colonne uguali in tutti (cioè indipendenti da j), portano di conseguenza

$$\lambda_i \varphi^i = 0 \quad , \quad \lambda_i \psi = 0 \quad , \quad \lambda_i \varphi^i_\alpha = 0 \quad , \quad \lambda_i \psi^i_\alpha = 0 \quad , \quad \lambda_i (\varphi^i_{\alpha\beta} + v\psi^i_{\alpha\beta}) = 0$$

ove ora l'indice i si estende da 1 ad $n+1$.

Queste esprimono l'esistenza di un iperpiano contenente l'intorno del 2° ordine di un punto di V_k e tutto l'intorno del 1° ordine della generatrice; e se quelle relazioni sono σ si ha un $S_{n-\sigma}$ contenente detto intorno del 2° ordine e lo spazio tangente fisso lungo tutta la generatrice cui il punto appartiene.

3. V_4 con ∞^4 rette in S_n con $n \geqq 7$. Le V_4 luoghi di ∞^2 piani. – Se la V_4 contiene ∞^4, e non ∞^5, rette per un punto generico P di essa ne passano ∞^1 costituenti un cono γ_P. Sia r una retta di V_4, e P un suo punto. Il piano tangente a γ_P lungo r sta negli S_4 tangenti a V_4 in tutti

i punti di r; cioè tutti questi S_4 contengono i piani tangenti ai coni γ_P qualunque sia P su r.

Possono quindi farsi le seguenti ipotesi:

1° al variare di P su r i coni γ_P hanno lungo r lo stesso piano tangente;

2° i piani tangenti detti formano fascio in uno S_3 appartenente agli S_4 tangenti nei punti P di r;

3° detti piani tangenti non formano fascio e perciò lo S_4 tangente in ogni punto P di r è sempre lo stesso.

In quest'ultimo caso lo S_4 tangente in un punto qualsiasi di r contiene tutte le rette appoggiate ad r ed è tangente quindi in ciascun punto di queste e contiene perciò anche le rette incidenti queste ultime. Allora tale S_4 o conterrebbe tutta la V_4 (impossibile) o ne conterrebbe una V_3 con ∞^3 rette, cioè un S_3 o una quadrica V_3^2: ∞^1 tali S_3 darebbero una V_4 con ∞^5 rette (da escludere) e ∞^1 V_3^2 non possono dare una V_4 con S_4 tangente fisso in ogni punto di V_3^2 senza che due infinitamente vicine di queste stiano in S_4, cioè senza che la V_4 stia in S_4.

Rimangono solo i primi due casi.

Il primo si presenta certo se per ogni retta r passa un piano di V_4 (cono γ_P per tutt'i suoi punti): e in questo caso la V_4 è luogo di ∞^2 piani.

Anzi è questo l'unico caso in cui i coni γ_P si riducono a piani, perchè nel caso 2°, cioè di un piano variabile con P su r, tutto il loro S_3 starebbe in V_4 che conterebbe ∞^5 rette.

Riassumendo: escluse le V_4 luoghi di ∞^2 piani sono possibili i soli casi 1° e 2° in cui i coni γ_P non siano piani.

Ma nel caso 2°, poichè gli S_4 tangenti nei punti P di r contengono tutti uno S_3, ad individuarli bastano i punti di una punteggiata (proiettiva a quella dei punti di contatto): sicchè (n. 1) quegli S_4 formano fascio in uno S_5, tangente a V_4 in tutt'i punti di r.

Questo S_5 conterrebbe ∞^2 rette di V_4 (le generatrici dei coni con vertice su r) costituenti una V_3 che non può appartenere ad S_5 (che conterrebbe, essendo tangente in ogni punto di r a V_4, due V_3 infinitamente vicine, e quindi tutta la V_4).

Escluso il caso che la V_3 sia un S_3 (perchè V_4 conterrebbe almeno ∞^5 rette) potrà appartenere ad S_4 e due S_4 infinitamente vicini dovranno in tal caso appartenere ad S_5. Si avrebbero quindi ∞^1 tali V_3 (negli S_4 di una sviluppabile) che riempirebbero la V_4. Ciò è possibile solo se quelle V_3 contengono ∞^3 (e non solo ∞^2) rette cioè se sono quadriche V_3^2 di S_4 (situati negli S_5 di una sviluppabile).

Però questo caso (pur possibile) non risponde all'ipotesi in esame perchè i coni γ_P relativi ad r sono i coni segati sulla V_3^2 contenente r dagli S_3 tangenti; e tutti questi coni hanno lo stesso piano tangente lungo r (il piano polare di r rispetto a V_3^2).

4. Le V_4 luoghi di ∞^1 V_3^2 di S_4. — Per quanto precede rimane da esaminare la sola ipotesi che i coni γ_P relativi ad r (non piani) abbiano lungo r lo stesso piano tangente.

Un cono γ_P (essendo luogo di tangenti tripunte) coincide con il cono delle tangenti tripunte o fa parte di esso; ed è quindi (n. 2) intersezione di coni quadrici. Escluso che sia un piano rimangono *a priori* possibili tre ipotesi:

a) i coni γ_P sono coni quadrici;

b) i coni γ_P sono cubici (razionali);

c) i coni γ_P sono del 4° ordine (ellittici).

Solo nella prima ipotesi i coni γ_P appartengono ad S_3; nelle altre appartengono agli S_4 tangenti.

Nell'ipotesi *a*) può supporsi o che due coni generici γ_P abbiano almeno un punto comune o che ciò non accada.

Ma se due γ_P, quindi i loro S_3, avessero un punto comune considerati quattro S_3 relativi ad una retta r (passanti tutti per il piano tangente ai γ_P lungo r) essi starebbero al più in S_6 e in questo starebbero pure tutti gli altri S_3, quindi vi starebbe la V_4 stessa, contro l'ipotesi $n \geq 7$.

Ne segue che due γ_P generici non hanno punti comuni. Allora fissato P si considerino γ_P e i coni aventi vertici nei suoi punti: si hanno ∞^3 rette che non possono riempire V_4 (altrimenti due coni generici avrebbero almeno un punto comune); esse ricoprono quindi una V_3 che è necessariamente una quadrica (di S_4).

Se i coni γ_P *sono quadrici la* V_4 *è luogo di* ∞^1 *quadriche* V_3^2 *di* S_4.

5. La V_4^5 di S_7 di Gaetano Scorza. — I coni γ_P appartengano agli S_4 tangenti a V_4; gli S_4 relativi ai punti di una retta r stanno in un S_6 e vi descrivono un cono quadrico Γ_r (avente per vertice il piano tangente ai γ_P lungo r). Se due coni generici non avessero punti comuni per il ragionamento in fine al n. precedente si avrebbe una V_4 luogo di V_3^2 (quindi i coni γ_P sarebbero del 2° ordine). Dunque due coni γ_P hanno sempre punti comuni. Ciò porta che preso un punto Q fuori dello S_6 tangente lungo r il cono γ_Q, dovendo incontrare gli ∞^1 coni relativi ai punti di r (e non potendo incontrare r, che è generica), sta nello S_7 di S_6 e di Q. Ma allora preso un qualsiasi punto R di V_4 il cono γ_R dovendo incontrare tanto i γ_P relativi ad r quanto γ_Q sta in quello S_7; e perciò tutta la V_4 sta in S_7.

Se i coni γ_P fossero del 4° ordine (secondo l'ultima ipotesi) in ogni punto P di r vi sarebbe un iperpiano, cioè un S_6 contenente tutto l'intorno del 1° ordine di r su V_4 e l'intorno del 2° ordine di P: questo S_6 non potrebbe essere che quello contenente Γ_r il quale conterrebbe l'intorno del 2° ordine di ogni punto P di r su V_4; cioè tutta la V_4 starebbe in S_6. È così scartata l'ipotesi *c*).

Non rimane dunque che il caso in cui i γ_P sono del 3° ordine (razionali).

Sul cono Γ_r oltre la schiera degli S_4 tangenti a V_4 nei punti di r esiste una seconda schiera di $\bar{S}_4$. Un S_4 tangente in P e un $\bar{S}_4$ si tagliano in uno S_3 che sega γ_P in due rette coincidenti in r e in una retta residua.

In ogni $\bar{S}_4$ vi sono quindi ∞^1 rette di V_4 incidenti r. Per trovarne il luogo osserviamo che il piano tangente fisso ai coni γ_P lungo r può individuarsi con i punti φ, ψ e con un punto θ (indipendente da v) e lo S_4 tangente in $\varphi + v\psi$ può individuarsi con i punti

$$\varphi, \psi, \theta, \quad \varphi_1 + v\psi_1, \quad \varphi_2 + v\psi_2$$

(essendo $\varphi, \psi, \theta, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ indipendenti perchè individuano lo S_6 di Γ_2). Un $\bar{S}_4$ dell'altra schiera su Γ_r è quindi quello dei punti

$$\varphi, \psi, \theta, \varphi_1, \psi_1.$$

Una generatrice di γ_P può individuarsi con il vertice $x = \varphi + v\psi$ e con un punto y, variabile sopra una C^3 gobba, che per esempio per $\lambda = 0$ dia luogo al punto ψ ed abbia per tangente la retta $\psi\theta$, cioè, per essere nello S_4 tangente in x

$$y = \psi + \lambda\theta + \lambda^2\zeta_1(\lambda)(\varphi_1 + v\psi_1) + \lambda^2\zeta_2(\lambda)(\varphi_2 + v\psi_2),$$

essendo $\zeta_1(\lambda)$ e $\zeta_2(\lambda)$ di 1° grado in λ.

Affinchè y appartenga ad $\bar{S}_4$ dev'essere

$$\|\varphi, \psi, \theta, \varphi_1, \psi_1, y\| = 0$$

ma ciò, data l'indipendenza dei punti che individuano S_6, non può avvenire che per quel valore di λ per cui $\zeta_2(\lambda) = 0$: esso individua la retta cercata per x in $\bar{S}_4$.

Questo valore di λ non dipende affatto da v: per esso il punto y descrive una punteggiata proiettiva a quella descritta da x, quindi *il luogo cercato delle rette di* V_4 *appoggiate ad* r *e contenute in un* $\bar{S}_4$ *è una quadrica.*

Dopo ciò, prese due rette r, s incidenti in un punto A e considerati gli S_6 dei coni Γ_r, Γ_s secantisi in uno S_5 questo, passando per lo S_4 tangente in A contiene un $\bar{S}_4$ di Γ_r e uno di Γ_s, quindi contiene due schiere rigate di V_4 appartenenti ad una stessa quadrica, individuata da r, s.

Di più per due punti generici A, B di V_4 (cioè non appartenenti ad una sua retta) passano i coni γ_A e γ_B necessariamente incidenti: se C è un punto d'intersezione ed r, s sono le generatrici di γ_A e γ_B per esso, queste individuano una quadrica le cui ulteriori generatrici ($\neq r, s$) si tagliano in un punto C′ ulteriore intersezione di γ_A e γ_B: cioè due tali coni hanno sempre *due* punti comuni.

Segue da tutto questo che la V_4 è la V_4^3 di S_7 già considerata da G. Scorza.

Meccanica. — *Il superamento della barriera del suono in Aviazione.* Nota II [1] del Socio G. A. Crocco.

La resistenza ipersonora. — Nella Nota I di questo studio sono state genericamente indicate formule concettuali che consentono di calcolare l'ordine di grandezza delle spinte fornite dal *reattore*, cioè dal propulsore a reazione adatto al superamento della barriera del suono.

Qui ci proponiamo di valutare l'ordine di grandezza delle resistenze con cui queste spinte devono contrastare.

Continueremo perciò ad adottare in aviazione ipersonora i coefficenti di portanza e di resistenza usati in aviazione subsonora, C_p e C_r, definiti da

$$(13) \qquad P = C_p \rho S V^2 \quad ; \quad R = C_r \rho S V^2 ;$$

dove P è la portanza ed R la resistenza complessiva dell'aereo, in kg; S la superficie alare di riferimento, in mq; V la velocità in m/sec.

Adotteremo per il calcolo di C_p e C_r il procedimento di prima approssimazione indicato da Ackeret e sviluppato da Prandtl e Bussemann [2]; e ricorderemo che il principio generico della *superaviazione* [3] consiste nell'elevare la quota di volo sino a che la velocità *massima* dell'aereo venga a coincidere con la sua velocità *economica*. Ciò ha luogo quando la cosiddetta resistenza di *penetrazione*, che per una determinata velocità, V_o, è proporzionale alla densità, ρ, dell'aria alla quota di volo, eguaglia la resistenza di *sostentazione*, che è invece inversamente proporzionale a tale densità. Se ne ricava un valore di ρ che definisce la *quota economica*; cioè quella di minima resistenza per la velocità V_o.

In Aviazione ipersonora il coefficiente di portanza in prima approssimazione si può esprimere con $C_p = s \cdot \alpha$; dove α è l'angolo d'incidenza dell'ala, in radianti, supposto piccolo (sen $\alpha \simeq \alpha$; cos $\alpha \simeq 1$); ed s un *coefficiente di sostentazione* che sarà tra poco precisato. Cosicchè la resistenza di sostentazione prende la forma $R_S = s \alpha^2 \rho S V^2$; mentre la resistenza di penetrazione risulta dalla resistenza della fusoliera, che in prima approssimazione può ritenersi sensibilmente quadratica [4]; più la resistenza di attrito delle ali, che appare anch'essa in prima approssimazione sensibilmente quadratica [5];

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

(2) A. Busemann, *Sostentazione aerodinamica ipersonora.* Relazione presentata al Convegno Volta dell'Accademia d'Italia, 1935.

(3) G. A. Crocco, *Flying in the Stratosphere.* « Aircraft Eng. », July 1932.

(4) Th. De Karman, *La Resistenza nei fluidi compressibili.* Relazione presentata al Convegno Volta dell'Accademia d'Italia nel 1935.

(5) Busemann, Nota citata.

e più infine la *resistenza d'onda* delle ali, dipendente dallo stesso coefficiente s e che scriveremo con $hs\rho SV^2$. I coefficienti s ed h sono dati da

$$(14) \qquad s = \frac{2}{\sqrt{M_o^2 - 1}} \quad ; \quad h = \frac{4}{3}\delta^2 ;$$

essendo M_o il *numero di Mach* relativo alla velocità V_o alla quota di volo e δ lo spessore relativo di un profilo d'ala circolare biconvesso, cioè il rapporto tra lo spessore e la corda dell'ala.

La resistenza di penetrazione risulterà così della forma $R_P = (r + hs)\rho SV^2$; dove r rappresenta la somma delle resistenze unitarie di fusoliera e d'attrito; e $r + hs$ potrà dirsi *coefficiente di penetrazione* ipersonoro.

Poichè il peso dell'aereo, Q, per la piccolezza dell'angolo α potrà ritenersi in volo orizzontale $Q = P = s\alpha\rho SV^2$, la resistenza totale assumerà in prima approssimazione la espressione

$$(15) \qquad R = R_P + R_S = \left(r + hs + \frac{C_p^2}{s}\right)\rho SV^2 ;$$

che riproduce con nuovi simboli quella già indicata nei citati studi e che risulta *minima* per i valori di C_p e di ρ definiti da

$$(16) \qquad C_p^2 = s(r + hs) \quad ; \quad \rho V_o^2 = \frac{Q}{SC_p} ;$$

i quali permettono di adeguare la spinta del reattore alla resistenza minima di volo; che risulterà *doppia* della resistenza di penetrazione.

* * *

Per compiere questo adeguamento in volo orizzontale basterà quindi eguagliare il peso con la portanza e la spinta con la resistenza; esprimendole relativamente coi coefficienti indicati nella Nota I per quanto riguarda il reattore e con quelli di questa Nota per quanto riguarda l'aereo. Se ne ricaverà l'eguaglianza dei coefficienti adimensionali

$$(17) \qquad \psi\omega_o = C_p S \quad ; \quad C_F\omega_o = C_r S ;$$

che risulta indipendente da ρ, S e V_o

In particolare la seconda delle (17) nel caso della quota economica darà

$$(18) \qquad C_F \frac{\omega_o}{S} = 2(r + hs) ;$$

dalla quale emerge che, essendo la resistenza minima dell'aereo determinata dai coefficienti r, h, s e la spinta unitaria C_F del reattore egualmente determinata dalla condizione di massima temperatura nella camera di combustione, risulterà altresì determinato il rapporto $\omega_o : S$ tra la luce d'entrata dell'aria nel reattore, quale definita nella Nota I, e la superficie dell'ala. Lo chiame-

remo *rapporto di imboccatura*; osservando che, a differenza di quanto avviene col motore alternativo, esso svincola il problema in questione dalla considerazione della potenza del reattore. Basta cioè poter conseguire il suddetto rapporto per risolvere in ogni caso il problema.

Come interessante esempio numerico prenderemo in esame i valori di C_F già calcolati nella Nota I per un tuboreattore con $\boxed{T_C} = 1000°$ ed un autoreattore con $\boxed{T_A} = 1500°$ e li porremo in relazione coi valori di $(C_r)_{min} = 2(r + hs)$ di un ipotetico aereo ipersonoro di caricó alare $Q : S = 260$ kg/mq; con ali a profilo circolare biconvesso di spessore relativo $\delta = 0{,}05$; e dove quindi sia $h = 1 : 300$. In quanto a r, supponendo una fusoliera ad ogiva Karmann [6] con sezione maestra pari ad un settimo della superficie alare con coefficiente 0,056 e per l'attrito prendendo il coefficiente 0,003 dato da Busemann [7], si otterrà il valore $r = 0{,}011$.

Risultano allora le cifre *arrotondate* riportate nel quadro seguente per vari numeri di Mach da 1 a 4, a quote stratosferiche ove sia $T_0 = 225°$ e la velocità del suono di 300 m/sec. Nel quadro sono calcolati i coefficienti s di sostentazione, C_p di portanza ottima, C_r di minima resistenza, eguali cioè a $2(r + hs)$; $C_r : C_p$ di finezza; le densità ρ delle rispettive quote economiche e le quote corrispondenti; ed infine, per il turbo e per l'autoreattore a temperature massime di 1000 e 1500 gradi assoluti, i rispettivi coefficienti C_F, e gli inversi dei rapporti di imboccatura, $S : \omega_0$.

Aereo							Reattore			
							Turbo $\boxed{T_C} = 1000°$		Auto $\boxed{T_A} = 1500°$	
M_0	s	C_p	C_r	C_r/C_p	$\rho \times 100$	Z km	C_F	S/ω_0	C_F	S/ω_0
1	—	—	0,05	—	—	—	1,57	31,5	1,35	27
1,2	3	0,25	0,042	0,168	0,85	20,5	1,24	29,5	1,25	29,7
1,5	1,78	0,174	0,034	0,195	0,75	21,5	0,90	26,5	1,12	32,8
2	1,155	0,131	0,030	0,229	0,55	23,0	0,55	18,3	0,90	30,0
2,5	0,887	0,112	0,028	0,250	0,42	25,0	0,33	11,6	0,70	25,0
3	0,708	0,097	0 0265	0,273	0,32	27,0	0,16	5,8	0,51	18,9
4	0,516	0,081	0,0255	0,315	0,22	29,0	-	- -	0,26	10,2

(6) Nota citata a p. 1006.
(7) Nota citata a p. 1006.

Dal quadro emergono i minori rapporti $\omega_o : S$, richiesti dall'autoreattore ai forti numeri di Mach, di fronte a quelli richiesti dal turboreattore; che non appare adoperabile per $M = 4$. Se ne conclude altresì che, ammessa una temperatura massima nella camera di combustione, la possibilità pratica di un'aviazione ipersonora dipende dalla soluzione di un problema costruttivo dimensionale.

Possiamo anche valutare l'ordine di grandezza dei consumi di combustibile. A questo scopo osserveremo che, se $\rho g \omega_o V_o$ è la portata dell'aria entrante in kg/sec, che viene riscaldata di ΔT gradi centigradi, con un calorico specifico c_p, supposto costante, le calorie necessarie al secondo saranno $\rho g \omega_o V_o c_p \Delta T$. Dividendo per QV_o si otterranno le calorie necessarie per kg. di peso dell'aereo e per metro di percorso. La sopraelevazione ΔT si esprimerà per mezzo della (4) della Nota I, dove si porrà al posto di τ il valore dedotto dalla relazione $2 g E c_p \tau = V_o^2$; che fornirà il prodotto $g c_p \Delta T = \frac{(\sigma + \varepsilon) V_o^2}{2E} \left(1 + \frac{T_o}{\tau + \vartheta}\right)$. Ricordando allora che il peso Q è esprimibile con $\rho \omega_o V_o^2 \psi$; e supponendo eguale a 10.000 calorie il potere calorifico del combustibile; si otterranno così, in espressione adimensionale, i consumi in kg. di combustibile per kgmetro percorso. Li trasformeremo in kg. consumati per tonnellata-chilometro, $\mathfrak{C}$.

Si avrà in definitiva

$$\mathfrak{C} = \frac{100}{E} \frac{\sigma + \varepsilon}{2\psi} \left(1 + \frac{T_o}{\tau + \vartheta}\right) \tag{19}$$

quale consumo di combustibile di un aereo ipersonoro propulso da turboreattore; da cui si otterrà, facendovi $\vartheta = 0$, la corrispondente espressione per un aereo propulso da autoreattore. La velocità dell'aereo è implicita nei simboli adoperati.

Nella precedente espressione si potrà calcolare il secondo fattore per mezzo della

$$\frac{\sigma + \varepsilon}{2\psi} = \frac{C_r}{C_p} \left[1 + \frac{1}{2} \left(C_F + \frac{\varepsilon}{C_F}\right)\right], \tag{20}$$

agevolmente attenibile dalle espressioni di σ e di ψ; la quale mostra che nel determinare il minimo consumo si dovrebbe a rigore tener conto anche del rapporto d'imboccatura, implicito nel coefficiente C_F. Infatti se si deriva la (20) rispetto a C_p, supponendo C_F disponibile, si ottiene una condizione di minimo non soddisfatta dalla (16), cioè dalla $C_p^2 = s(r + hs)$, innanzi determinata nell'ipotesi di C_F prestabilito. Ma agevolmente si riconosce che l'influenza di C_F e quindi del rapporto d'imboccatura non è notevole; e che pertanto qualora esso possa rimanere a disposizione del costruttore, si può ritoccare la espressione di C_p ottimo mediante un addendo facilmente formulabile.

Applicando ora la (19) e la (20), dove i valori di $C_r : C_p$ e di C_F si deducano dal quadro innanzi riportato; ed i valori di τ e ϑ dal quadro della

Nota I; si otterrà, a titolo di esempio di ordine di grandezza dei consumi, per $M_o = 2$ con turboreattore la cifra di 129 grammi per tonnellata-chilometro; e per $M_o = 3$ con autoreattore la cifra di 136 grammi per tonnellata chilometro. Sono cifre non molto lontane da quelle sperimentate in crociere di aerei subsonori, che spesso risultano superiori a 100 grammi.

In conclusione le velocità aviatorie ipersonore si riconfermano, oltre che possibili, anche economicamente praticabili: purchè si riesca ad attuare le calcolate imboccature e si provveda al refrigeramento artificiale delle cabine, lambite da uno strato limite di temperatura τ [8], come è stato indicato sin dal 1931 [9].

Ma queste possibilità nulla ci insegnano sul punto cruciale dell'Aviazione ipersonora che rimane pur oggi nell'atto stesso del superamento della barriera del suono; cioè nell'attraversamento della zona di passaggio tra le due Aviazioni, denominata appunto *zona transonora.*

Le difficoltà che si prevedono in questa zona, che può ritenersi compresa tra $M_o = 0{,}8$ ed $M_o = 1{,}2$, furono prospettate nel 1935 al Convegno Volta *Sulle Alte Velocità in Aviazione*, tenuto dalla soppressa Accademia d'Italia [10]. Si vide allora che in quella zona si va incontro ad un notevole *inasprimento di resistenza,* che poi si attenua; ad un imprecisabile *collasso di portanza*, che poi riprende; e ad una pericolosa *instabilità di equilibrio,* che poi ritorna normale.

La zona transonora è stata esaminata sperimentalmente su modelli al disotto di $M_o = 1$ e teoricamente al disopra; ma i risultati delle due indagini non sono tra loro collegabili anche perchè da un lato difetta il metodo sperimentale stesso e dall'altro la teoria matematica di prima approssimazione.

Le sole nozioni attendibili nel campo transonoro sono quelle balistiche sui proietti al vero, le quali rivelano un massimo di resistenza all'altezza della velocità del suono che con ogive affinate supera solo dell'85 per cento la resistenza per $M_o = 3$. Anche la teoria prevede l'esistenza di un massimo per i corpi di rivoluzione di forme fini; mentre nulla risulta su tale esistenza per i profili alari, i quali da una parte e dall'altra della velocità del suono sembrano condurre a resistenze asintotiche verso l'infinito. Solo presuntivamente si può colmare tale incertezza; come ha fatto Relf nella sua lettura alla Reale Società di Londra [11] e come facciamo ora noi stessi assegnando a C_r minimo, per la velocità del suono, il valor finito 0,05, doppio di quello calcolato per $M_o = 3$.

(8) L. Crocco, « Rend. Acc. Lincei », vol. XIV, fasc. 2; « Aerotecnica », 1932, vol. XII, p. 181.

(9) *Flying in the stratosphere.* Nota citata.

(10) « Rendiconti del Convegno Volta dell'Accademia d'Italia », tenuto nel 1935 *Sulle Alte Velocità in Aviazione.*

(11) Relf, *Recent Aerod. developements.* Flight, June 6th, 1945.

Con tale assunzione il quadro precedente assegna per $M_o = 1$, in corrispondenza del massimo C_F ottenibile per il turboreattore, un rapporto di imboccatura 1 : 31,5; cioè più favorevole di quello richiesto da un autoreattore per $M_o = 2$. Cosicchè la resistenza transonora di un aereo appare superabile dal punto di vista della *resistenza*.

Ma rimane l'incognita della *portanza*. Infatti la deficienza di portanza sperimentalmente constatata si può rappresentare tracciando un grafico del coefficiente s, che ne è la derivata rispetto all'incidenza ed ha quindi il significato di un *potere portante*. Ebbene: nel mentre la teoria linearizzata di Prandtl tenderebbe ad assegnare ad s un valore oltre ogni limite, da una parte e dall'altra della verticale del suono, come se fisicamente dovesse riscontrarsi un massimo intorno ad $M_o = 1$, invece sperimentalmente questo massimo si raggiunge assai prima della velocità del suono, cioè verso $M_o = 0{,}8$; e subito dopo il potere portante s precipita ostinatamente verso lo *zero* in tutte le esperienze sinora eseguite a velocità subsonore [12], per riprendere a velocità ipersonore. Sembra quindi che il potere portante delle ali debba annullarsi prima di aver raggiunto la velocità del suono; ma non si sa ancora precisare la estensione e la entità del collasso di portanza che ne consegue: e che richiama alla mente un burrone alpino o un crepaccio di ghiacciaio. Il problema transonoro cambia segno, da questo punto di vista; e la sua immagine metaforica non è più la *scalata* di una barriera, ma il *salto* di una buca.

Vi è un assetto di volo per il quale si elimina la necessità della portanza; ed è la *picchiata verticale*. In tale assetto, usufruendo della massima componente verticale del peso dell'aereo, si dispone cioè della forza sufficiente a superare la resistenza senza richiedere portanza. Ciò è stato tentato da arditi piloti, ma con varia fortuna; perchè qualcuno vi ha lasciato la vita. Nel fatto insorge la terza difficoltà innanzi indicata: l'instabilità di equilibrio. Essa è dovuta alla concomitanza di varie cause, tutte connesse colla formazione dell'onda d'urto transonora, sulla parte poppiera del dorso alare. L'aereo diviene improvvisamente pesante di testa ed indocile; perchè i piani sono presi nella conseguente scia vorticosa e l'onda si sposta lungo il dorso in modo imprevedibile. Cosicchè occorrono speciali dispositivi equilibratori, non ancora di uso corrente. In queste condizioni il superamento della barriera del suono, pur evitando il salto di portanza, diviene una manovra acrobatica pericolosa: e tutto il problema dell'aviazione ipersonora attende che la scienza aerodinamica venga a dischiuderle la porta d'ingresso.

Nella prossima Nota III indicheremo un modo, che crediamo nuovo, di girare l'ostacolo. Poichè cioè le ali sono la causa unica di tali difficoltà, dimostreremo la possibilità concettuale di una aviazione senza ali.

(12) Vedi RELF, loco citato e FELDMANN, *Effets de la compressibilité*, Interavia. Avril 1946, p. 60.

Fisica. — *Sulla polarizzazione della luce del cielo.* Nota III [1] del Corrisp. A. Carrelli.

§ 1. Verifica dell'anomalia prevista da Hurion. – È conseguenza molto importante della teoria di Hurion quella di prevedere nell'intorno dei punti neutri una distribuzione anomala nella direzione del vettore polarizzazione. Per procedere ad una verifica di tale questione, in primo luogo ci siamo preoccupati di ricercare la distribuzione effettiva sperimentale di tale vettore. Il metodo adoperato per ottenere questo risultato è quello che abbiamo già esposto a proposito della determinazione del vettore polarizzazione; e così a Meta di Sorrento, profittando del fatto che era possibile

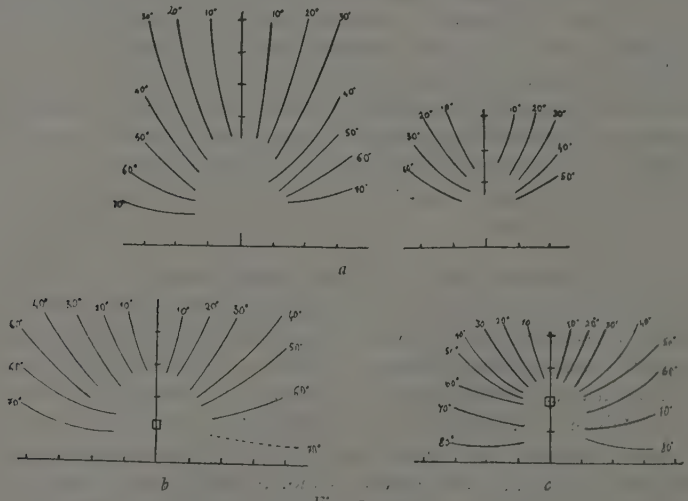


Fig. 1.

a. – 27-8-1943. $9^h.45$. – $\varphi_0 = 0$. P. di B.; 3-9-1943. P. di A.
b. – 19-9-1943. $7^h.20$. – P. di A. $\varphi_0 = 4°$.
c. – 18-9-1943. $7^h.5$ – P. di A. $\varphi_0 = 1° = 3°$.

usufruire di una posizione per la quale si vedeva largo tratto dell'orizzonte marino, per varie giornate e per varie altezze solari, è stata determinata la direzione di tale vettore, quando si riscontra l'esistenza del punto neutro; e quindi è stato possibile tracciare le *curve isocline* che dànno nell'intorno del punto d'Arago o di Babinet i punti nei quali la direzione del vettore è la stessa. Naturalmente l'assieme dei dati che permette di tracciare le

(1) Presentata nella seduta del 15 giugno 1946.

curve di cui si parla, si deve ricavare sperimentalmente in un tempo piuttosto breve, ed in effetti quando la polarizzazione nell'intorno è notevole, non ci è stato difficile costruire rapidamente le carte. Alcune delle numerose serie di misure fatte sono riportate in fig. 1, le quali dunque dànno la distribuzione della direzione del vettore di polarizzazione nell'intorno dei punti neutri Arago e Babinet.

Fissato in tal modo l'andamento del vettore polarizzazione nell'intorno dei punti neutri, viene così a determinarsi in che modo in tale zona si ha l'inversione della polarizzazione. L'andamento sperimentale è evidentemente anomalo; ci è stato possibile anche determinare l'entità dell'anomalia procedendo nel modo seguente: per un determinato valore dell'altezza solare (e cioè di φ_0), per il quale era noto l'andamento sperimentale (perchè

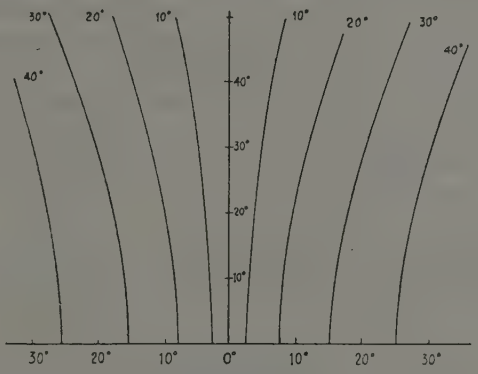


Fig. 2.

avevamo misure già fatte), si è proceduto alla determinazione teorica della posizione del vettore per i vari punti del cielo in base alla formula riportata nella Nota I; in fig. 2 è riportato l'andamento che, come vedesi, è molto diverso da quello sperimentale. Ma il punto molto importante della teoria di Hurion è che essa prevede quale dovrebbe essere l'andamento del vettore per effetto della presenza del cerchio diffondente, e quindi dei punti neutri; noi abbiamo proceduto al calcolo di tale anomalia relativamente ad una posizione del punto neutro che corrisponde alla posizione che si è riscontrata sperimentalmente e precisamente alla posizione della fig. 1 *c*. Ora, conoscendo teoricamente quale dovrebbe essere la posizione del vettore, dalla determinazione empirica della posizione quale risulta in realtà è possibile costruire le linee che uniscono i punti per i quali si ha la stessa differenza fra il valore teorico e quello sperimentale, e cioè le *isonomale*. Nella fig. 3, nella quale si usano coordinate diverse da quella della fig. 1, si riportano appunto queste *isoanomali sperimentali*; l'importante è che basandosi sulla teoria di

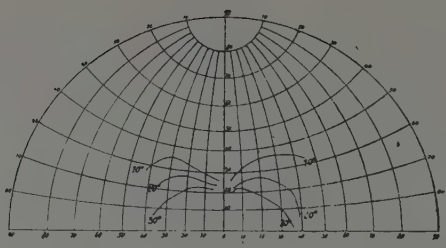
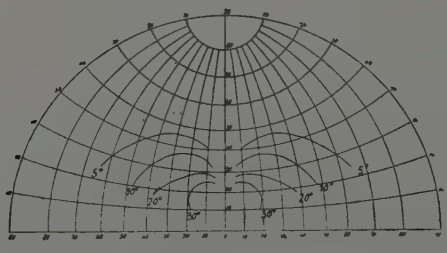


Fig. 3.

Hurion, si possono anche costruire le *isonomale teoriche*, e questi risultati sono riportati in fig. 4. Come vedesi, può dirsi che l'andamento generico del vettore nell'intorno del punto neutro è perfettamente previsto dalla teoria dell'anello; solo che la regolarità prevista non può considerarsi come pienamente riscontrata (in effetti l'andamento del vettore, specie nei punti inferiori della fig. 3, presenta diversità rispetto a quella prevista); ciò è perfettamente interpretabile ricordando che si è ammesso un anello omogeneo, mentre con ogni probabilità si ha da fare con una zona più o meno alta di densità variabile.

§ 2. Polarizzazione e diffusione. – La teoria della doppia diffusione e dell'anello, da quanto precede, ci sembra abbastanza bene soddisfatta



a *b*

Fig. 4.

a. – Per valori di φ_0 fra 39° e 48°.
b. – Per valori di φ_0 fra 61° e 68°.

dall'esperienza nei due punti critici principali: si osserva infatti che la luce depolarizzata, e cioè la luce che si raccoglie quando il nicol è orientato in modo da prendere la componente del vettore elettrico contenuto nel piano Sole - punto osservato - osservatore, non si presenta tanto bleu come dovrebbe essere se fosse generata da una doppia diffusione e cioè questa luce dovrebbe seguire la legge λ^{-8}. A questa obiezione è da osservare

quanto segue: la legge ora ricordata sarebbe da considerare come effettivamente giusta qualora la diffusione fosse da attribuire essenzialmente alle particelle di aria, ma al processo di diffusione prende certamente parte anche il pulviscolo atmosferico. Ora, gli studi compiuti dal Mie su tali fenomeni, quando nel processo intervengono particelle piuttosto grosse, hanno portato a stabilire che quando queste particelle hanno un diametro non molto piccolo, quale quello che può benissimo ammettersi per le particelle del pulviscolo atmosferico, la luce diffusa ha una distribuzione d'intensità molto diversa dalla legge dell'inverso della quarta potenza di λ. Di qui si ricava quindi che se l'intensità della luce del cielo è notevole, se cioè in una giornata vi sono condizioni per le quali v'è grande luce diffusa, ciò significa che v'è molto pulviscolo, e quindi dev'essere maggiore la deviazione dalla legge di Lord Raileigh, e cioè quando aumenta l'intensità della luce

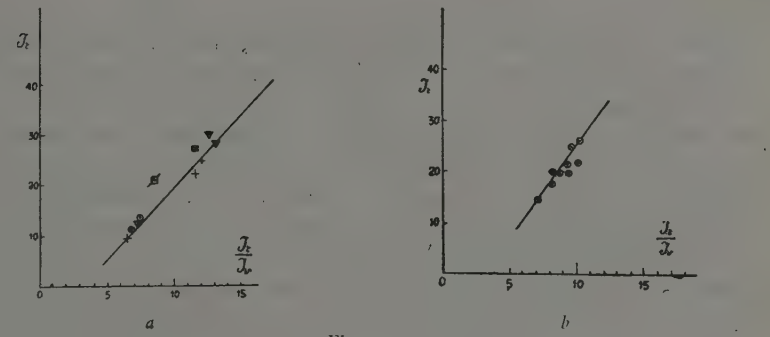


Fig. 5.

nel rosso, il rapporto fra luce rossa e bleu deve aumentare. Contemporaneamente in conseguenza di questa grande intensità di luce diffusa, è più cospicuo l'effetto della depolarizzazione; e cioè quando è notevole l'intensità del rosso deve diminuire la polarizzazione. Le misure compiute in tale direzione hanno confermato pienamente queste previsioni: in effetti misurando l'intensità della luce rossa e bleu per un determinato punto nel piano del Sole ($\lambda = 0$, φ variabile) per Sole quasi alla stessa altezza, e riportando i rapporti fra queste due intensità come ascisse e l'intensità della luce rossa come ordinate, si ottiene l'andamento riportato in fig. 5 *a* e *b*. Analogamente nelle stesse condizioni è stato misurato il grado di polarizzazione e riportando tale valore in funzione dell'intensità della luce rossa si ottiene un andamento che corrisponde perfettamente al previsto. Le curve della fig. 6 *a* e *b* si riferiscono a tali risultati.

§ 3. Determinazione della polarizzazione. – Secondo la teoria elementare della diffusione della luce del cielo la polarizzazione per esempio, nel

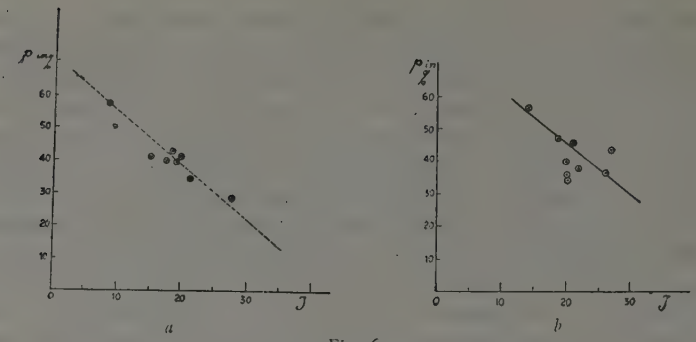


Fig. 6.

a. – Per φ_0 fra 31° e 48°.
b. – per φ^0 fra 61° e 68°.

piano del Sole dovrebbe essere totale ed indipendente dall'altezza del punto, ma per il processo della doppia diffusione, come già si è fatto cenno, si ha soltanto una polarizzazione parziale variabile e con un massimo a 90° dal Sole. Ora l'atmosfera deve considerarsi evidentemente come eterogenea e quindi da momento a momento deve immaginarsi distribuzione diversa di masse d'aria, e queste masse d'aria con diversità di concentrazione di pulviscolo, conseguentemente devono presentare una polarizzazione variabile a seconda delle condizioni. Sono state condotte misure di polarizzazione nel piano del Sole in diverse giornate estive, con la stessa altezza solare, ed i risultati sono riportati in fig. 7. Da essi si ritrae in primo luogo una diversità di valore del grado di polarizzazione, già messa in evidenza da varie misure, ma il punto interessante da notare è che la distribuzione della polarizzazione è variabile da giorno a giorno in maniera molto cospicua, e si riscontra anche uno spostamento del massimo della polarizzazione, il che dimostra la variabilità della distribuzione delle particelle del pulviscolo, particelle che contribuiscono efficacemente al fenomeno della doppia diffusione e quindi producono la depolarizzazione. L'attribuire a queste particelle tale effetto è giustificato a nostro parere dal fatto che la depolarizzazione cresce allontanandosi dal Sole, ed anche per punti per i quali le altezze sono piuttosto basse; quando cioè si hanno processi di diffusione che derivano dagli strati bassi dell'atmosfera, dove cioè è notevole la quantità di pulviscolo. Misure eseguite in varie giornate con il Sole all'orizzonte dovrebbero dare per posizioni lontane dal Sole un grado di polarizzazione più elevato perchè in tali condizioni la polarizzazione è data

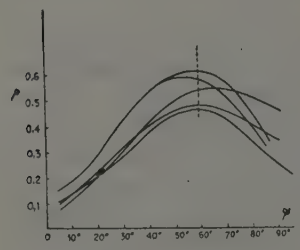
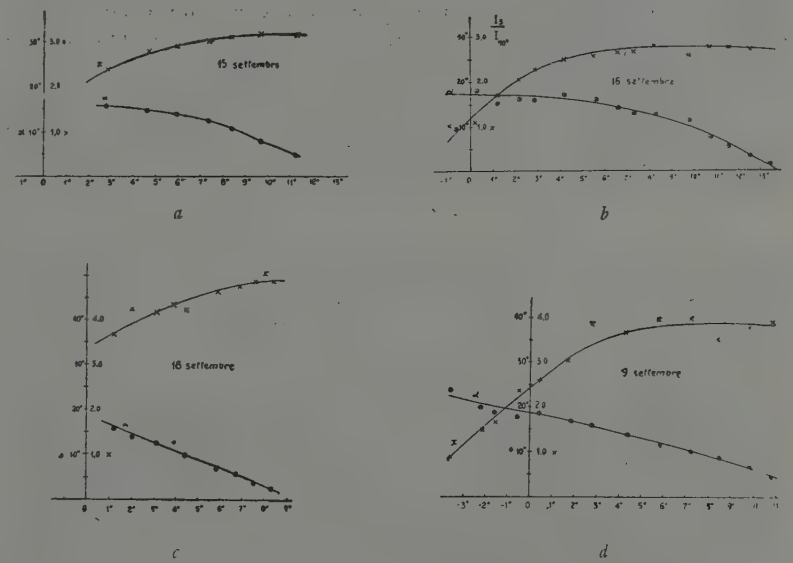


Fig. 7.

dalla diffusione di particelle d'aria per le quali è da prevedere l'omogeneità maggiore.

È da osservare infine che il punto fondamentale della teoria di Hurion è la relazione esistente fra l'altezza del punto neutro e la intensità della luce diffusa dell'anello, e cioè quando l'intensità di tale luce è maggiore, maggiore è l'altezza; si sono compiute alcune serie di misure per mettere in rilievo tale fatto, procedendo nel modo seguente; si è misurata per varie altezze solari l'intensità I_1 della luce allo zenit e l'intensità I_2 ad una altezza di 5° sull'orizzonte contemporaneamente alla misura dell'altezza α



a *b* *c* *d*

Fig. 8.

del punto d'Arago; evidentemente quanto maggiore è il rapporto $\frac{I_2}{I_1} = x$ tanto più cospicuo in quella giornata è il contributo dell'anello diffondente, e quindi in base alla teoria l'altezza del punto di Arago. Le misure sono riportate in fig. 8 per parecchie serie, e si ha però da questo primo contributo che in linea di massima v'è una relazione, per quanto non molto bene accentuata, fra le due manifestazioni.

Fisica. — *Sulle pressioni interne del Sole e sulla causa delle protuberanze solari.* Nota [1] del Corrisp. A. Amerio.

Si calcola che nell'interno del Sole la pressione che verrebbe prodotta dalla gravità, qualora questa fosse la sola causa agente, sia dell'ordine di molti milioni di atmosfere. Se però si tiene conto delle temperature che si devono trovare nell'interno del Sole, si osserva che ad esse devono corrispondere delle radiazioni molto intense le quali esercitano pressioni che, essendo la radiazione diffusa uniformemente in ogni punto in tutte le direzioni, sono date dalla densità della radiazione medesima.

Ora questa densità è enorme. La legge di Stefan-Boltzmann, qualora fosse senz'altro applicabile, ci darebbe infatti per il potere emissivo totale regnante nell'interno del Sole il valore

$$E = \sigma T^4$$

dove $\sigma = 5{,}78 \cdot 10^{-5}$ erg/sec. per il corpo nero, e quindi una pressione

$$P = \frac{\sigma}{c} T^4 = 1{,}93 \cdot 10^{-15}\, T^4 \text{ dine/cm}^2$$

dove c indica la velocità della luce.

Ma bisogna tener conto anche della legge di Kirchhoff e Clausius, secondo la quale il potere emissivo è proporzionale al quadrato dell'indice di rifrazione del mezzo ambiente e che infine la densità della radiazione è tanto maggiore quanto minore è la velocità di propagazione e perciò è direttamente proporzionale all'indice di rifrazione.

La pressione della radiazione cresce di conseguenza in ragione diretta del cubo dell'indice di rifrazione del mezzo nel quale essa viene generata e si propaga.

Detto n questo indice, la pressione esercitata sarà quindi

$$P = 1{,}93\, n^3\, T^4 \cdot 10^{-15} \text{ dine/cm}^2.$$

Secondo Eddington nell'interno del Sole la pressione di radiazione dovrebbe essere dell'ordine del 5% della pressione dovuta alla gravità. Ma basta una piccola variazione della temperatura perchè le cose cambino notevolmente, sopratutto se si tien conto che l'indice di rifrazione può essere di parecchio superiore a quello del vuoto, per cui sarebbe anche possibile che si invertissero i rapporti. Basterebbe, ad esempio, immaginare che

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1946.

nell'interno del Sole la temperatura che solo grossolanamente viene stimata in oltre 10 milioni di gradi, fosse ad esempio, di 20 milioni e che l'indice di rifrazione avesse il valore 1,5 perchè la pressione dovuta alla radiazione diventasse 60 volte maggiore e superasse quindi quella dovuta alla gravità. Si comprende quindi che si possano verificare condizioni tali che, nell'interno tanto del Sole come pure delle stelle, le pressioni esistenti possano essere di un ordine molto inferiore a quanto vorrebbe la sola gravità, e quindi da alcuni milioni di atmosfere si riducano magari a migliaia e anche meno in modo da compromettere la stabilità stessa della stella e originare le *novae*. In una mia Nota precedente (« Atti Acc. Lincei », 1946, fasc. 3°) ho calcolato le temperature ideali corrispondenti alle reazioni nucleari, ottenendo risultati che sono anche notevolmente superiori a 10 milioni di gradi.

A queste temperature corrisponderebbero sempre pressioni superiori a quelle dovute alla gravità. Queste osservazioni permettono di spiegare alcune manifestazioni nel comportamento di certe stelle e la grandiosità e periodicità delle eruzioni solari.

In vaste zone molto profonde nella massa solare si pensino reazioni nucleari del tipo noto ed immaginato da G. Gamow (« Phys. Rev. », 1938, vol. 53, p. 595) e da H. A. Bethe (« Phys. Rev. », 1939, vol. 55, p. 434) per spiegare l'origine del calore solare; le reazioni fanno aumentare la temperatura e con questo aumento esse diventano più celeri in modo che a un certo punto rapidamente le temperature diventano elevatissime, generando pressioni di radiazione superiori a quelle della gravità e cagionando quindi l'espulsione di enormi masse a velocità grandissima.

L'immane lavoro corrispondente a queste eruzioni deve produrre un raffreddamento locale e con questo l'attenuazione dell'intensità della reazione, fino a che venga ristabilito l'equilibrio nella massa solare; da questo momento la reazione riprende a poco a poco, dapprima lentamente e poi con ritmo accelerato col crescere della temperatura, fino a che si ripetano le condizioni necessarie per una nuova eruzione.

Questa si deve iniziare appena la temperatura abbia raggiunto un valore tale da generare una radiazione la cui pressione superi quella sovrastante. La concentrazione del calore nella località dove avviene la reazione e il conseguente aumento di temperatura sono favoriti dall'inefficienza dei moti convettivi nell'interno della massa solare, in una normale distribuzione delle temperature ed esternamente comincia a manifestarsi mediante le facule che precedono la formazione delle eruzioni e delle macchie solari.

Solo così mi pare che sia possibile spiegare la grandiosità, la violenza e la periodicità delle protuberanze e delle macchie solari, meglio che attribuendone la causa alla trasformazione in calore dell'energia meccanica dovuta alle differenti velocità angolari che si osservano nella massa solare.

Questa causa meccanica, oltre che insufficiente a spiegare così grandiose manifestazioni, nello stesso modo che si sono rivelate insufficienti a spiegare il calore solare tutte le fonti meccaniche di energia, difficilmente potrebbe dare ragione della periodicità del fenomeno.

Se le citate reazioni nucleari invece di svilupparsi in parti dell'astro relativamente piccole ne interessassero una parte cospicua, ne potrebbe risultare un grande aumento di splendore dell'astro, che potrebbe cambiare temporaneamente di grandezza, o persino diventare visibile se prima non lo era.

Biologia. — *Prodotto delle Tonnare della Sicilia Orientale nell'ultimo decennio e sua diminuzione nel dopo guerra.* Nota [1] del Socio A. Russo.

Sono riferiti i dati statistici, raccolti nei Registri delle *Amministrazioni delle Tonnare* della Sicilia Orientale, relativi al prodotto degli anni decorrenti dal 1934 al 1945. Tali dati, oltre a confermare la saltuarietà del rendimento annuale in ciascuna tonnara, forniscono una documentazione diretta del fenomeno, già rilevato dal D'Ancona per la pesca in genere nell'alto Adriatico, negli anni che seguirono il conflitto europeo dal 1914 al 1918.

Dai dati riprodotti nelle Tabelle che seguono, risulta, difatti, che, sia nelle *Tonnare* del *Compartimento marittimo di Messina* sia in quello di Siracusa, il numero dei tonni e di altre specie planctoniche entrate in tonnara, è diminuito negli anni 1944 e 1945 in confronto a quelli che furono catturati negli anni, che precedettero il 1943, durante il quale in tutte le tonnare della Sicilia Orientale fu sospeso il lavoro a causa degli eventi bellici, che, nel conflitto mondiale 1939-44, culminarono in Sicilia in detto anno con lo sbarco degli Alleati [2].

Sta di fatto che, nel *Compartimento marittimo di Messina*, come si rileva dalla Tabella I, nella Tonnara *Olivieri*, mentre nel 1942 si catturarono 1172 tonni per un peso di 1498 quintali, nel 1944, alla ripresa dell'industria, furono catturati 834 tonni per un peso di 875 quintali, e 174, nel 1945, del peso di 208,20 quintali; nella Tonnara *Tono* di *Milazzo*, mentre nel 1942 si ebbero 2243 tonni del peso di 2422 quintali, nel 1944 se ne ebbero

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1946.

(2) Nel *Compartimento marittimo di Siracusa*, per incursioni aeree, nel 1943, furono danneggiati gl'impianti delle tonnare di *Capo Passero*. Maggiori danni subirono quelli di *Marzameni*, dove le ciurme, prima di aver finito di collocare in mare la grande rete, furono mitragliate e bombardate, rimanendo uccisi il dirigente, Nunzio Cappucci, e due marinai. Dopo tali avvenimenti, anche le altre ciurme si rifiutarono di lavorare e le tonnare, che già erano state impiantate furono salpate di notte; per cui, nel 1943, tutte furono inattive nella *Sicilia Orientale*.

329 del peso di 350 quintali, e, nel 1945, 747 del peso di 862 quintali; nella tonnara *S. Giorgio* da 385 tonni del peso di 539 quintali nel 1942, si scese nel 1944 a 244 tonni del peso di 242 quintali, e, nel 1945, a 164 del peso di 262 quintali.

I dati forniti dalla statistica sul numero dei tonni, catturati dalle tonnare del *Compartimento marittimo di Siracusa*, confermano quelli avanti riferiti. Difatti, come si legge nella Tabella II, nella tonnara di *Marzameni*, nel 1942, si ebbero 622 tonni, mentre nel 1944 se ne ebbero 154 e 147 nel 1945; in quella di *S. Panagia*, 120 nel 1942 e 86 nel 1944 e 102 nel 1945. Per le altre tonnare non si sono avuti i dati del 1941 e 1942 (3), ma, ciò non ostante, dalle statistiche riprodotte si può constatare anche una diminuzione del prodotto nel 1944 e 45, dopo il riposo dell'industria nel 1943.

Si rileva, infatti, da tali statistiche che, nella tonnara di *Avola*, da 1543 tonni nel 1940, si passa a 421 nel 1944 ed a 224 nel 1945, mentre, in quella di *Capo Passero*, da 771 tonni nel 1940 si scende ad 82 nel 1944 ed a 110 nel 1945; in quella di *Torrauzza* da 102 nel 1940 a 39 nel 1944; in quella di *Bafuto* da 462 nel 1940 a 111 nel 1944.

Nelle tonnare, oltre ai tonni, che sono il maggiore prodotto, si catturano varie specie planctoniche, per lo più di piccola mole, note col nome di *selvaggina*.

Dai dati raccolti nelle *Amministrazioni* delle tonnare dei due Compartimenti, trascritti nelle tabelle III, IV, V, VI, VII, VIII, risulta, innanzi tutto, che le varie specie sono rappresentate da forme giovanili, come è dimostrato dal numero degli individui catturati in ciascun anno, che, in complesso, hanno peso inferiore a quello che si otterrebbe se avessero raggiunto lo stato adulto. Ad esempio, per il *Pesce spada* (Tabella III), che, adulto, può raggiungere 2 quintali, si sono avuti giovani financo di 8 Kg.; per *Alalonga* (Tabella IV), che, adulto, può raggiungere più di un quintale, si sono avuti giovani di 2 Kg. ed, in proporzione, per le specie di mole minore, come il *Palamide*, il *Capone*, il *Biso* ed altre.

Sebbene di alcune specie planctoniche non abbia potuto avere le notizie per gli anni, che precedettero e che seguirono il 1943, nel quale fu sospeso l'esercizio delle tonnare (Tab. VII), dai dati statistici, forniti dall'*Alalonga*, dal *Pesce spada* e dal *Biso*, ho potuto rilevare che in quelle del *Compartimento di Siracusa*, come per il tonno catturato adulto, nel 1944 e nel 1945, si è verificata anche una diminuzione della *selvaggina*. Nella tonnara di *Marzameni*, difatti, mentre nel 1942 si segnalarono 1187 piccole *Alalonghe* per un peso di quintali 47,65, nel 1944 solo 24 per un peso di Kg. 86 e, nel 1945, 107 per quintali 4,27.

(3) Non fu possibile avere i dati del 1941 e 1942 sul numero e peso dei tonni delle tonnare di *Avola*, *Capo Passero*, *Torrauzza* e *Bafuto*, perchè distrutti gli Atti di Archivio per eventi bellici.

Per il *Pesce spada*, anche nella tonnara di *Marzameni*, mentre nel 1942 si ebbero 82 individui del peso di quintali 36,43, nel 1944 e 1945 si ottennero rispettivamente 42 individui di quintali 16,65 e 36 di quintali 12,37. Nella tonnara di *S. Panagia*, negli stessi anni, anche per il *Pesce spada*, si nota una diminuzione dopo il riposo del 1943.

Analoga diminuzione si osserva per il *Biso* (Tabella V), che, nella tonnara di *Marzameni*, è rappresentato da 1828 individui nel 1942 e da 1236 nel 1944; mentre, in quella di *S. Panagia*, nel 1942 entrarono in tonnara 5840 individui, nel 1944 in numero di 5,000 e di 3800 nel 1945. Per mancanza di notizie sono contradittorî i dati raccolti nelle tonnare di *Avola*, *Torrauzza* e *Bafuto* (4).

Per la *selvaggina*, catturata nelle tonnare del *Compartimento marittimo di Messina*, si sono avuti i dati statistici soltanto del 1945, come si rileva dalla Tabella VIII; per cui non fu possibile fare il confronto con quelli degli anni precedenti. Da essi si deduce solo, come avanti si è detto, che i singoli individui catturati sono forme giovanili.

La diminuzione del prodotto delle tonnare della Sicilia orientale dopo un periodo di riposo, potrebbe essere determinato, fra tante cause ancora ignote, da un fenomeno rilevato, come si è detto, dal D'Ancona (5) nell'alto Adriatico, durante la guerra 1914–18, avendo constatato che la stasi della pesca locale in tale periodo ha prodotto la prevalenza di specie carnivore predatrici, fra le quali gli Squali, *specie mangianti*, che determinarono negli anni successivi l'abbassamento del quantitativo normale della pesca, costituito in gran parte dalle *specie mangiate*.

Sebbene non si abbiano prove dirette, particolarmente statistiche, su la quantità e qualità delle piccole specie distrutte da quelle carnivore di maggior mole, non è da escludere che fra quelle vi siano forme giovanili di tonni e delle altre specie planctoniche, che entrano in tonnara. I tonni, difatti, come dimostrò Sanzo (6), depongono le uova e compiono il primo sviluppo in prossimità delle coste; mentre le forme giovanili di altri *Scomberoidi*, come *Xiphias gladius*, *Auxis bisus*, *Corjphaena hippurus*, catturate dalle tonnare, furono raccolte nella stessa zona con lampada elettrica sommersa (7),

(4) Pottrebbe obbietarsi che, sia per il *tonno* sia per la *selvaggina*, in qualche anno, anteriore al 1943, il numero delle specie catturate è minore di quello segnato per il 1944 e 1945. È da rilevare però che in questi due anni, dopo un anno di riposo, la diminuzione è costante in tutte le tonnare.

(5) U. D'Ancona, *Dell'influenza della stasi peschereccia del prodotto 1914–18 sul patrimonio ittico dell'Alto Adriatico*. « R. Comitato Talassogr. italiano », Venezia 1926.

(6) L. Sanzo, *Uova e larve di tonno* (« *Orcynus thynnus Ltk.* »). « R. Acc. dei Lincei », vol. IX, ser. 6ª, 1929.

(7) A. Russo, *Studi su la pesca nel Golfo di Catania*. « Boll. di pesca, piscicultura e idrobiologia », Roma, 1931 e 1932.

potendosi dedurre che esse siano anche facile preda delle specie carnivore [8].

Valutazione della pesca con reti fisse e con reti mobili. – I dati statistici, relativi alle specie planctoniche, entrate nelle tonnare, oltre a dimostrare la diminuzione del prodotto nel 1944 e 1945, dopo un anno di riposo di tali *reti fisse*, potrebbero meglio farci valutare lo stesso fenomeno, verificatosi, negli stessi anni, nella pesca con le *reti mobili*, che richiedono giornalmente manodopera maggiore. Difatti, mentre nelle *tonnare*, dopo essere state impiantate, le varie specie vi entrano spontaneamente per essere catturate, nelle *reti mobili*, come la *Menaida* e la *Lampara*, adoperate per la pesca di altre specie planctoniche, fra le quali sono notevoli *acciughe* e *sardine*, è necessario l'opera di un personale, che, durante la guerra e nei primi anni del dopo guerra, è stato minore dei tempi normali per il richiamo sotto le armi dei più giovani pescatori.

A mio parere, la limitata manodopera non falsifica il fenomeno della diminuzione del prodotto delle *tonnare* (*reti fisse*), mentre, per le *reti mobili*, oltre all'azione distruttiva delle specie predatrici, che sarebbe la causa naturale della diminuzione, bisogna tener conto di altra causa, dovuta all'opera dell'uomo.

Altra circostanza, che fa meglio valutare la diminuzione del prodotto della pesca dopo un periodo di riposo, si è che le *tonnare* nel 1943 cessarono tutte di lavorare, non essendo state esercitate per ragioni di sicurezza, mentre la pesca con *reti mobili* fu esercitata con molte limitazioni, ma non cessò del tutto, sia nell'attuale conflitto mondiale, sia nella guerra europea 1914–18.

Gli *equilibri biologici*, che si stabiliscono nelle acque marine, studiati dal Volterra ed applicati dal D'Ancona alla pesca, a mio parere, trovano una più sicura valutazione nel prodotto delle tonnare le quali per un anno cessarono tutte di lavorare nella Sicilia Orientale.

(8) In relazione al nutrimento maggiore del normale nelle acque costiere, fanno pure di freqûente la loro comparsa, oltre agli *Squali*, i *Delfini*, che attaccano anche le reti, specialmente quando sono cariche di pesci. Non abbiamo però prove dirette per sapere se tali predatori siano aumentati nel periodo bellico anche lungo le coste siciliane, quando l'industria della pesca fu esercitata con molte limitazioni; ma che i grossi *Squali* siano attirati dal *pabulo* abbondante, che si trova vicino alle coste, è dimostrato, fra l'altro, dalla loro insolita frequenza, verificatasi dopo il terremoto di Messina nel 1908, come effetto della presenza, lungo le acque litorali, da Messina a Catania, di cadaveri umani.

In tale circostanza, nel Golfo di Catania, comparve un numero eccezionale di *Squali*, fra i quali fu catturato un grosso esemplare di *Carcharodon Rondeleti* M., nel cui ventricolo erano raccolti avanzi umani, specialmente ossa.

Tabella I.

Numero e peso dei tonni (Orcynus thynnus Ltk.*) catturati nelle tonnare del Compartimento marittimo di Messina ed in quello di Siracusa dal 1934 al 1945.*

(Compartimento marittimo di Messina).

Anno	Tono		S. Giorgio		Oliveri		S. Lucia		Caldera		Salicà	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
1937	980	1.700	258	241	192	264	138	182	—	—	138	182
1938	850	1.200	570	650	1.106	1.139	190	240	—	—	non calata	
1939	930	1.345	260	298	366	577	non calata		—	—	—	—
1940	1.011	1.475	483	707	477	758	—	—	—	—	—	—
1941	1.980	2.574	257	332	547	758	—	—	—	—	—	—
1942	2.243	2.422	385	539	1.172	1.498	—	—	—	—	—	—
1943	non calata		non calata		non calata		—	—	—	—	—	—
1944	329	350	244	242	834	875	—	—	—	—	—	—
1945	747	862	164	262	174	208	—	—	40	32	2	3

Tabella II.

(Compartimento marittimo di Siracusa).

Anno	Marzameni		S. Panagia		Avola		C. Passero (gran. picc.)		Torrauzza		Bafuto	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
1934	190	120	150	100	394	194.65	577	514.47	150	100	450	600
1935	400	800	500	242	650	414.95	1666	1912	143	65	452	725
1936	191	150	244	101.14	90	48.11	696	344,25	130	45.23	238	103
1937	543	512.47	433	271.49	702	462.61	1949	155071	110	58	730	442.87
1938	215	146.41	502	423.39	532	273.91	447	431.46	94	60	304	188.92
1939	102	51.71	404	309.05	362	150.49	247	139.50	68	49	144	66
1940	835	698.35	227	193.23	1543	702.81	771	562.24	102	77.07	462	230.80
1941	143	123.21	74	58.53	—	—	—	—	—	—	—	—
1942	622	523.21	120	105.38	—	—	—	—	—	—	—	—
1943	non calata		non calata		non calata		non calata		non calata		non calata	
1944	154	124.53	86	65.35	421	392.88	82	106	39	14.91	111	91.02
1945	147	121.53	102	56 36	224	135.65	110	87.50	—	—	—	—

Tabella III.

Numero e peso delle specie planctoniche catturate nelle Tonnare del Compartimento marittimo di Siracusa dal 1934 al 1945.

XIPHIAS GLADIUS L.

Anno	Marzameni		S. Panagia		Avola		C. Passero		Torrauzza		Bafuto	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
1934	11	—	—	—	38	13.49	—	—	—	—	—	—
1935	—	—	41	9.18	33	11.35	—	—	8	1.50	—	—
1936	11	5.00	66	31.18	10	3.74	18	8.00	15	2.74	25	9.00
1937	24	13.73	55	28.79	48	17.05	130	59.66	18	2.25	11	3.07
1938	15	5.93	63	32.55	42	15.56	295	125.84	9	2.01	38	7.61
1939	12	4.84	77	47.38	472	18.09	135	45.28	16	4.13	—	—
1940	66	25.63	58	26.31	—	—	—	—	—	—	—	—
1941	32	13.27	42	18.35	—	—	—	—	—	—	—	—
1942	82	36.43	62	27.65	—	—	—	—	—	—	—	—
1943	non calata		non calata		non calata		non calata		non calata		non calata	
1944	42	16.65	35	21.52	93	36.98	136	80.00	40	4.99	17	6.72
1945	36	12.37	53	26.31	34	12.89	130	39.00	—	—	—	—

Tabella IV.

THYNNUS ALALONGA Ris.

Anno	Marzameni		S. Panagia		Avola		C. Passero		Torrauzza		Bafuto	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
1934	—	—	—	—	39	2.06	—	—	—	—	—	—
1935	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1936	—	—	—	—	6	0.31	—	—	6	0.26	4	0.07
1937	62	2.58	—	—	110	4.36	143	4.65	54	2.09	177	5.34
1938	37	1.81	—	—	12	0.52	—	—	39	1.48	5	0.19
1939	98	3.20	—	—	268	4.54	54	1.25	1	0.06	—	—
1940	185	4.48	—	—	182	2.84	41	1.42	59	2.24	241	9.25
1941	155	67.30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1942	1187	47.65	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1943	non calata		non calata		non calata		non calata		non calata		non calata	
1944	24	86	—	—	46	184	—	—	—	—	—	—
1945	107	4.27	—	—	25	98	—	—	—	—	—	—

Tabella V.

AUXIS BISUS Raf.

Anno	Marzameni		S. Panagia		Avola		C. Passero		Torrauzza		Bafuto	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
1934	—	—	—	—	3285	19.67	—	—	—	—	—	—
1935	—	—	1288	10.11	796	7.39	—	—	1900	130.00	—	—
1936	300	5.00	8862	62.72	767	8.98	225	14.20	3241	24.87	688	4.00
1937	1510	11.04	18492	110.37	6815	37.77	8145	55.00	17123	100.04	1065	50.25
1938	422	3.51	11254	84.73	2070	13.94	3964	21.99	4867	33.35	141	0.63
1939	70	0.43	3227	30.05	797	6.27	1874	11.20	14800	123.66	—	—
1940	2120	16.22	4100	30.62	—	—	—	—	—	—	—	—
1941	3255	25.82	6430	45.66	—	—	—	—	—	—	—	—
1942	1828	15 46	5850	43.69	—	—	—	—	—	—	—	—
1943	non calata		non calata		non calata		non calata		non calata		non calata	
1944	1236	9.45	5000	38.36	6258	39.12	314	2.66	29622	233.17	314	260
1945	1825	12.45	3800	27.42	1501	8.96	400	3.25	—	—	—	—

Tabella VI.

PELAMYS SARDA Cuv.

Anno	Marzameni		S. Panagia		Avola		C. Passero		Torrauzza		Bafuto	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
1934	—	—	—	—	104	1.79	—	—	—	—	—	—
1935	—	—	565	7.70	—	—	—	—	565	7.70	—	—
1936	11	0.35	516	5.93	—	—	173	1.87	562	7.71	—	—
1937	—	—	1824	24.80	490	5.54	—	—	1570	15.35	38	0.26
1938	418	5.53	3279	46.04	152	1.77	425	3.56	460	6.63	—	—
1939	804	11.22	12876	178.13	490	7.53	458	7.67	440	6.83	—	—
1940	—	—	215	4.39	289	6.97	—	—	608	10.87	—	—
1941	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1942	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1943	non calata		non calata		non calata		non calata		non calata		non calata	
1944	—	—	—	—	36	0.53	—	—	502	6.68	—	—
1945					9	0.14		—	—			

Tabella VII.

CORYPHAENA HIPPURUS L.

Anno	Marzameni		S. Panagia		Avola		C. Passero		Torrauzza		Bafuto	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
1934	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1935	—	—	81	1.17	—	—	—	—	81	1.17	—	—
1936	—	—	90	1.96	—	—	—	—	437	6.75	—	—
1937	—	—	35	0.68	—	—	191	1.28	309	2.78	—	—
1938	—	—	22	0.52	—	—	—	—	625	4.19	—	—
1939	—	—	—	—	—	—	—	—	2556	31.27	—	—
1940	—	—	19	0.11	—	—	—	—	261	3.06	—	—
1941	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1942	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1943	non calata		non calata		non calata		non calata		non calata		non calata	
1944	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1945	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Tabella VIII.

Numero e peso delle specie planctoniche catturate nelle Tonnare del Compartimento marittimo di Messina nel 1945.

	Pesce Spada		Alalonga		Biso		Varia	
	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.	N°	Quint.
Tonnara Tono	120	64	70	3.70	6742	67	—	2
» S. Giorgio	117	77	—	—	27714	272.31	—	—
» Oliveri	88	45.58	65	3.08	5300	53.05	—	18
» S. Lucia	—	—	—	—	—	—	—	—
» Calderà	17	9	95	4.80	2794	67	—	—
» Salicà	62	31.42	3	0.14	5700	57.26	—	—

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica (Geometria). — *Caratterizzazione intrinseca degli spazi riemanniani in cui una funzione della distanza geodetica da un punto generico soddisfa l'equazione generalizzata di Laplace.* Nota [1] di L. Castoldi, presentata dal Socio L. Berzolari.

1. Alcuni anni addietro, allorchè la Fisica teorica cercava di stabilire legami diretti tra i concetti classici della Meccanica analitica e i nuovi della Meccanica quantica, fu rilevato [2] che se S è la funzione d'azione di una particella P, relativisticamente identificantesi colla distanza geodetica P_0P di detta particella da una sua generica posizione P_0, e se $\varphi(S)$ è una funzione di S soddisfacente l'equazione generalizzata di Laplace

$$\Delta\varphi(S) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(S) = 0, \tag{1}$$

la funzione $\psi(S) = e^{k\varphi(S)}$, dove k è una costante generica e *a priori* complessa, soddisfa all'altra equazione

$$\Delta\psi(S) - k^2(\operatorname{grad} S)^2\psi(S) = 0, \tag{2}$$

la quale, con opportuna scelta della costante k, può identificarsi coll'equazione relativistica di Schrödinger (o equazione di Gordon).

A prescindere dal significato fisico della cosa, già, del resto, esaurientemente illustrato [3], vogliamo qui occuparci dell'aspetto geometrico della questione.

Ci poniamo, precisamente, il problema di caratterizzare in qualche modo intrinsecamente le varietà V_n tali che, indicata con $S^{P_0}(P)$ la distanza geodetica di un loro punto generico P da un punto pure generico, ma prefissato, P_0, esista una conveniente funzione di $S^{P_0}(P)$ soddisfacente l'equazione generalizzata di Laplace.

2. Sia dunque

$$g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{3}$$

la forma quadratica differenziale caratterizzante la metrica di uno spazio riemanniano V_n. Sulla natura della forma (3) non faremo *a priori* alcuna restrizione fuorchè quella che sia diverso da zero il determinante $|g_{ij}|$ formato colle componenti del tensore metrico fondamentale.

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1946.

(2) P. Caldirola, *Sull'equazione ondulatoria e sulla Dinamica di una particella nella teoria della Relatività*. «Nuovo Cimento», 1938, n. 8.

(3) P. Caldirola, loco citato.

Affinchè la distanza corrispondente ad uno spostamento in V_n di componenti controvarianti dx^i, risulti in ogni caso reale, porremo:

$$ds^2 = e\, g_{ij}\, dx^i\, dx^i{}_j, \tag{4}$$

dove il simbolo e significa l'unità positiva o negativa secondochè, in corrispondenza dello spostamento considerato, la forma (3) assume valore positivo o negativo.

Premesso ciò, consideriamo un punto generico P_0 in V_n e la stella delle geodetiche di V_n uscenti da P_0. Assumiamo poi, in un intorno di P_0 convenientemente ristretto in modo che per ogni punto di esso passi una e una sola delle geodetiche uscenti da P_0, un sistema di coordinate x^i, di cui la x^1 rappresenti la distanza del generico punto P da P_0 contata lungo la geodetica P_0P, o, come diremo, la distanza geodetica di P da P_0.

Un tale sistema di riferimento non è atto a rappresentare i punti di V_n situati nell'intorno considerato di P_0 ed appartenenti all'eventuale cono Γ delle geodetiche di lunghezza nulla uscenti da P_0. Ciò significa che tutte le considerazioni che siamo per fare appoggiandoci alla scelta fatta del sistema di riferimento valgono soltanto quando si riferiscano a porzioni di V_n interamente contenute in una sola delle regioni in cui il cono Γ divide la V_n, o, in altri termini, a porzioni di V_n in ogni punto delle quali vada attribuito nella (4) un segno costante al simbolo e (4).

Ponendoci dunque in una regione di V_n avente in comune con Γ il solo punto P_0 e indicando con λ^i i parametri di una generica geodetica uscente da P_0, sarà

$$\lambda^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{e_1\, g_{11}}} = 1 \quad ; \quad \lambda^r = 0 \qquad (r = 2, 3, \cdots, n),$$

dove e_1 è il valore di e che compete alla regione considerata.

Sarà quindi $g_{11} = e_1$, e si potrà dare alla (4) la forma

$$ds^2 = (dx^1)^2 + a_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{5}$$

dove si è posto $a_{ij} = e_1\, g_{ij}$ e nella sommatoria del secondo membro va esclusa la combinazione di indici (1, 1).

Dopo ciò, le equazioni generali delle geodetiche di V_n:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0,$$

(4) La restrizione ora imposta appare fisicamente naturale quando si pensi che, per esempio, nello spazio-tempo einsteiniano, per cui la forma (2) è indefinita, tutti i fenomeni di moto si svolgono con velocità tali (non maggiori della velocità della luce), che la forma (2) assume sempre valori negativi, onde in (3) va sempre assunto per e il valore -1.

scritte per le geodetiche uscenti da P_0, si riducono, come facilmente si verifica, alle

$$a^{ij}\frac{\partial a_{1j}}{\partial x^1}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

dalle quali, tenuto conto dell'ipotesi $|a_{ij}|\neq 0$, consegue che le quantità a_{1r} $(r=2,3,\cdots,n)$ non dipendono da x^1:

$$a_{1r}=a_{1r}(x^2,x^3,\cdots,x^n) \qquad (r=2,3,\cdots,n).$$

Ma, approfittando di ciò, e con un'opportuna scelta delle coordinate $x^2,x^3,\cdots,x^n$ è possibile ottenere inoltre che sia $a_{1r}=0$.

Prendiamo perciò a considerare in V_n le ipersfere geodetiche Σ di centro P_0, cioè le ipersuperficie di V_n luoghi di punti aventi ugual distanza geodetica da P_0. Su ciascuna di esse sarà $x^1=$ costante, il valore della costante potendosi assumere come *raggio* della corrispondente ipersfera geodetica. Potremo poi introdurre, su ciascuna delle Σ considerate, un sistema di coordinate $x^2,x^3,\cdots,x^n$ in modo che ai punti di intersezione di una medesima geodetica uscente da P_0 con le diverse ipersfere geodetiche corrisponda una medesima $(n-1)$ — pla di valori per le $x^2,x^3,\cdots,x^n$. In tal modo, al punto P_0 corrispondono il valore o di x^1 e valori indeterminati per le $x^2,x^3,\cdots,x^n$. Inoltre, denotando ancora con a_{ij} le nuove componenti del tensore fondamentale, risultano nulle in P_0 tutte le a_{rs} con r ed s diversi entrambi da 1. Basta infatti osservare che per due punti P_1 e $P_1+\delta P_1$ entrambi a distanza x^1 da P_0 e di rispettive coordinate $x^1,x^2,\cdots,x^n$; $x^1,x^2+\delta x^2,\cdots,x^n+\delta x^n$, è

$$\delta s^2=|\delta P_1|^2=a_{rs}\,\delta x^r\,\delta x^s \qquad (r,s=2,3,\cdots,n),$$

quantità che, per il significato delle coordinate $x^2,x^3,\cdots,x^n$, tende ovviamente a zero, quando, mantenendo fissi i valori di $x^2,x^3,\cdots,x^n$ e di $\delta x^2,\delta x^3,\cdots,\delta x^n$, si renda x^1 evanescente. Per l'arbitrarietà delle δx^r risulta di qui dapprima

$$\lim_{x^1\to 0} a_{rs}=0 \qquad (r,s=2,3,\cdots,n), \tag{7}$$

indi, per continuità, immediatamente l'asserto.

Dopo ciò consideriamo sulla ipersfera Σ di raggio Δx^1, due punti P_1 e $P_1+\Delta P_1$, di rispettive coordinate $\Delta x^1,x^2,\cdots,x^n$ e $\Delta x^1,x^2+\Delta x^2,\cdots,x^n+\Delta x^n$, indi facciamo tendere a zero le quantità $\Delta x^1,\Delta x^2,\cdots,\Delta x^n$ riguardandole come infinitesime del primo ordine. Attribuite a P_0 le coordinate $0,x^2,\cdots x^n$ (a partire da x^2 coincidenti con quelle di P_1), l'uguaglianza delle due distanze (P_0,P_1) e $(P_0,P_1+\Delta P_1)$ dà:

$$(\Delta x^1)^2=(\Delta x^1)^2+(a_{1r})_{P_0}\,\Delta x^1\,\Delta x^r$$

dove le a_{1r} si intendono calcolate in P_0.

Da questa, valida per qualunque scelta delle quantità Δx^r segue dapprima $(a_{1r})_{P_0} = 0$, indi, per l'arbitrarietà di P_1 (cioè delle $x^2, x^3, \cdots, x^n$) e per l'indipendenza delle a_{1r} da x^1,

$$a_{1r} = 0 \qquad (r = 2, 3, \cdots, n)$$

in tutta la regione considerata di V_n.

È dimostrato con ciò che in tale regione le geodetiche uscenti da P_0 intersecano ortogonalmente le ipersfere geodetiche di centro P_0, mentre la (5) diventa:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + a_{rs}\, dx^r\, dx^s, \tag{8}$$

la sommatoria estendendosi alle sole combinazioni degli indici $2, 3, \cdots, n$.

3. La distanza geodetica da P_0 testè introdotta come coordinata x^1 in un particolare sistema di riferimento, ha, d'altra parte, ovviamente, carattere intrinseco alla geometria della V_n assegnata. In tal senso la designeremo con $S_{P_0}(P)$, o, brevemente, con $S(P)$, e andrà considerata come una funzione del posto P, invariante di fronte a trasformazioni qualunque delle coordinate di riferimento.

Venendo a trattare il problema posto alla fine del numero 1, veniamo a considerare il parametro differenziale secondo della funzione $S(P)$, che, con riferimento alla metrica di V_n e a coordinate generiche, ha notoriamente l'espressione

$$\Delta S(P) = g^{ij} S_{,ij}. \tag{9}$$

Ritornando alle coordinate introdotte nel numero 2, per cui $S(P)$ coincide con x^1, la (9) diventa:

$$\Delta S(P) = \frac{1}{2} a^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} = \frac{\partial \log \sqrt{|a|}}{\partial x^1}, \tag{10}$$

dove con $|a|$ si è ora indicato il valore assoluto del determinante $|a_{ij}|$.

Si riconosce facilmente che, escluso il caso banale in cui sia $n = 1$, esiste un intorno del punto P_0, appartenente alla regione considerata di V_n, in cui non può essere $\Delta S(P) = 0$. Ciò risulta osservando che, in virtù delle (7) è $\lim_{x^1 \to 0} \sqrt{|a|} = 0$, e che, se una funzione è infinitesima per un valore finito di una delle variabili, la relativa derivata parziale, supposta esistente, è infinitesima ivi di ordine certamente inferiore (in particolare di ordine nullo, o finita). Ne segue che per x^1 tendente a zero, tende a ∞ il rapporto $\frac{\partial \sqrt{|a|}}{\partial x^1} : \sqrt{|a|}$ che compare nell'ultimo membro di (10) e che esiste quindi un intorno di P_0 in ogni punto del quale è necessariamente $\Delta S(P) \neq 0$.

Stabilito ciò, interessa cercare, per le ragioni esposte in principio, se esistano funzioni $f[S(P)]$ della distanza geodetica da P_0 soddisfacenti, in tutto un intorno di P_0, l'equazione generalizzata di Laplace $\Delta f[S(P)] = 0$.

Calcolando, con riferimento alle coordinate adottate, $\Delta f[S(P)]$, si ottiene successivamente:

$$(11)\quad \Delta f[S(P)] = a^{ij}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} l \\ i\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial f}{\partial x^l}\right] = \frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2} - a^{ij} a^{k1} [ij, k] \frac{\partial f}{\partial x^1} =$$

$$= \frac{d\varphi}{dx^1} + \frac{1}{2} a^{rs} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x^1} \varphi$$

dove si è posto $\varphi(x^1) = \frac{df(x^1)}{dx^1}$ e gli indici r, s assumono i valori $2, 3, \cdots, n$.

Il problema posto equivale quindi a cercare se esistano funzioni $\varphi(x^1)$ soddisfacenti l'equazione

$$(12)\qquad \frac{d \log \varphi}{dx^1} = -\frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial x^1},$$

dove si è posto $a = |a_{rs}|$.

La (12) è ovviamente possibile soltanto se il secondo membro è funzione della sola variabile x^1, il che richiede che a sia scomponibile nel prodotto di una funzione di x^1 per una funzione delle rimanenti variabili x^r:

$$(13)\qquad a = \rho(x^1)\,\psi(x^2, x^3, \cdots, x^n).$$

Dato che si verifichi la (13), la (12) fornisce: $\rho = \frac{C}{\sqrt{|\rho|}}$, e quindi

$$(14)\qquad f(S) = C\int \frac{dS}{\sqrt{|\rho(S)|}} + A,$$

con A e C costanti arbitrarie.

Tornando alla (12), abbiamo altrove dimostrato [5] che il suo secondo membro non è altro che la curvatura media in V_n della ipersfera geodetica di centro P_0 e raggio x^1. Possiamo dunque affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione della distanza geodetica da P_0 *in* V_n *soddisfacente l'equazione generalizzata di Laplace, è che le ipersfere geodetiche di centro* P_0 *abbiano, ciascuna, curvatura media costante.*

4. Nei numeri precedenti abbiamo trattato la questione di trovare funzioni di S (P) soddisfacenti l'equazione di Laplace in tutto un campo, sia pur piccolo, attorno a P_0 (pur colle limitazioni enunciate nel numero 2). Ma se ci limitiamo a porre la questione se esistano funzioni di S (P) per cui sia $\Delta f[S(P)] = 0$ anche soltanto in P_0, si riconosce facilmente che il nuovo problema ammette sempre soluzione.

(5) L. Castoldi, *Sulla curvatura media di una varietà immersa in un'altra.* «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei». Questo volume, p. 928.

Avendo infatti riconosciuto che è $\lim_{x^1 \to 0} a = 0$, e ammesse soddisfatte da a le condizioni che permettono di effettuarne uno sviluppo in serie di potenze di x^1 convergente in un intorno sia pur piccolo di P_0, si avrà

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} \psi_i (x^2, x^3, \cdots, x^n) (x^1)^i ,$$

con k intero positivo opportuno. Ne segue che, per x^1 tendente a zero, a meno di infinitesimi di ordine superiore a k, si avrà pure:

$$a = \psi_k (x^2, x^3, \cdots, x^n) (x^1)^k ,$$

la quale mostra che la condizione (13) è in ogni caso soddisfatta per x^1 tendente a zero. Concludiamo quindi che:

In una qualunque varietà V_n *esiste sempre una funzione della distanza geodetica da un suo punto generico* P_0 *soddisfacente in* P_0 *l'equazione generalizzata di Laplace.*

A questo risultato si può, del resto, giungere per altra via nel modo seguente, che ci permetterà, di più, di giungere all'espressione esplicita della funzione cercata. È noto (6) che, fissato un punto generico P_0 in una V_n qualunque, è sempre possibile introdurre un particolare sistema di coordinate riemanniane (coordinate normali secondo Birkhoff), con riferimento al quale, per ogni spostamento $dx^1, dx^2, \cdots, dx^n$ effettuato a partire da P_0, si ha:

$$(15) \qquad ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^p)^2 - (dx^{p+1})^2 - \cdots - (dx^n)^2 ,$$

mentre è, inoltre, in P_0:

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)_0 = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \cdots n),$$

e quindi

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j\ k \end{matrix} \right\}_0 = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \cdots, n)$$

cosicchè, in P_0, le prime derivate covarianti si riducono a derivate ordinarie. Segue da ciò che in P_0, con riferimento a coordinate normali, si ha:

$$\Delta S = \frac{\partial^2 S}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2 S}{(\partial x^p)^2} - \frac{\partial^2 S}{(\partial x^{p+1})^2} - \cdots - \frac{\partial^2 S}{(\partial x^n)^2} .$$

D'altra parte, limitatamente ad un intorno infinitesimo di P_0, e assumendo P_0 come origine delle coordinate normali, la (15) può scriversi:

$$(15') \qquad S^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \cdots - (x^n)^2 .$$

(6) Cfr. L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, p. 55.

Posto $2p - n = m$, con che m è la segnatura della forma quadratica (15'), si riconosce facilmente che si ha, in P_0:

$$\Delta S = \frac{m-1}{S} \quad ; \quad (\text{grad } S)^2 = 1 ; \tag{16}$$

e inoltre

$$\Delta f(S) = f'(S)\,\Delta S + (\text{grad } S)^2 f''(S) .$$

Tenendo conto della (16) e ponendo

$$f'(S) = \varphi(S) , \tag{17}$$

quest'ultima diventa:

$$\frac{\varphi'(S)}{\varphi(S)} = \frac{1-m}{S} ,$$

da cui segue

$$\varphi(S) = C \cdot S^{1-m} ,$$

e quindi

$$f(S) = C\int S^{1-m}\,dS + A = \begin{cases} C \log S + A & \text{per } m = 2 \\ K \cdot S^{2-m} + A & \text{per } m \neq 2 \end{cases} \tag{18}$$

Naturalmente, i risultati ora ottenuti e validi in P_0, qualunque sia la V_n assegnata, continuerebbero a valere in un intorno comunque esteso di P_0 in cui fosse possibile attribuire al quadrato dell'elemento lineare la forma (15), in cui cioè la V_n data fosse pseudoeuclidea (in particolare, euclidea). Per esempio, nello spazio tempo vuoto della Relatività ristretta, si ha notoriamente, posta uguale a 1 la velocità della luce:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 ,$$

quindi $m = 2$, e, secondo (18), $f(S) = C \log S + A$.

Agli stessi risultati, ma in generale in modo più laborioso, si perviene anche adottando il punto di vista esposto all'inizio di questo numero. Consideriamo, per esempio, il caso semplicissimo di un S_3 euclideo. Introducendo coordinate polari in P_0, si ha:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\vartheta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\,d\varphi^2 ,$$

dove, per attenerci alle consuete notazioni, abbiamo indicato con ρ la distanza geodetica x^1, mentre ϑ e φ hanno i noti significati di colatitudine e longitudine. Avendosi qui $a = \rho^4 \operatorname{sen}^2\vartheta$, risulta soddisfatta, in tutto l'S_3, la condizione (13) con $\rho(x^1) = \rho^4$.

Applicando la (14) si ottiene quindi subito

$$f(\rho) = C\int \frac{d\rho}{\rho^2} + A = A + \frac{K}{\rho} ,$$

d'accordo con (18), per $m = 3$, e con notissimi risultati elementari.

Matematica (Analisi). — *Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficiente periodico reciproco di quello di Mathieu.* Nota I [1] di E. Cambi, presentata dal Socio U. Bordoni.

Premessa. — 1. L'equazione considerata è la

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{y}{r^2(1 + 2\gamma\cos x)} = 0$$

con r e γ costanti date. Essa appartiene al tipo generale rappresentato dalla

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \Phi(x)\, y = 0$$

(con coefficiente $\Phi(x)$ periodico) che quando la Φ stessa si possa sviluppare in serie di Fourier, è nota sotto il nome di *equazione di Hill.*

Quando, nella (1), γ sia piccolo del primo ordine, talché lo sviluppo del coefficiente di y in serie binomiale si possa arrestare al secondo termine, essa può ridursi ad una equazione di Mathieu:

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p^2(1 - 2\gamma\cos x)\, y = 0$$

ove si è scritto p per $1/r$. Fra le equazioni di Hill, quella di Mathieu è la più elementare, in quanto essa contiene il minimo numero di coefficienti di Fourier (due), necessarî a costruire una funzione periodica di periodo dato $(= 2\pi)$.

Per questo motivo, l'equazione di Mathieu si lascia discutere con la più larga generalità, e le caratteristiche delle sue soluzioni, nonostante la loro complessità, possono essere previste per qualunque coppia di valori dei parametri. L'equazione di Mathieu è perciò di importanza notevole come equazione approssimante, atta a fornire soluzioni di una equazione di Hill, che siano valide al limite quando i parametri abbiano valori tali che la serie di Fourier per la Φ si possa arrestare al secondo termine.

2. Il metodo generale di soluzione di Hill si basa sulla esistenza, dimostrata da Floquet, di soluzioni della forma

$$(3) \qquad y = e^{iu_0 x}\{\cdots + B_{-2}\, e^{-2ix} + B_{-1}\, e^{-ix} + B_0 + B_1\, e^{ix} + B_2\, e^{2ix} + \cdots\}$$

con un opportuno valore dell'*esponente caratteristico* u_0, e conseguentemente, con opportuni valori delle costanti B (di cui una arbitraria). Se il coefficiente Φ di y è *pari* in x (condizione supplementare affinché la equazione appartenga al tipo di Hill in senso ristretto), è evidente che un secondo

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1946.

integrale indipendente si scrive semplicemente cambiando x in $-x$ nella (3), con gli stessi valori delle costanti; l'esponente caratteristico può cioè assumere due valori opposti, u_0 e $-u_0$, che valgono a definire i due integrali indipendenti [2].

Sviluppata la Φ in serie di Fourier, sostituendo per y nella equazione una serie (3), con esponente generico u, ed annullando il coefficiente di ciascun termine esponenziale nel primo membro, si viene a scrivere, fra le costanti B, un sistema di infinite equazioni lineari *omogenee*, che potrà perciò ammettere soluzioni non tutte nulle solo quando il determinante (infinito) dei coefficienti (che sono funzioni di u), risulti uguale a zero.

Nel caso della equazione di Hill, il determinante infinito risulta convergente, definendo di conseguenza *una funzione di* u, i cui zeri sono le radici della equazione *determinantica*. È evidente che, nella serie (3) di Floquet, u_0 è definito a meno di un numero intero, in quanto, in luogo del termine $e^{iu_0 x}$, qualunque altro termine della forma $e^{i(u_0 \pm u)x}$, con n intero, potrebbe essere raccolto a fattore, senza alterare formalmente il secondo membro della uguaglianza. In altre parole, la equazione determinantica che definisce la u dovrà essere soddisfatta da una doppia infinità di radici, appartenenti alla forma $u_0 + n$, ovvero $-u_0 + n$, con n intero fra $-\infty$ e $+\infty$.

La determinazione dell'esponente caratteristico è il punto più delicato della risoluzione di una equazione di Hill. Se la serie di Fourier rappresentante il coefficiente di y nella equazione, è tale che di essa debba essere considerato un numero anche moderatamente grande di termini, la determinazione può risultare di una complicazione proibitiva; una volta determinato u_0, al contrario, la definizione delle costanti B si riduce ad un problema di algebra elementare.

3. La equazione (1) appartiene o no al tipo di Hill a seconda che il parametro 2γ è minore o maggiore dell'unità. Nel secondo caso, infatti, il coefficiente diviene infinito due o più volte nel periodo, e non può, di conseguenza, essere sviluppato in una serie di Fourier.

Anche nel primo caso, tuttavia, non è affatto conveniente risolvere l'equazione col metodo generale di Hill; è appunto scopo della presente Nota segnalare la possibilità di scrivere l'integrale generale partendo direttamente dalla equazione, senza alcuna ipotesi restrittiva sulla grandezza dei parametri. Allo scopo di ottenere sviluppi reali, ci manterremo tuttavia inizialmente nella ipotesi $2\gamma < 1$.

Si verifica immediatamente che possono ancora esistere due integrali indipendenti nella forma (3) di Floquet, con due valori opposti dell'esponente

(2) Scriviamo il fattore comune nella (3) nella forma $e^{iu_0 x}$, anziché e^{ux} come si fa ordinariamente, per porre in evidenza che u_0, se reale, può essere interpretata come *pulsazione* di una componente trigonometrica di y. Le pulsazioni di tutte le altre componenti saranno allora *congrue* con u_0 (modulo 1),

caratteristico. Se una tale serie (con l'esponente generico iux) è sostituita nella (1) ridotta a forma intera, si scrive fra le B, al solito, un sistema lineare infinito omogeneo; per ragioni formali, gioverà anzi assumere come incognite, in luogo delle B, le $A_k = r^2 (u + k)^2 B_k$, in termini delle quali l'equazione generica del sistema si scrive semplicemente:

$$(4) \quad \gamma A_{k-1} + G(u+k) A_k + \gamma A_{k+1} = 0 \quad [k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots]$$

ove il simbolo $G(u)$ sta per la funzione elementare, *pari* in u:

$$G(u) = 1 - \frac{1}{r^2 u^2} = 1 - \frac{p^2}{u^2}$$

Se la serie (3) è un integrale della equazione, cioè se $u = u_0$ e le B sono determinate di conseguenza, la serie

$$(5) \quad e^{iux} \{ \cdots + A_{-2} e^{-2ix} + A_{-1} e^{-ix} + A_0 + A_1 e^{ix} + A_2 e^{2ix} + \cdots \}$$

rappresenta proporzionalmente la $z = d^2 y/dx^2$, cioè, in base alla stessa (1), $y/(1 + 2\gamma \cos x)$. Si vedrà anzi in seguito che la serie (5), cioè la derivata seconda di y, ha maggiore importanza funzionale che non la serie (3), cioè la y stessa. Una forma *naturale* per la equazione in esame è perciò

$$(6) \quad D^{-2} z + r^2 (1 + 2\gamma \cos x) z = 0$$

ove il simbolo D^{-1} indica l'integrazione indefinita [3]. È evidente la dualità della equazione con quella di Mathieu, che si ottiene dalla (6) sostituendo a D^{-1} il simbolo di derivazione.

La « equazione di risonanza ». — 4. La condizione per l'esponente caratteristico si scrive al solito annullando il determinante infinito del sistema omogeneo. Ma, a differenza di quanto accade nel caso di Hill, il determinante è ordinariamente divergente, sicchè la equazione determinantica ha ora un significato puramente simbolico. Si può constatare però che le radici delle successive ridotte di tale determinante (aventi la stessa diagonale principale) convergono a limiti finiti, e che tali limiti sono della forma $u_0 + n$ o $-u_0 + n$, con n intero fra $-\infty$ e $+\infty$.

Si può dimostrare altresì che i valori di tali limiti coincidono con tutte e sole le radici della equazione

$$(7) \quad 1 - \gamma^2 v(u) v(-u + 1) = 0$$

(3) Il significato del simbolo D^{-2} non è definito se non si assegnano i valori degli estremi inferiori degli integrali. La forma abbreviata (6) ha quindi senso solo in quanto si applichino ad essa operazioni che comportino la doppia derivazione del termine $D^{-2} z$.

ove $v(u)$ è la funzione di u definita dalla frazione continua

$$v(u) = \cfrac{1}{G(u) - \cfrac{\gamma^2}{G(u+1) - \cfrac{\gamma^2}{G(u+2) - \cdots}}}$$

che converge per tutti i valori di u e di p, se $2\gamma < 1$.

La (7) verrà citata in seguito con *equazione di risonanza*. I valori di u che la soddisfano possono infatti essere riguardati come le *pulsazioni proprie* (frequenze $\times 2\pi$) delle componenti trigonometriche degli integrali della equazione omogenea (1) o (6). Se $\gamma = 0$, l'equazione si riduce a

$$1 - r^2 u^2 = 0$$

come deve essere, dato che la (1) si riduce in tal caso ad una equazione armonica (con pulsazioni $\pm 1/r$).

In base alla sua definizione, la $v(u)$ soddisfa le ricorrenti:

$$(8)\quad v(u-1) = \frac{1}{G(u-1) - \gamma^2 v(u)}\,; \quad \gamma^2 v(u+1) = G(u) - \frac{1}{v(u)}\,.$$

Sostituendo nella equazione di risonanza, è immediato osservare che, se u_0 annulla il primo membro della (7), questo si annulla anche per $u = u_0 \pm 1$, cioè, per induzione completa, per $u = u_0 + n$. Similmente, dalla parità di $G(u)$ si può dedurre (e lo si può dimostrare direttamente a mezzo delle (8)) che anche $-u_0$, e quindi tutte le $-u_0 + n$, sono pure radici della equazione, in conformità con la teoria di Floquet.

5. Le radici della (7), che si può scrivere in forma simmetrica:

$$(7')\qquad \gamma^2 v(-u+1) - G(u) + \gamma^2 v(u+1) = 0$$

possono essere determinate numericamente per successive approssimazioni. Si nota però che il metodo può essere applicato con chiarezza soltanto per una radice u_0 (o per la sua opposta), prossima ad $u = p$, in quanto le restanti radici (che sappiamo per altro essere tutte della forma $\pm u_0 + n$) sono estremamente *critiche*, se n ha valori anche moderatamente grandi, tanto che la loro determinazione numerica può addirittura risultare impossibile, benchè ne sia nota l'esistenza.

Denomineremo queste due radici $\pm u_0$ (che tendono, per $\gamma = 0$, alle due $\pm p$, che sono le uniche *risonanze* esistenti per la equazione armonica, a cui la (1) si riduce in quel caso), *risonanze centrali*. I termini $e^{\pm i u_0 x}$ della serie trigonometrica (3) o (5) saranno le *componenti centrali* dello sviluppo.

La (7) (o la (7')) può essere risolta agevolmente per la radice centrale u_0, in quanto il primo membro varia quasi linearmente con u, nell'intorno di $u = p$. Assunti per u due valori che possano presumibilmente

comprendere la radice, e valutati i due corrispondenti valori del primo membro (che dovranno risultare di segno opposto), si determina per interpolazione lineare un valore più approssimato, e così via [4].

Il problema della determinazione dell'esponente caratteristico, punto cruciale della risoluzione di ogni equazione differenziale a coefficienti periodici, si formula e si risolve perciò, nel caso della nostra equazione, con eccezionale semplicità.

Formulazione dell'integrale generale. – 6. Una volta noto un valore dell'esponente caratteristico, la corrispondente serie trigonometrica (5) può essere scritta con facilità, risolvendo il sistema omogeneo (4), di cui quel valore di u annulla il determinante.

Se si assume $A_0 = 1$, le altre A si esprimono semplicemente in termini di funzioni v:

$$(9)\quad \begin{cases} A_n = (-\gamma)^n v(u_0+1)\, v(u_0+2)\cdots v(u_0+n) \\ A_{-n} = (-\gamma)^n v(-u_0+1)\, v(-u_0+2)\cdots v(-u_0+n). \end{cases}$$

Noti i valori delle funzioni $v(u_0+1)$ e $v(-u_0+1)$, occorsi nella risoluzione della equazione di risonanza, le restanti v possono essere determinate ricorrentemente per mezzo delle (8), senza ricorrere ai loro sviluppi in frazione continua.

Si conoscono così due espressioni indipendenti per la d^2y/dx^2, cioè due integrali indipendenti della equazione *intera* (6), attribuendo ad u successivamente i due valori u_0 e $-u_0$:

$$(10)\quad \begin{matrix} y_1'' \\ 2 \end{matrix} = \begin{matrix} z_1 \\ 2 \end{matrix} = e^{\pm iu_0 x}\{\cdots + A_{-2} e^{\mp 2ix} + A_{-1} e^{\mp ix} + 1 + A_1 e^{\pm ix} + A_2 e^{\pm 2ix} + \cdots\}$$

essendo le A_n date dalle (9). Le due serie sono assolutamente convergenti per tutti i valori reali di x, in quanto il modulo del rapporto di due successivi coefficienti, $|\gamma v(u_0+n)|$ tende, per $n \to \infty$, e qualunque sia u_0, all'espressione $(1-\sqrt{1-4\gamma^2})/(2\gamma)$, che è minore di uno, se $2\gamma < 1$ [5].

(4) Si può dimostrare che, a meno di termini dell'ordine di γ^4, un valore per difetto della radice è

$$u_0 \approx p\{1+\gamma^2(3p^2-1)/(4p^2-1)\}$$

e che, nell'intorno di questo valore, la pendenza del primo membro è dell'ordine di $-2r = -2/p$, e minore di questo valore. È facile quindi ricavare un valore per eccesso, da cui procedere per successive interpolazioni lineari. Sviluppando un esempio numerico ($\gamma = 0{,}1$; $r = 0{,}15$), lo scrivente, a mezzo di due sole approssimazioni successive (comportanti il calcolo di otto frazioni continue, e due interpolazioni lineari), ha potuto determinare u_0 con dodici decimali esatti.

(5) La serie procedente verso destra converge perciò finchè $|e^{ix}| < \dfrac{2\gamma}{1-\Delta} = \dfrac{1+\Delta}{2\gamma}$. la serie procedente verso sinistra, finchè $|e^{-ix}|$ si mantiene minore dello stesso valore; Nel piano e^{ix} la serie in { } è perciò una serie di Laurent convergente nella corona cir-

7. Combinando linearmente i due integrali si trovano elementarmente due nuove espressioni, pure indipendenti, in forma reale:

$$\bar{y}_1'' = \cos u_0 x + \begin{cases} A_1 \cos(u_0 + 1)x + A_2 \cos(u_0 + 2)x + \cdots \\ A_{-1} \cos(u_0 - 1)x + A_{-2} \cos(u_0 - 2)x + \cdots \end{cases}$$

$$\bar{y}_2'' = \sin u_0 x + \begin{cases} A_1 \sin(u_0 + 1)x + A_2 \sin(u_0 + 2)x + \cdots \\ A_{-1} \sin(u_0 - 1)x + A_{-2} \sin(u_0 - 2)x + \cdots \end{cases}$$

Sostituendo in tutte le serie predette, i coefficienti A_n con coefficienti $B_n = A_n \frac{u_0^2}{(u_0 + n)^2}$ (con che B_0 risulta automaticamente uguale ad uno) si ottengono espressioni valide per gli integrali y della equazione (1). Le serie (B) risultanti hanno evidentemente le stesse regioni di convergenza delle corrispondenti serie (A).

Stabilità delle soluzioni. - 8. In quanto precede, si è implicitamente ammesso che la equazione di risonanza abbia radici reali, nel qual caso le serie trigonometriche (10) (o le corrispondenti serie (B)) rappresentano funzioni quasi-periodiche della x, il cui *valore assoluto* si riproduce periodicamente con periodo 2π. Aumentando x di 2π, il termine a fattore si moltiplica infatti per $e^{\pm 2\pi i u_0}$, che ha modulo uno, mentre la serie in { } resta inalterata.

È noto però che una equazione a coefficienti periodici ammette delle regioni di *instabilità* (*labilità*), cioè delle coppie di valori dei parametri p e γ, per cui non esistono integrali a modulo stabile, mentre si possono scrivere due integrali indipendenti che, per un incremento 2π della variabile indipendente, si moltiplicano ciascuno per una costante complessa di modulo diverso dall'unità. Ciò accade quando le radici della equazione di risonanza sono complesse, con che il modulo di $e^{\pm 2\pi i u_0}$ risulta diverso da uno.

Si dimostra senza difficoltà che i confini delle *regioni* di stabilità (nel piano (p, γ), ad esempio) sono definiti da quei valori di p e γ, per cui u_0 risulta multiplo intero di $\frac{1}{2}$. La relazione fra la coppia (p, γ) ed u_0 è data appunto dalla equazione di risonanza che, se u_0 è dato, si riduce ad una relazione fra p e γ, equazione della curva luogo di quel valore dell'esponente caratteristico.

colare compresa fra le due crf. di centro nell'origine e raggi rispettivi $(1 \mp \Delta)/(2\gamma)$. Nel piano x, questa regione corrisponde alla striscia $-\log \frac{1 \mp \Delta}{2\gamma} < \mathfrak{Im}(x) < \log \frac{1 + \Delta}{2\gamma}$, comprendente l'asse reale. Si è scritto per brevità Δ per $\sqrt{1 - 4\gamma^2}$, e $\mathfrak{Im}(x)$ per '*coefficiente dell'immaginario nella x*'.

9. Se la equazione di risonanza deve essere soddisfatta da un valore di u, multiplo dispari di $\frac{1}{2}$, essa dovrà esserlo in particolare da $u = \frac{1}{2}$; dovrà allora aversi $\gamma v\left(\frac{1}{2}\right) = \pm 1$, ovvero esplicitamente:

$$1 \pm \gamma - 4p^2 - \cfrac{\gamma^2}{1 - \cfrac{4p^2}{3^2} \quad \cfrac{\gamma^2}{1 - \cfrac{4p^2}{5^2} - \cdots}}} = 0$$

Al variare del segno di γ la predetta equazione rappresenta due famiglie di curve, lungo ciascuna delle quali u_0 è multiplo dispari di $\frac{1}{2}$. Le due curve corrispondenti *allo stesso valore* di u_0 delimitano una regione di instabilità. Si avrà così una regione delimitata dalle due $u_0 = \frac{1}{2}$, partenti da $p = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$; una regione partente da $p = 3/2$, $\gamma = 0$, e così via. La equazione ha senso in quanto la frazione converga, cioè limitatamente alla striscia $\gamma < \frac{1}{2}$ del piano (p, γ), nella quale sono contenute le regioni di stabilità.

Nell'origine $p = n + \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$, le due curve hanno fra loro un contatto di ordine $2n$; dato che le curve si sviluppano in una regione limitata del piano, l'area delle regioni di labilità decresce perciò rapidamente al crescere di u_0. Già la seconda area (delimitata dalle $u_0 = 3/2$) è enormemente più piccola di quella limitata dalle $u_0 = \frac{1}{2}$.

L'equazione delle curve lungo le quali u_0 è un numero intero si ottiene analogamente scrivendo che l'equazione di risonanza è soddisfatta da $u = 0$. Dato che $v(0) = 0$ (a meno che non sia $p = 0$), dovrà essere $1/v(1) = 0$, cioè:

$$1 - p^2 - \cfrac{\gamma^2}{1 - \cfrac{p^2}{2^2} - \cfrac{\gamma^2}{1 - \cfrac{p^2}{3^2} - \cdots}}} = 0$$

Per ogni valore di u_0, la curva (p, γ) è ora unica, e può dimostrarsi che essa è *luogo di autovalori doppi*, sicchè *non esistono* regioni di labilità partenti dai punti $p = n$, $\gamma = 0$, come invece accade per la equazione di Mathieu. Anche quando γ sia molto piccolo, perciò, le equazioni (1) e (2) sono bensì sostituibili l'una all'altra per approssimazione ai fini della formulazione delle soluzioni, ma non è lecito estendere la portata della sostituzione a deduzioni funzionali sulla stabilità degli integrali.

Matematica (Analisi). — *Condizioni sufficienti di esistenza e limitazioni delle derivate normali al contorno nel problema di Dirichlet per un cerchio.* Nota di G. Sansone, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

a) Se $f(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $f(0) = f(2\pi)$, è una funzione continua definita sulla circonferenza Γ di centro O e di raggio unitario, è noto che assumendo un sistema di coordinate polari (ρ, ϑ), con il polo in O, la funzione $u(\rho, \vartheta)$ definita per $0 \leq \rho < 1$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, dalla serie

$$(1) \qquad u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \operatorname{sen} n\vartheta) \rho^n$$

con

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha, \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

e per $\rho = 1$ dall'uguaglianza

$$(3) \qquad u(1, \vartheta) = f(\vartheta)$$

è continua nel dominio circolare individuato dalla circonferenza Γ, il contorno incluso, e armonica nell'interno di Γ, o, come si dice, la (1) risolve il problema di Dirichlet per il cerhio Γ [2].

La semplice continuità di $f(\alpha)$ su Γ non assicura l'esistenza della derivata normale $du/d\rho$ di $u(\rho, \vartheta)$ nei punti della circonferenza Γ. Una prima condizione sufficiente fu trovata dal Dini [3]; egli dimostrò che se $f(\alpha)$ possiede su Γ derivata finita sommabile, e se la funzione $[f'(\vartheta+\alpha) - f'(\vartheta-\alpha)]/\alpha$ risulta sommabile per α variabile in $(0, \pi)$, allora la derivata normale di $u(\rho, \vartheta)$ nel punto $(1, \vartheta)$ di Γ esiste e soddisfa la limitazione

$$\left| \frac{du}{d\rho} \right| \leq \varkappa \int_0^{\pi} \left| \frac{f'(\vartheta + \alpha) - f'(\vartheta - \alpha)}{\alpha} \right| d\alpha,$$

dove $\varkappa$ è una costante minore di $4/\pi$.

La condizione del Dini è soddisfatta se $f'(\alpha)$ verifica in $(0, 2\pi)$ una condizione di Lipschitz, risultato questo che può provarsi e anche genera-

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Cfr. ad esempio M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore* (Napoli, 1940), p. 67.

(3) U. Dini, *Sur la méthode des approximation successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre.* « Acta Mathematica », *25* (1902) (pp. 185-230), p. 224. Il Dini si serve dell'integrale di Mengoli-Cauchy; facendo invece uso dell'integrale di Lebesgue, P. Fatou, ha generalizzato i resultati del Dini nella sua Memoria *Séries trigonométriques et series de Taylor*, « Acta Mathematica », *30* (1906), (pp. 335-400), p. 360.

lizzarsi, come vedremo in *b*), con l'uso delle proprietà elementari delle serie trigonometriche di Fourier. Sussiste invero il teorema:

Se $f(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $f(0) = f(2\pi)$, *è una funzione continua sulla circonferenza* Γ, *e se essa ammette ovunque derivata la quale soddisfa una condizione di Lipschitz di ordine* s

$$|f'(\beta) - f'(\alpha)| \leq L\,|\beta - \alpha|^s, \quad (0 < s \leq 1,\ L = \text{cost.}),$$

allora la funzione armonica $u(\rho, \vartheta)$ *data dalle* (1) *e* (2), *che risolve cioè il problema di Dirichlet per il cerchio* Γ, *quando i dati coincidono con* $f(\alpha)$, *ammette anche sul contorno la derivata* $\frac{\partial u}{\partial \rho}$. *Questa risulta continua il contorno incluso, e soddisfa la limitazione*

$$(1) \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right| \leq 2 \max |f(\alpha)| \; 0 \leq \alpha \leq 2\pi + \frac{4s+3}{2s}\pi^s LB + \frac{3}{2}\pi^s LA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+s}},$$

dove A *e* B *sono costanti assolute.*

Si ha dalla (1) nei punti *interni* a Γ

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(a_n \cos n\vartheta + b_n \operatorname{sen} n\vartheta)\,\rho^{n-1}$$

od anche, posto

$$s_n(\vartheta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\varkappa=1}^{n} (a_\varkappa \cos \varkappa\vartheta + b_\varkappa \operatorname{sen} \varkappa\vartheta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,[\{s_n(\vartheta) - f(\vartheta)\} - \{s_{n-1}(\vartheta) - f(\vartheta)\}]\,\rho^{n-1} =$$

$$= -[s_0(\vartheta) - f(\vartheta)] + \sum_{n=1}^{\infty} [s_n(\vartheta) - f(\vartheta)]\,[n\rho^{n-1} - (n+1)\rho^n],$$

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = -[s_0(\vartheta) - f(\vartheta)] + \sum_{n=1}^{\infty} n\,[s_n(\vartheta) - f(\vartheta)](1-\rho)\rho^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} [s_n(\vartheta) - f(\vartheta)]\,\rho^n.$$

Dalle proprietà delle serie trigonometriche di Fourier abbiamo [4]

$$(5) \qquad |s_n(\vartheta) - f(\vartheta)| \leq (A \log n + B)\frac{L\pi^s}{n^{1+s}}, \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

(4) Cfr. Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable* (Paris, 1919), p. 25; *b*) L. Tonelli; *Serie trigonometriche* (Bologna, 1928), p. 325.

con A e B costanti assolute, e si ha quindi dalla (4)

$$(6) \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right| \leq \left|\frac{1}{2}a_0 - f(\vartheta)\right| + \\ + L\pi^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A\log n + B}{n^s}(1-\rho)\rho^{n-1} + L\pi^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A\log n + B}{n^{1+s}}\rho^n .$$

Ora per $0 \leq \rho \leq 1$ e $n > 1$ il massimo del prodotto $(1-\rho)\rho^{n-1}$ si ottiene per $\rho = 1 - 1/n$, e risulta quindi

$$0 \leq (1-\rho)\rho^{n-1} \leq \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1},$$

ma $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ è decrescente con n, perciò

$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n},$$

e dalla (6) si ha allora

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \rho}\right| \leq \left|\frac{1}{2}a_0 - f(\vartheta)\right| + 2LB\pi^s + \frac{3L\pi^s}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A\log n + B}{n^{1+s}},$$

e poichè $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(1+s)} < s^{-1}$, si ottiene la (I).

Si osservi inoltre che le due serie che figurano nel secondo membro della (4) sono totalmente convergenti per ρ variabile nell'intervallo chiuso $(0, 1)$, e in esse è quindi lecito applicare il teorema del limite per $\rho \to 1 - 0$. Ora *se* $\left.\frac{du}{dn}\right|_{(1,\vartheta)}$ *indica la derivata di* u *nel punto* $(1, \vartheta)$ *del contorno* Γ, *nel senso della normale interna, per il teorema della media si ha*

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_{(1,\vartheta)} = -\lim_{\rho \to 1-0}\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

perciò dalla (4)

$$(II_1) \qquad \left.\frac{du}{dn}\right|_{(1,\vartheta)} = \sum_{n=0}^{\infty}[s_n(\vartheta) - f(\vartheta)].$$

b) Il teorema dimostrato in *a*) ammette la seguente semplice estensione.

Se $f(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $f(0) = f(2\pi)$, *è una funzione continua sulla circonferenza* Γ, *e possiede derivate fino all'ordine* p, *se* $f^{(p)}(\alpha)$ *soddisfa una condizione di Lipschitz di ordine* s,

$$|f^{(p)}(\beta) - f^{(p)}(\alpha)| \leq L|\beta - \alpha|^s, \qquad [0 < s \leq 1, p \geq 2, L = \text{cost.}],$$

allora la funzione armonica $u(\rho, \vartheta)$ *data dalle* (1) *e* (2), *che risolve cioè il problema di Dirichlet per il cerchio* Γ, *quando i dati al contorno coincidono con* $f(\alpha)$, *ammette anche sul contorno la derivata* $\frac{\partial^p u}{\partial \rho^p}$. *Questa risulta continua il contorno incluso, e soddisfa la limitazione* ($p \geq 2$):

$$(I_p)\quad \left|\frac{\partial^p u}{\partial \rho^p}\right| \leq \frac{p!}{(p-1)^{p+s}}[A\log(p-1)+B]\,L\pi^s + \frac{p!\,p}{p^{p+s}}[A\log p+B]L\pi^s +$$

$$+\frac{2p+1}{2}L\pi^s \sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{n^{p+s}}(A\log n+B),$$

con A *e* B *costanti assolute.*

Si ha infatti per $0 \leq \rho < 1$, derivando la (1) p volte

$$\frac{\partial^p u}{\partial \rho^p} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)(a_n \cos n\vartheta + b_n \operatorname{sen} n\vartheta)\rho^{n-p} =$$

$$= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)[\{s_n(\vartheta)-f(\vartheta)\}-\{s_{n-1}(\vartheta)-f(\vartheta)\}]\rho^{n-p} =$$

$$= -p![s_{p-1}(\vartheta)-f(\vartheta)] + \sum_{n=p}^{\infty}[s_n(\vartheta)-f(\vartheta)][n(n-1)\cdots$$

$$\cdots(n-p+1)\rho^{n-p} - (n+1)n\cdots(n-p+2)\rho^{n-p+1}],$$

$$(7)\quad \frac{\partial^p u}{\partial \rho^p} = -p![s_{p-1}(\vartheta)-f(\vartheta)] + p![s_p(\vartheta)-f(\vartheta)][1-(p+1)\rho] +$$

$$+\sum_{n=p+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+2)(n-p+1)[s_n(\vartheta)-f(\vartheta)](1-\rho)\rho^{n-p} -$$

$$-p\sum_{n=p+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+2)[s_n(\vartheta)-f(\vartheta)]\rho^{n-p+1}.$$

Dalle proprietà delle serie trigonometriche di *Fourier* abbiamo (5)

$$(8)\qquad |s_n(\vartheta)-f(\vartheta)| \leq (A\log n+B)\frac{L\pi^s}{n^{p+s}};$$

per $0 \leq \rho \leq 1$, ed $n > p$ il massimo del prodotto $(1-\rho)\rho^{n-p}$ non supera $1/2\,(n-p+1)$, si ha quindi dalla (7)

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial u^p}\right| \leq p![A\log(p-1)+B]\frac{L\pi^s}{(p-1)^{p+s}} + p!\,p[A\log p+B]\frac{L\pi^s}{p^{p+s}} +$$

$$+L\pi^s\left(p+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{n^{p+s}},$$

cioè appunto la (I_p).

Con analogo ragionamento a quello tenuto alla fine di *a*) si ha anche che *se* $\left.\frac{d^p u}{dn^p}\right|_{(1,\vartheta)}$ *indica la derivata* p^{esima} *di* $u(\rho,\vartheta)$ *al contorno, nel punto* $(1,\vartheta)$ *di* Γ, *nel senso della normale interna, si ha per* $p \geq 2$

$$(II_p)\quad \left.\frac{d^p u}{dn^p}\right|_{(1,\vartheta)} = (-1)^{p-1}p\sum_{n=p-1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+2)[s_n(\vartheta)-f(\vartheta)].$$

(5) Cfr. *a*) Ch. J. de la Vallée-Poussin, op. cit. in (4), p. 27; *b*) L. Tonelli, op. cit. in (4), p. 326.

Matematica (Analisi). — *Soluzioni periodiche di una equazione differenziale non lineare* [1]. Nota di T. MANACORDA, presentata [2] dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Sia data l'equazione differenziale:

$$y''(x) + \varphi(x, y) = f(x), \tag{1}$$

in cui le funzioni $\varphi(x, y)$ e $f(x)$ sono continue nei loro argomenti nel rettangolo:

$$0 \leq x \leq \omega \quad , \quad -\infty < y < +\infty \qquad (\omega \text{ numero positivo})$$

ed inoltre $\varphi(x, y)$ soddisfa alle condizioni:

$$\varphi(x, 0) = 0 \quad , \quad |\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| \leq \alpha |y_1 - y_2| \quad (\alpha \text{ costante positiva}), \tag{2}$$
$$-\infty < y_1 \leq y_2 < +\infty .$$

Nel caso particolare: $\varphi(x, y) = \beta^2 \operatorname{sen} y$ e $f(x) = \gamma \operatorname{sen} x$, la (1) si riduce all'equazione di Duffing prima forma, e quando sia $\varphi(x, y) = \beta^2 \operatorname{sen} y$, $f(x)$ qualunque, a quella di Duffing generalizzata [3]. Seguendo il metodo adoperato da Hamel per la prima di queste equazioni [4], noi mostreremo che *se il numero* ω *soddisfa la limitazione*:

$$\omega < \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \tag{3}$$

esiste una ed una sola soluzione della (1) *che soddisfa alle condizioni*:

$$y(0) = y(\omega) = 0 . \tag{4}$$

2. L'integrale generale della (1) ha la forma:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \int_0^x (x - t) f(t)\, dt - \int_0^x (x - t) \varphi[t, y(t)]\, dt , \tag{5}$$

(c_1 e c_2 costanti arbitrarie)

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(3) G. DUFFING, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*, Braunschweig, 1918.

(4) G. HAMEL, *Ü. erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden*, « Math. Ann. », *86*, 1-13 (1922).

Per una esposizione dei risultati ottenuti da questo autore e da altri, e per la bibliografia cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, II, pp. 333-38, Bologna, 1941.

e le condizioni (4) portano:

$$(6) \qquad c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (\omega - t)\,\varphi[t, y(t)]\,dt - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (\omega - t)\,f(t)\,dt .$$

Tenendo conto di queste la (5) assume la forma [5]:

$$(5') \qquad y(x) = \int_0^\omega K(x,t) f(t)\,dt - \int_0^\omega K(x,t)\,\varphi[t, y(t)]\,dt ,$$

con:

$$(7) \qquad \begin{cases} K(x,t) = t\left(\dfrac{x}{\omega} - 1\right) \quad , \quad 0 \leq t \leq x , \\ K(x,t) = x\left(\dfrac{t}{\omega} - 1\right) \quad , \quad x \leq t \leq \omega . \end{cases}$$

Da queste ultime risulta in particolare che il nucleo $K(x,t)$ è sempre negativo e che quindi: $|K(t,x)| = -K(t,x)$.

Ogni soluzione della (1) e (4), soddisfa la (5'), e viceversa. Basta quindi mostrare che la (5') ammette, nelle nostre ipotesi, una ed una sola soluzione.

Ricorrendo al metodo delle approssimazioni successive, poniamo:

$$(8) \qquad y_0(x) = \int_0^\omega K(x,t) f(t)\,dt \quad , \quad y_{n+1}(x) = y_0(x) - \int_0^\omega K(x,t)\,\varphi[t, y_n(t)]\,dt .$$

Si ha:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \int_0^\omega |K(x,t)| \cdot |\varphi(t, y_n) - \varphi(t, y_{n-1})|\,dt ,$$

e per la (2):

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \alpha \int_0^\omega |K(x,t)|\,|y_n(t) - y_{n-1}(t)|\,dt .$$

Da questa, iterando:

$$(9) \qquad |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \alpha^n \int_0^\omega dt_{n-1} \int_0^\omega \cdots \int_0^\omega |K(x,t)| \cdot$$

$$\cdot |K(t,t_1)| \cdot \cdots \cdot |K(t_{n-2}, t_{n-1})| \cdot |y_1(t_{n-1}) - y_0(t_{n-1})|\,dt \cdots dt_{n-2} .$$

Come è noto, si ha [6]:

$$\sum_r^{1\cdots\infty} \frac{2\cos rx}{r^2} = \frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{3} .$$

(5) Cfr. la Memoria citata di HAMEL, p. 7.

(6) Cfr. ad esempio G. SANSONE, *Funzioni di variabile reale*, II, p. 37, Bologna, 1935. In particolare, per $x = 0$ si ha: $\sum_1^\infty \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Mediante questa, il nucleo $K(x,t)$ può porsi sotto la forma:

$$(10) \qquad K(x,t) = -\frac{2\omega}{\pi^2} \sum_{r}^{1\cdots\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}t}{r^2}.$$

Otteniamo così:

$$\int_0^\omega |K(x,t)| \cdot |K(t,t_1)|\,dt = \frac{4\omega^2}{\pi^2} \sum_{r,s}^{1\cdots\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}x}{r^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi s}{\omega}t_1}{s^2} \int_0^\omega \operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}t \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi s}{\omega}t \cdot dt = \frac{2\omega^3}{\pi^4} \sum_{r}^{1\cdots\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}t_1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}x}{r^4},$$

e in generale:

$$\int_0^\omega |K(x,t)| \cdot |K(t,t_1)| \cdot \cdots \cdot |K(t_{n-2},t_{n-1})|\,dt \cdot dt_1 \cdots dt_{n-2} =$$

$$= \frac{2\omega^{2n-1}}{\pi^{2n}} \sum_{r}^{1\cdots\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}t_{n-1}}{r^{2n}}.$$

Dalla (9) allora:

$$(9') \qquad |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \alpha^n \frac{2\omega^{2n-1}}{\pi^{2n}} \sum_{r}^{1\cdots\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}x}{r^{2n}} \int_0^\omega \operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}t_{n-1} \cdot$$

$$\cdot |y_1(t_{n-1}) - y_0(t_{n-1})| \cdot dt_{n-1}.$$

Osservando d'altronde che, per le (8), $|K(x,t)| \leq \omega$, e tenendo conto delle (2), si ha:

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \int_0^\omega |K(x,t)| \cdot |\varphi(t,y_0)|\,dt \leq \alpha\omega \int_0^\omega |y_0(t)|\,dt$$

e per le ipotesi fatte, posto: $|y_0(x)| \leq M$,

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \alpha\omega^2 M.$$

Dalla (9') allora:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq M\alpha^{n+1} \cdot \frac{2\omega^{2n+1}}{\pi^{2n}} \sum_{r}^{1\cdots\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}x}{r^{2n}} \int_0^\omega \operatorname{sen}\frac{\pi r}{\omega}t_{n-1}\,dt_{n-1} \leq$$

$$\leq M\alpha^{n+1} \frac{4\omega^{2n+2}}{\pi^{2n+1}} \sum_{r}^{1\cdots\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{2}{3} M\pi^3 \left(\frac{\omega^2\alpha}{\pi^2}\right)^{n+1}.$$

Sia verificata per ω la limitazione (3). Allora la serie delle approssimazioni successive: $\sum_{n}^{1\cdots\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$ è minorante in valore assoluto della serie: $\frac{2}{3} M \pi \omega^2 \alpha \cdot \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{\omega^2 \alpha}{\pi^2}\right)^n$, che, per la (3), è convergente. La (5') ammette quindi, nelle nostre ipotesi, almeno una soluzione.

È facile tuttavia mostrare che la soluzione così determinata è unica. Ammettiamo infatti che la (5') ammetta, accanto alla somma $y(x)$ della serie delle approssimazioni successive (8), un'altra soluzione $Y(x)$. Per la (5') stessa e per la (2) si ha:

$$|Y(x) - y_{n+1}(x)| \leq \int_0^\omega |K(x,t)| \, |\varphi(x, Y(t)) - \varphi(t, y_n(t))| \, dt \leq$$

$$\leq \alpha \int_0^\omega |K(x,t)| \, |Y(t) - y_n(t)| \, dt,$$

da cui, iterando:

$$(11) \qquad |Y(x) - y_{n+1}(x)| \leq \alpha^n \int_0^\omega dt_{n-1} \int_0^\omega \cdots \int_0^\omega |K(x,t)| \cdot$$

$$\cdot |K(t,t_1)| \bullet \cdots \bullet |K(t_{n-2}, t_{n-1})| \cdot |Y(t_{n-1}) - y_0(t_{n-1})| \cdot dt \, dt_1 \cdots dt_{n-2},$$

e, posto:

$$|Y(x) - y_0(x)| \leq \alpha \int_0^\omega |K(x,t)| \, |Y(t)| \, dt \leq N \alpha \omega^2,$$

otteniamo:

$$|Y(x) - y_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{3} N \pi^3 \left(\frac{\omega^2 \alpha}{\pi^2}\right)^{n+1}$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$ tenendo conto della (3):

$$\lim_{n \to \infty} |Y(x) - y_{n+1}(x)| = 0 \quad , \quad Y(x) \equiv y(x).$$

3. Supponiamo adesso nella (1) $f(x) \equiv 0$, cioè, l'equazione assuma la forma:

$$(1') \qquad y''(x) + \varphi(x, y) = 0.$$

Il metodo adoperato nei numeri precedenti per determinare una soluzione che soddisfi la (4), conduce adesso all'integrale identicamente nullo, e poichè, quando è verificata la (3) tale integrale è unico, possiamo concludere che *la* (1) *non ammette alcuna soluzione non identicamente nulla che soddisfi la* (4) *quando* ω *verifica la limitazione* (3).

4. Sia $\varphi(x, y)$ una funzione di x periodica a periodo Ω e pari:

$$(12) \qquad \varphi(x + \Omega, y) = \varphi(x, y) \quad , \quad \varphi(-x, y) = \varphi(x, y),$$

dispari invece come funzione di y:

$$(12') \qquad \varphi(x, -y) = -\varphi(x, y),$$

ed $f(x)$ una funzione di x periodica a periodo Ω e dispari:

$$(13) \qquad f(x + \Omega) = f(x) \quad , \quad f(-x) = -f(x)$$

ed ammettiamo che esista un numero positivo ω legato ad Ω dalla relazione:

$$(14) \qquad \omega = k\Omega, \qquad (k \text{ numero intero positivo}),$$

tale che le funzioni $\varphi(x, y)$ e $f(x)$ sono continue nel rettangolo $0 \leq x \leq \omega$, $-\infty \leq y \leq +\infty$ ed inoltre $\varphi(x, y)$ soddisfa alle condizioni:

$$(2) \qquad \varphi(x, 0) = 0 \quad , \quad |\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_2)| \leq \alpha |y_1 - y_2|,$$
$$\alpha \text{ costante positiva}, \quad -\infty \leq y_1 < y_2 \leq +\infty,$$

ed ammettiamo infine che il numero ω verifichi la disuguaglianza:

$$(3) \qquad \omega < \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}.$$

In tal caso, l'equazione (1) *ammette una ed una sola soluzione periodica di periodo* 2ω.

Osserviamo infatti che cambiando nella (1) x in $-x$ e contemporaneamente y in $-y$, l'equazione non si altera. Ne possiamo quindi concludere per il teorema di unicità, che ogni soluzione $y(x)$ con $y(0) = 0$, è tale che:

$$y(-x) = -y(x) \quad , \quad y'(-x) = y'(x).$$

Effettuando allora il cambiamento di x in $x + 2\omega$, l'equazione, per le (13) e (14), non cambia ed è quindi soddisfatta in $(\omega, 3\omega)$ dalla stessa funzione che la soddisfa tra $(-\omega, \omega)$, e che si riallaccia con continuità a quella ora determinata nel punto ω. Ciò che mostra il nostro asserto.

Non è forse del tutto inutile osservare che se n indica il massimo valore di k nella (14) compatibile con la disuguaglianza (3), la n soluzioni periodiche che sembrerebbe potessero costruirsi col metodo del n. 2, sono in realtà tutte coincidenti tra loro.

Matematica (Fisica Matematica). — *Sul potenziale di un doppio strato non uniforme.* Nota di L. Castoldi, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

1. Il Teorema di equivalenza di Ampère, nella sua espressione analitica, trasforma notoriamente il rotore di un potenziale vettore nel gradiente di un potenziale di doppio strato mediante la relazione:

$$(1) \qquad -\operatorname{grad}^{(P)} \int_{\sigma} \mathfrak{M}\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}^{(M)} \frac{1}{r}\, d\sigma = \operatorname{rot}^{(P)} \oint_{l} \frac{\mathfrak{M}\boldsymbol{t}}{r}\, dl\,,$$

dove l è un circuito chiuso non intrecciato, σ una qualunque superficie regolare limitata da esso, $\mathfrak{M}$ la « potenza » costante di un doppio strato distribuito su σ, $\boldsymbol{n}$ il versore normale a σ diretto da una parte arbitraria di σ, $\boldsymbol{t}$ il versore tangente a l orientato in modo che appaia destrorso rispetto ad $\boldsymbol{n}$, P ed M i punti rispettivamente « potenziato » e « potenziante », ed r, infine, la distanza P M.

La (1) trova la sua principale applicazione nell'espressione dell'equivalenza tra il campo magnetico generato da una corrente filiforme di intensità $\mathfrak{M}$ circolante in l e il campo di un doppio strato magnetico distribuito su σ. Si è detto che nella (1) $\mathfrak{M}$ va ritenuto costante, e ciò appare ben naturale allorchè ci si riferisca alla accennata interpretazione elettromagnetica della (1), non avendo senso fisico la considerazione di una corrente di intensità non costante in un conduttore filiforme perfettamente isolato.

Ma se, anzichè porre il problema nel senso di trovare un doppio strato equivalente, nel significato chiarito, ad una assegnata corrente in conduttore filiforme, lo si pone nel senso di cercare una distribuzione di correnti equivalente ad un assegnato doppio strato magnetico, riguardo al quale l'ipotesi di potenza costante appare del tutto arbitraria ed eccessivamente restrittiva, risulta manifesta l'insufficienza della (1) di fronte alla nuova questione.

Scopo della presente Nota è appunto di sostituire alla (1) una relazione più generale esprimente un legame di equivalenza tra il campo magnetico di un doppio strato non uniforme e quello generato da una conveniente distribuzione di correnti, sia percorrenti conduttori filiformi, sia, eventualmente, a carattere laminare, con sede, queste ultime, sulla superficie sostegno del doppio strato.

A tale scopo partiamo dalla nota relazione vettoriale

$$(2) \qquad \oint_{l} f\boldsymbol{t}\, dl = \int_{\sigma} \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}^{(M)} f \cdot d\sigma\,,$$

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

dove f è una funzione del posto definita in un campo spaziale contenente σ ed l, e dove i rimanenti simboli hanno il significato già chiarito. È possibile modificare il secondo membro della (2) osservando che il prodotto $\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}^{(M)} f$ rimane immutato sostituendo a $\operatorname{grad}^{(M)} f$ il suo componente su σ. Indicando con $\boldsymbol{\tau}$ il versore tangente a σ e complanare con $\operatorname{grad}^{(M)} f$ e con $\overline{n}$, potremo sostituire nella (2) a $\operatorname{grad}^{(M)} f$ il vettore

$$(3) \qquad (\operatorname{grad}^{(M)} f \times \boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\tau}\,.$$

Introdotte poi coordinate cartesiane x^1, x^2, x^3 nello spazio ambiente e coordinate curvilinee u^1, u^2 sulla superficie σ, sussisteranno su σ relazioni della forma:

$$(4) \qquad x^i = x^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

mentre le componenti covarianti nelle u^α del vettore superficiale (3) risultano date da

$$(5) \qquad \sum_1^3{}_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Lo stesso vettore (3) può dunque considerarsi come il « gradiente superficiale » della funzione f. Esso giace in σ e risulta esclusivamente determinato dai valori di f su σ.

Indicando tale vettore con $\operatorname{grad}_\sigma^{(M)} f$, la (2) può scriversi:

$$(2') \qquad \oint_l f\,\boldsymbol{t}\,dl = \int_\sigma \boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma^{(M)} f \cdot d\sigma.$$

La (2'), del tutto equivalente a (3) quando f sia definita in un'intera regione spaziale contenente σ, ne costituisce un'estensione allorchè f sia definita soltanto su σ stessa. In tal caso infatti la (2') continua a valere, mentre la (2) perde significato.

Applichiamo ora la (2') al che sia

$$(6) \qquad f = \frac{\mathfrak{M}}{r},$$

dove $\mathfrak{M}$ è la potenza di un doppio strato, *a priori* non uniforme, distribuito su σ ed r ha il significato precedentemente dichiarato. Supponiamo anzi, per generalità, che $\mathfrak{M}$ sia continua su σ fuorchè nei punti di determinate linee di discontinuità il cui complesso indicheremo con l^*.

Scomponendo allora σ in varie porzioni semplicemente connesse, del cui contorno facciano parte l'intero contorno primitivo l e tutte le linee di discontinuità l^*, applicando la (2') alle singole parti, indi sommando i risultati, si perviene facilmente alla relazione:

$$(7)\qquad \oint_l \frac{\mathfrak{M}}{r}\,\boldsymbol{t}\,dl = \int_\sigma \mathfrak{M}\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}^{(M)}\frac{1}{r}\,d\sigma + \int_\sigma \frac{\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma^{(M)}\mathfrak{M}}{r}\,d\sigma - \int_{l^*} \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{r}\,\boldsymbol{t}^*\,dl^*,$$

dove $\boldsymbol{t}^*$ è il versore tangente ad l^* ed $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ sono i limiti su l^* dei valori di $\mathfrak{M}$ da una parte e dall'altra di l^* ($\mathfrak{M}_1$ limite a sinistra di un osservatore diretto come $\boldsymbol{n}$ e rivolto nel verso di $\boldsymbol{t}^*$). Nel primo integrale del secondo membro di (7) abbiamo potuto scrivere $\operatorname{grad}^{(M)}\frac{1}{r}$ in luogo di $\operatorname{grad}_\sigma^{(M)}\frac{1}{r}$ tenendo conto del fatto che $\frac{1}{r}$ è definito in tutto lo spazio ambiente e non solo su σ.

Premesso ciò ricorriamo alle relazioni vettoriali

$$(8)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}^{(P)}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \operatorname{Grad}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + \operatorname{Grad}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \\ \operatorname{grad}^{(P)}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \operatorname{Grad}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \operatorname{Grad}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \wedge \operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \end{cases}$$

nelle quali $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono due vettori funzioni di P e Grad $\boldsymbol{u}$ rappresenta il tensore derivato del vettore $\boldsymbol{u}$.

Ponendo nelle (8) $\boldsymbol{u} = \mathfrak{M}\boldsymbol{n}$ (con che, in particolare, $\boldsymbol{u}$ non dipende da P), $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}^{(M)}\frac{1}{r} = -\operatorname{grad}^{(P)}\frac{1}{r}$, e notando che è

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}^{(P)}\frac{1}{r} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}^{(P)}\frac{1}{r} = 0,$$

le relazioni stesse forniscono

$$\operatorname{rot}^{(P)}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = -\operatorname{Grad}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -\operatorname{grad}^{(P)}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}),$$

ossia

$$(9)\qquad \operatorname{rot}^{(P)}\left[\mathfrak{M}\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}^{(M)}\frac{1}{r}\right] = -\operatorname{grad}^{(P)}\left[\mathfrak{M}\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}^{(M)}\frac{1}{r}\right].$$

Prendendo allora il rotore in P di entrambi i membri della (7), si ottiene:

$$(10)\qquad -\operatorname{grad}^{(P)}\int_\sigma \mathfrak{M}\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}^{(M)}\frac{1}{r}\,d\sigma =$$

$$= \operatorname{rot}^{(P)}\int_l \frac{\mathfrak{M}}{r}\,\boldsymbol{t}\,dl + \operatorname{rot}^{(P)}\int_{l^*} \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{r}\,\boldsymbol{t}^*\,dl^* + \operatorname{rot}^{(P)}\int_\sigma \frac{\boldsymbol{n} \wedge \operatorname{grad}_\sigma^{(M)}\mathfrak{M}}{r}\,d\sigma,$$

che è appunto la formula che volevamo stabilire.

L'ultimo termine del secondo membro si può ulteriormente trasformare prendendo in considerazione su σ le due famiglie ortogonali di linee, costi-

tuite, l'una dalle linee di flusso del campo vettoriale $\text{grad}_\sigma^{(M)} \mathfrak{M}$ (linee u), l'altra dalle traiettorie ortogonali alla famiglia precedente (linee v). Indicando con $\boldsymbol{v}$ il versore tangente alle linee v diretto nel verso di $\boldsymbol{n} \wedge \text{grad}_\sigma^{(M)} \mathfrak{M}$ e con dm e ds rispettivamente gli archi elementari delle linee (u) e (v), l'integrale nell'ultimo termine considerato di (10) si può scrivere,

$$\iint \frac{|\text{grad}_\sigma^{(M)} \mathfrak{M}|}{r} \boldsymbol{v}\, dm\, ds .$$

Effettuiamo l'integrazione scomponendo σ in strisce elementari limitate, ciascuna da due linee della famiglia (v). Per una generica di tali striscie, limitata dalle linee $u = \mathfrak{M}$ e $u = \mathfrak{M} + d\mathfrak{M}$, si ha: $|\text{grad}_\sigma^{(M)} \mathfrak{M}|\, dm = d\mathfrak{M}$; e va notato che $d\mathfrak{M}$ rimane costante lungo tutta la generica striscia. L'integrale precedente si può quindi scrivere:

$$\int d\mathfrak{M} \int \frac{\boldsymbol{v}\, ds}{r}, \tag{11}$$

l'integrazione esterna andando estesa dalla prima all'ultima striscia.

Poichè l'integrale

$$d\mathfrak{M} \int \frac{\boldsymbol{v}\, ds}{r} \tag{12}$$

si interpreta ovviamente come il potenziale vettore di una corrente laminare di intensità $d\mathfrak{M}$ percorrente la generica striscia di σ, la formula (10), quando vi si sostituisca l'integrale dell'ultimo termine mediante (11), esprime il risultato essenziale che il campo di un doppio strato magnetico non uniforme, di potenza variabile $\mathfrak{M}$, può sempre ritenersi equivalente al campo complessivamente generato: 1°) Da una corrente filiforme percorrente il contorno del doppio strato; 2°) da correnti filiformi percorrenti le linee di discontinuità della potenza $\mathfrak{M}$ su σ; 3°) da una distribuzione di correnti laminari percorrenti con intensità costante le striscie infinitesime in cui σ risulta divisa dalle linee di ugual potenza del doppio strato.

Non deve far meraviglia il fatto che, in conseguenza di (10) e dell'ipotesi fatta su $\mathfrak{M}$, sia il contorno l che le linee l^* risultino generalmente percorsi da correnti filiformi di intensità non costanti. Ciò non solleva ora alcuna difficoltà nè concettuale nè fisica, purchè si pensi che, potendo su tali linee confluire, o da esse dipartirsi, correnti laminari convogliate dalle striscie elementari di cui sopra, le linee stesse non presentano affatto il carattere di conduttori isolati.

Quest'ultima osservazione era necessaria per togliere un apparente paradosso.

Matematica (Geometria). — *Sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto.* Nota di A. Rollero, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

1. Com'è noto [2] le coordinate proiettive omogenee di punti di una superficie $x^{(i)} = x^{(i)}(u, v)$, $i = 1, 2, 3, 4$ soddisfano ad un sistema di equazioni a derivate parziali completamente integrabile

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{uu} = px + \theta_u x_u + \beta x_v \\ x_{vv} = qx + \gamma x_u + \theta_v x_v \end{cases}$$

in cui le u, v sono variabili asintotiche (e $\beta\gamma \neq 0$ se la superficie *non è* rigata); i coefficienti sono, in generale, funzioni di u, v.

L'arbitrarietà del fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee e dei cambiamenti delle variabili asintotiche impone il problema della ricerca degli *invarianti*. Lo stesso problema può risolversi assegnando in *coordinate locali* uno *sviluppo canonico* della superficie, a patto che il sistema di riferimento relativo ad un punto della superficie sia geometricamente determinato.

A questo partito si è attenuto il Bompiani determinando lo sviluppo canonico

$$(2) \qquad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{4!}(x^3 + y^3)(Px + Ty) + \cdots$$

con P, T invarianti [3].

2. Se si vuole porre in relazione questo sviluppo con le (1) e con altri sviluppi canonici bisogna servirsi delle (1) stesse e delle loro conseguenze differenziali per determinare gli sviluppi delle $x^{(i)}(u, v)$ nell'intorno di un punto (u, v).

Le coordinate $X_i = x^{(i)}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ di un punto prossimo ad (u, v) sono esprimibili nella forma

$$X_i = \overline{X}_1 x_u^{(i)} + \overline{X}_2 x_v^{(i)} + \overline{X}_3 x_{uv}^{(i)} + \overline{X}_4 x^{(i)}$$

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Si veda per esempio G. Fubini-E. Cech, *Geometria proiettiva differenziale* (Zanichelli, Bologna).

(3) V. E. Bompiani, *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei.* «Rend. Acc. Lincei», vol. XXV, 1937, pp. 149-154; *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* «Rend. Seminario Matematico», Università di Roma, (4), vol. 2, fasc. 2, 1938, pp. 99-120. Per altre notevoli proprietà del tetraedro di riferimento rispetto al quale F si rappresenta, nell'intorno di O, mediante lo sviluppo (2), v. la mia Nota *Sulla determinazione del riferimento per lo studio proiettivo-differenziale delle superficie*, in questi «Rendiconti», e la Nota ivi citata di E. Bortolotti.

ove le $\overline{X}_i$ sono coordinate locali; e si ha, servendosi delle (1)

$$(3)\quad \begin{cases} \overline{X}_1 = \Delta u + \frac{1}{2}(\theta_u \Delta u^2 + \gamma \Delta v^2) + \frac{1}{6}[(p + \theta_{uu} + \theta_u^2)\Delta u^2 + 3(\theta_{uv} + \beta\gamma)\Delta u^2 \Delta v + \\ \quad + 3(q + \gamma_u + \gamma\theta_u)\Delta u \Delta v^2 + (\gamma_v + \gamma\theta_v)\Delta v^3] + \cdots \\ \overline{X}_2 = \Delta v + \frac{1}{2}(\beta \Delta u^2 + \theta_v \Delta v^2) + \frac{1}{6}[(\theta_u \beta + \beta_u)\Delta u^3 + 3(p + \beta_v + \beta\theta_v)\Delta u^2 \Delta v + \\ \quad + 3(\beta\gamma + \theta_{uv})\Delta u \Delta v^2 + (q + \theta_{vv} + \theta_v^2)\Delta v^3] + \cdots \\ \overline{X}_3 = \Delta u \Delta v + \frac{1}{6}[\beta \Delta u^3 + 3\theta_u \Delta u^2 \Delta v + 3\theta_v \Delta u \Delta v^2 + \gamma \Delta v^3] + \frac{1}{12}[(\theta_u \beta + \beta_u)\Delta u^4 + \\ \quad + 2(p + \theta_{uu} + \theta_u^2 + \beta_v + \beta\theta_v)\Delta u^3 \Delta v + 3(2\theta_{uv} + \beta\gamma + \theta_u \theta_v)\Delta u^2 \Delta v^2 + \\ \quad + 2(q + \gamma_u + \gamma\theta_u + \theta_{vv} + \theta_v^2)\Delta u \Delta v^3 + (\gamma_v + \gamma\theta_v)\Delta v^4] + \cdots \\ \overline{X}_4 = 1 + \frac{1}{2}(p \Delta u^2 + q \Delta v^2) + \cdots \end{cases}$$

Posto $\bar{x} = \overline{X}_1/\overline{X}_4$, $\bar{y} = \overline{X}_2/\overline{X}_4$, $\bar{z} = \overline{X}_3/\overline{X}_4$ ed eliminando fra le (3) Δu , Δv si ha lo sviluppo (in coordinate locali non omogenee)

$$(4)\quad \bar{z} = \bar{x}\bar{y} - \frac{1}{3}(\beta \bar{x}^3 + \gamma \bar{y}^3) + \left\{ \frac{2\beta\theta_u - \beta_u}{12}\bar{x}^4 - \frac{\beta_v + \beta\theta_v}{3}\bar{x}^3 \bar{y} - \frac{1}{2}\theta_{uv}\bar{x}^2\bar{y}^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma_u + \gamma\theta_u}{3}\bar{x}\bar{y}^3 + \frac{2\gamma\theta_v - \gamma_v}{12}\bar{y}^4 \right\} + \cdots$$

Questo sviluppo è valido per qualsiasi normalizzazione delle $x^{(i)}$ (4).

3. Determiniamo ora quel sistema di coordinate locali per cui lo sviluppo assume la forma canonica (2).

Si applichi il più generale cambiamento di coordinate del tipo

$$(5)\quad \begin{cases} \sigma Y_1 = a_{11}\overline{X}_1 + a_{13}\overline{X}_3 \\ \sigma Y_2 = a_{22}\overline{X}_2 + a_{23}\overline{X}_3 \\ \sigma Y_3 = a_{33}\overline{X}_3 \\ \sigma Y_4 = a_{41}\overline{X}_1 + a_{42}\overline{X}_2 + a_{43}\overline{X}_3 + \overline{X}_4 \end{cases}$$

con $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \neq 0$. Si avrà dalle (3)

$$(6)\quad \begin{cases} \sigma Y_1 = a_{11}\Delta u + \frac{1}{2}(a_{11}\theta_u \Delta u^2 + 2a_{13}\Delta u \Delta v + a_{11}\gamma \Delta v^2) + \cdots \\ \sigma Y_2 = a_{22}\Delta v + \frac{1}{2}(a_{22}\beta \Delta u^2 + 2a_{23}\Delta u \Delta v + a_{22}\theta_v \Delta v^2) + \cdots \\ \sigma Y_3 = a_{33}\left\{ \Delta u \Delta v + \frac{1}{6}(\beta \Delta u^3 + 3\theta_u \Delta u^2 \Delta v + 3\theta_v \Delta u \Delta v^2 + \gamma \Delta v^3) + \cdots \right\} \\ \sigma Y_4 = 1 + a_{41}\Delta u + a_{42}\Delta v + \cdots \end{cases}$$

(4) I calcoli accennati al n. 2, nel caso particolare in cui si parta dalle 1 nella forma canonica del Fubini per cui $\theta = \log \beta\gamma$, trovansi, ad esempio, in E. Lane, *Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Chicago, 1932, p. 70.

e posto $x = Y_1 : Y_4$, $y = Y_2 : Y_4$, $z = Y_3 : Y_4$ (5)

$$(7)\quad \begin{cases} x = a_{11}\Delta u + a_{11}\left(\frac{\theta_u}{2} - a_{41}\right)\Delta u^2 + (a_{13} - a_{11}a_{42})\,\Delta u\,\Delta v + \frac{a_{11}\gamma}{2}\Delta v^2 + \cdots \\ y = a_{22}\Delta v + \frac{a_{22}\beta}{2}\Delta u^2 + (a_{23} - a_{22}a_{41})\,\Delta u\,\Delta v + a_{22}\left(\frac{\theta_v}{2} - a_{42}\right)\Delta v^2 + \cdots \\ z = a_{33}\left\{\Delta u\,\Delta v + \frac{\beta}{6}\Delta u^3 + \left(\frac{\theta_u}{2} - a_{41}\right)\Delta u^2\,\Delta v + \left(\frac{\theta_v}{2} - a_{42}\right)\Delta u\,\Delta v^2 + \frac{\gamma}{6}\Delta v^3 + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Si imponga ora a queste coordinate di soddisfare alla (2). Si ricaverà in tal modo un sistema di equazioni nelle a_{ik} la cui risoluzione porge

$$(8)\quad \begin{cases} a_{11} = -\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} \quad , \quad a_{13} = -\frac{1}{12}\beta^{-\frac{1}{3}}\gamma^{-\frac{2}{3}}(6\beta\gamma\theta_v + 4\gamma\beta_v - \beta\gamma_v), \\ a_{22} = -\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} \quad , \quad a_{23} = -\frac{1}{12}\beta^{-\frac{2}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}(6\beta\gamma\theta_u + 4\beta\gamma_u - \beta_u\gamma), \\ a_{33} = \beta\gamma \quad , \quad a_{41} = \frac{6\beta\gamma\theta_u + 4\beta\gamma_u - \beta_u\gamma}{12\beta\gamma}, \\ a_{42} = \frac{6\beta\gamma\theta_v + 4\gamma\beta_v - \beta\gamma_v}{12\beta\gamma} \quad , \quad a_{43} = a_{41}a_{42} + \frac{\theta_{uv}}{2}. \end{cases}$$

$$(9)\quad P = -\frac{4}{3}\beta^{-\frac{5}{3}}\gamma^{-\frac{4}{3}}(2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma)\,,\quad T = -\frac{4}{3}\beta^{-\frac{4}{3}}\gamma^{-\frac{5}{3}}(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v).$$

Posto come d'abitudine

$$(10)\qquad \varphi = \log(\beta\gamma^2)_u \quad , \quad \psi = (\log\beta^2\gamma)_v$$

dalle (9) segue che la (2) equivale a

$$(11)\quad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - \frac{1}{18}(\beta\gamma)^{-\frac{1}{3}}(x^3 + y^3)(\beta^{-\frac{1}{3}}\varphi x + \gamma^{-\frac{1}{3}}\psi y) + \cdots$$

Risulta di qua che la forma canonica (2) dipende *soltanto* da β e γ (e dalle loro derivate prime) e *non* anche da θ. Poichè θ (a differenza di β, γ) dipende dal fattore di normalizzazione delle $x^{(i)}$, l'indipendenza di (2) da θ pone in rilievo che per il calcolo di (2) non occorre affatto normalizzare preventivamente le coordinate: non si otterrebbe per esempio alcun vantaggio partendo dalle *coordinate normali* del Fubini per cui $\theta = \log\beta\gamma$.

4. Per eventuali ulteriori ricerche sull'argomento, noto qui le coordinate dei punti (0, 0, 0, 1) (0, 0, 1, 0) (0, 1, 0, 0) (1, 0, 0, 0) (1, 1, 1, 1) del sistema delle Y_i che si riferisce allo sviluppo (2) quando ci si riferisca

(5) Nei calcoli che si omettono è necessario tener conto nelle (6) dei termini di grado ≤ 3 in $\Delta u, \Delta v$, per Y_1 e Y_2, di grado ≤ 4 in Y_3 e di grado ≤ 2 per Y_4.

invece al sistema delle X_i e quando si sia scelta per le (1) la normalizzazione del Fubini. Esse sono, nell'ordine indicato:

$$(12)\quad \begin{cases} [x^{(i)}], \left[-\frac{5}{12}\psi x_u^{(i)} - \frac{5}{12}\varphi x_v^{(i)} + x_{uv}^{(i)} + \left(\frac{25}{144}\varphi\psi - \frac{\theta_{uv}}{2}\right)x^{(i)}\right], \\ \qquad \left[x_v^{(i)} - \frac{5}{12}\psi x^{(i)}\right], \\ \left[x_u^{(i)} - \frac{5}{12}\varphi x^{(i)}\right], \left[-\left(\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{12}\psi\right)x_u^{(i)} - \left(\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{12}\varphi\right)x_v^{(i)} + \right. \\ \left. + x_{uv}^{(i)} + \left(\beta\gamma + \frac{5}{12}\varphi\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{12}\psi\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} + \frac{25}{144}\varphi\psi - \frac{\theta_{uv}}{2}\right)x^{(i)}\right]. \end{cases}$$

5. Lo sviluppo usato dal Wilczynski per la rappresentazione di una superficie F nell'intorno di un suo generico punto O (X = Y = Z = 0) è

$$(13)\qquad Z = XY + \frac{1}{6}(X^3 + Y^3) + \frac{1}{4!}(IX^4 + JY^4) + \cdots$$

con I, J invarianti [6]. Analogamente a quanto s'è detto al n. 3 per lo sviluppo del Bompiani, posto $X = Z_1 : Z_4$, $Y = Z_2 : Z_4$, $Z = Z_3 : Z_4$, se si applica alle coordinate locali $\overline{X}_i$ la trasformazione:

$$(14)\quad \begin{cases} \tau Z_1 = b_{11}\overline{X}_1 + b_{13}\overline{X}_3 \\ \tau Z_2 = b_{22}\overline{X}_2 + b_{23}\overline{X}_3 \\ \tau Z_3 = b_{33}\overline{X}_3 \\ \tau Z_4 = b_{41}\overline{X}_1 + b_{42}\overline{X}_2 + b_{43}\overline{X}_3 + \overline{X}_4 \end{cases}$$

dove: [7]

$$(15)\quad \begin{cases} b_{11} = -2\beta^{\frac{2}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}} \quad , \quad b_{13} = -\beta^{-\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}}(\beta_v + \beta\theta_v) \\ b_{22} = -2\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{2}{3}} \quad , \quad b_{23} = -\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}(\gamma_u + \gamma\theta_u) \\ b_{33} = 4\beta\gamma \quad , \quad b_{41} = \frac{\gamma_u + \gamma\theta_u}{2\gamma} \\ b_{42} = \frac{\beta_v + \beta\theta_v}{2\beta} \quad , \quad b_{43} = b_{41}b_{42} + \frac{\theta_{uv}}{2} \end{cases}$$

(6) V. Wilczynski, *Projective Differential Geometry of Curved Surfaces.* (Second Memoir), « American Mathematical Society Transactions », IX, 1908, p. 103.

(7) Le (14), (15), per il caso particolare in cui le (1) siano nella forma canonica di Fubini, trovansi in E. Lane, trattato citato, pp. 294-295.

si giunge appunto per la rappresentazione di F nell'intorno di O allo sviluppo (13) nel quale, tenendo presenti le (10), è

$$(16) \qquad I = -\frac{1}{2}\beta^{-\frac{2}{3}}\gamma^{-\frac{1}{3}}\varphi \quad , \quad J = -\frac{1}{2}\beta^{-\frac{1}{3}}\gamma^{-\frac{2}{3}}\psi .$$

Lo sviluppo (13), in cui ad I, J si sostituiscano i secondi membri delle (16) gode delle proprietà che, nel n. 3, si sono messe in rilievo per lo sviluppo (11). Dal confronto delle (9), (16) segue che gli invarianti I, J sono legati ai P, T dalle eguaglianze:

$$I = \frac{3}{8}P \quad , \quad J = \frac{3}{8}T .$$

Matematica (Geometria). — *Sulla determinazione del riferimento per lo studio proiettivo-differenziale delle superficie.* Nota di A. Rollero, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

1. Il problema centrale nello studio proiettivo-differenziale di una superficie F è quello di caratterizzare in modo intrinseco un riferimento proiettivo (tetraedro e punto unità) in relazione ad un suo punto generico O e ad un intorno di questo su F (o *calotta* con *centro* in O). È noto che ciò può farsi servendosi della calotta del 4° ordine σ_4 (che dà luogo inoltre a 2 invarianti). A tale scopo E. Bompiani s'è servito della considerazione degli elementi curvilinei del 4° ordine E_4, a partire da 5 dei quali la calotta è determinata, dando una effettiva costruzione di questa (cioè di tutti gli altri E_4 della calotta) [2]. Quando non si abbia in vista anche questa costruzione, ma solo quella del riferimento, al procedimento del Bompiani può sostituirsi il seguente: si considerino le quadriche aventi contatto del 2° ordine in O con F e fra esse quelle dei 3 fasci che dànno luogo a curve di intersezione con le 3 tangenti (in O) coincidenti (in quelle di Darboux). In ciascuno di questi fasci esiste (n. 2) *una* quadrica che dà luogo ad una curva di intersezione avente in O non un ramo del 3° ordine e 1ª classe (ciò che avviene in generale), ma un ramo del 1° ed uno del 2° ordine (fra loro tangenti). Le tre quadriche così individuate si tagliano ulteriormente in un punto che si trova coincidere col vertice, non situato sul piano tangente ad F in O, del tetraedro di riferimento adottato dal

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) V. E. Bompiani, *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei.* «Rend. Acc. Lincei», vol. XXV, 1937, pp. 149–154; *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* «Rend. Seminario Matematico», Università di Roma, ser. IV, vol. II, fasc. 2°, 1938, pp. 99–120).

Bompiani, tetraedro di cui vien messa così in evidenza una nuova costruzione geometrica. A queste tre quadriche era giunto E. Bortolotti [3] per altra via (considerandole come quadriche di Moutard relative alle tangenti di Darboux): ma quella qui indicata è più rapida e può forse estendersi ad altri casi.

Con gli invarianti del 4° ordine (di cui al n. 3 è data una nuova interpretazione) si definisce (n. 4) una linea della superficie luogo dei punti in cui esistono quadriche aventi in essi un'intersezione con un ramo del 3° ordine e di 2ª classe.

Il procedimento seguito si applica anche al caso del punto parabolico (n. 5) e si ritrova il riferimento già indicato da I. Popa [4].

2. Il riferimento proiettivo invariante definito da σ_4. – Una superficie F, nell'intorno di un suo punto semplice O non parabolico (e lo supporremo per rapidità di calcolo iperbolico), può rappresentarsi con uno sviluppo del tipo:

$$(1)\qquad z = axy + \frac{1}{3!}(px^3 + qy^3) + \frac{1}{4!}(Px^4 + 4Qx^3y + 6Rx^2y^2 + 4Sxy^3 + Ty^4) + \cdots$$

a condizione di prendere O come origine, il piano π tangente ad F in O come piano $z = 0$, le tangenti asintotiche t_1, t_2 in O come assi x, y, ed infine la « retta all'infinito » di $z = 0$ corrispondente dell'asse z (arbitrario) nella polarità di Darboux determinata dalla calotta σ_3. Mettendoci nel caso generale riterremo, oltre ad $a \neq 0$, anche p, q entrambi $\neq 0$. Fra le quadriche a contatto del 2° ordine con F in O:

$$(2)\qquad z = axy + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2$$

dànno luogo a curve di intersezione (con F) con punto triplo a tangenti coincidenti quelle per cui:

$$(3)\qquad \alpha_i = -\frac{\varepsilon_i^2 \sigma^2 \tau}{2a}\ , \quad \beta_i = -\frac{\varepsilon_i \sigma \tau^2}{2a}$$

e γ arbitraria, ove $\varepsilon_i^3 = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ e $\sigma = \sqrt[3]{p}$, $\tau = \sqrt[3]{q}$. La curva di intersezione di una di queste quadriche con la F è rappresentata, oltre che dalla (2), dallo sviluppo:

$$(4)\qquad \frac{1}{3!}(\varepsilon_i \sigma x + \tau y)^3 + \frac{1}{4!}[x^4(P - 4\alpha_i p) + 4x^3 y(Q - \beta_i p) + 6x^2y^2(R - 4\gamma a^2) + 4xy^3(S - \alpha_i q) + y^4(T - 4\beta_i q)] + \cdots = 0.$$

(3) V. E. Bortolotti, *Quadriche di Moutard e fascio canonico.* «Rend. Acc. Lincei», vol. XXV, 1937, pp. 158–165.

(4) V. I. Popa, *Contributo allo studio proiettivo differenziale delle singolarità. Punto di flesso e punto parabolico delle superficie.* «Rend. Seminario Matematico», Università di Roma, ser. IV, vol. II, fasc. 2°, 1938, p. 149.

Fatto sulla (4) il cambiamento di variabili: $X = x$, $Y = \varepsilon_i \sigma x + \tau y$ e applicata la condizione nota [5] affinchè questa curva abbia un ramo del 1° ed uno del 2° ordine si trova che le quadriche Q_i per cui ciò avviene si hanno per:

$$(5) \qquad \gamma_i = \frac{\varepsilon_i^2 \sigma^2 \tau (p\mathrm{T} - 4qQ) + \varepsilon_i \sigma \tau^2 (q\mathrm{P} - 4p\mathrm{S}) + 6pq\mathrm{R}}{4!\, a^2 pq}$$

e quindi sono quelle di equazioni:

$$z = axy + \frac{\mathrm{R}}{4a^2} z^2 + \frac{\varepsilon_i \sigma \tau^2 z}{2a} \left[\frac{q\mathrm{P} - 4p\mathrm{S}}{12apq} z - y \right] + \frac{\varepsilon_i^2 \sigma^2 \tau z}{2a} \left[\frac{p\mathrm{T} - 4qQ}{12apq} z - x \right].$$

Noteremo ancora che se i coefficienti della (1) verificano la:

$$(6) \qquad q(2p\mathrm{S} + q\mathrm{P})^3 = p(2qQ + p\mathrm{T})^3$$

per una (ed, in generale, una sola) delle quadriche Q_i la linea sua intersezione con F presenta in O un ramo del 3° ordine e di 2ª classe (o, eventualmente, una singolarità più elevata).

Le 3 quadriche Q_i si tagliano ancora nel punto ($\neq$ O) comune alla quadrica $4a^2 z - 4a^3 xy - \mathrm{R} z^2 = 0$ ed alla retta $(q\mathrm{P} - 4p\mathrm{S})\, z - 12apqy = (p\mathrm{T} - 4qQ)\, z - 12apqx = 0$. Scegliendo detto punto come « punto all'infinito » dell'asse z, secondo quanto s'è accennato al n. 1, si ha: $\mathrm{R} = q\mathrm{P} - 4p\mathrm{S} = p\mathrm{T} - 4qQ = 0$. Considerate inoltre le coniche intersezioni delle quadriche Q_i con il piano all'∞ [coniche che passano tutte per $A_1(1,0,0,0)$, $A_2(0,1,0,0)$, $A_3(0,0,1,0)$], si assuma quello reale fra i 3 punti loro ulteriore intersezione a 2 a 2, come punto U'(1, 1, —1, 0): il punto $U_4(1,1,1,0)$ resta determinato in conseguenza; risulterà: $p = q = 2a^2$. Assunto infine come punto unità dello spazio l'ulteriore intersezione (oltre ad O) della retta OU_4 con la quadrica di Darboux ($z = axy$) tangente in A_3 al piano all'∞, risulta $a = 1$, e pertanto è determinato il sistema di riferimento del Bompiani, rispetto al quale F è rappresentata dallo sviluppo:

$$(7) \qquad z = axy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{4!}(\mathrm{P}x + \mathrm{T}y)(x^3 + y^3) + \cdots$$

ove P, T sono invarianti.

3. Un'interpretazione degli invarianti P, T. – Si consideri la curva Γ intersezione della (7) col piano $y = 0$ (che è un piano invariante), e si consideri, in $y = 0$, quella cubica (ben determinata) a contatto del 4° ordine con Γ in O e con punto doppio in A_3 per la quale una delle

(5) Affinchè la curva $a_{03} y^3 + a_{40} x^4 + a_{31} x^3 y + \cdots = 0$ abbia in O (0, 0) un ramo del 1° ed un ramo del 2° ordine (o una singolarità più elevata) occorre sia $a_{40} = 0$, mentre affinchè abbia in O un ramo del 3° ordine e di 2ª classe (o singolarità più elevata) occorre sia $a_{40} = a_{31} = 0$.

tangenti in A_3 coincide con la retta $x_2 = x_4 = 0$ (che è una retta invariante). L'altra tangente r a detta cubica in A_3 ha le equazioni $x_2 = 8x_4 - Px_1 = 0$ e (supposto $P \neq 0$, ciò che accadrà in generale) è distinta da $x_2 = x_4 = 0$. Tenendo presente che la retta congiungente A_3 col punto unità U_2 di $y=0$ è essa pure invariante, è immediato verificare che il birapporto formato dalle 4 rette (di $y = 0$, uscenti da A_3) invarianti: A_3U_2, r, $x_2 = x_1 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$ vale $P/8$. Un significato analogo trovasi per T (intersecando F col piano $x = 0$, ecc.).

4. Definizione di una linea invariante. – La condizione (6) non è soddisfatta in un punto generico di F. Ci si può chiedere qual'è il luogo dei punti che la soddisfano. Bisogna perciò liberarsi dal riferimento locale. Rappresentata la F, non rigata, mediante le equazioni canoniche del Fubini:

$$\begin{aligned} x_{uu} &= px + \theta_u x_u + \beta x_v \\ x_{vv} &= qx + \gamma x_u + \theta_v x_v \end{aligned} \qquad (\beta\gamma \neq 0)$$

con $\theta = \lg \beta\gamma$, posto $\varphi = (\lg \beta\gamma^2)_u$, $\psi = (\lg \beta^2\gamma)_v$, è noto che nell'intorno di un suo generico punto O, F è rappresentata dallo sviluppo:

$$(8) \qquad z = xy - \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3) +$$

$$+ \frac{1}{12}(\beta\varphi x^4 - 4\beta\psi x^3 y - 6\theta_{uv} x^2 y^2 - 4\gamma\varphi xy^3 + \gamma\psi y^4) + \cdots$$

In base alla (8) la (6) equivale a:

$$\gamma\varphi^3 - \beta\psi^3 = 0.$$

Questa è l'equazione della *linea luogo dei punti* P *di* F *tali che in ciascuno di essi esiste una quadrica osculatrice la quale taglia* F *secondo una linea avente in* P *un ramo del* 3^o *ordine e di* 2^a *classe*. La linea considerata passa per gli eventuali punti biflecnodali di F.

5. Il riferimento proiettivo per un punto parabolico. – Una superficie F avente in O (0, 0, 0) un punto semplice, parabolico, assunto il piano $z = 0$ coincidente col piano tangente π ad F in O e l'asse x coincidente con l'unica tangente asintotica t ad F in O, si rappresenta mediante uno sviluppo del tipo:

$$z = a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2 y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 +$$
$$+ a_{31}x^3 y + a_{22}x^2 y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + \cdots$$

con $a_{02} \neq 0$. Nel caso generale (al quale ci riferiremo) in cui t ha con F in O contatto di ordine 2 (e non di ordine > 2), è $a_{30} \neq 0$. Assunta la

tangente t^* in O alla linea parabolica di F ($z = 3\,a_{30}\,x + a_{21}\,y = 0$) come asse y risulta $a_{21} = 0$. Esistono ∞^1 *coni*:

$$z = a_{02}\,y^2 + \frac{a_{12}}{a_{02}}\,xz + \frac{a_{03}}{a_{02}}\,yz + \lambda z^2 \tag{9}$$

a contatto del 2° ordine con F in O, ciascuno dei quali interseca F secondo una linea avente in O un punto triplo a tangenti coincidenti con t^* (in generale, anzi, detta linea intersezione presenta in O un ramo del 3° ordine e di 1ª classe). I coni (9) hanno tutti per vertice il punto $T\,(a_{02}\,,\,0\,,\,0\,,\,a_{12})$ dipendente, parzialmente, dall'intorno del 3° ordine di O su F. Preso T come vertice A_1 del tetraedro di riferimento, risulta $a_{12} = 0$. Si scelga inoltre il piano polare di $A_2\,(0\,,\,1\,,\,0\,,\,0)$ rispetto ad uno qualsiasi dei coni (9), piano che passa per t, come piano $y = 0$; segue $a_{03} = 0$. L'intorno del 4° ordine di O su F ci permette di determinare gli altri elementi del tetraedro invariante relativo all'intorno di O su F. Come è noto [6], se si proietta il ramo (cuspidale) di linea asintotica di F uscente da O su un piano generico dello spazio da un punto Ω di π si ottiene su tale piano una curva la quale presenta nel punto O' (proiezione di O) un ramo Γ' del 2° ordine e di 4ª classe. Γ', per Ω generico su π, può sostituirsi con un ramo lineare fino all'intorno del 3° ordine di O'; se Ω sta su t^*, Γ' può invece sostituirsi con un ramo lineare fino all'intorno del 4° ordine di O'. Su t^* esiste poi un punto invariante, $T^*\,(0\,,\,a_{30}\,,\,0\,,\,a_{31})$, tale che se Ω coincide con esso Γ' può sostituirsi con un ramo lineare fino all'intorno del 5° ordine di O'. Assunto T^* come vertice A_2 del tetraedro di riferimento risulta $a_{31} = 0$. Fra i coni (9) ve n'è uno:

$$z = a_{02}\,y^2 + \frac{a_{04}}{a_{02}^2}\,z^2 \tag{10}$$

per cui la linea sua intersezione con F, anzichè avere in O un sol ramo del 3° ordine, ha in O un ramo del 1° ed uno del 2° ordine (o, eventualmente una singolarità più elevata) [7]; l'intersezione del cono (10) col piano $y = 0$ (precedentemente determinato in modo invariante) è costituita dall'asse x e dalla retta $y = a_{04}\,z - a_{02}^2 = 0$: se si sceglie quest'ultima come retta all'∞ di $y = 0$, risulta $a_{04} = 0$. Assumendo infine come piano $x = 0$ il piano osculatore in O alla linea parabolica di F (piano che passa per t^* e non può coincidere con $z = 0$), è $a_{22} = 0$. Per finire di determinare il sistema di riferimento non manca che il punto unità: ebbene esiste in $y = 0$ una cubica C ($a_{30}\,z = a_{40}\,xz + a_{30}^2\,x^3$), a contatto del 4° ordine con F in O, la quale presenta in $A_3\,(0\,,\,0\,,\,1\,,\,0)$ un punto doppio tale che delle 2 tangenti a C in esso una coincide con $x_2 = x_4 = 0$:

(6) V. la mia Nota: *Considerazioni sull'intorno di un punto parabolico di una superficie*. «Le Matematiche», Catania, anno II, fasc. 1°, 1946.

(7) Il cono (10) può considerarsi pure come cono di Moutard relativo alla t^*.

l'ulteriore tangente r ($y = a_{40}\,x - a_{30} = 0$) a C in A_3, nel caso generale, che considereremo, sarà distinta da $x_2' = x_4 = 0$ e quindi si avrà $a_{40} \neq 0$. Si consideri la conica (di equazione: $a_{40}^3\,z + a_{30}^2\,a_{40}^2\,x^2 + a_{30}^3\,a_{40}\,x + a_{30}^4 = 0$) osculatrice a C in A_3 e tangente a $x_2 = x_4 = 0$: sia U' il punto in cui essa interseca l'asse $x_1 = x_2 = 0$. Assumendo come punto (1, 0, — 1, 1) il punto intersezione di r con la U' A_1 si ha $a_{30} = a_{40} = 1$. Considerando il cono (10) [la cui equazione ora si scrive: $z = a_{02}\,y^2$], non è difficile scegliere il punto unità nello spazio in modo che risulti $a_{02} = 1$.

Si è pertanto giunti, per rappresentare F nell'intorno di O, allo sviluppo del Popa:

$$z = y^2 + x^3 + x^4 + a_{13}\,xy^3 + [5]$$

ove a_{13} è invariante [8], e si sono messe in evidenza altre notevoli proprietà del tetraedro di riferimento.

Matematica (Geometria). — *Sopra alcune proprietà caratteristiche delle* V_n *totalmente geodetiche rispetto ad una* V_m *ambiente*. Nota di L. Castoldi, presentata [1] dal Corrisp. E. Bompiani.

Assegnato sopra una V_n immersa in V_m un campo di vettori u^α generalmente non tangenti a V_n, attraverso il rapporto tra il differenziale intrinseco, opportunamente definito, della proiezione di u^α su V_n e la proiezione su V_n del differenziale intrinseco di u^α (entrambi i differenziali corrispondendo ad un medesimo spostamento in V_n) si perviene ad una relazione involvente il tensore di curvatura euleriana della V_n data, da cui si deducono alcune proprietà caratteristiche delle V_n totalmente geodetiche.

1. Consideriamo una varietà metrica V_m con elemento lineare definito dalla forma differenziale quadratica

$$(1) \qquad ds^2 = e\,a_{\alpha\beta}\,dy^\alpha\,dy^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, m)\,[2].$$

(8) Il carattere invariante di a_{13} (che il Popa indica con la lettera M) è messo in rilievo, ad esempio, da quanto segue: detta Γ la curva intersezione di F col piano invariante $x = y$, v'è in detto piano una cubica R a contatto del 4° ordine con Γ in O e con punto doppio in A_3 per la quale una delle tangenti in A_3 coincide con la retta invariante $x_1 - x_2 = x_4 = 0$. L'altra tangente, s, a R in A_3 ha le equazioni: $x_1 - x_2 = x_4 - (1 + a_{13})\,x_1 = 0$ ed, in generale, è distinta da $x_1 - x_2 = x_4 = 0$. Il birapporto delle 4 rette invarianti:

$$s \;;\; x_4 = x_1 - x_2 = 0 \;;\; x_1 - x_4 = x_1 - x_2 = 0 \;;\; x_1 = x_2 = 0$$

(che appartengono ad uno stesso fascio) vale appunto $-a_{13}$.

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Adottiamo qui e nel seguito la convenzione ormai consueta di sottintendere i simboli di sommatoria quando essi abbiano per effetto la saturazione di indici tensoriali.

Il simbolo e rappresenta qui l'unità positiva o negativa secondochè, in corrispondenza dello spostamento dy^α, la forma differenziale $a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ assume valore positivo o negativo. Sulla natura di detta forma non facciamo dunque, a priori, alcuna ipotesi restrittiva.

Relazioni del tipo:

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^n) \qquad (n < m) \quad (2)$$

con caratteristica della matrice Iacobiana $\left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\|$ uguale ad n, definiscono una V_n immersa nella V_m data.

Ponendo, per uno spostamento in V_n:

$$a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad (3)$$

risulta definito il tensore metrico fondamentale in V_n

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, \partial_i y^\alpha\, \partial_j y^\beta, \qquad (4)$$

dove si è posto, secondo l'uso, $\partial_i y^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$.

Siano poi u^α le componenti controvarianti di un campo vettoriale definito nei punti di V_n ma non necessariamente tangente a V_n.

Si assume notoriamente come proiezione di u^α su V_n il vettore t_i di V_n definito da:

$$t_i = u_\alpha\, \partial_i y^\alpha, \qquad (5)$$

A chiarimento delle successive deduzioni ricordiamo anche che, dato un « tensore di relazione » tra V_m e V_n, cioè un ente tensoriale dotato contemporaneamente di indici greci e latini, che designeremo, rappresentando con una sola lettera un eventuale gruppo di indici, con $T_i^{\cdot\alpha}$, si definiscono, secondo Bortolotti (4), la derivata intrinseca $D_j T_i^{\cdot\alpha}$ e il differenziale intrinseco $DT_i^{\cdot\alpha}$ di $T_i^{\cdot\alpha}$, ponendo:

$$D_j T_i^{\cdot\alpha} = \nabla_j T_i^{\cdot(\alpha)} + \nabla_\gamma T_{(i)}^{\cdot\alpha}\, \partial_j y^\gamma - \partial_j T_i^{\cdot\alpha},$$

e

$$DT_i^{\cdot\alpha} = D_j T_i^{\cdot\alpha}\, dx^j,$$

dove dx^j rappresenta un generico spostamento in V_n e ∇_j e ∇_γ sono i simboli di derivazione covariante con rispettivo riferimento alle metriche di V_n e V_m. Ad indicare che ∇_j opera soltanto su indici latini e ∇_γ soltanto su indici greci, si sono chiusi tra parentesi nella penultima formula gli indici non interessati.

(3) In tutto il seguito indicheremo con lettere latine indici assumenti i valori $1, 2, \cdots, n$; con lettere greche indici assumenti i valori $1, 2, \cdots, m$.

(4) E. Bortolotti, *Spazi subordinati. Equazioni di Gauss e Codazzi:* « Boll. U. M. I. » (1927), pp. 134–137.

In particolare per un tensore T^α di V_m, si ha

$$D_j T^\alpha = \nabla_\gamma T^\alpha \partial_j y^\gamma ,$$

e per un tensore T_i di V_n,

$$D_j T_i = \nabla_j T_i .$$

2. Premesso ciò, prendiamo a considerare il differenziale intrinseco di u^α

$$Du^\alpha = \nabla_\gamma u^\alpha \partial_j y^\gamma \, dx^j \tag{6}$$

corrispondente allo spostamento dx^j in V_n, e prendiamone la proiezione $({}^p Du)_i$ su V_n. Otteniamo:

$$({}^p Du)_i = a_{\alpha\beta} \nabla_\gamma u^\alpha \partial_j y^\gamma \partial_i y^\beta \, dx^j . \tag{7}$$

D'altra parte la proiezione t_i di u^α su V_n è data da:

$$t_i = u_\beta \partial_i y^\beta = a_{\alpha\beta} u^\alpha \partial_i y^\beta , \tag{8}$$

e il differenziale intrinseco di t_i per lo stesso spostamento in V_n è

$$Dt_i = a_{\alpha\beta} [\nabla_\gamma u^\alpha \partial_i y^\beta \partial_j y^\gamma + u^\alpha D_j \partial_i y^\beta] \, dx^j = \tag{9}$$

$$= a_{\alpha\beta} \nabla_\gamma u^\alpha \partial_i y^\beta \partial_j y^\gamma \, dx^j + u_\beta D_j \partial_i y^\beta \, dx^j .$$

La differenza fra i due risultati (9) e (7) è:

$$Dt_i - ({}^p Du)_i = D_j \partial_i y^\beta u_\beta \, dx^j . \tag{10}$$

Le relazioni (10) stabiliscono un legame tra le proprietà di curvatura della V_n in V_m, caratterizzate dal tensore di curvatura euleriana $D_j \partial_i y^\beta$, e la differenza tra il differenziale intrinseco della proiezione di u^α su V_n e la proiezione su V_n del differenziale intrinseco di u^α.

Ce ne serviremo per stabilire alcune proprietà caratteristiche delle V_n totalmente geodetiche in V_m. Ma prima di far ciò ricordiamo che, introdotta in V_m una qualunque $(m-n)$-pla di vettori unitari $\zeta^\alpha_{\sigma/}$ $(\sigma = n+1, n+2; \cdots, m)$ ortogonali fra loro e normali a V_n, nonchè i corrispondenti tensori di curvatura $\Omega_{\sigma/ij}$, tra questi ultimi e $D_i \partial_j y^\alpha$ sussistono le relazioni

$$D_i \partial_j y^\alpha = \sum_{n+1}^{m}{}_\sigma e_\sigma \Omega_{\sigma/ij} \zeta^\alpha_{\sigma/} \tag{11}$$

e le inverse:

$$\Omega_{\sigma/ij} = D_i \partial_j y^\alpha \zeta_{\sigma/\alpha} , \tag{11'}$$

nelle prime delle quali e_σ è il valore che compete alla quantità e nella direzione di $\zeta^\alpha_{\sigma/}$.

Ne segue che le (10) si possono anche scrivere:

$$Dt_i - ({}^p Du)_i = \sum_{n+1}^{m}{}_\sigma e_\sigma \Omega_{\sigma/ij} \zeta^\beta_{\sigma/} u_\beta \, dx^j . \tag{10'}$$

3. *A*) Se u^α è tangente a V_n, si ha $\zeta^\beta_{\sigma/} u_\beta = 0 \, (\sigma = n+1, n+2, \cdots, m)$ e il secondo membro di (10′) si annulla.

Risulta dunque che:

La proiezione su V_n *del differenziale intrinseco di un vettore di* V_m *tangente a* V_n *coincide col differenziale intrinseco della proiezione del vettore stesso su* V_n (*proiezione che, in questo caso, geometricamente si identifica col vettore dato*).

Questa particolare conseguenza della (10′) è nota, del resto, dalla Geometria degli spazi di Riemann (5).

B) Tornando al caso generale contemplato dalle (10) e (10′) non ha più luogo, generalmente, la circostanza testè ricordata. Si può allora porre la questione se esistano V_n immerse in V_m e di cosiffatta natura che, qualunque siano il vettore u^α di V_m e lo spostamento dx^i in V_n, la circostanza stessa si trovi ancora verificata. Dovrà essere perciò secondo (10):

$$D_j \partial_i y^\beta u_\beta \, dx^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

qualunque siano u_β e dx^i. Ciò è ovviamente soltanto possibile se è $D_j \partial_i y^\beta = 0$ e quindi, per (11′), se è $\Omega_{\sigma/ij} = 0$, condizione che caratterizza le V_n totalmente geodetiche di V_m. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il differenziale intrinseco di un vettore u^α *qualunque di* V_m, *calcolato per un qualsivoglia spostamento in* V_n, *abbia per proiezione su* V_n *il differenziale intrinseco della proiezione di* u^α, *è che* V_n *sia totalmente geodetica.*

C) Riscriviamo la (6) scomponendovi u^α nei suoi componenti tangenziale t^α e normale n^α rispetto a V_n. Otteniamo:

$$(12) \qquad Du^\alpha = D_j u^\alpha \, dx^i = [D_j (t^k \partial_k y^\alpha) + D_j n^\alpha] \, dx^i =$$
$$= [\nabla_j t^k \partial_k y^\alpha + t^k D_j \partial_k y^\alpha + D_j n^\alpha] \, dx^i ;$$

e se, in particolare, u^α è tangente a V_n $(n^\alpha = 0)$,

$$(12') \qquad Dt^\alpha = [\nabla_j t^k \partial_k y^\alpha + t^\alpha D_j \partial_k y^\alpha] \, dx^i .$$

Se si tien conto dell'espressione (11) del tensore $D_j \partial_k y^\alpha$, da (12′) risulta immediatamente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il differenziale intrinseco per uno spostamento qualunque in V_n *di un vettore di* V_m *tangente a* V_n *sia esso stesso tangente a* V_n *è che* V_n *sia totalmente geodetica.*

D) Supponiamo ora che u^α sia normale a V_n $(t^\alpha = 0)$.

Tenendo conto che ora la proiezione t_i di u^α su V_n è nulla, e che quindi è nullo il differenziale intrinseco di t_i, l'enunciato *A*) si trasforma immediatamente nel seguente:

(5) Cfr. per esempio: L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, p. 164; e anche: L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. II, parte II, p. 458, limitatamente al caso di una ipersuperficie in V_m e di un trasporto effettuato nella direzione stessa del vettore u^α.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il differenziale intrinseco di un qualunque vettore normale a V_n *, per uno spostamento qualunque in* V_n*, risulti esso pure tangente a* V_n *, è che* V_n *sia totalmente geodetica.*

E) Nel caso che V_n sia una ipersuperficie di V_m ($n = m - 1$), si ha un'unica direzione normale a V_n e il differenziale intrinseco di un campo di vettori unitari normali ha, in ogni caso, componente nulla sulla normale stessa. In tal caso il risultato ottenuto in *D*) si trasforma nel seguente modo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un campo di vettori unitari normali a una V_{m-1}*, in* V_m *risulti un campo di vettori paralleli è che* V_{m-1} *sia totalmente geodetica in* V_m *.*

Risultato, questo, noto dalla Geometria degli spazi di Riemann.

F) Supposto ora V_n totalmente geodetica in V_m e osservato che, trasportando per parallelismo in V_m un vettore normale a V_n di un tratto infinitesimo dx^i, il corrispondente differenziale intrinseco è nullo e quindi nullo il suo componente tangenziale, si conclude facilmente che:

Il trasporto per parallelismo in V_m *di un vettore normale a una* V_n *totalmente geodetica lungo un percorso qualunque contenuto in* V_n*, mantiene il vettore normale a* V_n *.*

G) Con riferimento al risultato ottenuto in *F*) ci poniamo da ultimo la seguente questione. Assegnato un campo di vettori u^α di modulo costante (che potremo sempre supporre unitario) e normali a una V_n totalmente geodetica in V_m, determinare, se possibile, le direzioni uscenti da un punto generico di V_n lungo cui gli assegnati vettori risultino paralleli in V_m.

Le equazioni del parallelismo si deducono immediatamente da (12), ponendovi $t^k = 0$, $\nabla_j t^k = 0$ e $Du^\alpha = 0$. Si ottiene così

$$Du^\alpha \equiv D_j u^\alpha \, dx^j = 0 . \tag{13}$$

cioè un sistema di $(m - n)$ equazioni nelle n incognite dx^i.

Va però notato che $m - n - 1$ al più delle equazioni (13) sono indipendenti, giacchè, per essere costante il modulo di u^α e totalmente geodetica la V_n, il vettore Du^α ha componenti nulle sia su V_n (cfr. *D*)), sia sulla direzione normale caratterizzata da n^α, onde l'annullarsi di Du^α consegue dal solo annullarsi delle sue componenti sulle $m - n - 1$ rimanenti direzioni normali a V_n, indipendenti fra loro e da u^α. Le (13) equivalgono quindi a un sistema di $m - n - 1$ equazioni lineari omogenee nelle n incognite dx^i.

Se esso è impossibile il problema posto non ha soluzioni.

Se esso è invece risolubile rispetto alle dx^i e ammette un sistema fondamentale di p soluzioni linearmente indipendenti, se ne ricavano, tenuto conto dell'omogeneità, ∞^{p-1} direzioni di spostamento spiccate da ciascun punto di V_n, lungo ciascuna delle quali le determinazioni dei vettori u^α risultano parallele in V_m.

Notiamo che la risolubilità del sistema (13) è assicurata quando sia $m - n - 1 < n$ ossia $n > \frac{m-1}{2}$.

Attribuendo la denominazione di « direzione di parallelismo associata al vettore normale n^α » ad ogni direzione uscente da un punto P di V_n e soddisfacente alle condizioni dell'attuale problema, possiamo affermare che:

Se V_n *è una varietà totalmente geodetica in* V_m, *con* $n > \frac{m-1}{2}$, *ed* n^α *una assegnata distribuzione di vettori unitari normali a* V_n, *da ogni punto di* V_n *escono almeno* $2n - m$ *direzioni di parallelismo associate ad* n^α *in* V_m.

Nel caso di un'ipersuperficie totalmente geodetica, il sistema (13) si riduce ad una identità (per le considerazioni fatte sul numero delle (13)) e si ricade nell'enunciato *E*).

Meccanica. — *Lo stato di tensione nel guscio cilindrico presso una accidentalità strutturale o di carico.* Nota di P. Cicala, presentata [1] dal Corrisp. M. Panetti.

1. La configurazione di sforzi nel guscio cilindrico di sezione generalmente costante può essere ottenuta sovrapponendo alle tensioni indicate dalla teoria elementare, la quale postula l'esistenza di una relazione lineare fra le σ nei correnti [2] e le coordinate x, y, le perturbazioni originate dalle *accidentalità strutturali*, esistenti in corrispondenza delle sezioni dove cambiano le dimensioni di elementi strutturali, e dalle *accidentalità di carico*, esistenti presso ordinate alle quali sono applicate forze esterne.

L'esame viene qui limitato ad una accidentalità isolata, supponendo che fuori della sezione dove quella ha sede siano uniformi le dimensioni del guscio. L'applicabilità pratica dei risultati ottenibili da questa schematizzazione è giustificata dalla rapidità colla quale le perturbazioni decrescono colla distanza dalla sezione di origine.

2. Si consideri una struttura a guscio composta da due tronchi, differenti per sezione e diaframmatura, che si estendono indefinitamente con dimensioni uniformi dalle due parti di una ordinata di tipo diverso dalle altre. Attraverso la sezione nella quale cangiano le dimensioni degli elementi strutturali, corrano continui gli assi di un certo numero di correnti (almeno 3): in questa sezione siano applicati dei carichi. Nessuna altra forza sia applicata

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Per le notazioni e le ipotesi fondamentali si rinvia alla Nota: *Le tensioni caratteristiche per il guscio cilindrico.* In questi « Rendiconti », 1946, vol. I, p. 735.

in vicinanza della sezione caricata, sicchè si possa ritenere che al crescere della distanza da quella le tensioni nei correnti tendano verso le $\tilde{\sigma}$ volute dalla teoria elementare ($\tilde{\sigma}$ funzione lineare delle coordinate x, y) e così anche i flussi abbiano come distribuzione asintotica la corrispondente configurazione, che si indica coi simboli $\tilde{t}$.

Si numerino le ordinate a partire da quella caricata (ordinata O). Per $r > 0$ si scrive

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma_{i,r} = \tilde{\sigma}_{i,r} + \Sigma^{+} A \chi^{r} \varphi_i \\ t_{i,r} = \tilde{t}_{i,r} + \Sigma^{+} \dfrac{A}{a\chi} (1 - \chi) \chi^{r} \bar{t}_i \end{cases}$$

mentre le tensioni nelle ordinate si esprimono mediante la

$$(2) \qquad \sigma = \Sigma^{+} \frac{A\bar{\chi}}{a^2} \chi^{r} \bar{\sigma}$$

Le sommatorie controdistinte dal simbolo Σ^{+} si estendono a tutti i sistemi caratteristici propri del tratto $r > 0$ di struttura: ciascun addendo contiene i valori di $A, \chi, \varphi, \bar{t}, \bar{\sigma}$ che competono ad ognuno di tali sistemi. Nel tronco per il quale il numero d'ordine r delle ordinate è negativo, posto $s = -r$, si indichino con $\sigma_{1,s}, \cdots, \sigma_{m,s}$ le σ presso l'ordinata s, con $t_{1,s}, \cdots, t_{m,s}$ i flussi nei pannelli compresi fra le ordinate $s - 1$ e s. Si scrivono quindi per tale tratto espressioni analoghe alle (1)-(2) e in particolare

$$t_{i,s} = \bar{t}_{i,s} + \Sigma^{-} \frac{A}{a\chi} (1 - \chi) \chi^{s} \bar{t}_i .$$

I valori di $A, \chi, \cdots$ che figurano nelle sommatorie Σ^{-} sono in generale diversi da quelli contenuti nelle Σ^{+}.

Nella ordinata O le tensioni possono essere espresse mediante la

$$(3) \qquad \sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 + \Sigma^{+} \frac{1 - \chi}{a^2} A\bar{\sigma}_0 + \Sigma^{-} \frac{1 - \chi}{a^2} A\bar{\sigma}_0$$

essendo $\tilde{\sigma}_0$ generata dai carichi e dalle reazioni del fasciame distribuite secondo la teoria elementare, $\bar{\sigma}_0$ generata da una distribuzione tangenziale di forze $a\bar{t}$. A ciascun sistema caratteristico dei due tronchi corrisponde una differente $\bar{\sigma}_0$.

3. A definire i coefficienti A valgono le condizioni di equilibrio e di congruenza nella giunzione dei due tronchi.

Il corrente i abbia sezione F_i^{+} per $r > 0$, F_i^{-} nell'altro tronco: sia ΔS_i la differenza fra lo sforzo sopportato dalla F_i^{+} e quello relativo alla F_i^{-} in corrispondenza della loro giunzione, entrambi calcolati in base alla teoria

elementare. Sia N_i la forza ivi applicata nella direzione dell'asse del corrente. Poichè le ordinate non reagiscono fuori del loro piano deve essere

$$N_i + \Delta S_i + F_i^+ \Sigma^+ A\varphi_i - F_i^- \Sigma^- A\varphi_i = 0 . \tag{4}$$

Se Δw_i è la differenza che nella sezione suddetta si riscontra fra gli spostamenti assiali che accompagnano le tensioni $\tilde{\ }, \tilde{l}$, per la congruenza delle deformazioni risultanti deve essere

$$\Delta w_i - \frac{1}{2E} \Sigma^+ \frac{1+\chi}{1-\chi} A\, a\varphi_i - \frac{1}{2E} \Sigma^- \frac{1+\chi}{1-\chi} A\, a\varphi_i = 0 . \tag{5}$$

Se m sono i correnti che attraversano continui la sezione O, $m + h$ e $m + h'$ sono quelli che armano la sezione per $r > 0$ e risp. per $r < 0$, si dovrà scrivere la (5) per m valori di i, relativi ai correnti non interrotti, mentre la (6) valendo anche presso le troncature, darà $m + h + h'$ equazioni. Tenendo presente che le forze $N_i + \Delta S_i$ soddisfano a tre equazioni di equilibrio le quali sono anche verificate dalle tensioni caratteristiche si hanno dalle (4) $m + h + h' - 3$ equazioni indipendenti. Gli spostamenti Δw possono essere definiti a meno di un moto rigido relativo dei due tronchi e contengono quindi tre costanti arbitrarie: le (5) stabiliscono quindi $m - 3$ condizioni per le A.

Nel piano della sezione, come essa si presenta per $r > 0$, si possono dare $m + h - 3$ sistemi nulli indipendenti di flussi: applicando una di queste distribuzioni tangenziali alla ordinata O o a una di quelle a cui compete $r > 0$, vi si inducono tensioni che si indicano con $\sigma_{\eta,0}$ o risp. $\sigma_{\eta,1}$. Per la congruenza delle deformazioni dell'ordinata O e del tronco antistante deve essere

$$\int_{\Omega(0)} \sigma_0 \sigma_{\eta,0}\, dV = \Sigma^+ \frac{\bar{\chi}}{a^2} A \int_{\Omega} \bar{\sigma} \sigma_{\eta,1}\, dV \tag{6}$$

essendo l'integrale a primo membro esteso agli elementi dell'ordinata O, le σ_0 in esso contenute espresse secondo la (3). Equazioni analoghe possono scriversi in base al confronto delle deformazioni dell'ordinata O e del tronco retrostante. Variando la scelta delle tensioni σ_η si possono avere in questo caso $m + h' - 3$ equazioni, mentre $m + h - 3$ si hanno dalla (6). Complessivamente, colle (4) e (5), si ottengono $2(2m + h + h' - 3)$ equazioni lineari, sufficienti a definire la A.

4. Si consideri il caso in cui la struttura abbia la medesima sezione su tutta la sua lunghezza. Si supponga anzitutto l'ordinata O caricata nel suo piano che in tal caso è piano di simmetria per le tensioni correttive. Hanno allora ugual valore le Σ^+ e Σ^-, le incognite A si riducono a $2(m - 3)$ e restano definite dalle (5) e (6).

In particolare se entra in gioco una sola coppia di sistemi caratteristici ai quali corrispondano risp. i valori $A_I, \chi_I, \bar{\chi}_I$ e $A_{II}, \chi_{II}, \bar{\chi}_{II}$ di $A, \chi, \bar{\chi}$ mentre siano comuni i valori di $\varphi, \bar{t}, \bar{\sigma}$, si hanno le equazioni:

$$A_I \frac{1+\chi_I}{1-\chi_I} + A_{II} \frac{1+\chi_{II}}{1-\chi_{II}} = W$$

$$A_I \bar{\chi}_I - A_I k(1-\chi_I) + A_{II} \bar{\chi}_{II} - A_{II} k(1-\chi_{II}) = V$$

$$W \sum_1^m F_i \varphi_i^2 = \frac{E}{a} \sum_1^m F_i \varphi_i \Delta w_i$$

$$k \int_{\bar{\Omega}} \bar{\sigma}^2 \, dV = 2 \int_{\bar{\Omega}(o)} \bar{\sigma}_o^2 \, dV \quad , \quad V \int_{\bar{\Omega}} \bar{\sigma}^2 \, dV = a^2 \int_{\bar{\Omega}(o)} \bar{\sigma}_o \, \tilde{\sigma}_o \, dV .$$

Si trova quindi che le tensioni nei correnti nella sezione caricata e i flussi nei pannelli adiacenti di parete sono

$$\sigma_{i,o} = \tilde{\sigma}_{i,o} + \frac{(1-L'+L)(1-L+kL)W - 2LV}{1+L'+LL'+L-6L+(3-L'-L)kL} \varphi_i$$

$$t_{i,1} = \tilde{t}_{i,1} + \frac{(1-L'+L)^2 W - (3-L'-L)LV}{1+L'+LL'+L-6L+(3-L'-L)kL} \frac{\bar{t}_i}{a}$$

essendo L e L' dati dalle (11) della Nota precedente.

Si supponga in secondo luogo che i carichi siano applicati in direzione normale alla sezione O. Sempre nella ipotesi che entri in gioco una coppia di sistemi caratteristici si ha

$$A_I + A_{II} = N/2$$

$$A_I \bar{\chi}_I + A_{II} \bar{\chi}_{II} = 0$$

$$N \sum_1^m F_i \varphi_i^2 = \sum_1^m N_i \varphi_i .$$

Nella sezione O e in corrispondenza della prima ordinata si ha

$$\sigma_{i,o} = \tilde{\sigma}_{i,o} - \frac{N}{2} \varphi_i \qquad \sigma_{i,1} = \tilde{\sigma}_{i,1} - \frac{L'-2L}{1-L} \frac{N}{2} \varphi_i .$$

Se si hanno più coppie di sistemi caratteristici, per ciascuna vanno calcolati i termini corrispondenti mediante le relazioni suindicate. Le tensioni correttive $\sigma - \tilde{\sigma}$ e i corrispondenti flussi $t - \tilde{t}$ saranno rappresentati da somme estese alle coppie di sistemi in gioco.

Le espressioni valevoli per la struttura a diaframmatura continua possono essere dedotte dalle relazioni di questa Nota e della precedente facendovi tendere a zero il passo a delle ordinate.

5. Se si conoscono le tensioni $\sigma_{i,0}$ nei correnti in corrispondenza dell'ordinata O e le σ_0 negli elementi di questa, anche quando i sistemi caratteristici non formino coppie, è facile ottenere lo sviluppo delle tensioni correttive valendosi della relazione

$$A\left(\sum_1^m F_i \varphi_i^2 - \frac{\chi^2}{a^5}\int_\Omega \sigma^2 dV\right) - \sum_1^m F_i \varphi_i \sigma_{i,0} = \frac{\bar{\chi}}{a^3}\int_{\Omega_0} \bar{\sigma}_0 \sigma_0 dV$$

la quale dà il coefficiente A per il sistema caratteristico al quale si riferiscono le φ e $\bar{\sigma}$.

Geodesia. — *Superficie d'equilibrio terrestri chiuse.* Nota di M. Mineo, presentata [1] dal Socio G. Castelnuovo.

Il Pizzetti, in un importante lavoro, cerca di stabilire l'esistenza di superfici d'equilibrio terrestri *chiuse*, almeno dentro uno spazio che si estende per circa cinque volte il raggio medio terrestre al di fuori della Terra; e anche (con qualche ipotesi sulla densità degli strati terrestri) al di dentro della Terra, fino a una profondità almeno di 600 chilometri [2]. A questo scopo il Pizzetti è portato a valutare la derivata rispetto al raggio vettore del potenziale totale terrestre, e trova per esempio che lungo il segmento di raggio vettore compreso tra due sfere concentriche, tutt'e due esterne alla Terra, il detto potenziale è funzione decrescente del raggio vettore stesso. Ma ciò evidentemente non basta per concludere l'esistenza, nello strato sferico, di infinite superficie d'equilibrio chiuse. Il Pizzetti trova che il potenziale è maggiore d'un certo valore c sulla superficie sferica interna dello strato mentre è minore di c sulla superficie sferica esterna: e con ciò non si può concludere altro che la superficie d'equilibrio di potenziale costante c, *e questa soltanto*, è chiusa e tutta interna allo strato. In sostanza, la condizione che il potenziale sia minore di c sulla superficie esterna dello strato sferico e maggiore di c sulla superficie interna, non è soltanto sufficiente, ma anche necessaria, perchè la superficie d'equilibrio di potenziale c cada nell'interno dello strato. E affinchè nello strato cadano infinite superfici d'equilibrio, detto c_1 il minimo valore che il potenziale assume sulla superficie interna dello strato e c_2 il massimo valore che il potenziale assume sulla superficie esterna, occorre e basta si abbia $c_1 > c_2$: e nello strato cadranno tutte le superfici d'equilibrio di potenziale compreso tra c_2 e c_1.

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Vedi Pizzetti, *Un principio fondamentale nello studio delle superficie di livello terrestri*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», Classe di Sc. fis. mat. e nat., vol. X, luglio 1901, pp. 35-39. E anche: *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*, Pisa, Spoerri, 1913, pp. 16-19. In questo trattato il Pizzetti accenna soltanto al caso delle superfici chiuse nell'*interno* della Terra, ma non riporta il calcolo fatto nella precedente Nota.

Nel caso dello strato esterno alla Terra, è però possibile trovare un intervallo così fatto, e resta quindi effettivamente dimostrata l'esistenza d'infinite superfici d'equilibrio esterne chiuse.

In quanto allo strato interno alla Terra, la valutazione della predetta derivata del potenziale, fatta dal Pizzetti con considerazioni intuitive, lascia a desiderare; e io, per togliere ogni dubbio su una questione tanto importante, ho dato l'espressione rigorosa di quella derivata, allo scopo di assegnare uno strato interno dentro cui la funzione potenziale sia monotòna. Quanto a dimostrare l'effettiva esistenza di superfici d'equilibrio interne al detto strato, è necessario fare i conti con le densità interne terrestri e le conclusioni restano sempre problematiche.

1. Il Pizzetti fonda le sue deduzioni su due fatti.

a) La superficie materiale del globo è poco differente da una sfera, nel senso che si può assumere sull'asse della rotazione diurna un punto G tale che le distanze massima e minima di G dalla superficie differiscano dalla distanza media R_m (raggio d'una sfera di volume eguale a quello della Terra) di meno di un centesimo di R_m. (Questo fatto risulta particolarmente dalla misura delle parallassi lunari).

b) Detta R_1 la massima distanza di G dalla superficie, M la massa totale della Terra, f la costante dell'attrazione universale, ω la velocità angolare costante della Terra attorno al suo asse, si può scrivere [3]:

$$\frac{\omega^2 R_1^3}{fM} \cong \frac{1}{288}. \tag{1}$$

Ciò posto, si assuma G come polo e l'asse della rotazione diurna (orientato positivamente, per esempio, verso il polo boreale celeste) come asse polare di coordinate polari di spazio r, θ, φ. Il potenziale totale terrestre W, in un punto P (a, θ_0, φ_0) è dato da

$$W(P) = \int_\tau \frac{k\, d\tau}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma}} + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \operatorname{sen}^2\theta_0, \tag{2}$$

essendo

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0), \quad d\tau = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

e $k(r, \theta, \varphi)$ la densità.

Le superfici d'equilibrio terrestri non sono altro che le

$$W = \text{costante}.$$

(3) Il Pizzetti deduce il valore del rapporto $\omega^2 R_m^2 : fM$ dagli elementi del moto della Luna attorno alla Terra, e lo trova eguale a circa 1 : 289. Tenendo conto della condizione *a*, si deduce la (1).

Dalla (2) si deduce

$$(3) \qquad \frac{\partial W(P)}{\partial a} = -f\int_{\tau} \frac{k(a - r\cos\gamma)\,d\tau}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} + \omega^2 a \operatorname{sen}^2\theta_0,$$

dove l'integrale s'intende esteso a tutto il volume racchiuso dalla sfera di centro G e raggio R_1 (comprendente tutte le masse terrestri e quindi spazi, in prossimità della superficie, nei quali la densità è nulla).

2. Caso dei punti esterni ($a > R_1$). — In questo caso la funzione

$$\frac{a - r\cos\gamma}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}},$$

positiva in tutti i punti del dominio rettangolare

$$0 \leq \gamma \leq \pi \quad , \quad 0 \leq r \leq R_1,$$

possiede derivate parziali prime che non hanno zeri comuni in punti interni al dominio stesso; ed è quindi facile concludere che il suo massimo e il suo minimo sono

$$\frac{1}{(a - R_1)^2} \quad , \quad \frac{1}{(a + R_1)^2}.$$

Pertanto dalla (3) si deduce

$$(4) \qquad \frac{\partial W(P)}{\partial a} < -\frac{fM}{(a + R_1)^2} + \omega^2 a.$$

Poniamo

$$(5) \qquad a = \xi R_1 \quad (\xi > 1).$$

Segue

$$\frac{\partial W(P)}{\partial a} < -\frac{fM}{R_1^2(1 + \xi)^2} + \omega^2 \xi R_1,$$

e anche, tenendo conto della (1):

$$(6) \qquad \frac{R_1^2}{fM}\frac{\partial W(P)}{\partial a} < -\frac{1}{(1 + \xi)^2} + \frac{\xi}{288}.$$

Poichè il 1° membro della (6) è negativo per ξ compreso tra 1 e 5·9, si conclude che su ogni raggio vettore uscente da G la W (P) è funzione decrescente di a, nel tratto compreso tra la sfera di raggio R_1 e la sfera di raggio $5{\cdot}9\,R_1$. Ora, per $a > R_1$, si ha dalla (2):

$$\frac{fM}{a - R_1} + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \operatorname{sen}^2\theta_0 > W(P) > \frac{fM}{a + R_1} + \frac{1}{2}\omega^2 a^2 \operatorname{sen}^2\theta_0;$$

e la seconda diseguaglianza vale anche per $a = R_1$. Segue che in un punto qualunque P della sfera di centro G e di raggio R_1, si ha

$$W(P) > \frac{fM}{2R_1},$$

mentre in un punto qualunque Q della sfera di centro G e di raggio $a = 5R_1$, tenendo conto della (1), si ha

$$W(Q) < \frac{fM}{4R_1} + \frac{25}{2}\omega^2 R_1^2 = \frac{fM}{2R_1}\left(\frac{1}{2} + 25\frac{\omega^2 R_1^3}{fM}\right) = \frac{169}{288}\left(\frac{fM}{2R_1}\right).$$

Se ne conclude l'esistenza d'infinite superfici d'equilibrio chiuse, tutte comprese nello strato sferico limitato dalle due sfere di raggi R_1 e $5R_1$, ognuna delle quali incontra una e una sola volta ogni raggio uscente da G (ma che non riempiono, naturalmente, se non una parte dello strato): sono le superfici d'equilibrio di potenziale compreso tra $169\,fM : 2\times 288\,R_1$ e $fM : 2R_1$ (4).

3. Caso dei punti interni ($a < R_1$). – Assumiamo come nuovo asse polare il raggio che va dal punto G al punto potenziato P (a, θ_0, φ_0); sarà allora γ la nuova colatitudine del punto generico potenziante. Chiamando w la nuova longitudine del detto punto, la (3) si può scrivere

$$(7)\qquad \frac{\partial W(P)}{\partial a} = -f\int_{\tau}\frac{k(a - r\cos\gamma)\,r^2\,\operatorname{sen}\gamma\,dr\,d\gamma\,dw}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} + \omega^2 a\,\operatorname{sen}^2\theta_0.$$

Si consideri il piano tangente nel punto potenziato P alla sfera di raggio a, e sia C il punto in cui il raggio GP incontra la sfera di raggio R_1. Il volume τ limitato dalla sfera di raggio R_1 si compone del volume τ_1 racchiuso dal segmento sferico a una base determinato dal piano tangente predetto e dalla calotta sferica di centro C, del volume τ_2 racchiuso dalla sfera di raggio a e del volume residuo τ_3 (differenza tra lo strato sferico compreso tra le due sfere di raggi a e R_1 e il segmento a una base predetto). Ora (a parte la densità k, che naturalmente riteniamo non mai negativa), in τ_1, la quantità sotto il segno integrale del 2° membro della (7) è non mai positiva, mentre, in τ_2 e in τ_3, è non mai negativa. Applicando il primo teorema della media, in ciascuno dei tre domini, tenendo presente che

$$(8)\qquad \int\frac{(a - r\cos\gamma)\operatorname{sen}\gamma\,d\gamma}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}} = \frac{r - a\cos\gamma}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\gamma)^{1/2}} + \text{costante},$$

(4) Il Pizzetti si limita a dedurre $W(Q) < fM : 2R_1$, e allora non si può concludere che l'esistenza della sola superficie chiusa $W = fM : 2R_1$.

si deduce:

$$(9)\qquad \frac{\partial W(P)}{\partial a} = -\frac{2\pi f(R_1 - a)}{3a^2}\left\{ R_1^2 + R_1 a + a^2 - \right.$$

$$\left. - (R_1 + a)\sqrt{R_1^2 - a^2}\right\}(k_3 - k_1) - 4\pi f a k_2 + \omega^2 a \operatorname{sen}^2\theta_0 ,$$

dove k_1, k_2, k_3 sono valori incogniti della densità in certi punti rispettivamente di τ_1, τ_2, τ_3 (*valori incogniti dipendenti anche dal punto potenziato*).

Ora si ha:

$$0 < R_1^2 + R_1 a + a^2 - (R_1 + a)\sqrt{R_1^2 - a^2} < (R_1 + 2a)\, a ,$$

sicchè si deduce

$$(10)\qquad \frac{\partial W(P)}{\partial a} < 2\pi f \frac{(R_1 - a)(R_1 + 2a)}{3a} k_1 - \frac{4}{3}\pi f a k_2 + \omega^2 a .$$

Ora, per andare avanti, occorre fare qualche ipotesi (quanto più generale sia possibile) sulle densità. Io supporrò che, a profondità non maggiore di $R_1 - a$, cioè nello strato compreso tra le sfere di raggi a e R_1, la densità non superi $\alpha - \beta\,(a : R_1)$, mentre nella sfera di raggio a non sia inferiore allo stesso valore ($\alpha = 14{\cdot}06$, $\beta = 11{\cdot}34$). (Questi limiti vengono da una formola di Lipschitz). In questa ipotesi si può scrivere

$$(11)\qquad \frac{\partial W(P)}{\partial a} < 2\pi f \frac{(R_1 - a)(R_1 + 2a)}{3a}\left(\alpha - \beta\frac{a}{R_1}\right) -$$

$$- \frac{4}{3}\pi f a\left(\alpha - \beta\frac{R_1}{a}\right) + \omega^2 a .$$

Poniamo

$$R_1 - a = \eta R_1 \qquad (0 < \eta < 1).$$

Passando ai numeri e ponendo

$$M = \frac{4}{3}\pi R_1^3 k_m \qquad (k_m = 5{\cdot}56),$$

si trova:

$$\frac{R_1^2}{fM}\frac{\partial W(P)}{\partial a} < \frac{14{\cdot}06 - 11{\cdot}34\,(1 - \eta)}{11{\cdot}12}\,\frac{\eta(7 - 4\eta) - 2}{1 - \eta} + \frac{1}{288}(1 - \eta).$$

Si trova che il 2° membro della precedente diseguaglianza è negativo per η compreso nell'intervallo $(0, 0{\cdot}3)$, e quindi W (P) funzione decrescente di a fino a una profondità (a partire dalla sfera di raggio R_1) di circa 1911 chilometri, cioè più che tripla di quella calcolata dal Pizzetti (il che si deve soprattutto alla stima *grosso modo* ch'egli fece della derivata di W rispetto ad a). Ma ora si tratterebbe di determinare un limite inferiore di W (non molto discosto dal minimo) sulla superficie sferica di raggio $a = 0{\cdot}7\, R_1$,

e un limite superiore (non molto discosto dal massimo) di W sulla sfera di raggio R_1. Ora noi abbiamo sulle dette sfere:

$$W(0{\cdot}7\,R_1) = \frac{4}{3}(0{\cdot}7)^2\pi f R_1^2 k^* + 2\pi f R_1^2(1 - 0{\cdot}7^2)\,k^{**} + \frac{1}{2}\omega^2 R_1^2 (0{\cdot}7)^2 \operatorname{sen}^2\theta_0,$$

$$W(R_1) = \frac{4}{3}\pi f R_1^2 k^{***} + \frac{1}{2}\omega^2 R_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_0,$$

essendo k^*, k^{**} e k^{***} tre incogniti valori della densità rispettivamente nella sfera di raggio $0{\cdot}7\,R_1$, nello strato sferico compreso tra questa sfera e la sfera di raggio R_1, e nell'intera sfera di raggio R_1.

Si possono certamente fare delle ipotesi, più o meno arbitrarie, su questi incogniti valori della densità, in modo che un limite inferiore di W sulla sfera interna dello strato risulti superiore a un limite superiore di W sulla sfera esterna dello strato stesso, cioè in modo da potere affermare l'esistenza di superfici d'equilibrio chiuse nell'interno dello strato; ma qui ce ne dispensiamo.

Fisica. — *Sullo spettro dei raggi* β *del potassio.* Nota [1] di S. Franchetti e M. Giovannozzi, presentata dal Corrisp. L. Tieri.

La radioattività del potassio è stata oggetto di numerose ricerche [2] che hanno stabilito quale sia l'isotopo radioattivo (K^{40}, Smythe e Hemmendinger, 1937) [3] e, approssimativamente, il valore vero della costante di disintegrazione (cioè il valore riferito al contenuto di K^{40}, $\lambda = (1{,}32 \pm 0{,}40)\ 10^{-17}\ \text{sec}^{-1}$) [4].

Pochissimo invece è noto sullo spettro energetico degli elettroni emessi, sia per quanto riguarda la forma della distribuzione che il limite superiore dell'energia. Riguardo alla prima era ritenuto trattarsi di due bande (su i 400 ekV e su gli 800–900 ekV). Quanto al secondo, si hanno il dato di Libby e Lee [5] 725 ± 100 ekV e quello di Anderson e Neddermeyer [6] (> 700 ekV).

(1) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1946.

(2) Una buona bibliografia sull'argomento è stata pubblicata da G. Frongia, «N. Cim.», *17*, 139 (1940).

(3) Smythe e Hemmendinger, «Phys. Rev.», *51*, 146 (1937).

(4) Media dei lati di Mühlhoff, «Ann. der Phys.», 7, 205 (1930) e di Bramley e Brewer, «Phys. Rev.», *53*, 502 (1938); percentuale del K^{40} desunta da Nier, «Phys. Rev.», *50*, 1041 (1935).

(5) Libby e Lee, «Phys. Rev.», *55*, 281 (1939).

(6) Anderson e Neddermeyer, «Phys. Rev.», *45*, 653 (1934).

Una ricerca accurata era stata intrapresa da D. Bocciarelli [7] con un metodo che si potrebbe chiamare spettrometro magnetico integrale, il quale aveva già dato buoni resultati per il rubidio [8], ma non riuscì esauriente per l'insufficienza del magnete, col quale soltanto la parte di bassa energia dello spettro ($H\rho < 2200$) poté venire studiata.

Dato l'interesse che presenta il potassio, come il più leggero degli elementi naturalmente radioattivi, questa lacuna nella conoscenza dello spettro energetico è senza dubbio da attribuire alle difficoltà che presenta lo studio di un'attività così debole.

Due metodi possono essere adoperati allo scopo di ottenere una curva « differenziale »: spettrometro magnetico a forte rendimento (e quindi modesto potere risolutivo) con rivelazione a contatore [9], oppure camera di Wilson con campo magnetico, la quale ha il vantaggio di permettere di lavorare con sorgenti molto estese senza compromettere in proporzione il potere risolutivo. Avendo a disposizione un'ordinaria camera a pistone di 16 cm di diametro, è stata utilizzata questa.

In entrambi i casi sarebbe molto difficile poter lavorare con sorgenti abbastanza leggere da non alterare lo spettro, nella regione delle basse energie, a causa del frenamento e della diffusione degli elettroni nella sorgente stessa e nel suo sostegno. Soltanto sulla parte più energetica dello spettro, al di sopra di circa 10^6 eV, si può sperare di avere dati quantitativamente accettabili sulla forma del medesimo. D'altra parte questa perturbazione dovrebbe influire poco sul punto di fine della curva che è uno dei dati più importanti.

Nella nostra ricerca il sale di potassio (cloruro « garantiert rein » di Merck) era depositato su un nastro di rame di 3 cm di altezza disposto all'interno della camera parallelamente alla parete laterale di questa per tre quarti del suo giro, cioè lasciando libero solo lo spazio necessario all'illuminazione. Lo strato era di 31 mg/cm^2, ciò che assicurava la media di circa una traccia per espansione.

Il campo magnetico deflettore era fornito da due bobine di Helmholtz coassiali con la camera, aventi circa 600 spire l'una e 35 cm di diametro medio, le quali con 15 ampère di corrente davano un campo di 450 oersted con una omogeneità superiore all'1 % in tutta la camera.

La determinazione di questo campo è stata eseguita con due metodi indipendenti e cioè 1°, con un galvanometro balistico, misurando variazioni di flusso attraverso una bobina esploratrice nota (in serie con una forte resistenza) e 2°, con un magnetometro sul quale si faceva agire il campo da misurare e un secondo campo noto prodotto da un piccolo avvolgimento

(7) D. Bocciarelli, « Rend. Linc. », *XV*, (6ª), 686 (1932).

(8) G. Occhialini, « Rend. Linc. » *XIV*, (6ª), 103 (1931).

(9) Ad esempio sul tipo di quello adoperato da Alichanian e collab., descritto in « Phys. Zeits. d. Sow. Un. », *11*, 204 (1937).

percorso da corrente nota. I resultati sono stati concordi dentro il 2 %, approssimazione sufficiente per il nostro scopo.

Come mezzo di illuminazione abbiamo adoperato un arco a carboni intensivi survoltato al momento della fotografia (circa 150 ampère con 5–6 kw).

Le fotografie erano prese a circa 40 cm di distanza dalla camera, in direzione dell'asse di questa con una Leica, obiettivo Summar 1 : 2, su pellicola Kodak Super X.

Tutto il dispositivo era automatizzato mediante un sistema di relais comandati da 8 ruote coassiali (compienti un giro in circa 1 minuto primo) con diverse camme che azionavano degli interruttori in olio.

Le fotografie vennero studiate proiettandole mediante un ingranditore fotografico e determinando la curvatura delle tracce per confronto con un disegno di cerchi concentrici.

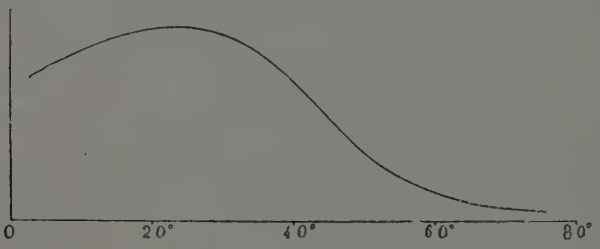


Fig. 1.

Trattandosi di un'attività così debole, non ci siamo contentati di studiare soltanto le tracce ottenute in presenza del KCl, ma abbiamo voluto determinare l'effetto di sfondo, cioè la ripartizione delle tracce ottenute in assenza di KCl e che sarebbero state attribuite al KCl se presente. (Raggi cosmici molli, elettroni dal potassio dei vetri della camera). L'effetto netto si è ottenuto sottraendo per ogni intervallo energetico dal numero di tracce osservate l'effetto di sfondo « normalizzato » riportandolo a egual numero di espansioni.

Circa la scelta dell'intervallo di raggruppamento delle tracce, siamo partiti dal criterio di prendere un intervallo che fosse dell'ordine di grandezza della perdita massima di energia che l'elettrone subisce nell'attraversare lo strato attivo (in assenza di diffusioni eccezionali sotto grandi angoli). Questa dipende un poco dall'energia iniziale (cosa che abbiamo trascurato prendendo il frenamento press'a poco costante che si ha fra $5 \cdot 10^5$ e $2 \cdot 10^6$ eV) e dall'angolo φ della traiettoria rispetto alla normale allo strato. Per fissare almeno approssimativamente un angolo massimo abbiamo fatto una statistica su un certo numero di tracce coi resultati riportati in fig. 1. Come angolo massimo abbiamo preso l'angolo di 45° che corrisponde circa al flesso

della curva. Ciò porta i 31 mg/cm² a 44 mg/cm² effettivi, corrispondenti a una perdita di 10^5 eV. L'intervallo effettivo adoperato è resultato poi ancora leggermente maggiore, in seguito a una rideterminazione accurata del campo magnetico.

I resultati, che rappresentano i dati greggi della nostra ricerca, sono contenuti nella tabella I.

Tabella I.

Limite superiore dell'intervallo d'energia	Effetto totale	Effetto di sfondo	Effetto di sfondo normalizzato	Effetto netto
1,07 10^5 eV	40	4	7	33
2,13	98	11	18	80
3,25	158	8	13	145
4,32	121	9	15	106
5,32	135	3	5	130
6,40	129	6	10	119
7,45	94	2	3	91
8,46	71	5	8	63
9,52	50	4	7	44
10,50	48	—	—	48
11,6	26	1	2	24
12,7	27	4	7	20
13,7	13	1	2	11
14,8	5	—	—	5
15,8	2	—	—	2
16,8	4	1	2	2
17,9	1	1	2	0

Evidentemente una scelta così fatta dell'intervallo tende a sottovalutare gli effetti della diffusione nella parte iniziale della curva, ma non nella parte importante, cioè per alte energie, quando la diffusione degli elettroni è un processo molto meno fluttuante.

Oltre a questa causa d'incertezza nella valutazione dell'energia iniziale dell'elettrone, c'è quella che proviene dal fatto che dalla curvatura si può risalire all'energia solo se la traiettoria è perpendicolare al campo magnetico. In caso contrario la traiettoria, trascurando il frenamento nel gas, è un'elica cilindrica e non più una circonferenza, ossia esiste una componente

della velocità parallela al campo che resta ignorata. Non avendo ritenuto opportuno complicare il lavoro col prendere fotografie stereoscopiche, ci siamo regolati così da contenere l'errore in limiti noti col misurare soltanto quelle tracce la cui lunghezza superava un minimo che per ogni intervallo d'energia era calcolato in modo da ridurre l'incertezza al disotto di un massimo del 10 °/₀ dell'energia misurata.

La lunghezza minima delle tracce di data energia da prendere in considerazione a questo proposito, è stata valutata nel modo seguente. Le formule del raggio di curvatura e dell'energia di un elettrone relativistico animato da una velocità di modulo v (costante), in un campo magnetico uniforme di intensità H, sono rispettivamente:

$$r = \frac{a}{c} \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \operatorname{sen} \theta$$

$$E = m_0 c^2 \left(\frac{\sqrt{r^2 + \alpha^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}{\alpha \operatorname{sen} \theta} - 1 \right)$$

dove θ è l'angolo formato dalla direzione della velocità con la giacitura normale al campo e dove è $\alpha = \frac{m_0 c^2}{e H}$. Se il valore di sen θ è noto con l'indeterminazione Δ sen θ, l'indeterminazione di E che ne deriva è ovviamente:

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial \beta^2} \frac{\partial \beta^2}{\operatorname{sen} \theta} \Delta \operatorname{sen} \theta$$

Tenendo conto delle precedenti e ponendo $\theta = 0$, si ricava per il nostro caso

$$\Delta \operatorname{sen} \theta = \frac{\Delta E}{E} \frac{r^2 + \alpha^2 - \alpha (r^2 + \alpha^2)^{1/2}}{r^2}.$$

Agli effetti dell'esame di fotografie non stereoscopiche in camera di Wilson occorre riferirsi alla proiezione, su un piano normale al campo, dell'arco di traiettoria compreso fra due piani fissi, pure normali al campo, che limitano la zona illuminata. Indicando con h la distanza fra questi piani e con λ il limite superiore richiesto per l'errore relativo dell'energia, la lunghezza s' della suddetta proiezione dovrà soddisfare alla limitazione:

$$s' \geqq h \operatorname{tang} \operatorname{arc\,sen} \left(1 - \lambda \frac{r^2 + \alpha^2 - \alpha (r^2 + \alpha^2)^{1/2}}{r^2} \right)$$

L'errore ε_r nella determinazione dell'energia dovuto al frenamento e quello ε_i dovuto all'inclinazione della traiettoria hanno sempre lo stesso segno (negativo) e i loro valori oscillano, con ripartizioni uniformi, fra 0 e due massimi $(\Delta E)_f$ e $(\Delta E)_i$ che possono venire approssimativamente valutati. In altri termini gli errori su una singola determinazione dovuti alle due cause ora dette avranno per espressioni:

$$-\varepsilon_f = \frac{1}{2}(\Delta E)_f + \sigma_f \frac{1}{2}(\Delta E)_f \qquad -1 < \sigma_f < 1$$

$$-\varepsilon_i = \frac{1}{2}(\Delta E)_i + \sigma_i \frac{1}{2}(\Delta E)_i \qquad -1 < \sigma_i < 1$$

con i σ che variano uniformemente fra i loro limiti.

Questi errori, o meglio le parti variabili di essi, si combinano con quello derivante dalla discontinuità della scala delle energie, che agisce come un'indeterminazione (in più o in meno) compresa – con ripartizione uniforme – fra 0 e $\frac{1}{2}\Delta$, dove Δ è l'ampiezza dell'intervallo di raggruppamento.

Si vede che l'errore totale si compone di uno spostamento costante dato da $-\frac{1}{2}\left[(\Delta E)_f + (\Delta E)_i\right]$ al quale si somma un errore in più o in meno il cui valore medio sarà dato sensibilmente da

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta E)_f^2 + (\Delta E)_i^2 + \Delta^2}$$

$(\Delta E)_f$ (cioè il frenamento massimo) è stato calcolato, come più sopra si è detto, in 10^5 eV. Tale è pure approssimativamente il valore di Δ, mentre $(\Delta E)_i$ vale, come si è già avvertito, il 10 % dell'energia misurata E.

Il tener conto di questo errore è molto importante se si vuole ottenere dai dati greggi della tabella I la forma corretta dello spettro energetico. Infatti questo errore « in ascissa » sposta il centro dell'intervallo d'energia cui appartengono le tracce classificate e inoltre amplia l'intervallo medesimo, cosicchè occorre ridurre l'ordinata nel rapporto fra intervallo teorico e intervallo effettivo.

Evidentemente, tracciando così lo spettro si sposterebbe a destra il punto di fine (ultimi uno o due punti). Ma il metodo adoperato (vedi oltre) che fissa il punto di fine dalla posizione degli ultimi *sei* o *sette* punti della curva esclude questo errore.

Oltre all'errore in « ascissa » abbiamo l'errore « in ordinata » dovuto alla fluttuazione statistica (dell'effetto totale e dell'effetto di sfondo). Tenuto conto di queste considerazioni, si arriva a rappresentare lo spettro col diagramma in fig. 2, dove le dimensioni dei rettangoli rappresentano gli errori.

Come si vede, l'aspetto generale qualitativo è quello di tutti gli spettri β continui. Il punto di fine sembra trovarsi fra 1,6 e 2,0 10^6 eV.

Per controllo più preciso del punto di fine e per verificare l'applicabilità al potassio delle teorie sull'emissione β, abbiamo voluto applicare il metodo di rappresentazione di Kurie [10], nella modifica dovuta a Van der Held [11], con la quale la curva di ripartizione dell'energia si trasforma in

(10) Kurie, Richardson, Paxton, « Phys. Rev. », *49*, 373 (1936).
(11) Van der Held, « Physica », *VIII*, 196 (1941).

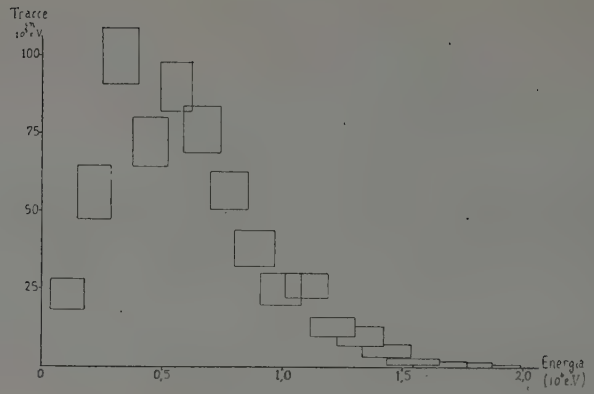


Fig. 2

una retta. L'ordinata in questa rappresentazione è la radice quadrata del rapporto fra il numero di tracce per intervallo unitario e una funzione f_c (W) che si può calcolare con i dati e le tabelle di Van der Held e che discende dalle teorie combinate di Fermi e Konopinski–Uhlenbeck. L'ascissa W è l'energia – compresavi l'energia di riposo – espressa in unità $m_0 c^2$.

Il resultato è contenuto nella fig. 3 e conduce ad attribuire al punto di fine dello spettro il valore

$$E_0 = 1,7 \cdot 10^6 \text{ e V}$$

che, dall'incertezza con la quale si può tracciare la retta–limite, riteniamo approssimato a circa $\pm$ 10^5 eV.

La deviazione sistematica dalla rettilineità che si ha andando verso le basse energie è dovuta con ogni verosimiglianza all'effetto già previsto della

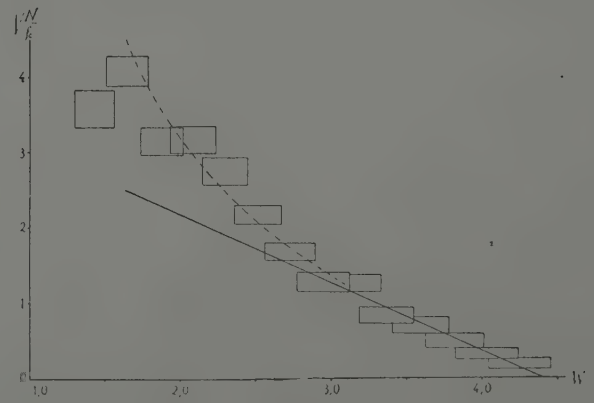


Fig. 3

diffusione degli elettroni nella sorgente. (La diminuzione verso le energie bassissime è certamente dovuta al fatto che qui le tracce diventano troppo irregolari per poter essere misurate). Van der Held stesso servendosi dei dati di Tyler [12] relativi a sorgenti di Cu radioattivo di vario spessore, ha mostrato che deviazioni di questo preciso tipo hanno luogo con sorgenti spesse (cfr. Van der Held, loc. cit., fig. 11 e specialmente la curva per 23 mg/cm^2). Non è quindi il caso di pensare a una seconda banda dello spettro del K con limite d'energia verso 10^6 eV, come potrebbe sembrare a prima vista.

Come si vede, il dato nuovo che emerge dalla nostra ricerca è che il limite d'energia per lo spettro del potassio è assai più elevato di quello che si riteneva. Benchè, come ora diremo, la cosa non sia sorprendente, abbiamo voluto accertare se nel KCl adoperato non fossero contenute tracce di sostanze radioattive delle famiglie dell'U, Ac, Th che potessero aver falsato i resultati.

Per questo, dopo che una prova in bianco aveva dato esito negativo, abbiamo precipitato in una soluzione contenente alcuni grammi del KCl, una piccola quantità di $BaSO_4$ come trascinatore del Ra e dei suoi isotopi. Questo piccolo precipitato è stato portato nella camera distribuendolo su una superficie tale che lo spessore fosse dell'ordine di 1 mg/cm^2. Su un centinaio di espansioni non abbiamo osservato alcuna particella α. Questo esclude la presenza, in quantità capaci di disturbare, di tutti gli elementi a emissione β che seguono Ra, ThX e AcX.

Per avere una sicurezza ancora maggiore abbiamo voluto escludere anche l'improbabile presenza di U, Th e loro isotopi (che possono creare dei β-emitters disturbatori). Per questo – previa prova in bianco – abbiamo aggiunto alla soluzione di KCl una piccola quantità dosata di Na_2CO_3 e abbiamo precipitato con eccesso di $BaBr_2$ a freddo. Tanto U che Th vengono in queste condizioni precipitati quantitativamente [13]. Il precipitato esaminato come il precedente ha dato un'unica particella α su 100 espansioni, corrispondente, nelle condizioni della prova, a un'attività dell'ordine dell'1 % di quella trovata per il potassio.

Il fatto che il limite dello spettro β sia superiore a quello comunemente indicato, non è sorprendente – come accennavamo – se si pensa che diversi ricercatori hanno accertato – dopo la segnalazione fattane da Kolhörster [14] – l'esistenza di raggi γ di grande energia emessi dal potassio, secondo Gray e Tarrant [15], una volta su circa 30 disintegrazioni. Questi raggi γ sono

(12) Tyler, «Phys. Rev.», *56*, 125 (1939).

(13) Il metodo devia un po' dall'usuale trascinamento, perchè la sostanza che si cerca di trascinare ha una struttura chimica diversa da quella della massa del precipitato, ma non è il caso di preoccuparsi perchè data la debole attività di U e Th occorrono quantità rangiungibili dagli ordinari metodi analitici per portare un serio errore nei resultati.

(14) Kolhörster, «Naturwiss.», *16*, 28 (1928).

(15) Gray e Tarrant, «Proc. Roy. Soc.», *143*, 695 (1934).

stati studiati in assorbimento e trovati *monocromatici* [16]. Le misure del coefficiente di assorbimento in Pb hanno dato:

Mühlhoff [17]	0,51 cm^{-1}
Behounek [18]	0,58
Greeves [19]	0,60
Gray e Tarrant [15]	0,54

Per risalire dall'assorbimento all'energia, ci si può servire del lavoro di Gentner [20] oppure dei dati di Heitler [21] e si ottiene, senza pretendere una troppo grande precisione

Mühlhoff	$E = 2{,}0 \cdot 10^6$ eV
Behounek	1,5
Greeves	1,5
Gray e Tarrant	1,8

con una media di $1{,}7 \cdot 10^6$ eV.

È chiaro che la differenza di energia fra K^{40} e Ca^{40} dev'essere almeno eguale al quanto hν della radiazione γ. D'altra parte se l'energia che si libera nella maggior parte delle disintegrazioni fosse inferiore a questa, il rimanente dovrebbe venire poi irradiato come raggi γ oppure ceduto a un elettrone di conversione interna. Ma, come si è detto, lo spettro γ resulta monocromatico e non c'è nessuna evidenza dell'esistenza di elettroni di conversione interna in numero pari a quello degli elettroni primari, ciò che altererebbe notevolmente la forma dello spettro β.

Perciò riteniamo che in realtà il limite dello spettro β sia un po' più elevato del quanto γ. E infatti non è improbabile una sottovalutazione del primo, a causa della debole intensità, come pure una sopravalutazione del secondo, errore non difficile, lavorando in assorbimento.

Si dovrebbe pertanto avere nello spettro β una debole banda (intensità complessiva circa 3 % del totale) con un'energia massima assai modesta, pari alla differenza d'energia fra il quanto γ e il massimo dello spettro β principale. Effettivamente nella curva integrale di D. Bocciarelli (nota 7) si osserva un'inflessione verso i 10^5 eV che potrebbe confermare questa conclusione. Invece la banda presunta verso i $4 \cdot 10^5$ eV deve probabilmente identificarsi col massimo dello spettro principale che cade appunto in questa regione.

(16) Un'affermazione in contrario di Behounek, « Nature », *126*, 243 (1930), fu poi ritirata nel successivo lavoro sotto citato.

(17) Mühlhoff, citato alla nota (4), p. 1.

(18) Behounek, « Zs. f. Rhys. », *69*, 654 (1931).

(19) Greeves, « Phys. Ber. », 1934, p. 1117.

(20) Gentner, « Journ. de Phys. », *6*, 274 (1935).

(21) Heitler, *Quantum Theory of Radiation*, Oxford 1936, p. 215.

Riguardo alla questione se il potassio soddisfa alla legge di Sargent, è noto che l'attribuzione dell'attività all'isopoto raro K^{40} non ha risolto la questione. Il limite d'energia è di molto troppo alto – e lo diventa ancora un po' di più col nostro resultato – perchè sul diagramma di log λ in funzione di log E_0 il punto del potassio venga a collocarsi su nessuna delle tre curve che raccolgono tutti gli altri elementi β-radioattivi naturali o artificiali (con la possibile eccezione del Rb) fin qui studiati da questo punto di vista [22]. La posizione del punto indicherebbe una transizione proibita a un grado di cui non si conosce altro esempio, cioè un cambiamento Δi anormalmente grande nello spin nucleare. Siccome ${}_{20}Ca^{40}$ ha verosimilmente spin nullo, ciò vorrebbe dire che lo spin di K^{40} è assai elevato. Una ricerca di Zacharias che ci è conosciuta solo attraverso i Berichte [23] avrebbe dato per K^{40} uno spin di 4 unità, valore piuttosto alto, ma non tanto da portare l'accordo. Se infatti si suppone giusta anche per Δi elevati la regola secondo la quale la costante di disintegrazione è proporzionale a $100^{-\Delta i}$, l'accordo coi dati sperimentali esigerebbe Δi = circa 7 e quindi lo spin di K^{40} dovrebbe essere di 7 unità.

Concludendo, benchè la forma dello spettro sembri soddisfare alle teorie sull'emissione β, si avrebbero delle discordanze col valore della costante di disintegrazione se l'esperienza, continuando a indicare il K^{40} come l'isotopo radioattivo, confermasse il valore 4 per lo spin di questo nucleo [24].

Nota. — Il presente lavoro era già stato scritto quando è venuta a nostra conoscenza una breve comunicazione sullo stesso argomento apparsa sulla « Physical Review » del maggio di quest'anno. In essa Dželepow, Kopjova e Vorobiov pubblicano uno spettro β del K ottenuto con uno speciale spettrometro magnetico a contatori.

Mentre la forma generale dello spettro è simile alla nostra, con massimo a circa $4 \cdot 10^5$ eV, gli AA. trovano il punto di fine a $1{,}35 \cdot 10^6$ eV. Contro questo resultato sta il fatto che esso è inconciliabile coi dati relativi al quanto γ. Inoltre il diagramma di Kurie – Paxton – Van der Held coi dati di Dželepow e collaboratori non è rettilineo: esso diviene sempre più concavo verso le grandi energie senza tendere a intersecare l'asse delle ascisse.

Il segno della discordanza e una valutazione approssimativa dell'intensità, rendono probabile che ci sia un errore in meno, dovuto a scarsa intensità dell'effetto, in confronto all'effetto di sfondo dei contatori.

(22) Vedi ad esempio Gamow, *Structure of Atomic Nuclei*, Oxford 1937, p. 125.

(23) Dželepow, Kopjova e Vorobiov, « Phys. Rev. », *69*, 538 (1946).

(24) Il presente lavoro fu eseguito con mezzi forniti dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Paleontologia (Botanica). — *Su alcune specie di melobesie (Corallinacee) del Miocene di Ponzone (Acqui)*. Nota[1] di S. Conti, presentata dal Corrisp. G. Rovereto.

Proseguendo nello studio delle Corallinacee del terziario italiano, ho esaminato alcuni campioni che nella collezione didattica per il corso di Geologia Applicata nella Università di Genova, figurano con l'etichetta « Materiali da costruzione – Arenaria calcarea a Lithothamni – Ponzone (Acqui) ».

Per ciò che riguarda l'assegnazione stratigrafica di tale roccia, ricordo che nei pressi del paese di Ponzone sono presenti l'aquitaniano e il burdigaliano, però le arenarie a melobesie appartengono al burdigaliano.

Nelle sezioni sottili ottenute ho riconosciuto un certo numero di specie già illustrate e descritte in un mio precedente lavoro[2]; mi limiterò quindi a trattare di due sole di esse, in quanto dal loro esame emergono nuove osservazioni a complemento della loro conoscenza, e di una terza specie, nuova alla scienza.

Nella sezione sottile contraddistinta col n. 31 figurano le seguenti specie:

Litholh. undulatum Cap.
Litholh. contrarium n. sp.
Pomatoph. operculatum Con.
Mesoph. Roveretoi Con.
Lithoph. (Derm.) papillosum Zan. (Fosl.).

La 3ª e la 5ª specie qui elencate sono assai frammentarie e non offrono alcuna particolarità che non sia già nota, mentre le rimanenti sono rappresentate da tre talli crostosi interi, uno all'altro sovrapposti e separati ciascuno da un esile straterello calcitico (tav. I, fig. 4).

Lithothamnium undulatum Capeder[3] (figg. 1–2; tav. I, figg. 1 e 4). – Tallo crostoso con prominenze accennate. Misura in media 1–2 mm. di spessore con uno sviluppo massimo di 3 mm.

È costituito da ipotallo e peritallo. Il primo forma un robusto cordone basale di spessore poco uniforme (misure medie 180–250 μ) a causa di subitanei ingrossamenti che si formano sopratutto nei tratti di brusche contorsioni o ondulazioni.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1946.

(2) S. Conti, *Contributo allo studio delle Corallinacee del terziario italiano*. – II. *Corallinacee del miocene Ligure–Piemontese*. « Palaeontograph. Italica », vol. XLI, pp. 37-61, tavv. V–VIII, 1942–43.

(3) Per la bibliografia cfr. 1943 S. Conti, loc. cit. p. 45.

Osservato per tutto il suo sviluppo in lunghezza presenta una certa variabilità di caratteri strutturali per quanto riguarda l'ordinamento delle cellule disposte ora prevalentemente in file, ora, oltrechè in file, anche distintamente in serie concentriche.

Le cellule misurano 14–22 × 8–10 μ; quelle basali delle file incurvate ed estinguentesi in basso, 14–25 × 5–8 μ.

Il passaggio da ipotallo a peritallo é assai netto, per cui le prime cellule ipotalliche appaiono già ordinate anche in senso orizzontale.

Il peritallo si presenta costituito da file verticali, ed assai meno perfettamente, da serie orizzontali.

Le misure delle cellule sono 9–12 × 6–8 μ. Evidentissima la zonatura del peritallo.

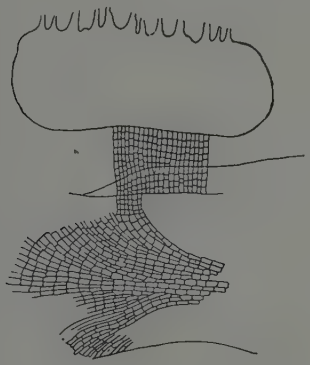


Fig. 1.

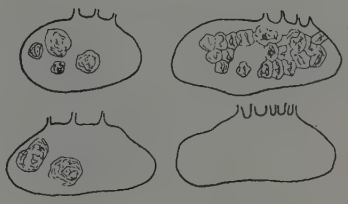


Fig. 2.

Organi riproduttori. – I concettacoli sono presenti nel tallo esaminato nel numero inconsueto di oltre 100, ed appaiono disposti a tutti i livelli; alcuni sono superficiali, altri situati immediatamente sopra all'ipotallo od anche parzialmente immersi in quest'ultimo.

Si presentano di forma ellittica non sempre regolare e di dimensioni pure variabili, avendosi quali misure più frequenti 250–400 × 150–200 μ, mentre valori estremi sono 120 × 100 μ e 520 × 200 μ.

Con relativa frequenza si presentano parzialmente o totalmente ripieni di spore che hanno forme rotondeggianti o rappresentate da masserelle informi carboniose.

Numerosi ed evidentissimi i porocanali sul tetto; in qualche sezione longitudinale di concettacoli ne sono stati contati sino a 15.

Osservazioni e confronti. – Il tallo in esame è, tra le segnalazioni sinora date di questa specie, quello che presenta più chiari e completi caratteri diagnostici e perciò ne ho ripetuta la descrizione e la figurazione. Sopratutto

viene confermata la disposizione strutturale dell'ipotallo intermedia tra i gen. *Lithothamnium* e *Lithophyllum*, la forma e le dimensioni dei concettacoli per i quali si può aggiungere che le altezze superiori o vicine ai 200 μ appartengono a sezioni diagonali tra l'altezza e la larghezza. La corrispondenza di tutti i caratteri con le descrizioni della specie date dalla Lemoine e da me rendono indubbia l'esattezza della determinazione.

Lithothamnium contrarium n. sp. (figg. 3–4; tav. I, figg. 2 e 4). – Tallo a forma tipicamente crostosa con tendenza a formare piccole intumescenze. Ipotallo e peritallo misurano complessivamente 600–800 μ.

Il primo, che si può osservare basalmente alla crosta per tutta la lunghezza del tallo, ha costantemente uno sviluppo piuttosto ridotto (50–90 μ, massimo 120 μ), ed è sempre ben delimitato e strutturalmente omogeneo.

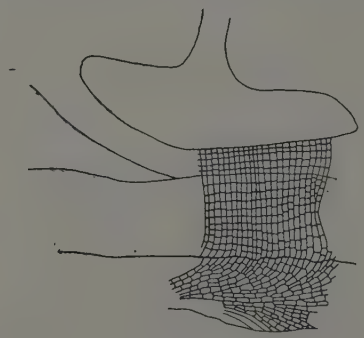


Fig. 3.

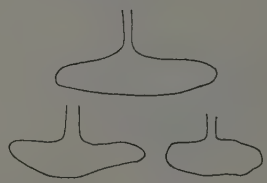


Fig. 4.

Presenta ordinamento esclusivamente secondo file longitudinali conformemente alla disposizione tipica del gen. *Lithothamnium*. Le file cellulari che nel terzo inferiore si mantengono lungamente orizzontali, appaiono nella parte basale un poco più sottili e dirette verso il basso.

Piccoli tratti di ipotalli secondari strutturalmente identici a quello basale, ma anche più ridotti, si trovano interposti nel peritallo.

Le cellule ipotalliche misurano 15–25 × 8–11 μ.

Il peritallo, ben distinto dall'ipotallo, appare già organizzato anche in senso orizzontale sin dalle prime serie di cellule; la disposizione orizzontale delle cellule in serie è però in alcuni casi piuttosto imperfetta, ed ovunque i singoli setti cellulari non sono a livello esattamente corrispondente.

Le cellule del peritallo misurano 10–20 × 8–10 μ. Una marcata zonatura è sempre presente.

Organi riproduttori. – Il tallo presenta quattro concettacoli ben formati, e due altri non ben delimitati. Tutti presentano corrispondenza di forma

ed appaiono appiattiti, quasi discoidali, muniti sul tetto di un unico diritto collo assai lungo e uniforme per tutta la sua altezza. Le misure ottenute sono 420–500 × 105–110 μ; uno di essi un poco più ridotto misura 300 × 100 μ; il porocanale misura in tutti 100–130 μ di altezza e 25 μ di larghezza.

Tutti i concettacoli sono situati nella parte più alta del peritallo dove determinano delle piccole prominenze.

Il tessuto che superiormente viene a contatto con il tetto del concettacolo presenta sempre una spiccata differenziazione accostandosi strutturalmente al tessuto ipotallico; disposizione strutturale di insieme analoga è stata già notata per altre specie quali ad esempio *Lithoth. personatum* Air.

Osservazioni e confronti. – Ad eccezione dei concettacoli, tutti i caratteri osservati per il tallo descritto sono tipicamente riferibili al gen. *Lithothamnium*. Gli organi riproduttori invece presentano forma insolita. Se infatti, come noi facciamo, si interpretano questi organi come concettacoli a cistocarpi, dobbiamo ammettere che non sono note forme analoghe in altre specie di questo genere.

Il *Lithophyllum? expansum* Phil.[4] ad esempio presenta concettacoli a cistocarpi i quali, a prescindere dalla forma del fondo alquanto dissimile, possono avvicinarsi a quelli da noi osservati, e in particolare quello figurato dal Solm–Laubach[5], ma questa specie ha caratteri strutturali tutti particolari tanto da lasciare incerti sulla sua assegnazione generica, comunque ben distinta dal gen. *Lithothamnium*.

La specie più affine strutturalmente è invece il *L. undulatum* Cap. per il quale tuttavia, oltre al diverso carattere dei concettacoli a cistocarpi (uno dei quali è stato da me descritto a figurato (op. cit., p. 46, tav. VIII, fig. 3 *d*), sono di già caratteri distintivi lo spessore dell'ipotallo, la misura delle cellule, e lo sviluppo complessivo dei talli e dei tubercoli.

Analoghe differenze sussistono per *Lithoth. ponzonense* Con. della stessa località.

Lithoth. Vaughani Howe dell'oligocene del canale di Panama[6] e della Liguria[7] presenta cellule più grandi e assenza di zonatura nel peritallo.

(4) M.me P. Lemoine, *Structure anathomique des Mélobésiées. Application a la classification.* « Ann. de l'Inst. Oceangr. », t. II, p. 176 (1911).

(5) Solms-Laubach, *Die Corallinen Algen des Golfes von Neapel. Fauna und flora des Golfes von Neapel*, IV, tav. II (1881).

(6) Howe Marshal, *On some fossile and recent Lithothamniae of the Panama Canal Zone* «Smithsonian Inst. U. S. Nat. Museum. Bull.» *103*, p. 6, tav. 7, figg. 1 e 2; tav. 8 (1918).

(7) M. Airoldi, *Contributo alln studio delle Corallinacee del terziario italiano. – Le Corallinacee dell'oligocene ligure-piemontese.* « Palaeontograph. Italica » vol. XXXII, p. 65, tav. IX, figg. 5–6 (1932).

Mesophyllum Roveretoi Con.[8] (fig. 5; tav. I, figg. 3 e 4). – Il tallo osservato si trova interposto tra i due precedenti e costituisce una crosta assai uniforme che in un solo punto presenta una prominenza di 1/2 mm.

Ipotallo e peritallo misurano complessivamente 700–1000 μ. Il primo (180–240 μ) è costituito da file concentriche semicircolari di cellule disposte a raggera mostrante un insieme strutturale tra i più perfetti. Il cordone appare generalmente simmetrico rispetto alla linea mediana, e, fatto infrequente (noto solo per altre due specie: *Litholh. caravellense* Lem. e *Lithoph. atrum* Con.), appare di tratto in tratto zonato trasversalmente secondo linee ispessite continuantesi e determinanti la zonatura nel peritallo.

Le cellule hanno forma rettangolare e misurano 16–23 × 5–10 μ (18–20 × 8–9 μ). Solo a forte ingrandimento si può constatare che talune di esse sono poste a livelli leggermente diversi.

Il peritallo, perfettamente delimitato inferiormente dall'ipotallo appare nettamente zonato, e la sua struttura è fine ed uniforme. Sono scarsamente

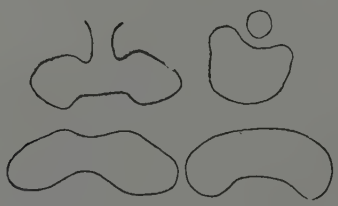


Fig. 5.

presenti ipotalli secondari di ridottissime dimensioni. Le cellule del peritallo misurano 8–15 × 5–7 μ.

Organi riproduttori. – Il tallo qui descritto è fornito di sette concettacoli a cistocarpi che appaiono sistemati nella parte più esterna della crosta e dànno luogo ad altrettante prominenze coniche della superficie. Uno di essi appare sezionato in senso trasversale alla sua lunghezza ed alquanto obliquamente.

Taluni, privi di porocanale si presentano reniformi a tetto e fondo egualmente convessi o a tetto depresso al centro; il tetto è assai più marcatamente concavo se il concettacolo è munito di un robusto collo allargato e svasato alle due estremità.

Le misurazioni forniscono: lunghezza 520–525–600 μ; larghezza 280 μ; altezza 180 μ; porocanale 130 × 80 μ.

(8) Per la bibliografia cfr. 1943 S. Conti, op. cit. p. 55.

Fig. 3.

Fig. 4

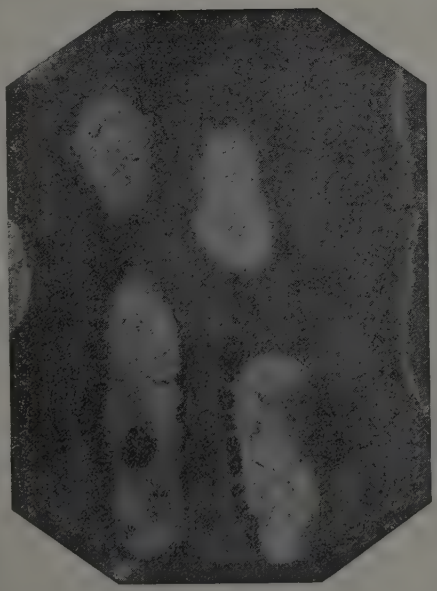


Fig. 1.

Fig. 2.

TAV. I.

Osservazioni e confronti – Il tallo descritto presenta tale identità strutturale con *Mesophyllum Roveretoi* Con., segnalato nella stessa località, che non si può esitare a riferirlo alla stessa specie. Si constata pertanto, come già in numerosi altri casi, che anche in questa specie le due distinte forme della riproduzione, rappresentate rispettivamente da concettacoli a sporangi ed a cistocarpi, non coesistono nello stesso tallo e che gli ultimi sono molto meno frequenti dei primi.

Per quanto riguarda la forma, osservo che il concettacolo figurato dal Trabucco per il supposto *A. torusolum* Gümbel [9] (= *Lithoth. Trabuccoi Foslie*) presenta strettissime analogie con quelli da noi figurati, ma la struttura del peritallo che lo include è evidentemente dissimile.

L'*A. torulosum* Gümbel [10] invece figurato anche dal Rothpletz [11] è specie inconfondibilmente dissimile dalla nostra, che con la presente descrizione è ormai nota in tutti i suoi caratteri anatomici.

Il tallo descritto proviene dal miocene di Ponzone (Acqui) e la specie, già nota per il burdigaliano di questa zona, è pure abbondantemente rappresentata nel tortoniano di parecchie località del Leithakalk dei dintorni di Vienna.

(9) Trabucco, *Sulla vera posizione dei terreni terziari del bacino piemontese.* «Atti (Mem.) Soc. Tosc. di Sc. Nat.», t. XIII, tav. IX, fig. 3, Pisa 1894.

(10) Gümbel, *Die sogenannten Nulliporen....* «Abh. K. bayer. Akademie», XI Bd., 1 Abth. p. 30, tav. II, figg. 6*a*-6*b*, 1871.

(11) Rothpletz, *Fossile Kalkalgen aus den....* «Zeitschr. Deutsch. geolog. Gesels.», Bd. XLIII, p. 318, tav. XVII, fig. 6, 1891.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. *Lithothamnium undulatum* Cap. (× 76) Frammento di tallo fruttifero. Nell'interno di un concettacolo sono visibili residui carboniosi di spore.

Fig. 2. *Lithothamnium contrarium* Con. (× 76) Frammento di tallo fruttifero con un concettacolo a cistocarpi.

Fig. 3. *Mesophyllum Roveretoi* Con. (× 76) Frammento di tallo fruttifero con un concettacolo a cistocarpi.

Fig. 4. Sovrapposizione di talli (× 12): in alto, *Lithoth. contrarium* Con.: in mezzo (a sinistra), *Mesoph. Roveretoi* Con.: in basso, *Lithoth. undulatum* Cap.

Mineralogia. — *Un nuovo polarizzatore.* Nota di U. Panichi, presentata [1] dal Socio A. Bianchi.

Ricordiamo che dei due fasci, tra loro ortogonali, in cui si scinde un fascio parallelo, il quale arrivi dall'aria, con incidenza brewsteriana, ad un mezzo trasparente solido o liquido, quello riflesso è totalmente polarizzato, mentre è più o meno polarizzato quello rifratto. Se B è l'angolo d'incidenza ed n l'indice di rifrazione del mezzo (supposto isotropo), sappiamo essere $\operatorname{tg} B = n$.

Se ora, nella direzione individuata dal fascio rifratto, un fascio parallelo arriva dal mezzo all'aria, l'angolo d'incidenza sarà $P = \frac{\pi}{2} - B$ ed il corrispondente fascio riflesso nel mezzo sarà totalmente polarizzato e sarà piano di polarizzazione il piano d'incidenza. Avremo allora $\operatorname{tg} P = \frac{1}{n}$.

Ma poichè anche l'angolo limite L è tale che

(1) $\qquad \operatorname{sen} L = \frac{1}{n}$, avremo dunque $\operatorname{tg} P = \operatorname{sen} L$.

Si osservi che, essendo $n > 1$, sarà $\operatorname{tg} B > 1$ e perciò $P < 45°$. Inoltre, per la (1), sarà anche $P < L$, ed ambedue tali angoli saranno decrescenti al crescere di n, e decrescerà insieme la loro differenza.

Se il mezzo è birifrangente, avremo due coppie di valori $P_\omega, L_\omega, P_\varepsilon, L_\varepsilon$, per le sostanze uniassiche e due terne, in corrispondenza ad α, β, γ, per le biassiche. In tal caso il processo è legato alla preesistente polarizzazione del fascio che incide sotto l'angolo P, ed alla variabilità degli indici con la direzione.

La fig. 1 mostra l'andamento dei valori L e P per la luce del sodio, mentre gli indici di rifrazione crescono da 1,33 (acqua) a 3,22 (oligisto).

Le due curve, con andamento asintotico, si avvicinano fra loro rapidamente; ma in pratica gli angoli L e P non possono tendere a zero, perchè, nel campo delle sostanze trasparenti o semitrasparenti, i valori degli indici non arrivano ad $n = 4$, mentre per $n = 4$ si avrebbe tuttora $L = 14°,29'$, $P = 14°,2'$. Più rapidamente decresce la differenza $L - P$; da $9°,18'$ per la fluorite, è già inferiore a 2° per il diamante, sotto 1° per l'indice ω dell'oligisto; sarebbe di $0°,27'$ per $n = 4$.

Osservando la fig. 1, si può notare che per la maggior parte dei cristalli birifrangenti ivi rappresentati, e specialmente nella regione a sinistra, il tratto di curva P compreso fra i valori massimo (P) e minimo (P') degli angoli P di una data sostanza, proiettato sull'asse delle ordinate, è

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

totalmente inferiore alla proiezione del corrispondente tratto degli angoli L. Allora avremo $P < L'$; e cioè per le sostanze uniassiche positive $P_\omega < L_\varepsilon$, per le negative $P_\varepsilon < L_\omega$, per le biassiche $P_\alpha < L_\gamma$.

Ma per gli indici di rifrazione molto elevati, si trovano sostanze a forte birifrazione, per le quali la differenza $P - P'$ supera $L' - P'$, ossia abbiamo $P > L'$; ed allora la proiezione del più elevato dei punti P cade entro il campo compreso fra le proiezioni dei punti L.

La condizione $P > L'$ esprime la simultanea elevatezza di indici e di potenza birifrattiva. In tale condizione si trovano specialmente alcune sostanze dotate di lucentezze che vanno dall'adamantina alla submetallica (fig. 1, a destra). Così abbiamo:

per la crocoite $P_\alpha > L_\gamma$,
per il rutilo $P_\omega > L_\varepsilon$,
per l'oligisto $P_\varepsilon > L_\omega$.
Anche per il solfo risulta $P_\alpha > L_\gamma$.

Osservazioni ed esperienze in proposito formano oggetto di una prossima Nota.

Prendiamo ora particolarmente in esame l'angolo P. – Si osservi che, mentre all'angolo B corrisponde una polarizzazione totale esterna alla sostanza, all'angolo P corrisponde una *polarizzazione totale interna*.

Consideriamo un prisma di vetro (fig. 2) il cui spigolo di rifrangenza sia $U = \pi - 2 P_{Na}$; le facce di U siano egualmente inclinate sopra la base.

In tali condizioni un fascio parallelo di luce gialla, che penetri con incidenza normale, si riflette sulla base del prisma, incidendo poi normalmente alla faccia di emergenza. Il fascio emergente è totalmente polarizzato. E perciò il detto prisma costituisce un *polarizzatore*.

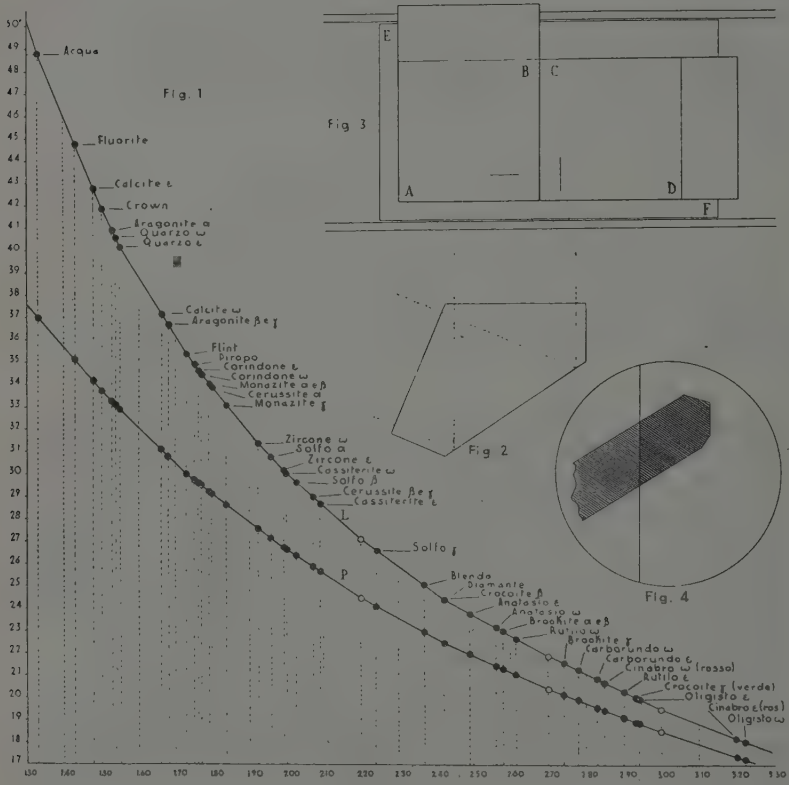
Se invece della luce del sodio incide un fascio di luce bianca, le variazioni di P dal giallo al rosso e dal giallo al violetto sono assai lievi (circa 10′ per un prisma di crown con $n = 1{,}5$); talchè il prisma risulta un buon polarizzatore anche per la luce bianca.

Questo prisma può funzionare come polarizzatore di un microscopio orientandolo in modo che il fascio emergente abbia la direzione dell'asse del microscopio, e mandando al prisma la luce di un illuminatore che fornisca un fascio parallelo.

La sostanza del prisma può essere un vetro a indice preferibilmente non elevato (giacchè aumenta con P l'intensità del fascio polarizzato); potrebbe anche essere fluorite; volendo destinare il prisma a ricerche nell'ultravioletto, può ottimamente costruirsi in *uviol*.

Ho trovato anche utile l'accoppiamento di due prismi ad angolo P come polarizzatori del microscopio, ruotati di 90° l'uno rispetto all'altro. –

Supponiamo, per comodità di ragionamento, che l'asse del microscopio sia verticale. I due prismi sono uniti in modo che le due facce di emergenza, ambedue orizzontali (AB, CD, fig. 3) siano sullo stesso piano, adiacenti; i prismi sono aderenti, in contatto perfetto, lungo una superficie piana verticale; sul contatto è un sottile strato di nero fumo.



Al prisma di destra è annesso un piccolo riflettore (non rappresentato nella figura), mediante il quale i due prismi vengono egualmente illuminati da una stessa sorgente. Il tutto è fisso sopra una slitta orizzontale EF, scorrevole entro una guida da destra a sinistra dell'osservatore.

Si può, mediante traslazione, fissare nel campo visivo del microscopio sia il prisma di destra, sia quello di sinistra, sia la regione intermedia.

Nella prima posizione la luce emergente è polarizzata con vibrazioni parallele alla linea di contatto fra i due prismi; nella seconda posizione la luce vibra perpendicolarmente alla linea di contatto; nelle posizioni inter-

medie il campo è diviso in due regioni con polarizzazioni ortogonali fra loro.

È evidente che la traslazione dalla prima alla seconda posizione corrisponde alla operazione di ruotare di 90° il polarizzatore. Ma anche l'effettiva rotazione del polarizzatore è qui possibile, giacchè la guida della slitta è a sua volta girevole sopra una base, con asse di rotazione l'asse del microscopio.

Se la traslazione del doppio polarizzatore si fa in presenza di analizzatore, ciò equivale al passaggio da nicol incrociati a paralleli e viceversa. In tale operazione è l'analizzatore che resta fisso. Ora, adoperando come analizzatore un prisma ad angolo P, la visione non avviene in senso verticale, ma è deviata secondo l'angolo P; non è quindi comoda la rotazione dell'analizzatore. Si può, è vero, ottenere la visione verticale, mediante una riflessione totale, dando all'analizzatore una forma opportuna. Ma per avere un analizzatore girevole è più semplice sostituire il prisma P con un altro tipo, ad esempio col prisma a nitrato sodico di Feussner-Stöber.

L'analizzatore P non girevole, associato al doppio polarizzatore, può trovare speciale applicazione nelle osservazioni ortoscopiche in luce di Wood, quando analizzatore e doppio polarizzatore siano di quarzo fuso o di uviol.

Noto infine che nelle osservazioni senza analizzatore, il doppio polarizzatore è utile, fra l'altro, per la determinazione del pleocroismo. Infatti basta portare sotto alla lamina in esame la detta linea di contatto; se la lamina non è troppo piccola, la linea individuerà in essa due regioni (fig. 4). Portiamo allora la lamina al centro del campo e rotiamola nel proprio piano in modo da ottenere nelle due regioni la massima differenza di colore; la linea di contatto verrà a corrispondere ad una direzione di vibrazione della lamina; e i due colori si possono così vedere *contemporaneamente* invece che successivamente, come avviene col metodo di Tschermak.

Biologia. — *L'assunzione di ossigeno in embrioni di Anfibi trattati con dosi letali di raggi Roentgen* [1]. Nota [2] di E. Urbani e L. Urbani-Mistruzzi, presentata dal Socio F. Silvestri.

Già da alcuni anni nel nostro Istituto si stanno eseguendo esperienze sulla azione dei raggi X su embrioni e larve di Anfibi con vari intenti (L. Mistruzzi [3], T. Perri [4]).

Ci è sembrato di interesse vedere le modificazioni del metabolismo respiratorio, per quanto riguarda l'assunzione di O_2, di embrioni di *Rana*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Uuiversità di Roma
(2) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1946.
(3) L. Mistruzzi, « Acta », VIII, 12, 101 (1945).
(4) T. Perri, « Acta »; VII, 9, 67 (1945).

esculenta trattati con dosi letali di raggi X. Diversi autori hanno lavorato con raggi X e radio su questo materiale con scopi diversi (Hertwig O., Hertwig G., Hertwig P., Bardeeen, Dalcq, Pasquini e Meldolesi, Olivieri e altri) ma nessuno, per quanto ci risulta, ha condotto le esperienze da noi svolte.

Si trovano in letteratura dati interessanti che riguardano materiale diverso. Gottschalk e Namenbruch 1923, Wels e Osann 1924, Adler 1930, Obreshkove e King 1932, Wels 1933, Bodine e Evans 1933, Obreshkove 1934, Chelsey 1934, Evans 1934 (5) hanno misurato la respirazione di tessuti, poltiglie di tessuti, globuli rossi, lieviti, uova di *Arbacia*, semi vegetali, uova e larve di insetti sottoposti a raggi X.

Le determinazioni eseguite con metodi chimici e manometrici hanno concordemente mostrato come, in linea di massima, i raggi X abbiano una azione immediata sui processi di accrescimento e moltiplicazione cellulare seguìta da modificazioni del metabolismo respiratorio che consistono in un abbassamento dei processi ossidativi e fermentativi.

Needham (6) nella sua recente opera *Biochemistry and Morphogenesis* riporta una serie di lavori dimostranti l'indipendenza relativa esistente tra i processi di accrescimento e riproduzione cellulare da una parte e quelli energetici dall'altra, qualora gli organismi o tessuti in esame siano sottoposti all'azione dei raggi X e di agenti vari.

Questi risultati non devono stupirci perchè è ben noto come in un organismo vivente vi siano processi (accrescimento e riproduzione cellulare) che possono essere rallentati e momentaneamente sospesi ed altri (tutti i processi energetici in generale) che non lo possono senza compromettere la vita dell'organismo stesso.

Le esperienze che noi riferiamo brevemente nella presente Nota sono state compiute negli anni 1945-46 allo scopo di analizzare attraverso le variazioni del metabolismo respiratorio, l'azione primaria dei raggi X sugli embrioni riflettentesi in arresti di sviluppo di quelle parti in più intensa attività morfogenetica al momento dell'irradiazione, da un'azione secondaria dovuta a malformazioni varie per mancata riproduzione, accrescimento e differenziamento cellulare e necrosi di elementi particolarmente sensibili. Abbiamo perciò creduto opportuno comparare l'andamento del consumo di ossigeno in soggetti trattati con raggi X con quello di altri soggetti privati di organi (isola del sangue–cuore) che avevamo dimostrato (Urbani E. (7))

(5) Gottschalk & Namenbruch, « Strahlenther », *15*, 98 (1923); Wels & Osann, « Pflüg. Arch. », *207*, 156 (1924); Adler, « Strahlenther », *36*, 1 (1930); Breshkove & King, « Phys. Zool. ». *5*, 475 (1932); Wels, « Strahlenther », *47*, 401 (1933); Bodine & Evans, « Proc. Soc. Exper. Biol. a. Med. », *30*, 863 (1933); Obreshkove, « Phys. Zool. », *7*, 330 (1934); Chelsey, « Biol. Bull. », *67*, 259 (1934); Evans, « Phys. Zool. », *7*, 556 (1934).

(6) J. Needham, *Biochemistry and Morphogenesis*, Cambridge 1942.

(7) E. Urbani, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », luglio 1946.

possedere una notevole influenza sull'entità del consumo di ossigeno. Infatti, per azione dei raggi X, come è già stato dimostrato da Spear [8] e altri, il tessuto sanguigno ed il sistema circolatorio vengono fortemente lesi contribuendo essi stessi ad aumentare, data la loro funzione, la gravità e l'estensione delle alterazioni nei soggetti irradiati.

Gli embrioni di *Rana esculenta* allo stadio di bottone caudale, privati della gelatina, sono stati irradiati con raggi X per 60'. Poichè il nostro apparecchio non è provvisto di dosimetro, diamo i dati di amperaggio e voltaggio adoperati nonchè le modalità di irradiazione: tubo Müller-Metro per terapia, tensione 40 Kvolt., intensità 3 mA. Gli embrioni sono stati irradiati in una vaschetta di vetro contenente sempre la stessa quantità di acqua, alla distanza di 21 cm. dall'anticatodo. Abbiamo ripetuto le modalità di irradiazione già seguìte da uno di noi, in modo da ottenere quelle malformazioni che già erano note in base ad un accurato esame macroscopico e microscopico, e che qui per ragioni di spazio non ripetiamo rimandando al lavoro già citato di Mistruzzi.

Ricordiamo in ogni modo che tutto quanto è dovuto a disturbi di sviluppo più che a lesioni secondarie non è specifico dei raggi X, perchè altri agenti fisici (radio, temperatura, raggi UV, ecc.) e chimici, come per esempio risulta dalle ricerche di Cotronei [9] sull'azione del cloruro di litio su uova in sviluppo di Anfibi, possono determinare analoghe malformazioni e arresti di sviluppo.

Per misurare il consumo di ossigeno dei soggetti in esperimento abbiamo impiegato un microrespirometro del tipo Stefanelli [10] di alta sensibilità con nostre modifiche costruttive alle camere di reazione e di compenso. I soggetti sono stati scelti sempre nello stesso lotto in modo da poter eliminare per quanto è possibile le differenze, di ogni genere, riscontrabili in individui provenienti da lotti diversi. Abbiamo eseguito varie serie di esperienze: in alcune si è misurata l'assunzione di ossigeno di un irradiato e del suo controllo, in altre abbiamo creduto opportuno per ovviare ad inevitabili piccole differenze individuali esistenti anche in animali dello stesso lotto, inapprezzabili nei primi stadi ma che si vanno accentuando con il progredire dello sviluppo, misurare la respirazione di 3-5 soggetti irradiati e di 3-5 controlli contemporaneamente e calcolare i valori medi per un individuo. In ogni serie di esperienze sempre lo stesso animale o lo stesso gruppo di animali è stato seguìto dallo stadio di bottone caudale fino alla morte dei soggetti irradiati che avviene per le modalità di irradiazione da noi usate, nel periodo nel quale i soggetti passano a vita larvale (Cotronei [11]).

(8) Spear, « Brit. Med. Bull. », *4*, 798 (1946).
(9) Cotronei, « Rend. Acc. Lincei », XXIV, 295 (1915), XXVIII, 207 (1919).
(10) Alb. Stefanelli, « Journ. of Exper. Biol. », *14*, 171 (1637).
(11) Cotronei, « Arch. Zool. », *10*, 85 (1922).

I risultati ottenuti sono stati concordi e per maggior chiarezza riportiamo il grafico riguardante la quantità di ossigeno assunto durante una serie di esperienze da un soggetto irradiato e da un controllo a vari stadi di sviluppo. In ordinate sono riportati i valori di O_2 assunti in un primo, calcolati a 0° e 760 mm. In ascisse il tempo di sviluppo in ore alla temperatura ambiente di 28° C. Con la cifra romana è indicato lo stadio di sviluppo (appresso riferito) degli irradiati e dei controlli al momento delle varie determinazioni.

I. Dopo l'irradiazione di 60′ (anche 5–6 ore dopo) non si nota nessun abbassamento della quantità di O_2 assunta dall'irradiato, anzi in qualche caso si nota un leggerissimo aumento di questa rispetto al controllo. Non sono visibili lesioni conseguenti l'irradiazione.

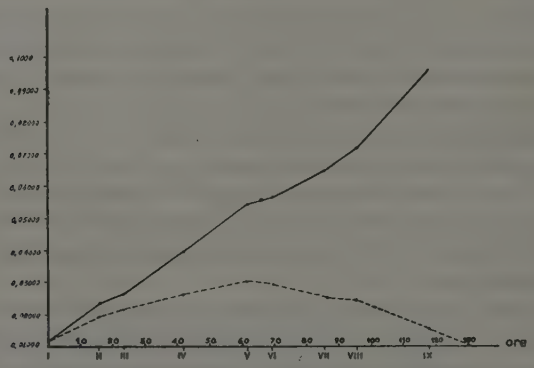


Fig. 1.

II. Controlli allo stadio di pinna codale, inizio del nuoto, branchie esterne. Assunzione di O_2 mm³ 0,02328. Irradiati: branchie pochissimo sviluppate, incurvatura del corpo dorsale leggera. Assunzione di O_2 aumentata rispetto allo stadio I: mm³ 0,01932, ma inferiore ai controlli.

III. Controlli: inizio pigmentazione occhio. Assunzione O_2 mm³ 0,02644. Irradiati: inizio pigmentazione occhio; le malformazioni prima dette si accentuano. Assunzione di O_2 mm³ 0,02168.

IV. Controlli con branchie esterne, occhio in corso di differenziamento. Assunzione di O_2 mm³ 0,03985. Irradiati: branchie atrofiche, epidermide con verruche, parte cefalica scarsamente sviluppata, idrope nella regione del cuore. Assunzione di O_2 mm³ 0,02623.

V. Controlli con branchie esterne in corso di riassorbimento, matassa intestinale formata. Assunzione di O_2 mm³ 0,05405. Irradiati: si sono accentuate le malformazioni dello stadio IV e sono comparse macchie di sangue sul corpo. Assunzione di O_2 mm³ 0,03051.

VI. Controlli più avanzati che allo stadio V. Assunzione di O_2 mm³ 0,05605. Irradiati: presentano movimenti molto lenti e accentuate malformazioni della pinna caudale. Assunzione di O_2 mm³ 0,02943, comincia perciò a scendere al disotto dell'ordinata massima.

VII. Controlli quasi alla fine del periodo embrionale. Assunzione di O_2 mm³ 0,06454. Irradiati: forte idrope ventrale, branchie esterne molto tozze, cuore pulsante, accentuatamente anemico. Assunzione di O_2 mm³ 0,02547.

VIII. Controlli: assunzione di O_2 mm³ 0,07170. Irradiati: assunzione di O_2 mm³ 0,02474; stadio quasi eguale al VII.

IX. Controlli all'inizio del periodo larvale. Assunzione di O_2 mm³ 0,09612. Irradiati: matassa intestinale malformata e ancora piena di tuorlo, idropisia e torpidità maggiori che allo stadio VIII. Assunzione di O_2 mm³ 0,01537. Questa determinazione è stata eseguita alle ore 18 e nella notte gli esemplari sono morti.

La curva di assunzione di O_2 nei controlli è normale e conferma trovata da Stefanelli [12] negli Anfibi anuri durante lo sviluppo embrionale.

Dall'esame della curva risulta come dopo 5 ore dall'irradiazione (stadio I) l'assunzione di O_2 degli animali irradiati non presenti differenze registrabili rispetto ai controlli. Successivamente, pur aumentando la quantità di O_2 assunto negli irradiati, si nota come questa in conseguenza delle lesioni e malformazioni che cominciano a manifestarsi, sia sempre inferiore alla quantità assunta dai controlli della stessa età. Quando sono evidenti le lesioni a carico del sistema circolatorio il consumo di ossigeno negli irradiati comincia a scendere al disotto dell'ordinata massima e si rende quindi sempre più forte lo scarto rispetto al consumo di O_2 dei controlli. Ricordiamo a questo proposito quanto abbiamo prima detto circa l'assunzione di O_2 in embrioni di *Rana* che abbiano subìto l'asportazione dell'abbozzo sanguigno e cardiaco. In questi soggetti si ha una caduta della quantità di O_2 assunto che, debole in un primo tempo, si accentua quando non si ha la formazione di un regolare sistema circolatorio e quindi una normale funzionalità di esso.

Nell'esporre queste prime ricerche abbiamo raggruppato i risultati in base al tempo di sviluppo; così facendo abbiamo messo in risalto le differenze essenziali provocate dal procedimento sperimentale. Naturalmente l'esame dei vari fattori, interferenti l'analisi dei risultati, mostra che diverse cause incidono sull'andamento della curva respiratoria e fanno sì che da una identità di assunzione di O_2 nei soggetti irradiati e nei controlli in in un primo tempo si passi a condizioni il cui esame si presenta molto complesso e che esige ulteriori chiarimenti.

Dobbiamo perciò distinguere una doppia causa dell'abbassamento del metabolismo respiratorio nei soggetti trattati con dosi letali di raggi X.

(12) Alb. Stefanelli, « Arch. Sc. Biol., *24*, 411 (1938).

La prima conseguente alle azioni provocate direttamente sugli organi e tessuti dai raggi X che si riflette in una diminuzione del consumo di O_2 di piccola entità, la seconda dovuta in gran parte alle alterazioni del sistema circolatorio che provocano una riduzione degli scambi ossidativi contribuendo inoltre la irregolare circolazione sanguigna ad accrescere l'estensione e la gravità dei danni conseguenti all'irradiazione.

Il sommarsi durante lo sviluppo dell'individuo irradiato delle cause che provocano una diminuzione dell'assunzione di O_2 viene in un primo tempo controbilanciato dal metabolismo di costruzione e quindi l'assunzione di O_2 pur presentandosi inferiore a quella dei controlli, è in progressivo aumento mentre successivamente, accentuandosi le condizioni abnormi, si ha una graduale caduta dei valori fino alla morte dell'individuo irradiato.

Bisogna tenere presente nel confrontare i valori di assunzione dell'ossigeno dei soggetti irradiati con quelli dei controlli aventi le stesse ore di età, che con il passare del tempo, gli stadi raggiunti non sono perfettamente corrispondenti ma anzi vanno aumentando le differenze di sviluppo e di peso. Conoscendo bene l'importanza di questi fattori sulla entità del metabolismo respiratorio si può comprendere come i risultati delle presenti ricerche abbiano un valore assoluto solamente per quanto riguarda l'andamento della curva respiratoria dei soggetti irradiati e per la valutazione dei vari fattori che successivamente influiscono sull'abbassamento del consumo di O_2. Tali ricerche dovranno essere corredate dei valori illustranti la quantità di O_2 assunta da soggetti normali e irradiati in rapporto alla unità di peso.

Conclusioni. – Le presenti ricerche hanno dato risultati che concordano con le osservazioni fatte da altri AA. su materiale diverso.

La natura del materiale da noi scelto, per le possibilità di applicare i metodi di embriologia sperimentale, ha permesso di prospettare una serie di quesiti che possono meglio permettere l'esame dei fattori che investono i problemi indagati nelle presenti osservazioni.

La possibilità, poi, di seguire sempre lo stesso soggetto dall'inizio dell'esperienza fino alla fine ha presentato vantaggi che non necessitano di chiarimenti. Rimane accertato che in embrioni di *Rana esculenta* il trattamento con raggi X non provoca nei primi tempi abbassamenti nella assunzione di O_2 rispetto a controlli della stessa età. Successivamente la curva di assunzione di ossigeno mantiene per un certo tempo andamento ascendente ma con ordinate minori di quella dei controlli. Dopo aver toccato una ordinata massima i valori progressivamente diminuiscono, per molteplici cause alle quali si è accennato, fino alla morte del soggetto in esame.

Sono stati prospettati successivi sviluppi delle presenti ricerche.

Zoologia. — *Note araneologiche* – XXIII. *Partenogenesi in «Tetragnatha extensa»* (L).[1] Nota[2] di B. Monterosso e C. Ronsisvalle, presentata dal Socio A. Russo.

In un precedente lavoro[3] uno di noi ha comunicato che le uova di *Teutana triangulosa* (Walck), appena emesse, iniziano i processi dell'embriogenesi, *anche se non sono state fecondate.* Questi processi, però, nelle uova vergini si fermano all'atto, in cui si costituisce il disco blastodermico, il quale pertanto va in degenerazione. Nella stessa Nota fu altresì dichiarato che, qualora l'uovo vergine di quell'Araneide, per una causa qualunque, venga danneggiato durante o immediatamente dopo la deposizione, lo sviluppo ontogenetico di esso non ha luogo – per meglio dire, non si inizia nemmeno. In altra pubblicazione[4] si è ancora detto che la stessa sorte è riserbata a quelle uova, le quali vengono emesse prima di aver raggiunto, entro il corpo materno, la piena, normale perfezione morfologica. Ulteriori precisazioni e particolari verranno resi noti al riguardo in un prossimo lavoro[5].

Il presente scritto ha lo scopo precipuo di far noto che i reperti avuti al riguardo in *Teutana triang.*, valgono perfettamente anche per un'altra specie, *Tetragnatha extensa* (L), corroborando così la supposizione, già avanzata nei precedenti, che il tipo di partenogenesi, scoperto da uno di noi nei Ragni, possa ammettersi come generale nell'Ordine medesimo, o vi sia per lo meno molto diffuso.

Allo scopo di vagliare difatti questo presupposto, la cui dimostrazione avrebbe, secondo noi e per varie ragioni, importanza non trascurabile dal punto di vista speciale e da quello generale, ci siamo dedicati alla faticosa impresa di allevare *ab ovo*, o partendo da stadi molto precoci dello sviluppo postnatale (sì da poter senz'altro considerarsi come ancora impuberi) diverse specie di Araneidi, impresa che con pazienza e con metodi, per quanto possibile, razionali, è stata sostenuta quasi completamente da uno di noi (Ronsisvalle). Il successo sperato non ci ha finora arriso, in varie forme, i cui rappresentanti, pur avendo in prigionia raggiunto lo stato di piena

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Catania.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1946.

(3) B. Monterosso, *Partenogenesi negli Araneidi.* «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», vol. XIX, fasc. 7–9 (1944).

(4) B. Monterosso, *Note Araneologiche.* – XXII. *Partenogenesi naturale-costante-incompleta in* Teut. triang. Comunicata all'Acc. Gioenia nella seduta dell'11 giugno 1944. In corso di stampa.

(5) B. Monterosso, *Dati nuovi e considerazioni sulla partenogenesi naturale degli Araneidi.*

maturità sessuale, non deposero alcun uovo – mancando di sperma nei *receptacula* – o ne produssero, ma esclusivamente a struttura imperfetta.

Abbiamo per ora trovato un'eccezione in *Tetragnatha extensa*, la quale, anzi, ha dimostrato di costituire un materiale prezioso per il nostro intento. Per questa, come per altre specie, a titolo di prova, iniziammo l'allevamento non dai neonati, ma da individui, che potevano considerarsi impuberi, non solo e non tanto per la dimensione ridotta del corpo (giudizio, che può riuscire fallace), quanto per un altro particolare, della cui conoscenza si trova traccia qua e là nella bibliografia araneologica. Le femmine, cioè, raggiungono la piena maturità sessuale di seguito ad una muta, definita per ogni singola specie, *muta che è l'ultima della serie* percorsa nell'ontogenesi [6]. Questa regola, nell'Ordine dei Ragni, non presenta che qualche rara eccezione. Dopo la cennata *muta della pubertà*, esse sono in grado, anzi desiderose, di accoppiarsi. Se tale atto si compie, depongono uova feconde in successivi bozzoli, durante un periodo, la cui lunghezza varia secondo la specie; ma, fino alla morte, tenacemente rifiutano ogni nuovo rapporto col maschio [7]. Di questa regola abbiamo tratto partito nella pratica dei nostri allevamenti, fatti allo scopo, cennato sopra: in linea di massima, evidentemente, potevamo considerare impubere, al momento della cattura, quella femmina, che rigettava in prigionia almeno una volta la propria spoglia. Essa pertanto poteva dichiararsi vergine, salvo conferma, basata su altre prove: difatti, sebbene eccezionali, esistono nell'Ordine degli Araneidi specie, che mutano la cuticola anche allo stato pubere. Invece, se non rigettava la cuticola nemmeno una volta, era considerata matura sessualmente, ma poteva essere vergine, ovvero fecondata, secondochè nella libera natura avesse incontrato, o no, un maschio, dopo la muta della pubertà.

Nei mesi di giugno e luglio di quest'anno (1946) tra le piante acquatiche e sulle sponde delle vasche, che si trovano nel giardino del nostro Istituto e nell'Orto Botanico, catturammo 12 individui di *T. extensa* (L) di varia grossezza. Solo uno mostrava i caratteri del sesso maschile (matricola *MP*). Vennero tutti posti in recipienti, adatti alla loro vita, che difatti continuò a svolgersi in modo soddisfacente. Pare superfluo aggiungere che i vasi adoperati a tale scopo ricevettero un individuo ciascuno, in modo che non potesse avere assolutamente rapporti con il mondo biologico esterno. Riceveva abbondante pasto (Drosophila, mosche o mosconi) ed era circondato da aria satura o quasi di vapore, proveniente da una bacinella, posta sul fondo, mantenuta sempre piena di acqua pulita, a cui l'animaletto di frequente si accostava per bere. Tale ambiente, evidentemente, era favorevole allo

(6) Si noti che i maschi fanno lo stesso.

(7) B. Monterosso, *Osservazioni ed esperienze sulla vita sessuale dei Ragni* ecc., «Boll. Acc. Gioenia» fasc. 54, pp. 1–13 (1925).

sviluppo di muffe; sviluppo, che si cercava di evitare, sebbene non sempre vi si riuscisse, sicchè talora i bozzoli venivano invasi da micelii, i quali non tardavano a sporificare e uccidere le uova. Questo inconveniente aveva tempo di verificarsi soprattutto nelle deposizioni di femmine fecondate, che lasciavamo *in situ* per attendere lo sgusciare dei piccoli; invece le uova vergini, appena prodotte, venivano trasferite in nuovi recipienti pulitissimi, per essere sottoposte singolarmente ad osservazione.

Degli 11 soggetti catturati, il cui sesso non si era ancora esteriormente manifestato, 2 acquistarono, di seguito a mute, i caratteri maschili. I 9 restanti risultarono femmine; ma 3 di esse non compirono alcuna muta (cfr. il quadro annesso) e quindi si considerarono sessualmente mature. Però, mentre una (*ML*), che del resto era stata catturata in vicinanza di un maschio adulto (*MP*), produsse successivamente 10 bozzoli, da cui complessivamente vennero fuori più di 400 piccoli [8], le altre due (*MK*, *MO*), che, anch'esse, fino alla morte non si spogliarono mai, produssero rispettivamente 2 e 3 bozzoli, nessuno dei quali conteneva uova feconde [9], perchè tutte quelle generate dalla *MK* erano a struttura anormale [10] e quindi sterili, mentre di quelle prodotte dalla *MO*, che furono complessivamente 127 ben 100 subirono la segmentazione, costituirono il disco blastodermico, indi degenerarono. Da ciò si può dedurre che nessuna di queste due femmine, sebbene avesse raggiunto lo stato pubere, aveva avuto in libertà rapporto alcuno con il maschio. Le altre sei femmine catturate (cfr. il quadro) produssero da 1 a 9 bozzoli, le cui uova normali si dimostrarono fertili, cioè si embrionarono, ma allo stadio di disco caddero in degenerazione. Si noti che il susseguirsi dei fenomeni istologici dell'ontogenesi embrionale in alcune di esse uova, prese in diversi bozzoli, fu controllato nelle sezioni microtomiche, avendone fatto dei preparati adatti; per le altre ci siamo accontentati dello studio morfologico, eseguito ad intervalli, per lo più sullo stesso uovo, dall'inizio della segmentazione in poi, seguendone l'evoluzione « in vivo » con il metodo già da noi messo in uso da tempo [11]. È superfluo ripetere ancora una volta

(8) Nel quadro annesso i numeri asteriscati sono approssimativi per qualche unità in meno. L'ordine dell'approssimazione, di solito, non oltrepassa la cifra 10. Si noti poi che i dati compresi in detto quadro si limitano alle osservazioni fatte dall'11 giugno all'11 settembre di quest'anno. Necessità d'ovvia comprensione ci hanno costretto a redigere questo quadro nel modo più sintetico possibile.

(9) Le femmine di questa specie, come di *T. triangulosa*, se sono vergini, tendono sempre a dare un certo numero di uova anormali.

(10) Questo individuo, a rigore, non potrebbe escludersi che si fosse accoppiato. Molto probabilmente era vergine, come sosteniamo nel testo; la presentazione dei dati, nel quadro, è stata fatta tuttavia in modo, da non pregiudicarne lo stato reale, qualunque fosse.

(11) B. Monterosso, *Note araneologiche.* – XV. *I primi stadi embrionali di* T. triangulosa *studiati in vivo.* Comunicata all'Accademia Gioenia nella seduta del 18 dicembre 1942. In corso di stampa.

che le uova anormali [12], sottoposte scrupolosamente ad indagine con gli stessi metodi, non diedero luogo al minimo cenno di sviluppo.

matricola dello individuo	data		numero delle mute	data dell'accoppiamento	bozzoli prodotti		numero delle uova		numero dei nati	data di morte dell'individuo
	di nascita	di cattura			da vergine	dopo accoppiamento	partenogenetiche	anormali		
MG	—	11.6	1	—	6	—	586	26	—	24.7
MH	—	13.6	1	—	9	—	700	181	—	—
MI	—	13.6	1	—	4	—	305	182	—	17.7
MK	—	18.6	0	?	2		—	tutte	—	6.7
ML	—	21.6	0	?	—	10	—	98 *	420 *	14.8
MM	—	22.6	2	—	5	—	10 *	207 *	—	29.8
MO	—	21.6	0	—	3	—	27	100	—	19.7
MQ	—	26.6	2	23.7	1	6	109	211 *	202 *	5.9
MS	—	2.7	3	18.8	6	3	498	68	32 *	30.8
ML 27	5.7	—	5	—	1	—	29	34	—	4.9
ML 43	5.7	—	4	—	3	—	6	203 *	—	20.8
ML 52	5.7	—	6	—	3	—	35	100	—	—

Da quanto sopra, si può senz'altro concludere che, eccezion fatta per l'individuo *ML*, sicuramente fecondato, e per *MK*, su cui evitiamo di pronunciarci, gli altri sette erano vergini, avessero, o no, compiuto delle mute nel periodo di cattività.

I reperti ottenuti bastavano per il problema propostoci. Tuttavia abbiamo voluto fare, per così dire, una controprova: interrompere, in qualche soggetto, lo stato di verginità. All'uopo, la femmina *MQ*, sicuramente vergine, perchè per due volte, in prigionia, aveva mutato cuticola [13], e perchè le uova di

(12) Sulle caratteristiche di tali uova ritorneremo particolarmente in un prossimo lavoro, che riguarderà questi elementi sia in *T. triangulosa*, sia in *T. extensa*, essendo simili nelle due specie.

(13) Il nostro allevamento ha confermato l'assoluta mancanza per questa specie di mute postpuberi (rispettivamente postnuziali); pertanto il criterio di assumere le mute come indice di impubertà è risultato assolutamente sicuro.

un suo primo bozzolo diedero embrioni, morti tutti allo stadio di disco blastodermico, venne posta in presenza del maschio *MP* (di cui sopra fu fatto cenno) pochi giorni dopo aver prodotto tale bozzolo. L'accoppiamento si svolse con le manovre, che già nel 1678 aveva descritto il Lister e che sono state precisate poi dal Gerhardt e dal Wiehle [14]. Di seguito all'atto sessuale compiuto, essa diede altri 6 bozzoli, contenenti uova in maggior parte normali, da cui complessivamente nacquero circa 200 ragnolini ben vitali. Ugualmente, la femmina *MS*, che dalla cattura al momento della ovificazione aveva fatto 3 mute, e che aveva costruito 6 bozzoli con uova partenogenetiche, da cui al solito non era nato nemmeno un ragnolino, venne offerta allo stesso maschio, con il quale si accoppiò. Nonostante fosse di età avanzata, produsse altri 3 bozzoli, da ciascuno dei quali vennero fuori degli individui a termine, che certo sarebbero stati più numerosi, se le muffe non avessero invaso i bozzoli stessi.

Nonostante l'assoluta chiarezza di questi risultati, in base ai quali la specie in studio si sarebbe senz'altro potuta dichiarare partenogenetica (partenogenesi incompleta), si è voluto procedere, per scrupolo di ricerca, ad un « experimentum crucis ». All'uopo 70 piccoli, usciti dal primo e 2 usciti dal secondo bozzolo della femmina *ML*, sono stati allevati, superando notevoli e molteplici difficoltà, in perfetto isolamento individuale ed in ambiente più che possibile adatto. Di tale lotto, 21 andarono dispersi, o morirono, prima di mostrare esteriormente il proprio sesso; 35 si rivelarono maschi e 16 femmine, compiendo la « muta della pubertà ». Di queste ultime, 4 morirono più o meno presto, senza avere ovificato: 11 produssero dei bozzoli, pur non avendo avuto mai contatto con maschi; una (*ML 57*), fino ad ora (11 settembre 1946) mantenuta anch'essa in verginità, non ha ovificato.

Per economia di spazio, nel quadro annesso, più volte richiamato, abbiamo compreso solo tre (*ML 27*, *ML 43*, *ML 52*) di quegli 11 individui e ci esimiamo dal commentare i dati relativi, che riusciranno abbastanza chiari alla semplice lettura. Anche le uova (a struttura normale!), prodotte da queste vergini (e dalle sorelle non comprese nel quadro), *si sono tutte embrionate*, senza dar mai luogo ad un individuo a termine di sviluppo.

La capacità [15] partenogenetica naturale (partenogenesi costante–incompleta) di *Tetragnatha extensa*, in base a questi risultati, è ormai del tutto dimostrata. E si noti che questi risultati derivano dal più scrupoloso studio di circa 2400 uova, che sono state osservate singolarmente e quasi tutte seguite nella loro evoluzione dal momento della deposizione all'apparire dei processi degenerativi dell'embrione.

(14) H. Wiehle, *Die einheimischen Tetragnatha-Arten*. « Nova Acta Leopoldina ». N. F. Bd. 6, n. *41* (1939).

(15) Ci sembra che la parola « capacità » si adatti a questo tipo di partenogenesi più che la parola « tendenza », usata da qualche Autore (Vandel) per la partenogenesi facoltativa e rudimentale.

Prima di chiudere questa breve Nota, vogliamo richiamare l'attenzione del lettore sul fatto, che l'esistenza di detta capacità in *Teut. triangulosa* e in *Tetr. extensa* non può riportarsi ad un'affinità filogenetica tra queste due forme di Araneidi, in quanto esse appartengono a due gruppi abbastanza lontani fra loro (*Theridiidae*, rispettivamente *Argiopidae*). Da ciò si ha un elemento di conferma della nostra supposizione, che tale capacità rappresenti una prerogativa generale e quindi costante dell'uovo di Ragno.

Quale significato vada attribuito a questa caratteristica non è facile dire; in ogni caso riteniamo prudente astenerci qui da qualsiasi giudizio, che ci pare ancora prematuro.

Non dubitiamo, del resto, di potere ulteriormente dimostrare che altre specie, nell'ordine degli Araneidi, sono partenogenetiche, sicchè le nostre indagini al riguardo proseguono.

Biologia. — *Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello* (Petromyzon planeri) *di fronte ai coloranti vitali.* – I. *Emazie* [1]. Nota [2] di L. Raunich, presentata dal Socio A. Pensa.

Nell'attuale Nota riferisco succintamente sul comportamento degli eritrociti della lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*) di fronte ad alcuni coloranti vitali (Rosso neutro, Brillantkresylblau, Bleu Nilo, Verde Luce, Sudan III). Tale ricerca mi è stata suggerita dalla considerazione dell'importanza che sono venute assumendo in questi ultimi anni le colorazioni vitali in ematologia. L'oggetto di studio (sangue di Lampreda) è ancora assai scarsamente noto ed i pochi lavori esistenti nella letteratura contengono dati molto contradditori.

Dai risultati degli ormai numerosissimi lavori sulle colorazioni vitali del sangue [3] risulta:

Se si colorano i globuli rossi con una soluzione diluita di colorante vitale, si mettono in evidenza i granuli che si colorano metacromaticamente (sostanza metacromatico–granulare o sostanza B), e che successivamente crescono in numero e in dimensioni (granuli primari e secondari del Dawson),

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna, diretto dal prof. P. Pasquini.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1946.

(3) Sono qui citati soltanto alcuni lavori della vasta bibliografia sull'argomento. Per gli altri rimando ai lavori del A. Ferrata, *Le emopatie*, vol. I°, 2ª ed., 1933; B. E. Hall, *A critical review of the haematological literature dealing with the results of the supravital staining method*. «Fol. Haematol.», *43*, 1931; A. B. Dawson, *The reaction of the erythrocytes of Vertebrates, especially fishes, to vital dies*. «Biol. Bull.», *63*, 1932; P. Dustin jr., *Contribution à l'étude histophysiologique et histochimique des globules rouges des Vertébrés*. «Arch. Biol.», *55*, 1944.

assumendo l'aspetto di vacuoli. Dopo un certo tempo questi vacuoli impallidiscono e scompaiono (Jokl [4]).

Colorando invece i globuli rossi con una soluzione di colorante vitale tanto concentrata da colorare anche i nuclei, al posto dei vacuoli si mette in evidenza una trama reticolare, ortocromatica, di aspetto, quantità e distribuzione vari (sostanza granulo-filamentosa o sostanza A).

Secondo alcuni AA. (Popowa [5], Dustin jr. [6]), granuli metacromatici e trama reticolare sono due aspetti diversi di una medesima sostanza, che si manifestano a seconda che si colori sopravitalmente o postvitalmente.

Secondo Dawson [7] invece si tratta di due entità ben distinte senza alcuna relazione genetica. La questione è ancora sub-judice, pur avendo il Dustin [8] riportato alcuni pregevoli risultati sperimentali a conferma della sua tesi.

Quanto detto si riferisce solo alle emazie dei Vertebrati inferiori rispetto ai Mammiferi. In questi ultimi solo i reticolociti presenterebbero le proprietà su esposte.

Per quanto riguarda, fra i Ciclostomi, i Petromizonti, che qui particolarmente ci interessano, solo due AA., a mia conoscenza, hanno studiato questi granuli: Giglio Tos [9], usando il Rosso neutro, descrive negli eritrociti dell'ammocete parecchi granuli colorati in rosso, più numerosi in quelli « che paiono, alle dimensioni, più giovani »; nell'adulto invece la maggior parte delle emazie ne sarebbe priva, i leucociti non si colorerebbero. Poco tempo dopo Sabrazes e Muratet [10] descrivono nelle emazie di *Petromyzon marinus* dei granuli mobili in scarso numero.

Io ho studiato il sangue di ammoceti (di lunghezza mm. 58, 115, 130, 138, 140) e di un adulto (femmina sessualmente matura) di *Petromyzon planeri*, applicando tre procedimenti tecnici diversi. La maggior parte delle osservazioni si riferisce a preparati eseguiti con la nota tecnica del coprioggetto colorato: il colorante prescelto viene disteso in strato sottile su di un coprioggetto, col quale si copre una goccia di sangue posta su un portaoggetto; si luta tutt'all'intorno con olio di paraffina. In secondo luogo

(4) A. Jokl, *Ueber vitalfärbbare Erythrocytengranulationen (Substantia metachromatico-granularis) beim Rochen, nebst weiteren Bemerkungen über das Blut dieser Tiere.* « Z. mikr. anat. Forsch. », *2*, 1925.

(5) N. W. Popowa, *Ueber die Vitalfärbung der Erythrocyten der Säugetiere.* « Biol. Z. », *4*, 1935 (cit. sec. « Berichte üb. die wiss. Biologie », *39*, 1936).

(6) P. Dustin jr., loc. cit.

(7) A. B. Dawson, loc. cit.

(8) P. Dustin jr., loc. cit.

(9) E. Giglio Tos, *Il rosso neutrale (Neutralroth) ed i granuli emoglobigeni.* « Z. f. wiss Mikroskopie », *15*, 1898.

(10) J. Sabrazes, L. Muratet, *Granulations mobiles dans les globules rouges de certains poissons.* « Comptes Rend. Soc. Biologie », *52*, 1900.

è stata pure seguita la tecnica di strisciare sul vetrino portaoggetti, accuratamente sgrassato, la soluzione alcoolica del colorante, di strisciare sul medesimo vetrino il sangue dopo l'evaporazione dell'alcool, conservando il il tutto in camera umida. È stato inoltre controllato il comportamento delle cellule sanguigne di fronte a soluzioni di colorante variamente concentrate: una certa quantità di sangue, esattamente misurata, viene diluita con una certa quantità di soluzione di colorante a titolo noto in liquido fisiologico; le sospensioni si conservano in salierine di vetro con coperchio per evitare l'evaporazione; a vari intervalli di tempo si prelevano con pipettine campioni che si osservano al microscopio.

In tutti i globuli rossi si mettono in evidenza col Brillantkresylblau e col Rosso neutro dei granuli e sferette, in numero e grandezza variabili, animati da vivaci movimenti browniani. Non ho notato differenze appariscenti fra il sangue dell'ammocete e quello dell'adulto. Subito dopo l'allestimento del preparato sono pochi e piccoli; osservando lo stesso preparato a vari intervalli di tempo si vede che il loro numero aumenta, come pure la loro grandezza, ma senza raggiungere mai le dimensioni cospicue raffigurate da altri AA. per emazie di altri Vertebrati. Il loro numero, da 10–20 inizialmente, può arrivare a 50–60 per emazia; il loro diametro non supera mai il micron, e anzi solo eccezionalmente può avvicinarsi a questo valore, mentre la grande maggioranza dei granuli ha dimensioni molto minori.

Tutto ciò però non ha un valore assoluto, in quanto anche a distanza di 24 ore dall'allestimento del preparato si osservano molti eritrociti con pochi granuli e di piccole dimensioni. In generale il numero è inversamente proporzionale alla loro grandezza; in una stessa emazia, poi, non presentano mai le medesime dimensioni: si trovano sempre associati granuli grandi e piccini. Col Rosso neutro assumono un color rosso arancione; col Brillantkresylblau un colorito purpureo; col Bleu Nilo si colorano in modo non ben definibile e non aumentano di numero e di volume col passare del tempo; col Verde Luce, a diverse concentrazioni e variando la tecnica, non si sono colorati. Il Sudan III non ha messo in evidenza granuli colorabili nelle emazie.

Nelle ombre di emazie emolizzate, e in generale nelle emazie morte (riconoscibili per l'intensa colorazione nucleare) i granuli danzanti permangono per un certo tempo, come pure mi è occorso di notare granuli danzanti colorati al di fuori delle emazie, probabilmente liberatisi da emazie emolizzate. Dopo un certo tempo però scompaiono; in emazie morte da qualche tempo non si vedono più granuli, ma solo, però incostantemente, delle formazioni fioccose a forma di precipitato, senza distribuzione caratteristica, non colorate metacromaticamente col Brillantkresylblau.

In preparati allestiti da più di 18 ore si notano talvolta accanto ai granuli e vacuoli anche dei filamenti finissimi, in discreto numero, situati

alla periferia dell'emazia, a disposizione irregolare. Si tratta cioè d'una struttura morfologicamente avvicinabile alla sostanza granulo-filamentosa delle emazie degli altri Vertebrati.

Ho cercato ora di stabilire se anche nella Lampreda alte concentrazioni di colorante producano, invece dei granuli o accanto a questi, strutture simili alla sostanza granulo-filamentosa; in altri termini di vedere se con concentrazioni differenti di colorante si ottengano risultati diversi. Ho usato all'uopo il Brillantkresylblau e il Rosso neutro, sciolti in Ringer diluito (0,425 % e 0,6 % [11]) a un titolo di 0,03 %, 0,01 %, 0,005 % (corrispondenti a 1 : 3300, 1 : 10.000, 1 : 20.000, 1 : 40.000). 0,01–0,02 cc. di sangue di Ammocete di 130 mm., prelevate mediante il taglio della coda dalla arteria caudale con una micropipetta venivano diluiti con 0,5 cc. delle diverse concentrazioni di colore; il tutto era poi mescolato e conservato in salierine coperte.

In un primo tempo tutte le emazie, a tutte le concentrazioni di colore, presentavano i già descritti granuli colorati, di dimensioni varie; nelle soluzioni al 0,03 % la maggior parte delle emazie mostrarono ben presto i nuclei intensamente colorati; molte erano deformate; i granuli erano un po' più grossi in queste soluzioni che non in quelle più diluite. Sembrava inoltre che i granuli fossero, a parità di concentrazione, più numerosi nei preparati col Brillantkresylblau. Alla distanza di 18 ore si notavano nelle soluzioni col Rosso neutro delle emazie che accanto ai granuli presentavano anche sottili e corti filamenti; in gran parte però le emazie erano già morte. Non ho notato tali filamenti nelle soluzioni col Brillantkresylblau. Dopo 48 ore non si riscontravano più granuli nelle emazie, ma solo alcuni precipitati irregolari e incostanti di colore. Anche con soluzioni più concentrate di colorante (1 %), fortemente tossiche, si constata la presenza di granuli. Del resto anche il Giglio Tos [12], usando il Rosso neutro a forte concentrazione (soluzione satura), mentre ottenne la sostanza granulo-filamentosa in Rana, embrioni di pollo e di topo con contemporanea colorazione dei nuclei, nella Lampreda ottenne solo granuli. Se quindi è vero che la sostanza granulo-filamentosa è una reazione post-vitale che si manifesta in una cellula morta o moribonda, le emazie della Lampreda presentano una straordinaria resistenza all'azione tossica dei coloranti vitali, in quanto occorre un'esposizione di almeno 18 ore a soluzioni concentrate per produrre quelle alterazioni protoplasmatiche necessarie alla precipitazione della trama granulo-filamentosa; bisogna però tener presente che le soluzioni concentrate ben presto colorano i nuclei (dopo 1 ora), mentre la sostanza granulo-filamentosa

(11) Ho stabilito queste concentrazioni della soluzione fisiologica in base allo studio del comportamento delle emazie di fronte a liquidi con varia concentrazione di NaCl (da 0,1 % a 0,9 %); è risultato che a tali concentrazioni le emazie non emolizzano e non si raggrinzano.

(12) E. Giglio Tos, loc. cit.

compare assai più tardi e solo in emazie integre, mentre in quelle emolizzate perdurano per un certo tempo i granuli metacromatici.

Molto schematicamente possiamo riassumere la cronologia di questi diversi fenomeni così:

1° inizialmente: comparsa di granuli metacromatici;

2° fino alle 18 ore: aumento di numero e volume di questi granuli;

3° dopo le 18 ore: comparsa della sostanza granulo-filamentosa;

4° dopo 36 ore: precipitati irregolari nelle cellule morte emolizzate.

Che i granuli metacromatici, la sostanza granulo-filamentosa e i precipitati irregolari siano tre tappe nella separazione della medesima entità, credo per il momento non si possa nè affermare nè negare.

Se ora, invece della tecnica del coprioggetto colorato, si usa quella di strisciare il sangue su vetrini portaoggetti previamente spalmati con un sottilissimo velo di colorante, si mettono in evidenza nel citoplasma dei granuli piccoli, in scarso numero, mobili finchè il preparato è umido, ma che non presentano metacromasia, in quanto si colorano in azzurro-violetto; restano inalterati dopo disseccato lo striscio anche per molti mesi; se dopo confezionato lo striscio lo si porta immediatamente in camera umida, i granuli non aumentano di numero e volume. Ritengo trattarsi dei granuli primari, che si manifestano differentemente a causa del procedimento tecnico impiegato.

Si può dunque concludere:

I. Nelle emazie di Lampreda si colorano con coloranti vitali piccole sferette e granuli, animati da moti browniani. Col Rosso neutro si colorano in rosso arancione, col Brillantkresylblau in rosso porpora. Sembrano presenti in tutte le emazie.

II. Col passare del tempo aumentano di numero e di dimensioni, più rapidamente con coloranti più concentrati.

III. Sopravvivono per un certo tempo alla morte dell'emazia e possono anche da essa fuoriuscire alla sua morte; poco dopo però scompaiono.

IV. Dopo più di 18 ore di esposizione al Rosso neutro compaiono in un certo numero di emazie, accanto ai granuli, dei sottili e corti filamenti. Questi non sono comparsi, nelle mie esperienze, usando il Brillantkresylblau.

V. Dopo più di 24 ore, per lo più però molto dopo, si formano nelle emazie emolizzate dei precipitati irregolari colorati ortocromaticamente.

VI. Con la tecnica dello striscio su portaoggetti colorato si mettono in evidenza nelle emazie dei granuli colorati ortocromaticamente; questi permangono inalterati dopo che lo striscio è stato disseccato anche dopo mesi.

Biologia. — *Ricerche di morfologia sperimentale sul differenziamento specifico generale e particolare delle cellule nervose* [1]. Nota di A. Stefanelli, presentata [2] dal Socio F. Silvestri.

Le nostre conoscenze sulla istogenesi nervosa, intesa non solo come seriazione cronologica degli aspetti strutturali degli elementi in via di sviluppo, ma comprensiva dei processi della determinazione e dei fattori primari del differenziamento, presentano ancora delle vaste lacune: ignoti sono i processi della determinazione istogenetica, cioè della modalità spaziotemporale con cui ai vari neuroblasti vengono impressi i futuri destini differenziativi tra gli innumerevoli tipi di cellule nervose, oscuri e controversi sono i processi causali del differenziamento specifico. Ancora nell'edizione del 1946 del suo Trattato di Istologia il Levi, come già ebbe ad osservare il Weiss nel 1939, dichiara la nostra ignoranza se al momento di abbandonare l'ependima gli elementi nervosi sono tutti equivalenti e ricevono solo più tardi l'assegnazione per il differenziamento finale per effetto di influenze locali, oppure se partano già con intrinseche differenze dirigendosi verso sedi più favorevoli alla loro natura (p. 802).

Risulta infatti dalla letteratura come le osservazioni sui fenomeni della determinazione istogenetica siano limitatissime e fatte incidentalmente nel corso di osservazioni dirette ad altro fine. Anche il successivo momento ontogenetico, quello del differenziamento, se da un punto di vista descrittivo e cronologico è stato studiato da una schiera innumerevole di studiosi, a cominciare da His con le sue classiche osservazioni, da un punto di vista sperimentale si è limitato allo studio della neurofibrillazione in rapporto alla attività funzionale dedotta dalla mielinizzazione odologica, dai collegamenti o dalla motilità degli embrioni. Altri hanno indagato il differenziamento nei trapianti ed altri di cellule coltivate in vitro, ma quasi tutti hanno esaurito lo studio del diffenziamento specifico con quello della neurofibrillazione; nessuno ha chiarito il problema sopra enunciato.

Come ho avuto modo di prospettare in alcune Note [3] e come ho ampiamente discusso in una Memoria presentata a questa Accademia, il differenziamento specifico delle cellule nervose non è rappresentato solo dalla neurofibrillazione. Le neurofibrille, con modeste variazioni strutturali, sono una condizione del differenziamento neuroplasmatico comune a tutte le cellule nervose. Ma il differenziamento specifico consiste anche nella grandezza,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « Battista Grassi » della Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(3) « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », XX, 1945, Nota I, II, III, « Acta Acc. Pont. », VIII, 1945.

nella forma peculiare della cellula nervosa, nel numero, nella forma e nella disposizione dei prolungamenti. E queste differenziazioni strutturali possono essere così particolari da permettere, come nel caso del neurone Mauthneriano, l'identificazione di una cellula nervosa tra tutte le innumerevoli dell'interno neurasse (nella maggioranza dei Vertebrati branchiati).

Ho creduto pertanto opportuno di introdurre il concetto distintivo tra il *differenziamento specifico generale*, comune a tutte le cellule nervose, e il *differenziamento specifico particolare* che identifica un particolare tipo di cellula nervosa.

Le mie esperienze dimostrano la validità di questo concetto e l'importanza ai fini di delucidare quanto ho più sopra esposto. Si possono infatti dissociare i due tipi di differenziamento specifico e mettere in luce una *determinazione istogenetica generale* che agisce in un tempo antecedente ed in luogo diverso da una *determinazione istogenetica* particolare; per cui, con opportuno isolamento, si può arrestare il processo differenziativo solo al primo processo generale.

Ho scelto come materiale per queste ricerche gli embrioni di Anfibi (*Rana esculenta*), materiale classico dell'embriologia sperimentale, dopochè ho potuto applicare con pieno successo un metodo argentico specifico per le cellule nervose (Bodian). Credo opportuno ribadire a questo proposito come sia essenziale per ricerche del genere l'impiego di metodi istologici specifici. Quanti dati, frutto di lunghe ricerche sperimentali, debbono essere riveduti essendo stato applicato solo un metodo di colorazione che consente apprezzamenti limitati alla morfogenesi e non alla citologia nervosa!

Nelle prime serie di esperienze ho preso in particolare esame le cellule di Mauthner, essendo questi elementi così peculiari per la forma e la grandezza da permettere una identificazione precoce ed un facile rilevamento delle alterazioni strutturali. I metodi impiegati nelle mie prime esperienze sono stati quelli delle culture *in vivo*, cioè del trapianto di un frammento nervoso tolto ad embrioni di varia età nella cavità celomatica o nella stessa cavità ependimale, in modo che i frammenti si sviluppassero senza prendere contatti con organi o tessuti dell'ospite, della asportazione di parti (organi periferici, porzioni del neurasse), del trapianto in sede neurale anomala o con rotazione del frammento. Già dallo scorso anno (1945) ho iniziate nuove esperienze col metodo degli espianti comunemente usato per gli Anfibi, cioè facendo sviluppare i frammenti in liquido di Ringer. Con questa tecnica ho potuto solo di recente aggiungere alcuni nuovi dati, così che ritengo opportuno integrarli in questa Nota con i precedenti traendo una conclusione dai risultati sin ora raggiunti.

Con le precedenti esperienze di asportazione e trapianto ho potuto identificare come il processo di determinazione dell'elemento mauthneriano si inizi a tappo vitellino piccolo e perduri sino alla fine della gastrulazione mettendo in luce la possibilità di determinazione di una nuova cellula di

Mauthner qualora la precedente venga asportata durante questo periodo. Trapiantando invece il territorio presunto di sviluppo della cellula di Mauthner prima di questo periodo, si ha un differenziamento nervoso solo con carattere generale senza la identificazione di elementi particolari.

Le esperienze di espianto convalidano questi risultati eliminando ogni dubbio sulla possibilità di influenze, comunque manifeste, dell'embrione sulla parte trapiantata. Negli espianti di germi precosi (gastrule di varia età) si ottiene un differenziamento del tessuto nervoso con caratteristiche generali e non appare nell'espianto alcuna cellula con caratteri particolari pur raggiungendo il differenziamento specifico generale con la neurofibrillazione e la produzione dei prolungamenti.

È interessante notare come anche da un punto di vista morfogenetico il frammento, se è costituito da una sufficiente quantità di materiale, si abbozza a vescicola tubolare con sottile e cilindrico lume centrale e con le cellule addensate attorno a tale cavità venendo ad assumere nelle sezioni l'aspetto più simile a quello del midollo spinale che del midollo allungato dal cui territorio presuntivo è stato prelevato il materiale; questo ribadisce per il midollo spinale una costituzione differenziativa più semplice. Se il frammento nervoso è molto piccolo non è possibile una regolazione morfogenetica nemmeno generale e il frammento si sviluppa come una sferuletta piena con le cellule disposte verso le superficie (4).

Le cellule di Mauthner, sia nei trapianti in isolamento come negli espianti, sono sempre riconoscibili con sicurezza per le maggiori dimensioni e il grosso neurite. Poichè è evidente che in questi casi non può essere esplicata da questi elementi la specifica funzione, possiamo affermare « . . . che la struttura precorre . . . le attività funzionali anche se si perfeziona con la funzione; ed è, come generalmente oggi si riconosce ereditariamente predisposta a quelle azioni che è chiamata a svolgere. » Questo brano di un articolo di Cotronei (5), scritto a proposito delle strutture meccaniche, si può applicare integralmente, come queste esperienze dimostrano, al tessuto nervoso.

Le malformazioni strutturali che si possono osservare nelle cellule di Mauthner fatte sviluppare in isolamento sono essenzialmente imputabili a condizioni spaziali deficienti per il loro normale accrescimento. Così la forma globosa o fusiforme della cellula è in relazione alla forma sferica piena o vescicolare e con pareti stese del frammento nervoso. Le esperienze

(4) È interessante notare come la presenza di un piccolo frammento di corda dorsale sia sufficiente a determinare una distribuzione della sostanza bianca e grigia diversa: la sostanza bianca verso la corda e le cellule dalla parte opposta. Vanno ricordati a questo proposito i reperti di Lehmann (1926) e di Holtfreter (1933, 1934) che discuterò nel lavoro in esteso sugli espianti.

(5) G. Cotronei *Prospettive biologiche moderne.* « Ric. scient. e ricostruz. », Anno 16°, n. 8 (1946).

di resezione del midollo dimostrano inoltre che il corpo cellulare risente anche del mancato accrescimento della grossa fibra.

Ricordo come con altre esperienze ho potuto altresì mettere in evidenza azioni estrinseche inibitorie dell'accrescimento di queste cellule, come nei trapianti in altre sedi del neurasse, dove si esplicano attività estranee diverse alla loro costituzione. Ricordo inoltre come sia riuscito a mettere in evidenza sperimentalmente una diversa attività tropica nella direzione di accrescimento del neurite e dei dendriti.

* * *

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente informa la Classe della morte del Corrispondente prof. Umberto Cisotti, avvenuta il 6 luglio c. a., e rivolge un commosso saluto alla sua Memoria, annunciando che l'Accademia, in una prossima adunanza, ne ricorderà degnamente l'integerrima figura e l'importante opera scientifica.

Il Presidente comunica poi di aver ricevuto una lettera da parte del Socio Straniero Einstein, con la quale l'illustre scienziato, già dimessosi dall'Accademia durante il regime fascista in segno di protesta contro le persecuzioni razziali, si dichiara ben lieto di riprendere ora il suo posto in seno ai Lincei.

Prendono quindi la parola il Socio prof. Giuseppe Levi, per la commemorazione del prof. Chiarugi, il Socio prof. Cassinis per quella del prof. Barbieri e il Socio prof. Bianchi che rievoca i professori Boeris e d'Achiardi.

Il Presidente ringrazia gli oratori per le elevate parole che hanno fatto rivivere nel cuore dei Colleghi le nobili figure dei Soci scomparsi.

Il Presidente informa poi i Colleghi che la prossima seduta della Classe sarà tenuta il 16 novembre e avrà un carattere di particolare solennità perchè, oltre alla commemorazione del compianto prof. Levi-Civita da parte del Socio prof. Amaldi, avrà luogo, in tale occasione, l'inaugurazione nella Biblioteca accademica, della sala intitolata al nome dell'illustre Socio scomparso, alla presenza della vedova. In questa sala, che sarà a disposizione dei cultori delle discipline matematiche, sono raccolti tutti i volumi della biblioteca del grande scienziato che la Signora Levi-Civita ha voluto, con munifico gesto, donare all'Accademia.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio prof. Silvestri, anche a nome del Socio professore Quagliariello, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di A. Stefanelli dal titolo. *I fenomeni della determinazione, della regolazione e del differen-*

ziamento del sistema nervoso. La determinazione istogenetica e il differenziamento della cellula nervosa studiati in riferimento alla cellula di Mauthner degli Anfibi. Messa ai voti, la proposta è approvata dalla Classe, con la consueta riserva dell'ufficio di Presidenza per quel che riguarda le spese di stampa.

Il Socio prof. Picone legge, anche a nome del Socio prof. Castelnuovo, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di Sebastioã José e Silva dal titolo: *L'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche.* Messa ai voti, la proposta è approvata.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per gli Atti accademici i prof. Bianchi, Cassinis, Silvestri, Picone, Rolla, Lombardi, Bompiani, Pierantoni e Somigliana.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Ascoli G., « Nuclei isotropi e loro autofunzioni » (pres. dal Socio M. Picone).

Cesari L., « Un criterio per la misurabilità degli insiemi » (pres. dal Socio M. Picone).

Cesari L., « Sulle serie doppie di Fourier » (pres. dal Socio M. Picone).

De Lerma B., « Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni ». Nota I (pres. dal Corrisp. U. Pierantoni).

De Lerma B., « Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni » Nota II (pres. dal Corrisp. U. Pierantoni).

Krall G., « Moltiplicatore critico d'una distribuzione di carico su una volta autoportante » (pres. dal Socio C. Somigliana).

Marcantoni A., « Su alcune formule esplicite nella compensazione per direzioni delle catene di triangoli e dei sistemi centrali semplici » (pres. dal Socio G. Cassinis).

Mazza L., « Sulle lastre fotografiche per l'ultravioletto estremo » (pres. dal Corrisp. L. Rolla).

Merli L., « Sull'approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi » (pres. dal Corrisp. E. Bompiani).

Moretti G., « Il getto piano turbolento studiato con la teoria del trasporto » (pres. dal Corrisp. M. Panetti).

Scorza Dragoni G., « Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane » (pres. dal Socio G. Castelnuovo).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Bianchi presenta alla Classe il IV volume della « Geologia dell'A.O.I. » del prof. Dainelli, che contiene le carte geologiche e chiude l'opera. Il prof. Bianchi, illustrato il valore scientifico e morale e l'importanza

pratica della pubblicazione sopra citata, chiede che la Presidenza autorizzi l'invio ai Soci che lo desiderino di quei volumi dell'opera che, a causa della guerra, non fu possibile distribuire negli scorsi anni. Il Presidente aderisce alla proposta.

Il Socio prof. Silvestri presenta una monografia del suo allievo dott. Domenico Roberti, *sull'« Aphis » (Doralis) frangulae Koch.*

Il Socio prof. Lombardi presenta un volume del Corrispondente professore Scarpa dal titolo: *Studi sull'effetto Volta e sulle pile* e il Socio prof. Somigliana una sua Memoria sugli *Sviluppi in serie delle espressioni della gravità e determinazione gravimetrica delle costanti del geoide.* Egli ne illustra il contenuto, mostrando non soltanto teoricamente, ma anche numericamente, che le espressioni della gravità in funzione della latitudine permettono di calcolare, a mezzo dei coefficienti che esse contengono, i valori dei semiassi dell'ellissoide che meglio rappresenta la superficie terrestre, pur risultando tali semiassi lievissimamente più grandi di quelli calcolati con misure geodetiche. Il Socio prof. Silva osserva che le osservazioni gravimetriche e più ancora le riduzioni di esse a una distribuzione ideale delle masse, che dovrebbero trovarsi tutte all'interno del geoide, non consentono ancora di determinare uno dei coefficienti di quelle espressioni, il quale viene invece calcolato a mezzo dei valori dei semiassi che si dovrebbero dedurre e che pertanto, fino al momento attuale, resta dimostrata soltanto quella possibilità teorica della determinazione delle dimensioni terrestri a mezzo delle misure di gravità che il Somigliana per primo ha posto in luce con brillanti e nuovi procedimenti matematici da lui introdotti nello studio della questione.

Il Presidente dopo aver ringraziato i Soci che hanno presentato le predette opere, prega il Segretario accademico Socio prof. Bordoni di illustrare brevemente alcune delle opere pervenute in omaggio all'Accademia, tra le quali particolarmente notevole è il volume 11 delle opere dello Schiaparelli, edito da Hoepli.

CONVEGNI SCIENTIFICI

Il Presidente prof. Castelnuovo ricorda poi ai Colleghi come, per iniziativa del compianto Socio prof. Federico Enriques, la Classe, nella seduta del 12 gennaio 1946, avesse deciso di riprendere quelle discussioni di temi d'interesse generale da svolgere, auspice l'Accademia, in Convegni scientifici, aperti a tutti gli studiosi, anche se non Soci dei Lincei. Uno di tali temi, ad esempio, proposto dallo stesso prof. Enriques, trattava dei *Rapporti tra il secondo principio della termodinamica e la vita.*

Era stata costituita anche una Commissione di Soci per studiare l'attuazione pratica del progetto, della quale facevano parte con Federico Enriques, i Soci proff. Giordani, De Blasi e Rondoni, insieme al Corrispondente Carrelli; ma, principalmente a causa dell'improvvisa morte del Socio prof. Enriques, la

Commissione non ha potuto finora predisporre un programma concreto. Il Presidente si riserva pertanto di ritornare sull'argomento non appena la Commissione avrà potuto riferirgli qualcosa di positivo ma, per intanto, ritiene opportuno comunicare ai Colleghi alcuni temi che egli ritiene adatti per tali Convegni come, ad esempio, i seguenti: *Raggi cosmici*; *Epoca glaciale*; *Antichità dell'uomo*. Alla discussione prendono parte il Socio prof. Armellini e il Socio prof. Abetti, che propone, come possibile tema, le *Relazioni tra i fenomeni solari e i fenomeni terrestri*, il Socio prof. Rondoni che fa presente l'opportunità di trattare un argomento di patologia, quale *Virus e cancro* o *Gli ultravirus*; il Corrispondente prof. Sergi invitato dal Presidente ad esporre il suo pensiero sul terzo dei temi proposti dal Presidente stesso, e il Corrispondente Brunelli che parla sui *Rapporti tra evoluzionismo e genetica*.

Terminata la discussione, il Presidente accenna brevemente a una possibile ripresa dei Convegni internazionali Volta ma fa anche presenti le grandi difficoltà, particolarmente finanziarie, che ostano a tale progetto. Assicura comunque che la Presidenza sta facendo ogni sforzo per superare gli ostacoli e addivenire a una sollecita ripresa dei Convegni.

CALENDARIO DELLE SEDUTE ACCADEMICHE

Il Presidente, infine, dopo aver fatto rilevare che è opportuno stabilire fin d'ora il calendario delle sedute di Classe, propone che le sedute siano tenute il secondo sabato di ogni mese. La proposta è approvata all'unanimità e la seduta è tolta alle ore 19.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 18 maggio 1946.

BAŽANT Vratislav u. STUDNIČKA F. K. — *Das Problem der Vitalität des Zahnschmelzes*. Prag, Königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1941. Pp. 376, in 8°.

BORŮVKA Otakar. — *Úvod do theorie grup*. Praha, Král. Ceská Společnost Nauk, 1944. Pp. 80, in 8°, con figg.

CHAPMAN Sydney. — *A mechanical – optical method of reduction of pairs of aurorae plates*. Estr. da « Terrestrial magnetism and Atmospheric Electricity », 1934.

— *A note on magnetic storms*. Estr. da « Philosophical Magazine », vol. XL, 1920.

— *A note on the measurement of the specific heats of Gases*. Estr. da « Proceedings of the Royal Society », s. A, vol. CXXVI, 1930.

— *A note on two apparent large temporary local magnetic disturbances possibly connected with earthquakes*. Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1930.

— *A theoretical note on the magnetic field of a circular sunspot*. Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1944.

— *Address delivered by the President professor S. Chapman on the source of the sun's energy*. Estr. da « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol CII, 1942, n. 2.

— *An example of the determination of a minute periodic variation, as illustrative of the law of errors*. Estr. da « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXVIII, 1918, n. 8.

CHAPMAN Sydney. — *Approximate formulae for functions expressed as definite integrals*. Estr. da « Philosophical Magazine », s. 7ª, vol. XXXIII, 1942.

— *Arthur Schuste, 1851–1934*. Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1934.

— *Charles Chree*. Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1928.

— *Electrical phenomena occurring at high levels in the atmosphere*. Estr. da « Journal of the Institution of Electrical Engineers », suppl. al vol. LVII, 1920.

— *Jonization in the upper atmosphere*. Estr. da « Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society », vol. LII, n. 219.

— *Notes on atmospheric sodium*. Estr. da « Astrophysical Journal », vol. XC, 1939, n. 2.

— *'Notes on isomagnetic charts*, I–VIII. Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1940, december; 1941, march; 1941, june, 1942 march, 1942 june.

— *On certain averagec characteristics of world wide magnetic disturbance*. Estr. da « Proceedings of the Royal Society », s. A., vol. CXV, 1927.

— *On solar ultra-violet radiation as the cause of aurorae and magnetic storms*. Estr. da « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », geophysical suppl., vol. II, 1930, n. 6.

— *On the Brownian displacements and thermal diffusion of grains suspended in a non – uniform fluid. – The molecular displacements in diffusing gas–mixtures*.

Estr. da « Proceedings of the Royal Society », s. A., vol. CXIX, 1928.

CHAPMAN Sydney. — *On the determination of the lunar atmospheric tide.* Estr. da « Zeitschrift für Geophysik », a. VI, n. 4–7.

— *On the influence of lunar declination on the lunar-diurnal variation on the declination at zikawei.* Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1917.

— *On the theory of the solar diurnal variation of the earth's magnetism.* Estr. da «Proceedings of the Royal Society», s. A., vol. CXXII, 1929.

— *On the origin of the aurora polaris.* Estr. da « Physical Review », vol. XXXII, 1928, n. 6.

— *On the production of auroral and night – sky light.* Estr. da « Philosophical Magazine », s. 7ª, vol. XXIII, 1937.

— *On the total light of the stars.* Estr. da «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXIV, 1914, n. 5.

— *On theories of magnetic storms and aurorae.* Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1938.

— *On the summability of series of Legendre's functions.* Estr. da « Mathematische Annalen », vol. LXXII, 1912, fasc. 2.

— *On the variability of the quiet-day diurnal magnetic variation at Eskdalemuir and Greenwich.* Estr da « Proceedings of the Royal Society », s. A., volume CXXIII, 1929.

— *Solar streams of corpuscles; their geometry, absorption of light, and penetration* – Estr. da « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXXIX, 1929, n. 5.

— *The atmospheric heigt distribution of band-absorbed solar radiation.* Estr. da « Proceedings of the phisical Society », vol. LI, 1939.

— *The characteristic of thermal diffusion.* Estr. da « Proceedings of the Royal Society of London », s. A, vol. CLXXVII, 1940, n. 968.

CHAPMAN Sydney. — *The correlation of solar and terrestrial magnetic phenomena.* Estr. da « Nature », 1928.

— *The effect of a solar eclipse on the earth's magnetic field.* Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1933.

— *The electrical conductivity of stellar matter – On the radial limitation of the sun's magnetic field – The sun's general magnetic field and the chromosphere.* Estr. da « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXXIX, 1928, n. 1.

— *The electric current-systems of magnetic storms.* Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1935.

— *The field energy of magnetic storms.* Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1932.

— *The heating of the ionosphere by the electric currents associated with geomagnetic variations.* Estr. da « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1937.

— *The ionized regions in the upper atmosphere.* [S. n. t.].

— *The kinetic theory of a gas constituted of spherically symmetrical molecules.* Estr. da « Proceedings of the Royal Society », s. A., vol. LXXXVI.

— *The lunar atmospheric tide at Accra, Gold Coast, Africa.* Estr. da « Quarterly Journal of the meteorological Society », vol. LXIV, 1938, n. 276.

— *The lunar atmospheric tide at Kimberley (1896–1915).* Estr. da « Memoirs of the Royal Meteorological Society », vol. IV, 1932, n. 33.

— *The lunar atmospheric tide at Glasgow.* Estr. da « Proceedings of the Royal Society of Edimburgh », session 1935–1936, vol. LVI, p. I, n. 1.

— *The lunar diurnal variation of atmospheric temperature at Batavia 1866–1938.* Estr. da « Proceedings of the Royal Society », s. A., vol. CXXXVII, 1932.

— *The lunar tide in the earth's atmosphere.* Estr. da « Quarterly Journal of the

Royal Meteorological Society», volume XLV, 1919, n. 190.

CHAPMAN Sydney. — *The moon's influence on the earth's magnetism.* Estr. da «Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity», 1914.

— *The number and galactic distribution of the stars.* Estr. da «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», vol. LXXVIII. 1917 n. 1.

— *The possibility of separating isotopes.* Estr. da «Philosophical Magazine», vol. XXXVII, 1919.

— *The space-gradients of the earth's magnetic field.* Estr. da «Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity», 1936.

— *Theories of magnetic storms.* Estr. da «The Observatory», 1919, n. 539.

— *Thermal diffusion of rare constituents in gas-mixtures.* Estr. da «Philosophical Magazine», vol. VII, 1929.

— *Thermal diffusion and the stars – Convection and diffusion within giant stars.* Estr. da «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», vol. LXXVII, 1917, n. 7.

— *Two new books on terrestrial magnetism and electricity: a review and a preview.* Estr. da «Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity», 1939.

— *Wind mixing and diffusion in the upper atmosphere.* Estr. da «Physical Review», vol. XXXVI, 1930, n. 5.

— a. COWLING T. G. — *The velocity of diffusion in a mixed gas; the second approximation.* Estr. da «Proceedings of the Royal Society of London», s. A., vol. CLXXIX, 1941, n. 977.

— a. FERRARO V. C. A. – *The electrical state of solar streams of corpuscles.* Estr. da «Monthly Notices of the Astronomical Society», vol. LXXXIX, 1929, n. 5.

— a. FERRARO V. C. A. – *The geomagnetic ring-current: its radial stability.* Estr. da «Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity», 1941.

— a. FERRARO V. C. A. – *The theory of the first phase of a geomagnetic storm.* Estr. da «Terrestrial Magnetism and atmospheric Electricity», 1940.

CHAPMAN Sydney. — a. HAMMAD A. – *The primary and secondary scattering of sunlight in a plan-stratified atmosphere of uniform composition.* Estr. da «Philosophical Magazine», s. 7ª, volume XXVIII, 1939.

— a. LIVENS G. H. – *The influence of diffusion in the propagation of sound wæves in air.* Estr. da «Proceedings of the London Mathematical Society», s. 2ª, vol. XIX, p. 5.

— a. LUDLAM A. E. – *A note on the vibration of the* CO_3 *– ion.* Estr. da «Philosophical Magazine», vol. I, 1925.

— a. MILAN MAJID A. – *The rate of ion – production at any height in the earth's atmosphere.* Estr. da «Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity», 1942.

— a. MILLER J. C. P. – *The statistical determination of lunar daily variations in geomagnetic and meteorological elements.* Estr. da «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society» geophysical suppl., vol. IV, 1940, n. 9.

— a. TOPPING J. – *On the form and energy of crystalline sodium nitrate.* Estr. da «Proceedings of the Royal Society», s. A., vol. CXIII, 1927.

— a. VESTINE E. H. – *The electric current-system of geomagnetic disturbance.* Estr. da «Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity», vol. XLII, 1938, n. 4.

— a. WHITEHEAD T. T. – *On the observations of earth potential – gradients at Ebro.* Estr. da «Terrestrial and Atmospheric Electricity», 1923.

— a. WHITEHEAD T. T. – *The influence of electromagnetic induction within the earth upon terrestrial magnetic storms.* [S. n. t.].

COBLENTZ W. W. — *The measurement of ultraviolet radiation useful in heliotherapy.* Estr. da «Journal of the Optical Society of America», vol. XXXVI, 1946, n. 2.

DANIELOPOLU D. — *La digitale et les strophantines: pharmacodynamie – thérapeu-*

tique. Paris, Masson et C^ie, 1946. Pp, 206, in 8°, con figg.

DANIELOPOLU D. — *Le système nerveux de la vie végétative*. I. *Schéma anatomo-physiologique du système nerveux de la vie végétative*. Paris, Masson et C^ie, 1944. Pp. LVIII – 443, in 8°, con figg.

— *Phylaxie – Paraphylaxie* (*immunité – anaphylaxie*) *et Maladies – spécifique* (*maladie du sérum, maladies infectieuses*). Paris, Masson et C^ie, 1946. Pp. 284, in 8°, con figg.

FANO Gino. — *Alcune questioni sulla forma cubica dello spazio a cinque dimensioni*. Estr. da «Commentarii mathematici Helvetici», vol. XVI, 1943–44, fasc. 4.

— *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve – sezioni canoniche*. (Nota riassuntiva). Estr. dagli «Acta» della Pontificia Accademia delle Scienze, vol. IX, n. 16.

— *Osservazioni sulla rappresentazione di corrispondenze birazionali fra varietà algebriche*. Estr. da «Commentarii mathematici Helvetici», vol. XIV, 1941–42, fasc. 2.

— *Quelques remarques à propos d'une note de M. Amin Yasin*. Estr. da «Comptes. rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. CCX, 1940.

— *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali e aventi curve – sezioni canoniche*. Estr. da «Commentarii mathematici Helvetici», vol. XIV, 1941–42, fasc. 2.

— *Sui cerchi ortogonali a due cerchi dati*. Estr. dalla «Revista de la Universidad Nacional de Tucumán», s. A. (matemáticas y física teórica), vol. II, 1941, nn. 1 e 2.

— *Sulle curve ovunque tangenti a una quintica piana generale*. Estr. da «Commentarii mathematici Helvetici», volume XII, 1939–40, fasc. 3.

— *Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni contenenti rigate razionali del 4° ordine*. Estr. da «Commentarii mathematici Helvetici», volume XV, 1942–43, fasc. 1.

FANO Gino. — *Superficie del 4° ordine contenenti una rete di curve di genere 2*. Estr. da «Commentationes» della Pontificia Accademia delle Scienze, vol. VII, 1943, n. 9.

Festschrift zur 200-Jahr-Feier der Naturfoschenden Gesellschaft in Zürich (*1746–1946*). *Geschichte der Naturforschenden Gesellschaft und 50 Jahre naturwissenschaftliche Forschung in Zürich* (*1896–1946*). Zurich, Fretz, 1946. Pp. 435, in 8° con figg. (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahr. XCI).

GARCÍA Godolfredo. — *Ecuaciones cardinales y escalares mas generales de la dinámica de los cuerpos con movimientos internos*. Estr. da «Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima», vol. XI, 1946, fasc. 1.

— *El problema de los dos cuerpos en el espacio tridimensional en la teoría clásica*. Estr. da «Revista de Ciencias», a. XXXVIII, 1936, n. 116.

— *Explicación einsteniana del Efecto Stark–Lo Surdo, Efecto Zeemann*. Estr. da «Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie», vol. XXVII, 1934.

— *Forma cardinal canónica de las ecuaciones del movimiento de los tres cuerpos interviniendo además de la atracción universal, fuerzas disipativas y fuerzas giroscópicas*. Estr. da «Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima», vol. XI, 1946, fasc. 1.

— *Generalización de la expresión de Lagrange. – Generalización de la desigualdad de Sundman, deducida de la homogeneidad de la función potencial y de la función auxiliar de Birkhoff para los problemas de los n cuerpos e infinito numero de cuerpos* (*gas gravitacional o nebulosa*). Estr. da «Revista de Ciencias», a. XLV, n. 443.

— *Generalization of Sundman's fundamental equality to the case of more than three bodies – Generalization of the inequality of Sundman to the case of more*

than three bodies and to the case of a gravitational gas. Estr. da « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. XXVIII, 1942, n. 10.

GARCÍA Godolfredo. — *La métrica en un espacio n – dimensional.* Estr. dalla « Revista de Ciencias », a. XXXVIII, 1936, n. 116.

— *La obra científica del señor Profesor George D. Birkhoff.* Estr. da « Revista de Ciencias », a XLIV, n. 440.

— *La velocidad y la aceleración totales en coordenadas absolutas.* Estr. dalla « Revista de Ciencias », a. XXXVIII, 1936, n. 115.

— *Las ecuaciones de Lagrange y el principio de Hamilton en la mecánica clásica y en la mecánica relativista.* Estr. da « Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie », vol. XXVI, 1933, classe III.

— *Le problème général de la balistique extérieure.* Estr. da « Bulletin des Sciences mathématiques », s. 2ª, t. LXIV, 1940.

— *Lois du mouvement planétaire einsteinien dans un milieu résistant.* Estr. da « Bulletin de la Soc. mathématique de Grèce », vol. XVI, 1935, n. 3.

— *Mouvement des projectiles autour de son centre de gravité. – Sur le mouvement gyroscopique – Mouvement pendulaire des projectiles. Dérivation.* Lima, s. e., 1940. Pp. 145, in 8º, con tavv.

— *Przemówienie na posiedzeniu uroczystem Wydzialu Nauk Biologicznych, Fizycznych i Matematycznych Uniwersytetu San Marco w Limie.* Estr. da « Wiadomości matematycznych », t. XLVI, 1938.

— *Resumen de las Conferencias dictadas por el Prof. George D. Birkhoff en las Facultadas de Ciencias y de Letras y Pedagogia de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.* Estr. da « Revista de Ciencias », a XLIV, n. 440.

— *Sobre el estado actual del Sistema Solar. Nuevas fuerzas disipativas que actúan además de la atracción universal. El problema de los tres cuerpos, siendo el sistema disipativo.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLVI, n. 450.

GARCÍA Godolfredo. — *Sobre la ampliación de las leyes de Newton y de Kepler para explicar clásicamente el corrimiento secular del perihelio de los planetas, la determinación del periodo de la revolución anomalística y de la revolución sideral.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLVI, 1944, n. 447.

— *Sobre la forma mas general de las ecuaciones de la dinámica para los sistemas no holonomos y polonomos.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima », a. XI, vol. IX, 1946, fasc. 2.

— *Sobre la integración de la ecuación completa de la difusión y su aplicación al estudio de la célula.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLVI, 1944, n. 448.

— *Sobre la integración de la ecuación de la difusión para el caso de una célula esférica.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima », a. VIII, vol. VIII, 1945, n. 2 e da « Revista de Ciencias », a. XLVI, 1934, n. 449.

— *Sobre la regularización del problema plano de los tres cuerpos.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima », vol. V, 1942, fasc. III.

— *Sobre las leyes de la densidad en las nebulosas en función de la distancia.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLVI, n. 447.

— *Sobre una generalización de una nueva desigualdad deducida de la función auxiliar de K. Sundman generalizada por George D. Birkhoff en el problema de los tres cuerpos.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas, y Naturales de Lima », vol. VI, 1943, fasc. 1.

— *Superficie equipotencial compleja que envuelve á un cuerpo formado de masas fluidas.* Estr. da « Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie », volume XXVII, 1934, classe III.

GARCÍA Godolfredo. — *Teoría de las ondas smicas de Lord Rayleigh en medios cristalinos del sistema cubico.* Estr. da « Publicaciones de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas », 1941, n. 143.

— et ROSENBLATT Alfred. — *Sur la formule de Stokes dans le théorie de la gravité.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLI, n. 429.

GODEAUX Lucien. — *Construction du système canonique d'une surface particulière.* Estr. da « Bulletin de la Société Royal des Sciences de Liège », 1942, n. 10.

— *Etude de quelques involutions cycliques appartenant à des surfaces algébriques.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences, de l'Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVII, 1941.

— *Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVII, 1941.

— *Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques.* Estr. da « Bullettin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique », s. 5ª t. XXVII, 1941.

— *Remarques sur la surface multiples ayant un nombre fini de points de diramation.* Estr. da « Bulletin des Sciences Mathématiques » s. 2ª, t. LXIV, 1940.

— *Remarque sur l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1941, n. 5.

— *Remarque sur une involution du second ordre appartenant à une surface du sixième ordre.* Estr. dal « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1943, n. 5.

— *Sur certaines congruences de Goursat.* Estr. da « Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège », 1942, n. 6.

— *Sur certaines surfaces du quatrième ordre contenant douze droites.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVIII, 1942.

GODEAUX Lucien. — *Sur la représentation des transformations birationnelles planes.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1942, n. 5.

— *Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan.* Estr. da « Mémoires de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », t. XIX, 1941, fasc. 1.

— *Sur la surface du quatrième ordre contenant une conique.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1942, n. 6.

— *Sur la surface du quatrième ordre contenant une droite et une conique.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVIII, 1942.

— *Sur les courbes fondamentales de seconde espèce des transformations birationnelles de l'espace.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1942, n. 8.

— *Sur les foyers des congruences de courbes algébriques.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVIII, 1942, nn. 4-6.

— *Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière.* Estr. da « Bulletin des Sciences mathématiques », s. 2ª, t. LXVII, 1943.

— *Sur les involutions du second ordre appartenant aux surfaces intersections complètes d'hyperquadriques.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVIII, 1942.

— *Sur les points unis symétrique des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Estr. da « Revista de la Universidad Nacional de Tucumán », vol. I, 1940, nn. 1 e 2.

— *Sur les surfaces bicanoniques régulière de genre trois.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1941, n. 9.

— *Sur les surfaces de bigenre un appartenant à un espace à huit dimensions.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1941, n. 8.

GODEAUX Lucien. — *Sur les surfaces du quatrième ordre circonscrites à deux tétraèdres de Moebius.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royal de Belgique », s. 5ª, t. XXVII, 1941.

— *Sur les surfaces du quatrième ordre touchant quatre plans le long de quatre droites.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1941, n. 10.

— *Sur les surfaces normales de genres un appartenant à un espace linéaire à neuf dimensions.* Estr. dal « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1941, n. 10.

— *Sur les surfaces possédant une conique multiple.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », seduta 1943, n. 6.

— *Sur quelques points de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Estr. da « Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège », 1943, n. 4.

— *Sur quelques surfaces projectivement canoniques appartenant à des variétés de Segre.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVIII, 1942, nn. 1–3.

— *Sur une configuration géométrique dans l'espace à quatre dimensions.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVII, 1941.

— *Sur une homographie hyperspatiale de période quatre.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1941, n. 4.

— *Sur une propriété de la variété des cordes d'une surface de Veronese.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVII, 1941.

— *Sur une surface bicanonique de genre géométrique égal à un.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1941, n. 11.

— *Un problème sur les variétés algébriques.* Estr. da « Revue scientifique », a. LXXX, 1942, fasc. 1.

GODEAUX Lucien. — *Une congruence linéaire de cubiques gauches.* Estr. da « Bulletin de la Classe des Sciences de la Académie Royale de Belgique », s. 5ª, t. XXVIII, 1942.

— *Une propriété des variétés de Veronese.* Estr. da « Proceedings Kon. Nederlandsche Akademie van Wetenschappen », vol. XLIV, 1941, n. 9.

— *Variétés mixtes de Segre-Veronese.* Estr. da « Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège », 1942, n. 2.

ROBERTI Domenico. — *Monografia dell'Aphis (Doralis) frangulae Koch.* I. *Morfologia, anatomia, istologia.* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia agraria di Portici », vol. VI, 1946.

RUSSO Achille. — *Incremento del condrioma ed attivazione del metabolismo nell'oocite della coniglia.* Estr. da « Archivio di Scienze Biologiche », volume XXII, 1936, n. 6.

— *Rapporti di Astropecten bispinosus con la forma ridotta del Canale di Suez e con la prima forma omologa dragata nel Mediterraneo.* Venezia, Tip. C. Ferrari, 1940. Pp. 6, in 8°, 1 tav. (Comitato Talassografico Italiano. Memoria CCLXXVII).

— *Rapporti di Astropecten Jonstoni Delle Chiaie del Mediterraneo con la forma ridotta del Canale di Suez.* Estr. da « Archivio di Oceanografia e Limnologia », a. I, 1941, fasc. 2.

SCARPA Oscar. — *Studi sull'effetto Volta e sulle pile.* Volume miscellaneo composto di 49 note pubblicate dall'anno 1900 al 1945.

SCHIAPARELLI Giovanni Virginio. — *Le opere pubblicate per cura della Reale Specola di Brera.* T. XI. Milano, Hoepli, 1943. Pp. 704, in 4°, con tavv.

SOMIGLIANA Carlo. — *Sviluppi in serie delle espressioni della gravità e determinazione gravimetrica delle costanti del geoide.* Estr. da « Memorie della Società Astronomica Italiana », volume XVIII, 1946, n. 1.

STUDNIČKA F. K. — Vedi: Bažant Vratislav.

U. B.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 16 novembre 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

INAUGURAZIONE DELLA « SALA LEVI-CIVITA » NELLA BIBLIOTECA ACCADEMICA

Il Presidente, aperta la seduta, pronuncia le parole seguenti:

Il nostro indimenticabile collega Tullio Levi Civita aveva espresso più volte il desiderio, confermato poi nelle ultime volontà, che i libri, cari e fedeli compagni della sua vita, non restassero inoperosi dopo la morte, ma fossero sistemati in modo da esser accessibili agli studiosi della scienza che Egli aveva arricchito con le sue ricerche.

La vedova, che gli fu devota compagna e gli alleviò con tanto amore le pene fisiche e morali degli ultimi anni, si affrettò, appena le circostanze lo permisero, a soddisfare il desiderio dell'estinto. Ella decise di offrire i libri e gli scaffali che li contenevano alla nostra Accademia, ben sapendo quanto il nostro collega tenesse al titolo di linceo, e come Egli prediligesse i nostri « Rendiconti » per la pubblicazione dei suoi lavori.

È superfluo dirvi con quanta gratitudine io abbia accettato il dono generoso. Per accoglierlo si presentava una occasione particolarmente favorevole. Si erano rese libere alcune sale che già ospitavano la galleria di arte antica, la quale verrà sistemata altrove, e queste sale dovevano servire per ampliamento della biblioteca accademica. Ho così potuto destinare una di esse, quella in cui ci troviamo, per collocarvi i libri del compianto amico. Insieme ai libri la vedova volle anche darci il ritratto del caro compagno della sua vita. Non senza dolore ella si separò da un oggetto prezioso, ma il rammarico fu vinto dal pensiero che il ritratto avrebbe qui ricordato a molte generazioni di studiosi la dolce effigie dell'uomo illustre che abbiamo ammirato ed amato.

Così ho potuto dedicare questa sala alla sua memoria; sala modesta ed austera ma conforme ai gusti semplici di Lui.

Essa contiene nelle due pareti laterali gli scaffali ed i libri che occupavano il suo studio di via Sardegna; nello scaffale tra le finestre e nel palchetto infe-

riore degli altri la ricchissima miscellanea composta dei fascicoli (circa 20000) che per quasi mezzo secolo Egli ha ricevuto da tutti i paesi del mondo. Finalmente nella parete che sta di fronte alle finestre son raccolti libri della nostra biblioteca accademica, tra i quali la collezione di tutti i periodici di matematica che riceviamo e le opere complete dei più grandi cultori della nostra scienza. L'ordinamento della sala fu fatta con cura ed amore dal bibliotecario prof. Silvagni, cui porgo i ringraziamenti dell'Accademia.

I frequentatori di questa sala troveranno un ambiente propizio allo studio e alla meditazione. Essi potranno consultare liberamente non solo i libri qui contenuti, ma potranno pure valersi della inestimabile collezione di Atti di tutte le società scientifiche del mondo che la biblioteca accademica possiede.

I giovani che qui sosteranno, ispirandosi al pensoso e dolce sguardo del grande scomparso, si sentiranno portati ad imitarlo nella passione per la scienza, nella bontà, nella modestia. Ed Egli che ha trascorso le ore più liete della vita guidando i discepoli nelle ardue vie della ricerca, se potesse aver nozione di quel che succede quaggiù, si rallegrerebbe di sopravvivere nella forma a lui più gradita.

Io mi auguro che questa sala e le attigue, che per altre discipline vorrei fossero sistemate similmente, attirino alla nostra biblioteca giovani assetati di sapere, dando ad essa una nuova vita. E mi auguro che il fervore di discussioni scientifiche parta di qua per propagarsi alle altre sale di questo palazzo e a tutta l'Accademia, la quale deve essere un focolaio di produzione e diffusione del sapere.

Con questo augurio, e sotto gli auspici del caro e grande Collega scomparso, dichiaro aperta agli studiosi la sala Levi-Civita e dò la parola al collega Amaldi, amico e collaboratore di lui, che vi parlerà ora della sua vita e delle sue opere.

Commemorazione del Socio Tullio Levi-Civita

letta dal Socio U. Amaldi

Tullio Levi-Civita si è spento in Roma il 29 dicembre 1941. Era nato a Padova il 29 marzo 1873.

Il padre, che, in età tenerissima, dalla nativa Rovigo era stato recato a Padova, quando ancora vi era vivo e cocente il ricordo delle repressioni austriache dei moti studenteschi del 1848, si era mostrato, fin dalla prima adolescenza, così insofferente della dominazione straniera, che la famiglia, subito dopo il 1859, lo aveva mandato a continuare gli studi in Piemonte. Appena diciassettenne, era stato con Garibaldi ad Aspromonte ; e, laureatosi poi giovanissimo in Giurisprudenza a Pavia, aveva partecipato fra i Volontari garibaldini alla campagna del 1866, guadagnandosi a Bezzecca una medaglia al valore. Tornato a Padova dopo la liberazione del Veneto, vi era salito rapidamente in rinomanza di insigne giureconsulto e di avvocato principe e, circondato dalla generale esti-

mazione, aveva avuto larga parte nelle amministrazioni cittadine. Sindaco di Padova dal 1904 al 1910, fu nominato nel 1908 Senatore del Regno.

Da lui Tullio Levi-Civita trasse la fermezza del carattere e, con la forza dell'ingegno, talune note salienti della sua mentalità speculativa, mentre dalla madre, mite e dolce figura di donna gentile, che sempre egli circondò della più devota e delicata tenerezza, ricevette, in un ambiente familiare affettuoso e signorile, le assidue cure di un'elevata educazione del cuore.

Compì in casa i primi studi, fino ai rudimenti della cultura umanistica, che gli furono impartiti da un dotto sacerdote cattolico – il professor Padrin – e a dieci anni fu iscritto alla seconda classe del pubblico Ginnasio «Tito Livio», dove i condiscepoli, tutti maggiori di età, furono ben presto affascinati da quel minuscolo compagno, vivace e socievole, che con la stessa spontanea semplicità, con cui partecipava alla loro chiassosa spensieratezza, li superava poi tutti nella scuola per la prontezza del capire e la facilità dell'apprendere. Questa superiorità si palesò addirittura eccezionale, quando il Levi-Civita, quattordicenne, passò al Liceo; e, dall'inizio di quel triennio, si venne manifestando in lui più decisamente quell'inclinazione agli studi matematici, che prima era rimasta in qualche modo velata dall'eclettico fervore d'interessi, che, anche nel campo delle lingue classiche e, più particolarmente, della storia, lo portava ad allargare e approfondire la sua cultura ben oltre i limiti dei programmi scolastici.

In quella scoperta di se stesso egli era assecondato, con amorevole comprensione, dal suo professore di matematica del Liceo – Paolo Gazzaniga, insegnante efficacissimo e valente cultore della Teoria dei numeri – e da uno zio materno, ingegnere a riposo, che amava rinfrescare le sue conoscenze matematiche, rileggendo con quel nipote d'eccezione i vecchi suoi testi universitari. Erano i venerandi trattati del Todhunter e del Salmon, che non solo fornivano al giovane Levi-Civita un largo campo di esercitazioni svariate, ma, lasciando spesso insoddisfatto il finissimo senso critico connaturato alla sua mentalità, lo inducevano alle prime prove di riflessione autonoma e di ricerca. Il Gazzaniga, anche negli ultimi anni della sua vita, rievocando la sorprendente precocità di quel suo discepolo, amava ricordarne un tentativo di dimostrazione del postulato delle parallele, che correva, elegante e ineccepibile, sino ad una inavvertita ammissione finale, in cui si annidava la petizione di principio. A quindici anni, nella delusione di quell'insucesso, il Levi-Civita non poteva certo immaginare che un giorno avrebbe legato per sempre il suo nome ad una estensione, altrettanto geniale quanto feconda, di quel concetto stesso di parallelismo.

Alla fine del Liceo ebbe chiara e sicura la certezza della sua vocazione. Il padre aveva a lungo accarezzato il sogno di veder continuata da un tale erede l'opera sua; ma, mente illuminata e cuore consapevole dei doveri paterni, non si oppose alla libera scelta del figlio, e questi, nel 1890, s'iscrisse all'Università di Padova per la Laurea in Matematica.

In quell'antico Studio, custode nei secoli delle più pure e gloriose tradizioni del pensiero scientifico italiano, i matematici di quel tempo erano G. Veronese,

G. Ricci–Curbastro, F. d'Arcais e, trasferitovi qualche anno innanzi da Pisa per la Meccanica superiore, E. Padova. Il Veronese, nella piena maturità della sua produzione scientifica, dava allora gli ultimi tocchi ai *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* e il Ricci era ormai entrato nella fase conclusiva della costruzione del *Calcolo differenziale assoluto*, mentre il d'Arcais, già discepolo del Dini, recava nell'insegnamento un suo personale equilibrio di valutazione delle esigenze critiche rispetto alle finalità costruttive dell'Analisi – in senso, quasi si direbbe, euleriano – e il Padova, nei suoi corsi di Meccanica, s'ispirava direttamente agli indirizzi e all'opera del Betti e del Beltrami.

Ma dai corsi propedeutici il Levi–Civita, che già se li era da sè anticipati nel triennio liceale, ben poco aveva da apprendere, se non forse una visione sintetica e sistematica di nozioni oramai familiari, talchè, fin dai primi contatti coi nuovi Maestri, egli fu tratto a seguirne l'opera viva d'indagine personale e quasi a dividerne lo sforzo e la passione. Nel quadro vasto e, sotto qualche aspetto, farraginoso dei *Fondamenti* del Veronese il Levi–Civita, con singolare intuito, fissò l'attenzione su uno dei risultati più originali e più significativi, cioè sulla dimostrazione della possibilità di Geometrie non–archimedee; e, quasi presago delle obiezioni mal fondate, con cui più tardi sarebbe stata contesa al Veronese la legittima priorità di quel ritrovato, si accinse a ricercarne una giustificazione diretta per via nettamente analitica. Inaugurava così, fra il 91 e il 92, la sua produzione scientifica con una memoria *Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici*, che ancora oggi appare, piuttosto che il primo saggio di un diciottenne, l'opera matura di un ricercatore provetto. Segue immediatamente, in tutt'altro indirizzo, la Dissertazione di Laurea *Sugli invarianti assoluti*, nella quale il Levi–Civita, ricollegando per primo le vedute del Ricci alle teorie e ai metodi di Sophus Lie, di cui fin d'allora palesa un pieno e sicuro possesso, studia la forma e le proprietà dei sistemi differenziali, atti a definire, per un qualsiasi sistema di funzioni di quante si vogliono variabili, soggette alla più generale legge mista di covarianza e contravarianza, gl'invarianti differenziali e integrali, non già, come nel Calcolo differenziale assoluto, rispetto al gruppo di tutte le possibili trasformazioni, bensì di fronte a un qualsiasi altro gruppo continuo (finito o infinito).

E la Laurea fu, più che per lui, una festosa solennità per i suoi Maestri, ormai ben consapevoli delle ascese, cui, nel campo matematico, era predestinato quel discepolo.

Sul cammino di ogni giovane scienziato, la Laurea, come passaggio dalla vigilata attività scolastica alla libera estrinsecazione delle iniziative personali, segna per lo più l'inizio di un periodo tormentoso di ricerca dell'orientamento; e, in qualche modo, anche il Levi–Civita dovette risentire quell'intimo travaglio, ma non per questo rallentò la sua attività.

Conclusa una ricerca di *Teoria dei numeri*, con la quale perveniva ad una espressione, sotto forma di residuo, del numero dei numeri primi compresi in un

dato intervallo, si trasferì per alcuni mesi a Bologna, dove allora insegnavano l'Enriques, il Pincherle, l'Arzelà, il Donati; e in quell'ambiente di raccolto fervore speculativo trovò quotidiane occasioni a ricambi d'idee e nuovi incentivi all'innata sua versatilità. Attratto dalle ricerche del Pincherle sulle operazioni funzionali lineari, rappresentabili per mezzo d'integrali curvilinei sul piano complesso, e, ravvisato in quella classe d'operazioni un nuovo campo per l'applicazione di vedute gruppali, ne determinò, sotto restrizioni imposte dalla natura del problema, tutti i gruppi continui infiniti; e dai risultati così conseguiti dedusse da un lato la caratterizzazione delle equazioni differenziali ordinarie riducibili con un cambiamento di funzione incognita alla forma lineare e dall'altro un principio generale e uniforme per l'inversione degli integrali definiti.

Si può dire che con queste ricerche il Levi-Civita abbia chiuso la fase iniziale della sua attività, chè già l'anno successivo, a Pavia, dov'era stato nominato Professore interno alla Scuola Normale Superiore annessa a quella Facoltà di Scienze, si affermava poderosamente, nel campo della Meccanica analitica, con quella ricerca sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche, che per l'importanza dei risultati e l'originalità dei procedimenti, non meno che per la suscettibilità di sviluppi ulteriori, è rimasta classica. Del problema generale della mutua trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche, posto qualche anno innanzi dall'Appell, s'erano già occupati, senza giungere a conclusioni esaurienti, vari matematici, in particolare il Painlevè, che lo aveva precisato, rilevandone la riducibilità alla determinazione di tutti i *corrispondenti* di un dato sistema dinamico, cioè di tutti quei sistemi che col dato hanno comuni le traiettorie; e il Levi-Civita, ripresa *ab initio* la questione e analizzatane con lucidezza ed eleganza mirabili l'impostazione generale, ne affrontò la discussione nell'ipotesi dell'assenza di forze applicate. Era così condotto, sotto l'aspetto geometrico, al problema generale delle mutue rappresentazioni geodetiche delle varietà riemanniane a un qualsiasi numero di dimensioni, cioè ad un problema, cui, come oggi appar ben chiaro, si presentavano direttamente e specificamente adeguati i metodi del Calcolo differenziale assoluto; e, appunto con l'uso sagacissimo di tali metodi, egli pervenne alla conclusione che per la più generale coppia di sistemi dinamici corrispondenti, dotati di uno stesso numero n di gradi di libertà e non sollecitati da forze, sono possibili precisamente n tipi, fra loro distinti, caratterizzati ciascuno dal numero degli integrali primi quadratici e, conseguentemente, da altrettante forme canoniche, da lui esplicitamente assegnate, per le rispettive energie cinetiche. Così, ad opera del Levi-Civita, il Calcolo differenziale assoluto, che sino allora il Ricci, fors'anche contrastato dall'incomprensione dei matematici di quel tempo, aveva cimentato quasi esclusivamente entro i confini tradizionali della Geometria differenziale metrica, era per la prima volta portato a mostrare la sua potenza nella trattazione di un problema nuovo ed elevato, di fronte al quale sarebbero riusciti vani mezzi d'indagine meno penetranti.

Ed un'altra non meno suggestiva illustrazione della fecondità di quei procedimenti il Levi-Civita forniva poco più tardi con la determinazione dei tipi di potenziali dello spazio, che si possono far dipendere da due sole coordinate. Era questo un problema, che già si era implicitamente presentato nella *Commentatio mathematica* del Riemann e che, più recentemente, era stato segnalato, per il suo interesse, dal Volterra, che, mirando a raccogliere in una teoria più comprensiva ed elevata gli sviluppi di C. Neumann sul potenziale logaritmico e le ricerche del Beltrami sui potenziali simmetrici, aveva iniziato lo studio generale di codesti potenziali binari. La diretta traduzione analitica di quel problema conduceva a sistemi differenziali di una complicazione addirittura inestricabile; e il Levi-Civita, con una di quelle geniali vedute semplificatrici, che gli furono caratteristiche, notò che necessariamente risulta binario ogni potenziale, che ammetta una trasformazione infinitesima in se stesso; onde, classificando i sottogruppi a un solo parametro del gruppo ∞^7 delle similitudini, che è il più ampio gruppo continuo puntuale ammesso dall'equazione del Laplace, pervenne a cinque tipi di potenziali binari, di cui uno completamente nuovo (i potenziali spirali). Ma con ciò le difficoltà intrinseche del problema non erano vinte, bensì, in qualche modo, spostate, giacchè restava da assodare se altri tipi sfuggissero alla enumerazione così ottenuta; ed è qui che il Levi-Civita faceva intervenire, con piena aderenza concettuale al problema e con insuperabile eleganza algoritmica, i metodi del Calcolo differenziale assoluto. Associata ad ogni potenziale binario la rispettiva congruenza di curve equipotenziali e approfondita adeguatamente la geometria intrinseca delle congruenze di curve, ne traeva la conclusione che i soli potenziali binari non trasformati in sè da un gruppo ∞^1 di similitudini sono quelli, che risultano caratterizzati come aventi a congruenza equipotenziale una qualsiasi congruenza rettilinea del Ribaucour e che, secondo un'osservazione del Klein, coincidono coi potenziali a parametro differenziale primo identicamente nullo, già considerati dal Jacobi.

Nel frattempo, spentosi prematuramente Ernesto Padova, il Levi-Civita, già nel novembre del 1896, era stato chiamato a succedergli per incarico; e, alla fine di quello stesso anno accademico, si aggiudicava, per concorso, la cattedra di Meccanica razionale, assumendo, qualche anno dopo (1902), per incarico, anche l'insegnamento della Meccanica superiore.

Tornava così, maestro fra i suoi maestri, in quella stessa Università, che non più di tre anni innanzi lo aveva avuto scolaro; e nella quiete della città natale, nella raccolta intimità della famiglia paterna trovava pienamente appagate la sua profonda affettività e l'innata aspirazione ad una semplicità ordinata e tranquilla di abitudini, che, fuori di ogni cura materiale, gli permettesse di concentrarsi tutto in un'intensa vita di pensiero.

A Padova insegnò per oltre vent'anni e l'opera scientifica da lui compiuta in quel periodo appare prodigiosa per la vastità degli sviluppi e, al tempo stesso,

per la meditata perfezione di ogni ricerca particolare. Matematico nato nel pieno senso della parola, egli passava senza sforzo dall'uno all'altro di campi svariati – dalla meccanica analitica all'elettromagnetismo, dalla meccanica celeste alla teoria del calore, dall'idromeccanica all'elasticità – e ovunque affrontava problemi precisi ed elevati, per lo più i problemi fondamentali caratteristici dei singoli indirizzi considerati. Dotato di una sicura e acutissima potenza logica, in cui talvolta pareva riflettersi la mentalità giuridica del padre, e guidato da una larga visione storica dell'evoluzione dei concetti e dei metodi matematici, attinta direttamente alle fonti classiche, sottoponeva ogni problema a una profonda e serrata analisi preliminare, diretta a individuarne gli elementi logici irriducibili; e le difficoltà così sceverate e graduate superava l'una dopo l'altra, applicando a ciascuna, nella piena sua padronanza dell'Analisi, i procedimenti deduttivi più semplici e meglio adeguati allo scopo, spesso da lui medesimo affinati e rielaborati sotto nuove forme in ricerche collaterali. Grazie a quella sua tecnica concettuale di schematizzazione dei problemi, riusciva ad imprimere alle sue trattazioni caratteri inconfondibili di profondità, di chiarezza, di eleganza algoritmica, e a mettere in luce, fra ordini di questioni estrinsecamente lontani, ravvicinamenti inaspettati, nessi riposti e non di rado precisi ed intrinseci rapporti di equivalenza astratta.

Quel ventennio di attività padovana s'inizia con un poderoso gruppo di ricerche di meccanica analitica, e prime si presentano quelle sulla stabilità dei fenomeni di moto, e, più in generale, delle soluzioni dei sistemi differenziali. Com'è ben noto, quest'ordine di questioni, la cui lontana origine risale alla *Mécanique analytique* del Lagrange, che vi aveva stabilito il suo metodo delle piccole oscillazioni, era stato ripreso e approfondito dal Dirichlet, e, negli anni immediatamente precedenti, dal Poincarè e dal Ljapunov; e nei casi via via più larghi, così considerati, si era assodato che in generale la stabilità, a differenza dell'instabilità, è un carattere di natura nettamente quantitativa, talchè il Poincarè aveva potuto affermare che la instabilità è la regola, la stabilità soltanto un'eccezione. Tuttavia ragioni di analogia, specialmente in base a circostanze segnalate dallo stesso Poincarè per sistemi differenziali normali, i cui secondi membri dipendano dal tempo, sembravano render presumibile che, nei problemi di meccanica celeste, la stabilità potesse assumere un carattere meno eccezionale di quel che le va riconosciuto in astratto. Il Levi-Civita dimostrò che tale presunzione non era fondata. Introdotto e sviluppato un suo metodo generale, che riconduce il giudizio di stabilità o instabilità di ogni singola soluzione di un sistema differenziale a quello relativo a una ben determinata trasformazione puntuale, e, trattane una nuova dimostrazione, singolarmente semplice e perspicua, del teorema fondamentale del Ljapunov, cimentò quel suo metodo su casi non prima considerati e pervenne ad assodare che anche soluzioni periodiche, che in prima approssimazione appaiono stabili, risultano in senso rigoroso instabili. Così, nel caso del problema ristretto dei tre corpi,

potè giungere alla conclusione, altrettanto significativa quanto inattesa, che per le soluzioni prossime a moti circolari uniformi esistono nel piano dei tre corpi infinite zone d'instabilità. Nuovi apporti a quello stesso ordine di questioni sono stati recati più tardi da altri matematici, particolarmente dal Birkhof, ma, nei riguardi della stabilità, nulla di sostanziale si è sinora potuto aggiungere a quanto già aveva visto il Levi-Civita.

Altro contributo geniale alla Meccanica analitica egli recava, in quello stesso periodo di tempo, con quel suo procedimento di sorprendente evidenza geometrica – e oramai accolto nei trattati sotto il suo nome – che, estendendo il metodo della ignorazione delle coordinate, permette di determinare, col minimo d'integrazioni, famiglie di soluzioni per quei sistemi canonici, o anche differenziali normali quali si vogliano, che ammettono più integrali primi o più relazioni invarianti, in involuzione fra loro. Sulla base di tale suo procedimento costruiva per la prima volta una teoria generale dei moti stazionari, che gli consentiva non solo di ritrovare con metodo uniforme tutti i casi noti – in particolare, le soluzioni periodiche del problema dei tre corpi, determinate dal Lagrange – ma di scoprirne anche di nuovi, e in parte inattesi, con la classificazione completa dei moti stazionari di un corpo rigido con un punto fisso, nel caso della Kowalevska.

Ma già fra l'una e l'altra delle precedenti ricerche, si era volto alla Meccanica celeste e aveva iniziato quella serie concatenata d'indagini, che, per tappe successive, dal 1903 al 1916, doveva condurlo alla regolarizzazione canonica del problema dei tre corpi nella prossimità di un urto binario. Lo studio analitico del comportamento dei tre corpi nelle vicinanze di un urto era stato iniziato dal Painlevè, che, nelle sue Lezioni di Stoccolma, era stato condotto a prospettare come probabile che l'urto binario dovesse implicare due relazioni uniformi fra le coordinate e le componenti delle velocità dei tre corpi e che, nel caso particolare del problema piano, dovesse bastare una condizione sola, l'altra risultando soddisfatta per identità. Il Levi-Civita, per concentrare gli sforzi sul nodo della questione, prese a considerare il caso più semplice, cioè il « problema ristretto », nel quale non si possono verificare che urti binari; e, traverso un'analisi finissima della singolarità che, in una posizione d'urto, insorge per il sistema differenziale che regge il moto, non solo riuscì a costruire sotto forma esplicita la condizione d'urto, che, come aveva presunto il Painlevè, risulta unica e uniforme, ma pervenne, con un cambiamento semplicissimo di parametri, a far sparire quella singolarità, senza alterare la forma canonica del sistema differenziale. Gli fu agevole, dopo ciò, regolarizzare in modo analogo il problema piano generale; ma il caso spaziale resistette lungamente ai suoi sforzi, perchè gli si mostravano insufficienti alla voluta regolarizzazione non solo le trasformazioni puntuali, che erano bastate nei casi precedentemente trattati, bensì anche le usuali trasformazioni canoniche, che si riconnettono al moto ellittico; e, soltanto dopo reiterati tentativi, potè nel 1916 raggiungere lo scopo, grazie ad una nuova trasformazione canonica, da lui desunta dal moto parabolico.

È noto che già nel 1912, cioè prima che codeste ricerche del Levi–Civita fossero concluse, il finlandese Sundmann era pervenuto ad una regolarizzazione del problema generale dei tre corpi e ne aveva dedotto che, in una soluzione qualsiasi, le coordinate dei tre corpi e il tempo sono funzioni olomorfe di un parametro per tutti i valori reali di esso, in corrispondenza biunivoca con quelli del tempo, sicchè posizione e tempo si possono esprimere per mezzo di sviluppi in serie sempre convergenti, non soltanto fino ad un eventuale urto, ma anche al di là di esso. Risultati d'interesse indiscutibilmente eccezionale, poichè fornivano una prima soluzione rigorosa di un celebre problema, intorno al quale si erano vanamente affaticati i maggiori matematici; ma non ne veniva sminuita l'importanza delle conclusioni del Levi–Civita. Mentre il Sundmann alla regolarizzazione nell'intorno di un urto era pervenuto in modo indiretto, introducendo un numero non indifferente di variabili ausiliarie parassite e facendo uscire il sistema differenziale dal quadro delle equazioni della Dinamica, il Levi–Civita aveva raggiunto lo scopo per via diretta e aderente alla natura specifica della questione, conservando al sistema differenziale, che regge il fenomeno, la sua originaria forma canonica e mantenendo così applicabili i risultati teorici e i metodi di calcolo della Meccanica analitica.

Le indagini fondamentali sin qui ricordate valgono a caratterizzare l'elevatezza, non la vastità dell'opera del Levi–Civita in quel primo, più fervido periodo della sua attività; chè ad esse si avvicenda e si intreccia tutta una serie di altre ricerche, di cui talune, per sua iniziativa e sotto la sua guida, fornirono a numerosi discepoli argomento di ulteriori sviluppi. Restando ancora nel campo della Meccanica analitica e della Meccanica celeste, mi limito a ricordare, in un'arida enumerazione, le più significative: condizione necessaria e sufficiente per l'equazione caratteristica delle equazioni di Hamilton–Jacobi integrabili per separazione di variabili e classificazione dei tipi nel caso di due variabili; studio analitico dell'equazione del Kepler e determinazione della regione di olomorfismo dell'anomalia eccentrica, come funzione dell'eccentricità; prima dimostrazione rigorosa dell'esistenza di un moto medio (asintotico) del nodo lunare; costruzione di un nuovo sistema canonico di elementi ellittici, che poi l'Andoyer ha riconosciuto vantaggioso in problemi di Astronomia; nuova riduzione esplicita delle equazioni differenziali del problema generale dei tre corpi, nella quale, con sobrietà di sviluppi pari all'eleganza, si assegnano separatamente, in forma espressiva, il sistema ridotto a quattro gradi di libertà nel piano dei tre corpi e le equazioni supplementari, che, quando sia integrato il sistema ridotto, permettono di determinare, con semplici quadrature, la posizione di codesto piano nello spazio; infine, una trattazione, sulla base d'ipotesi più larghe di quelle tradizionali, della teoria meccanica degli anelli di Saturno, dalla quale, tra l'altro, tenuto conto dei dati numerici d'osservazione, si desume una nuova presunzione in favore dell'ipotesi che l'anello non sia continuo, nè assimilabile ad un continuo, bensì risulti costituito da uno sciame di meteoriti abbastanza spaziati, perchè ne risultino quasi trascurabili le azioni reciproche.

Sul problema degli anelli di Saturno egli è tornato due volte (1908, 1916), valendosi dei risultati generali, da lui stesso precedentemente stabiliti in una preliminare indagine asintotica sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi ad essa e in uno studio diretto, e analiticamente delicatissimo, sull'autopotenziale di un tubo sottile; e tali risultati costituiscono per se stessi il nucleo essenziale di un nuovo capitolo, aggiunto dal Levi–Civita alla teoria classica del potenziale newtoniano, che ad opera sua e di suoi discepoli doveva in seguito dar luogo ad altre interessanti applicazioni.

Ma conviene oramai passare ad un altro campo, all'Idrodinamica, in cui l'opera del Levi–Civita ha suscitato una larga corrente d'idee e di ricerche. Risale allo Stokes e allo Helmholtz la prima idea che la resistenza opposta da un fluido alla traslazione uniforme di un solido immerso sia intimamente legata alle discontinuità provocate dal solido nel moto del fluido circostante; ma lo studio di quei moti discontinui, anche considerati soltanto in due dimensioni e schematizzati mediante la cosiddetta « ipotesi della scia », presentava difficoltà analitiche gravissime, sicchè lo stesso Helmholtz ed altri dopo di lui – dal Bobylev al Love – non ne erano venuti a capo se non in alcuni casi particolarissimi di profili mobili rettilinei; e, per quanto tutti quei ricercatori avessero fatto ricorso alla rappresentazione conforme, in qualche modo suggerita dalla natura della questione, i procedimenti diversi da loro usati caso per caso non davano alcuna norma sicura per la trattazione di casi nuovi, in particolare per lo studio di moti dovuti a profili curvilinei. Il Levi–Civita, in una celebre Memoria del 1906, affrontava in tutta la sua generalità il problema in piano orizzontale e, desunta da un'esauriente analisi qualitativa del fenomeno la rappresentazione conforme più aderente ai caratteri fisici della questione, perveniva all'integrazione generale dei moti irrotazionali, dotati di scia, per ogni possibile forma del profilo che li provoca; onde poi deduceva, con un elegante procedimento, fornito dalla teoria dei residui del Cauchy, l'espressione della resistenza sotto forma semplice e impreveduta. L'importanza di questa ricerca è data, forse più ancora che dai risultati, dal metodo inauguratovi dal Levi–Civita, che doveva ben presto rivelare la sua larga fecondità. Egli stesso, applicandolo a problemi in piano verticale, nei quali non è più trascurabile, come in piano orizzontale, l'azione della gravità, poneva i fondamenti della teoria generale delle onde di canale, con particolare riguardo a quelle di tipo permanente; e sulla via da lui dischiusa un valoroso gruppo di discepoli diretti e di suoi continuatori davano vita ad una operosa scuola italiana d'Idromeccanica, mentre anche all'estero le sue vedute e i suoi risultati facevano sentire il loro forte influsso. Basterà ricordare i brillanti sviluppi dovuti a L. M. Brillouin e al Villat.

Ma negli indirizzi da lui stesso promossi il Levi–Civita, aperta la via e raggiunti i risultati generali di carattere fondamentale, generalmente non amava insistere, quasi preferisse saggiare la vitalità delle sue idee e la fecondità dei suoi apporti nelle ulteriori ricerche che suscitavano ad opera di altri; e, obbe-

dendo alla naturale sua versatilità, recava il suo spirito chiarificatore su nuovi problemi, con una tale varietà d'iniziative che per ogni matematico di altra tempra avrebbe costituito una pericolosa dispersione di forze. Così, ancora nella fase giovanile della sua attività, aveva dimostrato come dalla teoria elettrodinamica dello Helmholtz si possa essere condotti alle equazioni di Maxwell–Hertz, quando si ammetta che le azioni a distanza, tanto di origine elettrostatica, quanto di origine elettromagnetica, si propaghino con velocità finita; poi nel 1901 assegnava una sua prima valutazione del massimo cimento dinamico nei sistemi elastici; nel 1902, in connessione con alcuni dubbi critici espressi dal Righi circa l'interpretazione di esperienze, allora molto discusse, sulla produzione di un campo magnetico per convezione elettrica, risolveva due questioni d'induzione elettrodinamica in base alla teoria (integrale) di Helmholtz–Hertz; nel 1904 traduceva una questione di massimo cimento specifico, presentatasi nella costruzione di cavi per trasporto di energia ad alto potenziale, in un problema di elettrostatica, da lui poi discusso e risolto fino a trarne precise norme costruttive di sicurezza; nel 1914, poste le basi dello studio del regime variabile del calore raggiante, stabiliva, in tali condizioni, l'equazione indefinita dell'irraggiamento. E, quasi a svago dallo sforzo d'indagini di largo respiro, tornava, di quando in quando, a problemi particolari di Analisi pura, come, ad esempio con l'acuta osservazione sulle trascendenti intere di genere infinito (1902) o col teorema, oramai classico, sulle varietà caratteristiche delle equazioni di monogeneità delle funzioni di più variabili complesse (1905); oppure s'indugiava su questioni speciali di carattere più strettamente tecnico, suggeritegli dal suo duplice insegnamento di Meccanica razionale e di Meccanica superiore: contrazione delle vene liquide (1906); penetrazione dei proiettili (1906); regime e sforzo d'avviamento per veicoli trainati (1914); nuovo metodo per il tracciamento delle linee di azione degli ingranaggi (1917).

Sullo scorcio del periodo padovano, intorno al 1917, si iniziano le sue fondamentali ricerche relativistiche. Se si tien conto dell'ampiezza dei suoi orizzonti speculativi e della sua connaturata facilità a risentire e assimilare ogni nuovo orientamento del pensiero scientifico, può apparire che la sua attiva partecipazione a quel movimento d'idee sia maturata con una certa lentezza. Ma, quanto pronto nel cogliere e dominare le idee nuove, altrettanto era cauto e ponderato nel consentire e nell'affermare. A dir vero, già durante la elaborazione della relatività ristretta egli era intervenuto, fra il 1908 e il 1909, con una sua teoria asintotica delle radiazioni elettriche, che, pur rispettando il principio di relatività, com'egli allora diceva, di Lorentz–Einstein–Minkowski, evitava ogni ipotesi cinematica di accomodamento (quali la rigidità delle cariche dell'Abraham o la contrazione lorentziana o l'ipotesi del Poincarè); ma, ancora nel 1911, in un suo magistrale Rapporto alla Società italiana per il progresso delle Scienze sulla *Estensione ed evoluzione della Fisica matematica nell'ultimo cinquantennio, con speciale riguardo all'Italia*, dopo avere rilevato la

« tendenza rivoluzionaria » com'egli diceva testualmente « a fondere i concetti di spazio e di tempo e a negare l'invariabilità della massa che renderebbe . . . necessaria una ricostruzione *ab imis* di tutta la filosofia naturale », concludeva: « attendiamo per giudicare ». E, forse, a chiarire non soltanto quella sua prudente attesa, ma, sotto qualche aspetto, il suo abituale atteggiamento speculativo, possono valere le parole, con cui, qualche anno dopo, iniziava una sua conferenza al Seminario matematico di Roma: *Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova Meccanica*: « In politica » egli disse in quell'occasione « non sono molti quelli che amano chiamarsi puramente e semplicemente conservatori, perchè conservatore si prende spesso a sinonimo di misoneista. Questo pericolo non c'è evidentemente in scienza. Nessun ricercatore può essere misoneista, ma molti cultori di scienza possono, quasi direi debbono essere conservatori per la stessa loro missione di custodire con gelosa cura un certo patrimonio intellettuale ben consolidato, e di vagliare con severo spirito critico tutto ciò che importa variazione o alienazione del patrimonio stesso ».

Ora è appunto con questo « severo spirito critico », guidato da un vigile senso storico della continuità evolutiva delle teorie scientifiche, che egli ha affrontato i problemi matematici della nascente relatività generale. Riprendendo alla base la formulazione analitica della teoria, assegnava anzitutto la corretta espressione del tensore gravitazionale, che sotto la forma allora attribuitagli dallo stesso Einstein, difettava di quell'invariantività, che doveva essere suo carattere essenziale, e, d'altro canto, implicava conseguenze fisiche non accettabili se non a patto di accomodamenti desunti dalla teoria dei quanti; stabiliva poi i fondamenti della Statica einsteiniana, riducendo le equazioni gravitazionali a quella forma spazialmente invariante, che ad esse conviene nel caso statico, e, classificatene, in base alle loro caratteristiche geometriche, le soluzioni possibili *a priori*, le determinava effettivamente in vari casi suscettibili di espressive interpretazioni meccaniche, di cui uno conduce ad un'ampia generalizzazione della soluzione dello Schwarzschild; riconosceva, infine, che, per ogni metrica stazionaria, il postulato fondamentale dell'Ottica einsteiniana, enunciato dallo Hilbert, equivale al principio della minima durata del Fermat.

È poi ben noto che già l'Einstein aveva trovato nel Calcolo differenziale assoluto lo strumento algoritmico direttamente adeguato allo sviluppo matematico della sua concezione, in cui intervenivano, come elementi essenziali, le proprietà di curvatura della varietà riemanniana quadridimensionale spazio–tempo. Il Levi–Civita, obbedendo alla costante sua tendenza semplificatrice, si volse a indagare se non fosse possibile ridurre e chiarire, nelle sue profonde ragioni di successo, l'apparato formale, che, traverso i procedimenti del Calcolo differenziale assoluto, conduce a individuare quella curvatura e a stabilirne il carattere invariante; e, movendo da una costruzione geometrica di sorprendente semplicità, scoperse il suo trasporto per parallelismo sulle varietà riemanniane a quante si vogliono dimensioni. Veniva così rivelato l'intrinseco significato geometrico delle operazioni fondamentali del Calcolo differenziale assoluto, il quale

si trovava trasformato, come per un'improvvisa luce, da algoritmo aridamente formalistico in una teoria nitidamente concettuale. Ma la portata di quella geniale scoperta andava ben oltre quella geometrizzazione del Calcolo differenziale assoluto. La possibilità, messa in luce dal Levi–Civita, di analizzare le proprietà di curvatura di una qualsiasi varietà riemanniana, considerandola come un continuo di elementi spaziali euclidei, raccordati fra loro per mezzo di una legge di trasporto per parallelismo, ha dato origine, per via di successive estensioni in vario senso, ad una vasta corrente d'indagini geometriche, cui attendono tuttora operosamente e fruttuosamente matematici di ogni paese. Può apparir singolare il fatto che uno dei più vivi e caratteristici indirizzi di ricerca della Geometria d'oggi sia stato promosso proprio da un matematico, che, ove, tornando a vecchie classificazioni – in verità oramai superate, – si badasse alla specie degli interessi speculativi in lui prevalenti e al tipo delle tecniche preferite, andrebbe collocato fra gli analisti. Ma anche nel Levi–Civita, come nella più gran parte dei nostri maggiori matematici, era innata quella profonda tendenza – di natura, in qualche senso, estetica – alla visione dell'essenza geometrica dei problemi, che costituisce una caratteristica saliente del genio matematico italiano.

Alla fine del 1918 la Facoltà di Scienze di Roma, conscia degli alti compiti, che, in quella tormentata ripresa delle relazioni scientifiche internazionali dopo la prima grande guerra, le tradizioni e la vittoria imponevano all'Italia, volle accrescere il prestigio del suo collegio di maestri insigni e chiamò nel suo seno il Levi–Civita, che, superato non senza qualche contrasto il suo profondo attaccamento alla città natale, nel gennaio del 1919 assunse nell'Università romana la cattedra di Analisi superiore, da cui, due anni dopo, si trasferì a quella di Meccanica razionale.

Qui in Roma, per un altro ventennio, esplicò ancora più intensa e più larga la sua opera di Maestro, iniziando e guidando alla ricerca tutta una schiera di giovani matematici, che indirizzava sulle vie da lui stesso aperte, a tutti proponendo con inesauribile fantasia nuovi problemi, a tutti prodigando con generosa larghezza germi d'idee e norme direttive. Ma la sua guida non era costrizione, il suo consiglio non era imposizione di metodi o di vedute particolari. Comprensivo e rispettoso delle inclinazioni e delle attitudini di ciascun suo discepolo, le assecondava e le reggeva con una assistenza assidua e suggestiva, quanto discreta e quasi dissimulata, fino a suscitare le prime iniziative personali. Molti di quei giovani erano stranieri e, tornati ai loro paesi, portano ancora oggi, nei loro insegnamenti universitari, il carattere di quella formazione speculativa nettamente italiana.

Poco prima di lasciar Padova, cedendo a reiterate insistenze di colleghi e discepoli, aveva accolto il disegno di sviluppare e fissare sistematicamente in un trattato le vedute personali e i risultati di rielaborazione critica e di esperienza didattica, maturati nel suo ventennale insegnamento di Meccanica; ed

in me è sempre vivo, e oramai nostalgico, il ricordo dei lunghi colloqui, susseguitisi periodicamente per più anni, in cui mi veniva chiarendo il suo pensiero sui principî e gli sviluppi concatenati delle varie teorie, con una così larga e limpida visione d'insieme, con una così precisa e meditata analisi di ogni nesso logico e di ogni possibile semplificazione dei procedimenti deduttivi, che poi lo sforzo di dar forma non indegna a quel pensiero lucidissimo si tramutava in un appassionante godimento.

Frattanto la rinomanza mondiale, oramai indiscussa, e l'eco dei suoi insegnamenti, gli procuravano sempre più frequenti inviti di Università straniere; e, a quando a quando, vi aderiva, vincendo la naturale riluttanza a distogliersi dalle sue abitudini di lavoro e ad interrompere anche per poco l'adempimento dei doveri accademici, che sempre osservò con scrupolosa dedizione. Fu così, successivamente, in Spagna, in Austria, in Germania, in Russia, in Olanda, in Svizzera, in Francia, negli Stati Uniti, nel Perù, in Argentina, nell'Uruguay, nel Brasile; e dovunque con trattazioni riassuntive delle sue teorie accrebbe il prestigio della Matematica italiana, dovunque, col suo fascino personale, suscitò, in quei lontani ambienti culturali, larghe correnti di simpatia per la Patria nostra.

Ma nè le assidue cure dedicate ai discepoli, nè le missioni all'estero interrompevano il suo lavoro, chè anzi egli ne traeva occasione non soltanto a rielaborare, talvolta radicalmente, gruppi di precedenti sue ricerche, ma anche ad affrontare nuovi ordini di problemi.

Al breve periodo dell'insegnamento di Analisi superiore appartiene un memorabile suo corso, in cui espose il Calcolo differenziale assoluto, ricostruito e rinnovato alla luce della sua nozione di trasporto per parallelismo; e ne vennero quelle *Lezioni* (1925), che, nella forma fedele e limpidissima data ad esse dal prof. Persico, allora suo discepolo, restano nella nostra produzione matematica un modello di perspicuità concettuale e di eleganza analitica. Furon subito tradotte in inglese (1927) e in tedesco (1928); e per la traduzione inglese il Levi-Civita vi aggiunse una serie di nuovi capitoli, pubblicati anche a parte in italiano (*Fondamenti di Meccanica relativistica*, 1928), in cui tratteggiava l'evoluzione relativistica della Meccanica propriamente detta e dell'Ottica geometrica, secondo il suo costante criterio di prender le mosse dalle leggi classiche e di cercare induttivamente quali modificazioni (lievissime in condizioni ordinarie) si dovessero introdurvi per rispecchiare le idee dell'Einstein; e vi trovava posto un suo profondo teorema di equivalenza dinamica in seconda approssimazione, da lui allora formulato (1926), che ha poi avuto le sue più significative applicazioni nel problema relativistico del moto dei pianeti intorno al Sole.

In quello stesso periodo di tempo tornava all'Idrodinamica. In una delle sue conferenze di Barcellona, pubblicate, oltre che in catalano (1922), in italiano (*Questioni di meccanica classica e relativista*, 1924) e in tedesco (1924), egli, pur mirando al caso tipico delle onde di canale, aveva anzitutto sottoposto ad una profonda analisi la generale nozione fisica di fenomeno ondoso, tradu-

cendo in termini matematici precisi una suggestiva veduta, che faceva risalire a Leonardo; e aveva poi inquadrato i suoi precedenti apporti alla teoria delle onde di canale in una magistrale trattazione sistematica delle classiche ricerche dell'Airy, del Gerstner, dello Stokes, del Raylegh. Ma restava insoluto il problema – fondamentale in quella teoria – della determinazione di onde irrotazionali periodiche permanenti o, se si vuole, del passaggio dalla prima approssimazione dell'Airy alla soluzione rigorosa. Esso era stato oggetto di reiterati tentativi dello Stokes e del Raylegh, che avevano spinto i loro calcoli alla seconda approssimazione; ma il metodo da loro seguìto, pur essendo il più naturale, non era adatto a mostrare la via per le approssimazioni successive e tanto meno a preparare la verifica della convergenza. Nel 1925 il Levi–Civita affrontò direttamente il problema e, vincendone le gravi difficoltà analitiche con l'uso di un nuovo tipo di funzioni maggioranti, da lui per primo ideate, lo risolse con pieno rigore nel caso di canali molto profondi. In tal modo, come ebbe poi a rilevare, nella sua alta autorevolezza, H. Lamb, il Levi–Civita concludeva « an historic controversy », assegnando per mezzo di formule particolarmente maneggevoli non solo il profilo esatto di quelle onde, ma anche la relazione globale che lega l'altezza e la lunghezza d'onda al trasporto di liquido e alla velocità di propagazione. In relazione coi risultati del Levi–Civita sono state effettuate numerose ricerche da suoi discepoli, come lo Struik, il Weinstein, il Geppert, e da altri matematici, come il Burgers e il Favre; e quest'ultimo ha potuto assodare che nei casi ordinari (in cui l'altezza dell'onda supera raramente 1/20 della lunghezza) le differenze tra le onde irrotazionali del Levi–Civita e quelle trocoidali del Gerstner sono praticamente trascurabili, sicchè risulta giustificato l'uso largo e pressochè esclusivo, che di quest'ultime si suol fare nelle applicazioni idrauliche e nautiche, benchè il loro carattere implichi l'intervento di misteriose azioni dissipative, che non sembrano avere riscontro nel fenomeno fisico. Le verifiche quantitative del Favre, nei confronti delle onde del Levi–Civita, assicurano che in quelle applicazioni non v'è da preoccuparsi di tale difficoltà, perchè nei casi comunemente considerati la sua influenza non è praticamente sensibile.

I problemi matematici suggeriti dalla schematizzazione di fenomeni ondosi esercitavano sul Levi–Civita un fascino particolare,e, qualche anno dopo (1930), egli si volse alla teoria della propagazione delle onde di discontinuità, iniziata dall'Hugoniot e sviluppata dall'Hadamard, per applicarla a stabilire la coincidenza delle bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali dell'Einstein con le geodetiche di lunghezza nulla della corrispondente varietà quadridimensionale, con che risultava stabilito il collegamento diretto fra codeste equazioni e l'Ottica geometrica, indipendentemente da ogni teoria dei fenomeni elettro–magnetici. Condotto così a rimeditare sulla teoria delle onde di discontinuità dell'Hadamard, originariamente alquanto involuta e faticosa, il Levi–Civita sentì il bisogno di rielaborarne i fondamenti matematici secondo quei criteri di semplicità e di chiarezza, che gli erano propri; e la nuova trattazione espose nelle sue lince

essenziali in un corso di conferenze, raccolte dal prof. Lampariello (*Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, 1931), che, anche a prescindere dal contenuto matematico, offrono un alto grado d'interesse concettuale nelle riflessioni conclusive. Il Levi-Civita vi rileva, anche in base ad esempi espressivi, come ad ogni fenomeno, che trovi un'adeguata rappresentazione analitica in un determinato sistema a derivate parziali, si possano associare simultaneamente, attraverso le varietà caratteristiche di quel sistema, un aspetto ondulatorio, e, attraverso le bicaratteristiche, un aspetto corpuscolare. « Si ha così – egli concludeva – uno schema matematico comprensivo, e nel suo agnosticismo, perfettamente soddisfacente, di quel dualismo fra onde e corpuscoli, che ispirò la geniale intuizione del De Broglie, e di cui fu, dallo stesso De Broglie e da altri, indarno cercato un più concreto modello, veramente in accordo coi fatti osservati ».

Egli aveva sempre seguìto con attento interesse e con largo spirito di comprensione gli sviluppi della Fisica atomica e i nuovi problemi matematici, che, anche fuori degli schemi classici, mano mano vi si imponevano. Così, nel 1927-28, fissando l'attenzione sugli invarianti adiabatici, che, pur avendo ricevuto fondamentali applicazioni nel primo assetto sistematico della Meccanica atomica, erano stati considerati soltanto sotto aspetti particolari, ne costruì per primo la teoria generale, riconducendola, traverso i principî della Meccanica statistica, alle proprietà degli integrali dei sistemi canonici; e di tale sua teoria illustrò la portata anche su problemi di Meccanica planetaria, aprendo una via, che fu proseguita con brillanti risultati dal prof. Krall.

Ma al suo pensiero, non appena egli aveva conchiuso un'indagine, si affacciavano nuovi problemi; e vediamo così susseguirsi tutta una serie di altre ricerche, in ciascuna delle quali si ravvisa il frutto maturo di lunghe meditazioni, e che qui non mi è dato che di accennare in una scheletrica enumerazione: nel campo teorico, lo studio differenziale dello scostamento geodetico su di una varietà riemanniana qualsiasi (1926); l'estensione della distribuzione maxwelliana a un sistema di corpuscoli, in cui siano rappresentate non soltanto tutte le velocità, ma anche tutte le masse, con applicazione al problema del moto di un punto di massa variabile (1930); la deduzione dell'Ottica geometrica, anche nel caso stazionario, dal principio variazionale dell'Einstein, con una espressiva applicazione allo specchio mobile (1931); la dimostrazione che lo schema di Dinamica analitica, di cui si valevano i teorici della Fisica, prima del De Broglie, dello Schrödinger, del Dirac, riguardandolo come generale, rientra invece, in base a classici risultati del Liouville e del Weierstrass, nel caso particolare, in cui esistono n integrali uniformi (1933); la proposta di aggiunta di termini elettromagnetici all'equazione dello Schrödinger, in sostituzione degli spinori provenienti dalle matrici del Dirac, di cui il Levi-Civita asserisce l'incompatibilità con la norma generale d'indipendenza delle leggi fisiche dagli elementi geometrici di riferimento (1933); la trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei su di una qualsiasi superficie (1937-38); nel campo applicativo, la valutazione globale dell'au-

mento di cimento, che si riscontra in un sistema elastico, quando di una data sollecitazione si considera non soltanto l'effetto statico, bensì anche quello dinamico (1928); un primo saggio di trattazione in tre dimensioni dello strato limite del Prandtl (1930); infine la teoria dei getti liquidi sotto forte carico (1931–32).

L'ultimo periodo della sua attività fu dedicato al problema relativistico degli n corpi, sul quale a più riprese aveva lungamente meditato. Fin dal 1922 erano state segnalate da L. M. Brillouin le difficoltà derivanti dal fatto che nella relatività generale vengono meno, insieme col principio di reazione, tutte le schematizzazioni abituali, che nella Meccanica classica ad esso si riconnettono. Il Levi–Civita, sottoposta la questione ad una profonda analisi critica, poteva nel 1937 enunciare, per il caso dei due corpi, conclusioni precise intorno alle ineguaglianze secolari, riservando i particolari deduttivi e gli ulteriori sviluppi, riguardanti il caso degli n corpi, ad una trattazione sistematica, sinora rimasta inedita.

Si conclude così l'opera del Levi–Civita, che, per l'ampiezza dei campi via via indagati, per l'originalità delle schematizzazioni concettuali e dei metodi, per l'importanza fondamentale dei risultati conseguiti, per la fecondità degli indirizzi promossi, resterà nella storia come uno dei più geniali e più poderosi contributi a quel movimento d'idee e di ricerche, che, dagli ultimi decenni del secolo passato ai giorni nostri, ha assicurato alla Matematica italiana, nel mondo scientifico internazionale, un alto e indiscusso prestigio.

Larghi furono i riconoscimenti che il Levi–Civita ebbe in Italia e all'estero. Del suo nome si fregiarono tutte – si può dire – le antiche Accademie nostre, alle quali si aggiunsero, quasi in gara, le più insigni istituzioni scientifiche straniere – fra le altre le Accademie delle Scienze di Amsterdam, di Berlino, di Boston, di Bruxelles, di Dublino, di Lisbona, di Madrid, di Mosca, di Parigi e la Società Reale di Londra –; e particolarmente gradita gli giunse nel 1936 la nomina ad Accademico Pontificio, personalmente voluta, all'atto della istituzione di quell'Accademia, da S.S. Pio XI. Già nel 1903 aveva avuto la Medaglia d'oro della Società dei XL e nel 1907, da questa Accademia dei Lincei, il Premio Reale per la Matematica, diviso con un altro Grande scomparso – Federigo Enriques –; mentre nel 1922 la Società Reale di Londra gli assegnava la « Medaglia Sylvester », di cui prima di allora erano stati insigniti soltanto matematici anglo–sassoni, nel 1928 l'Università di Amburgo lo fregiava della Medaglia « dem Verdienste », nel 1937 l'Università di San Marcos di Lima gli decretava una speciale medaglia d'oro; e via via gli era conferita la Laurea « honoris causa » dalle Università di Amsterdam, Cambridge Mass., La Plata, Lima, Parigi, Tolosa e dal Politecnico di Aquisgrana.

Ma, ben più di quel plebiscito di onori accademici, fu suo privilegio l'universale consenso di calde simpatie, di affettuosa reverenza, che, sempre

e dovunque, egli suscitò intorno a se stesso. Le doti sovrane di pensiero si armonizzavano in lui con le note umane del carattere morale e dell'indole affettiva in un così suggestivo equilibrio, che chiunque avesse la ventura di avvicinarlo se ne sentiva immediatamente avvinto. In lui tutto era semplice, limpido, spontaneo: l'aperta e signorile cordialità, l'impareggiabile modestia, candidamente ignara di se stessa, la finezza squisita nel comprendere e nel compiacere gli altri, la innata, fiduciosa predisposizione a giudicare benevolmente; e al fondo di quelle avvincenti caratteristiche personali traspariva, come norma di ogni suo atteggiamento e di ogni sua manifestazione, una rettilinea dirittura morale, costantemente illuminata da un largo e altruistico senso di solidarietà umana. Severo soltanto con se stesso, conservò imperturbata, nella vicenda degli anni e nel contrasto degli eventi, una sua visione serena e ottimistica della vita e dei rapporti umani; e, come fu sempre largo del suo in opere di bene, a lui tanto più gradite quanto più silenziose e nascoste, recò una eguale generosità – virtù fors'anche più rara – nel campo della ricerca scientifica, dove non cercò un tranquillo e comodo rifugio a straniarsi dalla vita, ma una sfera elevata di operosa ed espansiva comunione spirituale. Per questo fece suo mondo la Scuola, per questo vi fu Maestro incomparabile di scienza e di vita. Ben lo sanno, anche oltre la numerosa schiera dei discepoli, quanti matematici, in Italia e fuori, attinsero alla prodiga sua ricchezza d'idee, e tutti recano in sè per la vita, con la forte impronta del suo pensiero, la memoria indelebilmente cara della incontaminata sua superiorità morale e della sua comunicativa umanità.

Quando sopravvenne il brutale, obbrobrioso ostracismo dalla Scuola, la ferita fu profonda e insanabile. Nel sicuro dominio di se stesso, non vacillò e, pensoso soltanto di celare alla eletta Consorte e agli amici rimastigli vicini il suo chiuso dolore, proseguì, in dignitoso isolamento, la sua vita di meditazione e di ricerca, pronto ancora a prodigare ai giovani, che a lui ricorrevano, i tesori inesausti della sua genialità e del suo fervore speculativo, pronto ancora a compiacersi, senza recriminazione, delle voci, che a quando a quando gli giungevano dalla sua Scuola.

Ma a quel profondo e contenuto travaglio interiore le forze fisiche a un tratto cedettero e le progressive insidie del male gli contesero ben presto il conforto del lavoro scientifico. Anche quel supremo sacrificio accolse con tranquilla fermezza d'animo, e già si andava adattando a vivere spiritualmente ai margini di quel mondo d'idee, che aveva così poderosamente signoreggiato; ma oramai tutto, che era in lui di pensiero e di affettività, egli aveva dato fino all'estremo, e in silenzio, si spense. In quel tramonto, che – dopo tanta luce di pensiero e di nobiltà morale – per il prevalere della iniquità si colorò di tragedia, la vita di Tullio Levi-Civita si è conclusa con la più alta delle ascese umane.

ELENCO CRONOLOGICO DELLE PUBBLICAZIONI di TULLIO LEVI-CIVITA

1893 – *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, « Atti Ist. Ven. », t. LI, pp. 1775–1815.

1894 – *Sugli invarianti assoluti*, ibidem, t. LII, pp. 1447–1523.

1895 – *Sui gruppi di operazioni funzionali*, « Rend. Ist. Lomb. », s. II, vol. XXVIII, pp. 458–468.

– *Alcune osservazioni alla nota: Sui gruppi di operazioni funzionali*, ibidem, pp. 864–873.

– *I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti*, ibidem, pp. 529–544, 565–577.

– *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV (1° sem. 1895), pp. 303–309.

– *Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale*, « Atti Acc. Torino », vol. XXXI, pp. 25–51.

1896 – *Sulla distribuzione indotta in un cilindro indefinito da un sistema simmetrico di masse*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV (2° sem. 1895) pp. 332–336 e vol. V, (1° sem. 1896), pp. 34–40.

– *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*, « Atti. Acc. Torino », vol XXXI, pp. 816–823.

– *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, « Ann. di Mat. », s. 2ª, t. XXIV, pp. 255–300.

– *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V, (2° sem. 1896), pp. 3–9.

– *Sul moto dei sistemi con tre gradi di libertà*, ibidem, pp. 164–117.

– *Sul moto di un sistema di punti materiali, soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità*, « Atti Ist. Ven. », t. LIV, pp. 1004–1008.

1897 – *Sur les intégrales quadratiques des équations de la mécanique*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXIV, pp. 392–395.

– *Sur une classe de ds^2 à trois variables*, ibidem, pp. 1434–1438.

– *Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana*, « Nuovo Cimento », s. 4ª, vol. VI, pp. 93–108.

– *Sopra una classe di integrali dell'equazione* $A^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, ibidem pp. 204–209.

– *Sulla stabilità dell'equilibrio per i sistemi a legami completi*, « Atti Ist. Ven. », t. LV, pp. 1247–1250.

1898 – *Sui numeri transfiniti*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII, (1° sem. 1898), pp. 91–96.

– *Sulla integrazione dell'equazione* $\Delta^2 \Delta^2 u = 0$, « Atti Acc. Torino », vol. XXXIII, pp. 932–956.

– *Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione* $\Delta^2 \Delta^2 u = 0$, « Atti Ist. Ven. », t. LVII, pp. 1399–1410.

1899 – *Sulle congruenze di curve*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VIII (1° sem. 1899), pp. 239–246.

1899 – *Sulle equazioni a coppie di integrali ortogonali*, ibidem, pp. 295–296.
– *Tipi di potenziali, che si possono far dipendere da due sole coordinate*, « Mem. Acc. Torino », s. 2ª, t. XLIX, pp. 105–152.
– *Sur les intégrales periodiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, « Comptes Rendus de l'Accad. des Sciences de Paris », t. CXXVIII, pp. 978–981,
– *Interpretazione gruppale degli integrali di un sistema canonico*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VIII (2º sem. 1899), pp. 235–238.
1900 – *Complementi al teorema di Malus–Dupin*, ibidem, vol. IX (1º sem. 1900) pp. 185–189, 237–246.
– *Sur l'instabilité de certaines substitutions*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXX, pp. 103–106.
– *Sur l'instabilité de certains solutions périodiques*, ibidem, pp. 170–173.
– *Sur le problème restreint des trois corps*, ibidem, pp. 236–239.
– *Funzioni armoniche e trasformazioni di contatto*, « Atti Ist. Ven. », t. LIX, pp. 671–675.
– *Méthodes de calcul différentiel absolus et leurs applications* (in collab. con G. Ricci), « Math. Ann. », vol. LIV, pp. 125–201. Traduzione polacca, Varsavia, 1901.
1901 – *Sopra alcuni criteri di instabilità*, « Ann. di Mat. », s. III, vol. V, pp. 221–308.
– *Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. X (1º sem. 1901), pp. 3–9.
– *Sui moti stazionari dei sistemi olonomi*, ibidem, pp. 137–143.
– *Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky*, ibidem, pp. 338–346, 429–434, 461–466.
– *Sulla resistenza dei mezzi fluidi*, ibidem (2º semestre 1901), pp. 3–9.
– *Sulla forma dello sviluppo della funzione perturbatrice*, « Atti Ist. Ven. », t. LX, pp. 653–661.
– *Sul massimo cimento dinamico nei sistemi elastici*, « Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. II, pp. 188–196.
1902 – *Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une charge électrique parallèlement à un plan conducteur indéfini*, « Ann. de la Fac. de Toulouse », s. 2me, t. IV, pp. 5–44.
– *Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternativa parallela allo schermo*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XI (1º sem. 1902), pp. 163–170, 191–198, 228–237; e « Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. III, pp. 442–455.
– *La teoria elettrodinamica di Hertz di fronte ai fenomeni di induzione*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª vol. XI (2º sem. 1902), pp. 76–81.
– *Sulla cinetostatica*, « Atti Acc. di Padova », vol. XVIII, pp. 145–150.
– *Sur les surfaces* (S) *de M. Zaremba*, « Bull. Acad. des Sc. de Cracovie », pp. 264–270.
– *Sur les fonctions de genre infini*, « Bull. des Sciences math. », 2me s., t. XXV, pp. 333–335.
1903 – *Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXXV, pp. 82–84.
– *Condition du choc dans le problème restreint des trois corps*, ibidem, pp. 221–223.
– *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Ann. di Mat. », s. 3ª, t. IX, pp. 1–32.
– *Sur la singularité dont sont affectées, pour une vitesse nulle, les equations du mouvement d'un point frottant sur une surface*, « Archiv der Math. u. Physik », III Reihe. B. V, pp. 28–37.

1903 – *Sul campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica parallelamente a un piano conduttore indefinito*, « Nuovo Cimento », s. 5ª, t. VI, pp. 442–455.

1904 – *Sopra la equazione di Kepler*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIII (1º sem. 1904), pp. 260–268; e « Astr. Nachrichten », n. 3956, pp. 313–314.

– *Sopra un problema di elettrostatica che interessa la costruzione dei cavi*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIII (1º sem. 1904), pp. 375–382; e « Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. VIII, pp. 187–195.

– *Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi*, « Rend. Circ. mat. di Palermo », t. XX, pp. 173–228.

– *Sulla integrazione dell'equazione di Hamilton–Jacobi per separazione di variabili*, « Math. Ann. », B. LIX, pp. 383–397.

– *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, « Acta Math. », t. 30, pp. 305–327, con riassunto in « Verh. des drittes Int. Math. Kongresses zu Heidelberg » (Leipzig, 1905), pp. 402–408.

1905 – *Sulla ricerca di soluzioni particolari di sistemi differenziali*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIV (1º sem. 1905), pp. 203–209.

– *Sulle funzioni di due o più variabili complesse*, ibidem (2º sem. 1905), pp. 492–499.

1906 – *Sulla contrazione delle vene liquide*, « Atti Ist. Ven. », t. LXIV, pp. 1465–1472.

– *Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires*, « Prac. Matem. Fisycnych. », Varsovie, t. XVII, pp. 1–40.

– *The mixed transformations of Lagrange's equations*, « Nature », vol. 74 (13 settembre 1946), p. 516.

– *Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi*, « Atti Ist. Ven. », t. LXV, pp. 1149–1158.

– *Über eine technische Aufgabe die in Beziehung zur konformen Abbildung steht*, « Verh. der Ges. Deutscher Naturforscher, 77. versamm. zu Meran » (Leipzig, 1906), pp. 20–21.

1907 – *Scie e leggi di resistenza*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXIII, pp. 1–37.

– *Le idee di Enriques sui principî della meccanica*, « Riv. di filos. e sc. affini », anno IX, pp. 337–346.

– *Sullo sviluppo delle funzioni implicite*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVI (2º sem. 1907), pp. 3–12.

– *Sur le mouvement de l'électricité sans liaisons ni forces extérieures*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXLV, pp. 417–420.

– *Sulla massa elettromagnetica* (Rapporto), « Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. XIV, pp. 271–304; e « Riv. di Scienza », vol. II, pp. 387–412.

– *Sulle onde progressive di tipo permanente*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVI (2º sem. 1907), pp. 776–790.

1908 – *Sui campi elettromagnetici puri dovuti a moti piani permanenti*, « Atti Ist. Ven. », t. LXVII, pp. 905–1010.

– *Giuseppe Picciati* (cenno necrologico), « Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. XV, pp. 363–368.

– *Sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVII (2º sem. 1908), pp. 3–15.

– *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, ibidem, pp. 413–426, 535–551.

1909 – *Sulle azioni meccaniche dovute a un flusso filiforme di elettricità*, ibidem, vol. XVIII (1º sem. 1909), pp. 41–50.

– *Teoria asintotica delle radiazioni elettriche*, ibidem, pp. 83–93.

– *Sulla espressione asintotica dei potenziali ritardati*, « Atti IV Congr. Int. dei Mat. », vol. III, Roma Acc. Lincei, pp. 93–100.

1909 – *Sulla forma dell'anello di Saturno*, « Atti Ist. Ven. », t. LXVIII, pp. 557–583.
– *Sulla costituzione delle radiazioni elettriche*, « Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. XVIII, pp. 163–169.
– *Commemorazione del Socio Valentino Cerruti*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XVIII (2º sem. 1909), pp. 565–575.
1910 – *Sul teorema di esistenza delle funzioni implicite*, « Atti Ist. Ven. », t. LXIX, pp. 291–302.
– *Über Lorentz–Einstein'sche starre Bewegungen*, « Annalen der Physik », vierte Folge, B. 32, pp. 236–240.
1911 – *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XX (1º sem. 1911), pp. 286–296, 381–391.
– *Sull'espressione del resto in una operazione usata da Lord Raylegh*, ibidem, pp. 605–614.
– *Sur les équations générales du mouvement d'un corpuscule dans un champ magnétique et un champ électrique superposés*, « Archiv for Math. og Naturvidenskab », B. XXXI, n. 12, pp. 1–7.
– *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire*, « Ann. de l'Ec. Norm. Sup. », 3me s., t. 28, pp. 325–376.
– *Sullo spostamento dell'equilibrio*, « Atti Ist. Ven. », t. LXXI, pp. 241–249.
1912 – *Sulle onde di canale*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXI (1º sem. 1912), pp. 3–14.
– *Estensione ed evoluzione della fisica matematica nell'ultimo cinquantennio (con speciale riguardo al contributo italiano)*, « Atti Soc. per il progr. delle sc., V. Riunione », pp. 237–254; trad. franc., come rassegna di fisica, in « Scientia », vol. XI, pp. 275–292.
– *Sulla continuazione analitica*, « Atti Acc. di Padova », vol. XXVIII, pp. 61–63.
– *Sulla gravitazione di un tubo sottile con applicazione all'anello di Saturno*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXXIII, pp. 354–374.
– *Sir J. Larmor's mechanical model of the pressure of radiation* (from a letter to Prof. Sir J. Larmor), « Atti V Congr. Int. dei Mat. » (Cambridge), vol. I, pp. 217–220.
– *Sur les systèmes linéaires, à deux inconnues, admettant une intégrale quadratique*, « Annaes da Acad. Polytechnica do Porto », t. VII, pp. 193–206.
1913 – *Nuovo sistema canonico di elementi ellittici*, « Ann. di Mat. », s. 3ª, t. XX (vol. giubilare in memoria del Lagrange), pp. 153–169.
– *Sulla trasformazione delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine*, « Atti Ist. Ven. », t. LXXII, pp. 1331–1357.
– *Sulle funzioni che ammettono un teorema d'addizione del tipo* $\sum_{i}^{n} X_i(x)\, Y_i(y)$ « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXII (2º sem. 1913), pp. 181–183.
– *Théorème de Torricelli et débout de l'écoulement*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CLVII, pp. 481–484.
1914 – *Sforzo di regime e sforzo d'avviamento per veicoli trainati*, « Atti Ist. Ven. », t. LXXIII, pp. 931–946.
– *Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggiante*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXIII (1º sem. 1914), pp. 12–21.
– *Sul regime variabile del calore raggiante*, ibidem (2º sem. 1914), pp. 453–464.
1915 – *Sulla riduzione del problema dei tre corpi*, « Atti Ist. Ven. », t. LXXIV, pp. 907–939.
– *Una proprietà di simmetria delle traiettorie dinamiche spiccate da due punti*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXIV (1º sem. 1915), pp. 666–674.
– *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, ibidem (2º sem. 1915), pp. 61–75.

1915 – *Forma mista di equazioni del moto che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici*, ibidem, pp. 236–248.
– *Sul problema piano dei tre corpi*, ibidem, pp. 421–433, 485–501, 553–569.
1916 – *Sulla introduzione di vincoli olonomi nelle equazioni dinamiche di Hamilton*, « Atti Ist. Ven. », t. LXXV, pp. 387–395.
– *Sopra due trasformazioni paraboliche desunte dal moto parabolico*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol XXV (1º sem. 1916), pp. 445–458.
– *Sur la régularisation du problème des trois corps*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CLXII, pp. 625–628.
1917 – *Sulle linee d'azione degli ingranaggi*, « Atti Acc. di Padova », vol. XXXIII, pp. 133–138.
– *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXVI (1º sem. 1917), pp. 381–391.
– *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione della curvatura riemanniana*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XLII, pp. 173–215.
– *Statica einsteiniana*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXVI (1º sem. 1917), pp. 458–470.
– *Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi*, ibidem, pp. 519–531.
1917–1919 – *ds² einsteiniani in campi newtoniani*, note I–IX, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXVI (2º sem. 1917), pp. 307–317; vol. XXVII (1º sem. 1918), pp. 3–12; (2º sem. 1918) pp. 183–191, 220–229, 240–248, 283–292, 344–351; volume XXVIII (1º sem. 1919), pp. 3–13, 101–109.
1918 – *La teoria di Einstein e il principio di Fermat*, « Nuovo Cimento », s. 6ª, vol. XVI, pp. 105–114.
1919 – *Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica*, « Rend. Semin. mat. dell'Università di Roma », vol. V, pp. 10–28; trad. spagnola, « Revista Mat. Hispano–Americana », t. II, pp. 107–115, 123–132, 169–176; trad. franc. « Enseignement Mathématique », XXI année, 1920, pp. 5–28.
1929 – *Sur la régularisation du problème des trois corps*, « Acta Math. », t. XLII, pp. 99–144.
– *Armonica viciniore ad una funzione assegnata*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XXIX (1º sem. 1920), pp. 197–206.
– *L'ottica geometrica e la relatività generale di Einstein*, « Rivista d'ottica e meccanica di precisione », anno I, pp. 187–200.
1922 – *Risoluzione dell'equazione funzionale che caratterizza le onde periodiche in un canale molto profondo*, « Math. Ann. », B. LXXXV (in onore di D. Hilbert), pp. 256–279.
– *Questions de mècanica clàssica i relativista*, « Institut d'estudis catalans », Barcelona, pp. IV – 151.
1923 – *Sulla teoria della relatività*. « L'Elettrotecnica », vol. X, pp. 73–74; riprodotto nella trad. it. dell'opera di A. KOPFF, *I fondamenti della relatività einsteiniana*, sotto il titolo: *Su la determinazione sperimentale dei coefficienti di un ds² einsteiniano*, (Milano Hoepli), pp. 306–311.
– *Lezioni di meccanica razionale* (in collab. con U. Amaldi), vol. I, Bologna Zanichelli, pp. XIII + 741.
– *Sulla velocità di trasporto nel moto permanente*, « Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolymitanarum, Math. et Physica », t. V, art. IX, pp. 1–14.
– *Differentiales segundas que se comportan de modo invariantivo*, « Revista Matem. Hispano–Americana », t. V, pp. 165–176.
– *Sulla stabilità delle lavagne a cavalletto*, « Periodico di Mat. », s. 4ª, vol. IV, pp. 59–73.
1924 – *Questioni di meccanica classica e relativista*, Bologna Zanichelli, pp. 185; trad. ted. Berlin Springer, pp. VI + 110.

1924 – *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamick* (edito da Th. Karman e T. Levi-Civita), Berlin Springer.

– *Determinazione rigorosa delle onde irrotazionali periodiche in acqua profonda*, « Rend. Acc. Lincei » s. 5ª, vol. XXXIII (2º sem. 1924), pp. 141–150.

1925 – *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie*, « Math. Ann. », B. 93, pp. 264–314; in forma riassuntiva, « Proc. of the international Congress of Applied Mechanics », Delft Waltman, pp. 129–145.

– *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (raccolte da E. Persico), Roma Stock, p. 315.

– *Condizioni atte ad assicurare l'indipendenza degli argomenti nella espressione hamiltoniana dell'azione variata* (in collab. con U. Amaldi), « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. I, pp. 263–272.

– *Moti gravitazionali in una dimensione*, ibidem, vol. II, pp. 365–371.

1926 – *Commemorazione del Socio Nazionale Gregorio Ricci-Curbastro*, « Mem. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. I, fasc. VIII, pp. 555–567.

– *Sullo scostamento geodetico*, « Boll. Unione Mat. It. », anno V, pp. 60–64.

– *Il principio di Doppler e l'ipotesi balistica della luce* (in collab. con O. M. Corbino), « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. III.

– *Sui moti einsteiniani in seconda approssimazione*, ibidem, vol. IV, pp. 3–5.

– *Lezioni di meccanica razionale* (in collab. con U. Amaldi), vol. II, parte I, Bologna Zanichelli, pp. IX + 527.

– *Sur l'écart géodésique*, « Math. Ann. », B. 97, pp. 291–320.

1927 – *The absolute differential calculus*, con due capitoli addizionali di relatività (redatto da E. Persico), Glasgow Blackie & Son, pp. XVI + 350.

– *Sur les chocs dans le problème des trois corps*, « Comptes Rendus du 2me Congrès international de Mécanique appliquée », Zurich Füssli, pp. 96–106.

– *Lezioni di meccanica razionale* (in collab. con U. Amaldi), vol. II, Parte II, Bologna Zanichelli, pp. IX + 685.

1928 – *Der absolute Differentialkalkul* (ediz. ted. curata da A. Duschek), Berlin Springer, pp. XI + 310.

– *Compendio di meccanica razionale* (in collab. con U. Amaldi), Parte I, pp. XI + 375;
Parte II, pp. VIII + 286; Bologna Zanichelli.

– *Fondamenti di meccanica relativistica* (redatti da E. Persico), ibidem, pp. VII + 185.

– *Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten*, « Abh. aus dem Hamburgischen Universität », B. VI, pp. 323–366.

– *Sul massimo cimento dinamico nei sistemi elastici*, « Rend. Semin. Mat. e Fis. di Milano », vol. II, pp. 78–109.

– *Alcune applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*, « Boll. Unione Mat. It. », anno VII, pp. 251–253.

– *Sul moto di un corpo di massa variabile*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. VIII, pp. 329–333, 621–622.

– *Sugli invarianti adiabatici*, « Atti Congr. Intern. dei Fisici » (Como, settembre 1927), Bologna Zanichelli, pp. 475–513.

1929 – *Dynamische Beanspruchung elastischer Systeme*, « Monatshefte für Math. und Physik », B. XXXVI, pp. 165–192.

– *A proposed modification of Einstein's field-theory*, Nature, vol. 123, n. 3105, pp. 678–679.

– *Vereinfachte Herstellung der Einsteinschen einheitlichen Feldgleichungen*, « Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss. », B. IX, pp. 137–153; trad. ingl., Glasgow Blackie & Son.

1929 – *Osservazione* del Socio T. Levi-Civita in fine alla Nota di P. Nalli, *Sopra uno spostamento generalizzato negli spazi di Riemann*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. IX, pp. 960–962.

– *Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini* (in collab. con G. Fubini), « Ann. di Mat. », s. IV, t. VII, pp. 193–211.

1930 – *Lezioni di meccanica razionale* (in collab. con U. Amaldi), seconda edizione, vol. I, Bologna Zanichelli, pp. XIV + 897.

– *Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XI, pp. 3–11, 113–121.

– *Corpuscoli cosmici e distribuzione maxwelliana*, « Atti Pont. Accad. delle Sc. », a. LXXXIII, pp. 176–189.

– *Ancora sul moto di un punto di massa variabile*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol XI, pp. 626–632.

– Traduz. polacca (di C. F. Vetulani) dell'art. *Sul massimo cimento dinamico dei sistemi elastici*, Przegladu Techniczego, Varsavia.

– *Allgemeine Folgerungen aus der Prandtlschen Grenzschichttheorie*, « Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik », (Aaschen 1929), Berlin Springer, pp. 30–50.

Sui potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni che si estendono illimitatamente, « Rend. Seminario Mat. dell'Univ. di Padova », anno I, pp. 133–150; trad. spagnola, « Revista Hispano-Americana » s. 2ª, t. VI, 1931, pp. 65–85.

– *Sezioni piane di un corpo e direttrici ortobariche*, « Rend. Acc. Lincei » s. 6ª, vol. XII, pp. 535–541.

1931 – *Commemorazione del Socio straniero Paul Appell*, ibidem, vol. XIII, pp. 241–242.

– *Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici*, « Atti Congr. intern. dei Mat. », (1928), t. V., pp. 17–28, Bologna Zanichelli.

– *A proposito delle Note dei sig.ri Hatzidakis e Sakellariou sui moti centrali*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6, vol. XIII, pp. 715–718.

– *Rifrazione e riflessione nella relatività generale*, « Atti Pont. Acc. delle Sc. », anno LXXXIV pp. 332–352.

– *Sui getti liquidi*, « Rend. Seminario Mat. e Fis. di Milano », vol. V, pp. 154–173; trad. polacca di K. F. Vetulani, Czasopisma Techniczego, Lwow 1933.

– *Über Zermelo's Luftfahrtproblem*, « Zeischrift für ang. Math. und Mechanik », B. II, pp. 314–322.

– *Sur les surfaces admettant un réseau triangulaire de lignes parallèles*, « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXCIII, pp. 1171–1173.

– *Calcolo differenziale assoluto* (in collab. con U. Amaldi), « Enciclopedia Ital. », vol. XII (sotto l'esponente « Differenziale assoluto, calcolo »), pp. 796–798.

– *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa* (lezioni raccolte da G. Lampariello), Bologna Zanichelli, pp. VII + 105.

1932 – *Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi*, « Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa », s. II, vol. I, pp. 1–33, 229–250.

– *Sur le jets liquides*, « Journal de Math. pures et appl. » s. 9me, t. XI, pp. 37–56.

– *Teoremi di unicità e di esistenza per le piccole oscillazioni di un filetto vorticoso prossimo alla forma circolare*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XV, pp. 409–416.

– *Sopra un problema di navigazione aerea (rotta entro un campo di vento)*, « Aerotecnica », vol. XII, pp. 725–727; traduz. ted. di K. H. Grossmann, « Schweizerische Bauzeitung », B. 122, pp. 25–27.

– *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes* (traduz. di M. Brelot), Paris Alcan, pp. X + 114.

1933 – *Diracsche und Schrödingersche Gleichungen*, « Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss. », B. V, pp. 240–250.

– *Ergänzende Bemerkungen zum Weierstrasschen Vorbereitungssatz und bedingtperiodische Bewegungen*, « Zeitschrift für ang. Math. und Mechanik », B. 13, pp. 112–114.

– *Some mathematical aspects of the new mechanics*, « Bull. of the American Math. Society », vol. 39, pp. 535–563.

1934 – *Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria*, « Compositio Mathematica », vol. I, pp. 115–162.

– *A general survey of the theory of adiabatic invariants*, « Journal of Math. and Physics » (Cambridge, Mass.), vol. XIII, pp. 18–40.

– *The secular effects of tides on the motion of planetary systems*, « American Math. Monthly », vol. XLI, pp. 279–296.

– *Sulle soluzioni stazionarie dei sistemi pfaffiani*. I. *Generalità e richiami*. II. *Il caso più significativo*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XIX, pp. 261–267, 369–375.

– *Alcuni aspetti matematici della nuova meccanica*, « Nuovo Cimento », nuova serie, anno XI, pp. 173–200.

– *Curve chiuse e parallelismo monodromo sopra la sfera*, « Acta Pont. Academiae Scientiarum », t. LXXXVII, pp. 407–414.

– *Perfezionamento della regola di equivalenza fra moti einsteiniani e moti newtoniani* « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XX, pp. 398–403.

1935 – *Teoria matematica dei fenomeni ondosi* (in collab. con U. Amaldi), parte I della voce *Onde*, « Enciclopedia Ital. », vol. XXV, pp. 356–362.

– *Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro*, « Acta Pontif. Academia Scient. », t. LXXXVIII, pp. 151–155.

– *Nozioni di balistica esterna* (in collab. con U. Amaldi), Bologna, Zanichelli, pp. VIII + 56.

– *Points matériels et corps célestes en relativité générale – Etude préliminaire, dans le volume offert à M. Marcel Brillouin*, Paris Gauthier–Villars, pp. 203–212.

1936 – *Le problème des deux corps en relativitè générale*, « Enseignement Math. », 34ᵉ année, pp. 149–175.

– *Sulla nozione d'intervallo fra due avvenimenti: primo approccio alla relatività*, « Nuovo Cimento », nuova serie, anno XIII, pp. 45–65.

– *Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo*, « Scritti matematici offerti a L. Berzolari », Pavia Ist. Mat. dell'Univ., pp. 240–247.

– *Sur une transformation de la fonction lagrangienne qui n'altére pas les trajectoires*, « Recueil Mathématique de Moscou », nouv. série, t. I, pp. 123–125.

1937 – *The relativistic problem of severale bodies*, « American Journal of Mathematics », vol. LIX, pp. 9–22.

– *Astronomical consequences of the relativistic twobody problem*, ibidem, pp. 225–234.

– *Forme canoniche dei ds^2 binari con data curvatura totale*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XXV, pp. 197–205.

– *Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione*, « Revista de Ciencias », Año XXXIX, pp. 71–78.

– *Nuova impostazione elementare della relatività*, « Atti del Iº congr. dell'Unione Mat. Ital. », pp. 69–87.

– *Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo*, « Rend. Acc. Lincei », s. 6ª, vol. XXVI, pp. 355–362.

1938 – *La trigonométrie des petis triangles curvilignes sur une surface*, Conférence de la Réunion Internationale des Math., tenue à Paris en Juillet 1937, Société Math. de France, Paris Gauthiler–Villars.

1938 – *Compendio di Meccanica* (in collab. con U. Amaldi), II ediz. riveduta; Parte I, pp. VIII+423; Parte II, pp. 310; Bologna Zanichelli.
1940 – *Nozione adimensionale di vortice e sua applicazione alle onde trocoidali di Gerstner*, « Acta Pontif. Academiae Scientiarum », vol. IV, pp. 23–30.
– *Formule di Green e di Stokes*, « Revista de la Univ. nac. de Tucuman », serie A, vol.I, pp. 23–33.
1943 – Memoria postuma: *Invarianti ametrici* (*senza* ds^2 *ausiliari*) *ed equazioni di Maxwell per l'etere*, « Commentationes Pontif. Academiae Scient. », vol. VII, pp. 21–38.

NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Il superamento della barriera del suono in aviazione.* Nota III [1] del Socio G. A. Crocco.

Il reattore portante. – In questa Nota si sviluppa il concetto di « corpo aerotermodinamico portante » introdotto nel 1931 in una comunicazione all'Accademia dei Lincei [2]; e se ne modifica in conseguenza la definizione.

Nelle due precedenti Note abbiamo formulato il reattore [3] come un meccanismo propulsivo destinato a vincere le resistenze opposte [4] dagli organi penetranti e dagli organi portanti di un aereo ipersonoro. In tale sua funzione ne abbiamo delineato l'applicazione al superamento della barriera del suono ed al conseguimento delle velocità ipersonore; e ne abbiamo preveduto, dopo la soppressione dell'elica e la sostituzione del motore alternativo col turbocompressore, la tendenza a liberarsi, in volo di regime, anche di questo meccanismo col passaggio al reattore aerotermodinamico puro.

A questo punto interviene in Aviazione una nuova possibilità concettuale: cioè quella di *sopprimere* in un aereo *anche le ali*, nella loro funzione portante di regime.

L'apparente paradosso contenuto in questa asserzione si spiega pensando che le ali, in questa loro funzione portante, sono in sostanza organi *deviatori* dell'aria; sulla quale l'aereo si sostiene perchè ne devia verso il basso una certa massa nell'unità di tempo e usufruisce della conseguente variazione della componente verticale della quantità di moto.

Se quindi un reattore, raccogliendo l'aria che incontra colla sua imboccatura frontale e riemettendola ad accresciuta velocità per creare la propulsione, la devia contemporaneamente verso il basso, esso crea insieme

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.
(2) Questi « Rendiconti », fasc. di giugno e settembre 1931.
(3) Questi « Rendiconti », p. 1006, fasc. 10, vol. I, 1946.
(4) Questi « Rendiconti », p. 1155, fasc. 11, vol. I, 1946.

alla forza propulsiva anche una forza di sostentamento; e perciò diviene nel più stretto significato un « corpo aerotermodinamico portante ».

In tal caso la funzione sostentatrice delle ali può venire affidata allo stesso congegno di propulsione; ed un aereo può ridursi, in principio schematico, alla sola fusoliera più o meno impennata, senza elica e senza ali, contenente nel suo interno un reattore propulsivo e portante.

Qualsiasi altro meccanismo capace dello stesso effetto cinetico può del resto creare una sostentazione insieme ad una spinta propulsiva. Si può cioè con opportuno deviatore posteriore ottenere sostentazione da un'elica; e con opportuna inclinazione di assetto ottenere moto verticale e sostentazione da un razzo, come fu proposto ai primordi dello studio di questo congegno.

Qui la novità consiste nella possibilità di utilizzare un meccanismo ormai entrato nell'uso pratico e nel destinarlo ad eliminare le difficoltà di passaggio all'aviazione ipersonora.

Darò di questa asserita possibilità una formulazione puramente schematica senza occuparmi per ora del dispositivo di costruzione e di manovra.

Sia pertanto in generale V_0 la velocità assoluta di avanzamento del mobile in aria calma, eguale ed opposta alla velocità relativa di entrata dell'aria nel reattore; e ne sia V_5 la finale velocità di uscita dell'aria dal reattore, deviata dell'angolo α, senza perdite. Sia β l'angolo di *rampa*; cioè l'angolo fra le velocità di avanzamento e l'orizzonte.

Si supponga che le due velocità siano rappresentate da due vettori V_0 e V_5 (fig. 1) che s'incontrino nel *baricentro* A dell'aereo. Sia ora Q il peso dell'aereo; R_P la resistenza di penetrazione della sua fusoliera impennata, contenente il reattore: cioè la sola forza resistente al moto dell'aereo.

Per ottenere l'equilibrio in moto occorrerà quindi anzitutto che la velocità risultante dalla composizione delle due velocità V_5 e V_0 sia un vettore, U, diretto verso il basso, nella direzione della risultante delle forze esterne Q ed R_P; ed equilibri inoltre questa risultante con la forza, Φ, che genera nel reattore.

Se pertanto si pone eguale, come nelle Note precedenti, a $\rho\omega_0 V_0$ la massa d'aria entrante nel reattore, sarà $\Phi = \rho\omega_0 V_0 \cdot U$ la forza di reazione, deviata, che dovrà equilibrare tale risultante. E quindi, scindendo la velocità U in una componente verticale, z, ed in un'altra, x, secondo la velocità di cammino, si dovrà avere l'equilibrio delle rispettive componenti

$$(21) \qquad Q = \rho\omega_0 V_0 z \quad ; \quad R_P = \rho\omega_0 V_0 x.$$

Porremo ora che R_P sia riferito alla sezione maestra Ω della fusoliera e che l'imboccatura ω_0, definita nelle Note precedenti, determinata o da determinare, rappresenti una costante costruttiva. Poichè ciò è in contrasto con la definizione di ω_0, vuol dire che le nostre conclusioni non sono generali ma si limitano ad una velocità di regime caso per caso prestabilita.

Dalla precedente assunzione risulterà dunque, se C_P è il coefficiente di resistenza della fusoliera, $C_P \Omega = \varphi_o \omega_o$: cioè si introdurrà un nuovo coefficiente φ_o che verrà anch'esso considerato colle riserve anzidette come una costante costruttiva e permetterà un agevole calcolo numerico del reattore portante.

Sia ciò stante A B C, nella fig. 1, il triangolo delle velocità V_s, V_o ed U. Completiamolo tracciando una verticale sino allo incontro in E con una orizzontale tracciata da B; e prolunghiamo il lato BC sino all'incontro in D con tale verticale. Avremo in AD la componente z di U; ed in CD la componente x.

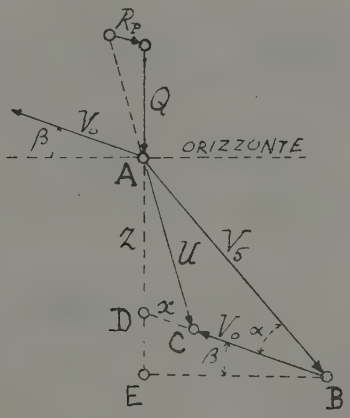


Fig. 1.

Dal triangolo rettangolo A B E trarremo allora la relazione dimensionale

$$V_s^2 = (V_o + x)^2 + z^2 + 2z(V_o + x) \operatorname{sen} \beta; \tag{22}$$

e la trasformeremo in adimensionale ricordando le definizioni dei coefficienti σ, C_F e ψ; e completandole con le (21) e con la precedente definizione del coefficiente di fusoliera φ_o. Si avrà perciò

$$V_s^2 - V_o^2 = \sigma V_o^2 \; ; \; F = C_F \rho \omega_o V_o^2 \; ; \; Q = \psi \rho \omega_o V_o^2 \tag{23}$$

$$R_P = \varphi_o \rho \omega_o V_o^2 \; ; \; z = \psi V_o \; ; \; x = \varphi_o V_o;$$

e la (22) diverrà, sopprimendo il fattor comune V_o^2,

$$\sigma = \psi^2 + \varphi_o^2 + 2\varphi_o + 2\psi(1 + \varphi_o) \operatorname{sen} \beta. \tag{24}$$

Poichè poi dalla (9) si trae $1 + \sigma = (1 + C_F)^2$, la (24) si potrà anche scrivere

$$1 + \sigma = (1 + C_F)^2 = \psi^2 + (1 + \varphi_o)^2 + 2\psi(1 + \varphi_o) \operatorname{sen} \beta; \tag{25}$$

e verrà considerata sotto questa forma come l'equazione adimensionale generale della dinamica dei reattori portanti.

La (25) si traduce geometricamente nel triangolo A B D della figura 2, simile al triangolo omonimo della figura 1; e i cui lati si possono ora contrassegnare numericamente come in figura, ponendo $V_o = 1$.

Interessa in questo primo studio schematico esaminare il *volo orizzontale*, che ci darà le nozioni corrispondenti a questa inconsueta portanza. Perciò faremo $\beta = 0$ nella (25) e ne ricaveremo le espressioni

$$(26) \qquad 1 + \sigma = (1 + C_F)^2 = \psi^2 + (1 + \varphi_o)^2 \quad ; \quad tg\,\alpha = \frac{\psi}{1 + \varphi_o};$$

che si traducono nella figura 3 e consentono di completarla riportando in BF il segmento BA ed ottenendo così un segmento differenza, che diremo ξ; e che si esprimerà con

$$(27) \qquad \xi = 1 + C_F - (1 + \varphi_o) = C_F - \varphi_o.$$

Quest'ultima eguaglianza ci fornisce una interessante nozione sulla *efficienza portante* del reattore.

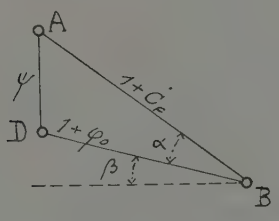


Fig. 2.

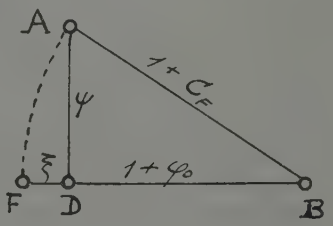


Fig. 3.

Se ne trae infatti, moltiplicandone i membri per l'espressione $\rho\omega_o V_o^2$, e ricordando le (8), il valore della forza F del reattore, considerata come se agisse orizzontalmente, in funzione della reale resistenza di penetrazione R_P da superare e di una fittizia *resistenza di sostentazione*, R_S, che ne definisce appunto l'efficienza portante. Si ha perciò

$$(28) \qquad F = R_P + R_S \quad ; \quad R_S = \xi \cdot \rho\omega_o V_o^2;$$

dove è bene sottolineare che la forza F è essa stessa una forza fittizia eguale a $C_F\,\rho\omega_o V_o^2$, utile ai fini del calcolo e dei confronti con la forza richiesta da un aereo a reattore unicamente propulsivo; mentre la reale forza Φ sviluppata dal reattore portante è eguale a $\rho\omega_o V_o U$.

Per precisare ora la sopradefinita efficienza portante e dare quindi a ξ il suo valore ottimo, dobbiamo risolvere una questione di minimo. Dob-

biamo cioè ricercare per quale valore della forza F risulti minimo il rapporto, F : Q, rispetto al peso dell'aereo.

Ricordando le (23) che definiscono i due coefficienti rappresentativi di F e Q, cioè C_F e ψ, cerchiamo quindi il minimo del rapporto $C_F : \psi$.

La (25) ci darà, sviluppando i quadrati e dividendo per ψ,

$$\frac{C_F}{\psi} = -\frac{1}{\psi} + \sqrt{1 + \frac{(1+\varphi_0)^2}{\psi^2}}; \tag{29}$$

che, per l'ipotesi fatta su φ_0, considerato costante rispetto a ψ nella derivazione, darà la

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{C_F}{\psi}\right) = +\frac{1}{\psi^2} - \frac{1}{\psi^3}\,\frac{(1+\varphi_0)^2}{\sqrt{1 + \frac{(1+\varphi_0)^2}{\psi^2}}} = 0; \tag{30}$$

dalla quale si deduce

$$(\psi)_{opt} = (1+\varphi_0)\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi_0}; \tag{31}$$

ed in corrispondenza con tal valore

$$1 + C_F = (1+\varphi_0)^2 \;;\; (C_F)_{opt} = \varphi_0^2 + 2\varphi_0 \;;\; (tg\,\alpha)_{opt} = \sqrt{C_F}; \tag{32}$$

ed infine

$$\left(\frac{C_F}{\psi}\right)_{min} = \frac{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi_0}}{1+\varphi_0} \quad ; \quad (\xi)_{opt} = \varphi_0\,(1+\varphi_0). \tag{33}$$

Se ne deduce che la resistenza di sostentazione risulta assai prossima, ma non eguale, a quella di penetrazione, come invece avviene nel caso dell'ala portante, avendosi qui $(\xi)_{opt} = \varphi_0\,(1+\varphi_0)$.

Si deduce altresì che sono determinati i valori ottimi di ψ, C_F, ed α indipendentemente dalla velocità e dalla quota. Supposto pertanto determinato ω_0, si deduce in definitiva dalla espressione di ψ, che ad ogni velocità di cammino corrisponde una quota economica o di migliore spinta del reattore.

Conviene subito osservare che queste conclusioni invariantive di ψ, C_F, ed α sono tuttavia dovute al prestabilimento della imboccatura ω_0, che rende costante φ_0, e che dobbiamo ora giustificare.

A tale scopo, risalendo alle condizioni di partenza del reattore portante, lo abbiamo presupposto sufficiente a sollevare il peso dell'aereo senza il concorso della portanza alare sin da $V_0 = 0$. In questo caso non hanno più significato le espressioni sinora adoperate, e bisogna ricorrere alla (10) della Nota I, la quale ci fornisce la spinta F_0 di un turboreattore a punto fisso, cioè per $V_0 = 0$; e che dà $4\,F_0 = \varrho\omega_0\,U_0^2$.

In tale formula la massima velocità di uscita dell'aria aspirata dal compressore corrisponde alla massima sua prevalenza meccanica, cioè alla massima velocità periferica sopportabile dagli organi rotanti: e tale velo-

cità U_o riesce oggi a raggiungere i 600 metri al secondo nei turboreattori ormai in uso. Supponendo quindi che l'aria uscente possa meccanicamente venir deviata sino alla verticale, cioè per $\alpha = 90°$, conservando la suddetta velocità di uscita; e che in tal caso si abbia $F_o = Q$; risulta determinato il massimo rapporto possibile tra Q ed ω_o, alla partenza, per $\rho = \rho_o$; e cioè

$$\left(\frac{Q}{\omega_o}\right)_{max} = \frac{\rho_o U_o^2}{4} = 11250. \tag{34}$$

Chiameremo $Q : \omega_o$ *carico d'imboccatura*, perchè ricorda il carico alare dell'ala portante; ma non lo prenderemo eguale al massimo, poichè occorre conservare un margine per la forza di accelerazione dell'aereo. In armonia quindi coi valori trovati per il rapporto d'imboccatura nel caso dell'ala portante, dove risultava in media $S : \omega_o = 30$, per un carico alare di 260 kg/mq, abbiamo preso il valore:

$$\frac{Q}{\omega_o} = 30 \cdot \frac{Q}{S} = 7800.$$

Con tale valore del carico di imboccatura, che ci servirà a svolgere un esempio numerico delle (32), non si può tuttavia determinare il coefficiente adimensionale φ_o, occorrendo precisare la sezione maestra della fusoliera, che non ha un rapporto *costante* col peso dell'aereo. Le formule prestabilite devono quindi intendersi esatte per un determinato aereo di riferimento e per una prestabilita velocità; mentre resteranno approssimate per aerei simili dello stesso ordine di grandezza. Abbiamo quindi assunto come peso di riferimento 7800 kg, cui corrisponde l'imboccatura complessiva di *un* metro quadrato, suddivisa in due o più reattori; e per tal peso abbiamo supposto eguale a 3 mq la sezione maestra. Ciò assegna a φ_o, adottando il coefficiente di Karman indicato alla Nota II, il valore $\varphi_o = 0{,}165$.

Ne risultano i seguenti valori ottimi per la minima spinta:

$$(C_F)_{opt} = 0{,}357\,; (\psi)_{opt} = 0{,}695\,; \left(\frac{C_F}{\psi}\right)_{min} = 0{,}51\,; (\alpha)_{opt} = 31°\,;$$

che ci consentono ora di precisare la *quota di volo* ed il *consumo* per qualche velocità ipersonora.

Così per $M_o = 2$ dalla $Q = \psi \rho \omega_o V_o^2$, postovi $Q : \omega_o = 7800$ e $(\psi)_{opt} = 0{,}695$ si ottiene $\rho V_o^2 = 11200$; che, assumendo nella stratosfera come velocità del suono 300 m/sec, fornisce la densità dell'aria alla quota economica di volo $\rho = 0{,}0311$, raggiungibile a circa 12 km di quota. Analogamente per $M_o = 3{,}5$, cioè a poco meno di 3800 km orari, la quota di volo salirebbe a circa 21 km.

I consumi si valutano, anche col reattore portante, con la stessa espressione valevole per il reattore propulsivo. Per $M_o = 2$, prendendo $\varepsilon = 0{,}1$,

risulta $\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{2\psi}\right)_{opt} = 0{,}686$; che per turboreattore, coi dati termici corrispondenti e indicati nelle Note precedenti, assegna un consumo di 278 grammi per tonnellata-chilometro. Ad $M_o = 3{,}5$ l'autoreattore per $|\overline{T_A}| = 1500_o$ darebbe un consumo di 227 grammi.

S'intende che tali consumi potrebbero abbassarsi se si riuscisse ad adottare una imboccatura maggiore; fino a divenire dello stesso ordine di grandezza di quelli richiesti dall'ala portante ipersonora.

Esaminiamo ora la velocità minima consentita dalle nostre formule, cioè quella corrispondente ad $M_o = 1$. Per tale velocità la relazione $\rho V_o^2 = 11200$ darebbe $\rho = 0{,}125 = \rho_o$; cioè il passaggio per la velocità del suono dovrebbe avvenire a quota zero. Ma la formula, così com'è stata scritta, non si applica numericamente al caso di $\rho = \rho_o$ perchè i rapporti di temperatura sono diversi da quelli calcolati. La velocità del suono per altro non può logicamente assumersi come velocità di regime; ma solo come velocità di transizione. Essa richiede quindi un margine di spinta per accelerare e salire di quota. Non si possono perciò adottare per tale velocità i valori ottimi e le spinte minime; ma si dovrà richiedere al turboreattore il massimo C_F *disponibile*. Occorrerà quindi svolgere un calcolo *passo passo* che segua la manovra di accelerazione e di salita alle varie quote sino alla massima quota e velocità, come si usa in aviazione ad ala portante. Si determinerà cioè per ciascuna quota e velocità il ψ *necessario* dalla $\psi = \frac{7800}{\rho V^2}$; ed il C_F *necessario* dalla (25) per un angolo β di rampa prestabilito. Calcolato poi dalla (9), per ciascuna quota e velocità, il C_F *disponibile*, si otterrà dalla differenza, divisa per ψ, il valore dell'accelerazione disponibile. Il calcolo è simile a quello che si impianta in aviazione ad ala portante per valutare i tempi di salita; e consente altresì la valutazione del *consumo totale* necessario a superare la barriera del suono e a raggiungere le velocità prestabilita.

Un calcolo analogo permetterà di valutare i tempi, le velocità ed i consumi nella manovra di decelerazione e di discesa. Esso mostrerà come, con opportuno passaggio dall'autoreattore al turbo reattore e riducendone gradualmente le spinte, si possa rientrare nel campo subsonoro; ed infine, con la manovra degli angoli α e β, condurre l'aereo all'atterraggio con velocità orizzontale e verticale praticamente *nulla*. Non vi è quindi bisogno di campi di volo nè per la partenza nè per il ritorno.

In conclusione il reattore portante, nello schema delineato, si presta concettualmente al superamento della velocità del suono senza particolari pericoli o difficoltà; anzi con semplicità di manovra; e può consentire velocità ipersonore assai elevate, dell'ordine di 4000 km orari, sebbene attraverso consumi di un ordine di grandezza maggiore di quelli presumibili, ma non ancora sperimentati, per l'aviazione ipersonora ad ali portanti.

Certo tra lo schema teorico e la sua pratica realizzazione corre ancora divario. Anzitutto è necessario che si riduca il peso specifico dei turboreattori, cioè il peso per unità di spinta. Questo peso risulta oggi compreso tra la *metà* ed il *terzo* della spinta a punto fisso, cioè del peso stesso dell'aereo sollevabile con reattore portante. Tenendo conto del necessario margine per il peso della fusoliera, degli accessori di manovra, della provvista di combustibile e del carico utile, occorre quindi che il peso specifico dei reattori si riduca almeno ad un *quarto* della spinta a punto fisso.

Ma v'è di più. Lo schema teorico è subordinato al pieno funzionamento del reattore, cioè alla continua disponibilità della spinta necessaria alla manovra. Che avverrebbe nell'atterraggio se questa spinta mancasse? Ciò può accadere nell'autoreattore per difetto di accensione o di alimentazione; e nel turboreattore anche per avarie meccaniche agli organi rotanti.

Ora in aviazione ad ala portante l'arresto totale dei motori conduce al volo planato; che è la chiave della sicurezza di atterraggio. Anche in aviazione a reattore portante si potrà contare sulla pluralità dei reattori per diminuire le probabilità di arresto totale; col vantaggio che i meccanismi di pura rotazione sono assai meno soggetti ad avarie dei meccanismi alternativi. Si può anche contare sull'immancabile progresso dei turboreattori e sui congegni di sicurezza e di riserva che verranno escogitati per l'alimentazione e l'accensione.

Ma nella eventualità di un atterraggio a reattori spenti non si potrà tuttavia contare sullo stesso ordine di grandezza dei voli planati offerti dall'ala portante. Esiste invero anche per il reattore portante la possibilità del volo planato, come si può dedurre dalla (25) ponendovi $\sigma = 0$ e valutando l'angolo β di discesa e la velocità V_0 in corrispondenza di prestabilite condizioni di minimo. Ma un tal volo planato risulta troppo ripido e veloce, anche per un atterraggio di fortuna.

Se ne conclude che non appare possibile allo stato attuale di questo studio accettare integralmente lo schema ideale indicato, cioè ridotto alla sola fusoliera che alberga il reattore. Occorrerà infatti prevedere, anche per ragioni di equilibrio laterale, la suesposta pluralità dei reattori e l'esistenza di ipersostentatori accessori, nei collegamenti tra la fusoliera ed i reattori; i quali, associandosi a forme portanti della stessa fusoliera, consentiranno quel minimo di sostentazione aviatoria necessaria ad un atterraggio di fortuna. Ma questa diversità costruttiva tra lo schema pratico e quello ideale, sulla quale sarebbe prematuro intrattenersi, non rende meno interessanti le possibilità segnalate in questo studio e quelle che potrebbero ottenersi da particolari sviluppi sui quali ci riserviamo di ritornare.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate.* Nota di G. Scorza Dragoni, presentata [1] dal Socio G. Castelnuovo.

In questa Nota mi propongo di esporre, senza dimostrarli, i risultati, cui sono giunto nell'affinare un mio recente teorema [2] sulle traslazioni piane generalizzate, cioè sugli autoomeomorfismi di un piano che conservino il senso delle rotazioni e siano privi di punti uniti.

1. Rammento qualche definizione e ne introduco qualche altra, per poter procedere con una certa speditezza.

Sia π un piano reale, euclideo, nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali. E sia t una traslazione generalizzata di π.

La spezzata semplice aperta $\lambda = Q_0 Q_1 \dotplus \cdots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ di n lati, cogli estremi in Q_0 e Q_n, coi vertici [3] in $Q_1, \cdots, Q_{n-1}$ (se $n > 1$), abbia ciascuno dei suoi lati diretto come uno degli assi di π e sia un arco di traslazione di t. Quest'ultima condizione significa che l'intersezione di λ e della propria immagine, $t(\lambda)$, nella t, si riduce a un estremo, e un estremo soltanto, di λ.

La linea $\sigma(\lambda) = \cdots \dotplus t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda) \dotplus \cdots$ – cioè la traiettoria generata da λ, linea notoriamente semplice [4], anzi omeomorfa ad una retta – individua in π due insiemi aperti e connessi, i campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$, costituiti dai punti di π che non appartengono a $\sigma(\lambda)$ e che si possono congiungere con un punto (prefissabile ad arbitrio) di $\sigma(\lambda)$, mediante una curva

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) G. Scorza Dragoni, *A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [questi «Rendiconti», serie 8ª, vol. I (1946), pp. 697-704] n. 1.

Colgo l'occasione per avvertire che nella mia Nota: *Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie* [«Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova», vol. XV (1946), pp. 8-24] bisogna aggiungere come ipotesi esplicita, quella che le curve semplici e chiuse delimitanti gli insiemi Γ, $\Gamma^{(n)}$, $D^{(n)}$ ed $\overline{E}$ siano in numero finito o in infinità numerabile; questa ipotesi è conseguenza delle altre là poste, se si aggiunge la condizione che gli insiemi Γ, $\Gamma^{(n)}$, $D^{(n)}$ ed $\overline{E}$ siano connessi.

(3) Vertici effettivi, nel senso che, se $n > 1$, due lati consecutivi di λ non sono mai allineati.

(4) Per le indicazioni bibliografiche relative a questa e ad oltre proprietà che ricorderò nel seguito, rimando alle mie Memorie: *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* [«Memorie dell'Accademia d'Italia», classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IV (1933), pp. 159-212]; se ne vedano specialmente la prefazione e il § 2. Si veda anche il § 2 dell'altra mia Memoria *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré* [ibidem pp. 213-269].

che abbia un estremo su $\sigma(\lambda)$ e nessun altro punto comune con $\sigma(\lambda)$. Queste ultime nozioni hanno senso, anche se λ è un arco di traslazione qualunque.

Nelle ipotesi attuali, se $\Sigma(\lambda)$ è un campo adiacente a $\sigma(\lambda)$ e se Q_i è un vertice di λ (di guisa che $n > 1$), i punti interni all'angolo retto $\widehat{Q_{i-1} Q_i Q_{i+1}}$, e sufficientemente prossimi a Q_i, sono o tutti interni o tutti esterni a $\Sigma(\lambda)$; in corrispondenza, Q_i è detto di prima o di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

Un punto F, *interno* a λ, è un punto fondamentale di λ rispetto a $\Sigma(\lambda)$,

se esiste un raggio ρ (raggio = semiretta), di origine F, con la direzione di uno degli assi, che soddisfaccia alle $\rho \cdot \sigma(\lambda) = F$, $\rho \cdot \Sigma(\lambda) = \rho - F$ ed alla $\rho \cdot t(\rho) = 0$;

oppure,

se esiste un segmento τ, FT, con la direzione di uno degli assi che soddisfaccia alle $\tau \cdot \sigma(\lambda) = F$, $\tau \cdot \Sigma(\lambda) = \tau - F$ ed alle $\tau \cdot t(F) = 0$, $\tau \cdot t^{-1}(F) = 0$, $\tau \cdot t(\tau) \subset T + t(T) -$ nel quale caso $\tau \cdot t(\tau)$ si riduce o a T o a $t(T)$, com'è noto, e τ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine F −.

Un punto F′ di λ è detto quasi-fondamentale, rispetto a $\Sigma(\lambda)$, se esiste un segmento di traslazione ω con la direzione di uno degli assi, che contenga F′ e sia tale da aversi $\omega \subset \lambda + \Sigma(\lambda)$ ed $\omega \cdot \Sigma(\lambda) = \omega - \omega \cdot \lambda \neq 0$; di guisa che[5] uno dei due campi adiacenti a $\sigma(\omega)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$.

Un punto F″ di λ si dice semi-fondamentale, rispetto a $\Sigma(\lambda)$, se esiste un arco di traslazione ψ che contenga F″ e che goda delle seguenti proprietà:

1° è costituito da due tratti rettilinei, ortogonali fra loro, anzi ciascuno con la direzione di uno degli assi;

2° è contenuto in $\lambda + \Sigma(\lambda)$; di guisa che uno, $\Sigma(\psi)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\psi)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$;

3° contiene punti interni a $\Sigma(\lambda)$, e quindi esterni a λ [e $\sigma(\lambda)$];

4° possiede, nell'unico suo vertice, un vertice di prima categoria rispetto a $\Sigma(\psi)$.

2. Rammentiamo ora il teorema della mia Nota citata per prima.

Secondo quel mio teorema:

Se π è un piano nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali; t una traslazione generalizzata di π; λ un arco di traslazione (di t), costituito da una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi; $\Sigma(\lambda)$ uno dei due campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\lambda)$, generata da λ,

o esiste una spezzata semplice e aperta φ, costituita da un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi, che gode delle seguenti proprietà: φ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie e l'arco di trasla-

(5) Questa conseguenza non è del tutto immediata.

zione contenuto in φ *è un segmento; l'origine* L *di* φ *(di* φ *in quanto pseudo-arco di traslazione, beninteso) è interna a* λ; $\varphi - L$ *appartiene a* $\Sigma(\lambda)$, *di guisa che* $\varphi \cdot \sigma(\lambda)$ *si riduce ad* L;

oppure esiste una semilinea semplice e aperta l, *costituita da un numero finito di segmenti e da un raggio, ciascuno con la direzione di uno degli assi, che gode delle seguenti proprietà: l non incontra* $t(l)$; *l'origine* L *di l è interna a* λ; $l - L$ *appartiene a* $\Sigma(\lambda)$, *di guisa che* $l \cdot \sigma(\lambda)$ *si riduce ad* L [6].

3. In un'altra Nota [7] io ho dimostrato che il teorema del numero precedente vale per un arco di traslazione qualunque, e non soltanto per uno astretto alle condizioni del n. 1.

Però io ritengo più interessante anzichè l'ampliare la classe degli archi di traslazione per cui è valido il teorema del n. 2, il restringere la natura delle spezzate quali la φ o delle semilinee quali la l. Ritengo anzi la seconda questione di un interesse addirittura preminente nello sviluppo della teoria delle traslazioni piane generalizzate.

Nel fatto, è noto che:

A) *Fermi i simboli introdotti nel n. 1, se* $n = 1$, *cioè se* λ *è un segmento di traslazione,* λ *contiene sempre punti fondamentali relativi a* $\Sigma(\lambda)$ [8].

Questo enunciato induce a chiedersi, se lo stesso non accade per caso anche se $n > 1$. Ma la risposta è affermativa soltanto in un caso particolare, precisamente in quello che tutti i vertici di λ siano di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$; sicchè:

B) *Se* π *è un piano nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali; t una traslazione generalizzata di* π; λ *un arco di traslazione di t, costituito da una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi;* $\Sigma(\lambda)$ *uno dei campi adiacenti alla traiettoria* $\sigma(\lambda)$ *generata da* λ,

λ *contiene punti fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *se tutti i suoi vertici (eventuali) sono di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

mentre nel caso generale il teorema diventa:

C) *Se* π *è un piano nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali; t una traslazione generalizzata di* π; λ *un arco di traslazione di t, costituito da una spezzata di un numero finito di lati, ciascuno con la direzione di uno degli assi:* $\Sigma(\lambda)$ *uno dei due campi adiacenti alla traiettoria* $\sigma(\lambda)$ *generata da* λ,

(6) Nella dimostrazione di questo teorema, data nella prima delle mie Note citate, mi è sfuggita una delle alternative possibili cui può dar luogo il caso che sia *quattro* il numero dei lati di λ e che siano di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$ tutti i vertici di λ; questa alternativa verrà ripresa in esame nella Memoria preannunciata in questa Nota preventiva.

(7) G. Scorza Dragoni, *Ancora a proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [in corso di stampa in questi « Rendiconti »].

(8) Ved. i passi ricordati alla fine dell'introduzione della prima delle mie Note citate.

o λ *contiene punti fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$ *;*

o λ *contiene punti quasi–fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$ *;*

o λ *contiene punti semi–fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$,

le tre alternative non escludendosi a vicenda.

4. I teoremi B) e C) costituiscono appunto i risultati, cui si è alluso all'inizio di questa Nota.

Il teorema A) dice che il teorema B) è vero, se il numero n dei lati di λ è uguale ad *uno*. Il teorema B) afferma che è vero il teorema C), se è uguale a *zero* il numero m dei vertici di λ, di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

È quindi spontaneo chiedersi, se i teoremi B) e C) non si possano dimostrare per induzione.

Nel fatto è così, però il procedimento induttivo (troppo delicato e quindi troppo lungo per poter essere esposto in questi « Rendiconti ») è di natura tale che, se non si vuol ricadere nel risultato del n. 2, bisogna dimostrare due proposizioni ancora più penetranti dei teoremi B) e C) stessi.

E in un lavoro di prossima pubblicazione (9) farò appunto vedere che:

B') *Nelle ipotesi del teorema* B), *i vertici (eventuali) di* λ *essendo tutti di prima categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *ed* n *essendo il numero dei lati di* λ,

se $n = 1$, λ *ammette punti fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n = 2$, *ogni lato di* λ *contiene punti fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n > 2$, *esistono punti fondamentali di* λ *rispetto a* $\Sigma(\lambda)$ *contenuti nella spezzata costituita dai lati di* λ *diversi dagli estremi (e quindi interni a questa spezzata)* ;

e che:

C') *Nelle ipotesi del teorema* C), *detto* n *il numero dei lati di* λ *ed* m *il numero dei suoi vertici di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$,

se $n = 1$, λ *ammette punti fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n = 2$ *e* $m = 0$, *ogni lato di* λ *contiene punti fondamentali rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n = 2$ *e* $m = 1$, *il vertice di* λ *è un punto o fondamentale o quasi–fondamentale o semi–fondamentale rispetto a* $\Sigma(\lambda)$;

se $n > 2$, *allora:*

o uno almeno dei lati di λ, *diversi da quelli estremi, contiene almeno un punto fondamentale relativo a* $\Sigma(\lambda)$;

oppure uno dei vertici di λ, *di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *è quasi–fondamentale relativamente a* $\Sigma(\lambda)$;

oppure uno dei vertici di λ, *di seconda categoria rispetto a* $\Sigma(\lambda)$, *è semi–fondamentale per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$.

(9) Il quale comparirà nei « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova » e conterrà risultati ancora più espressivi di quelli qui enunciati [nota aggiunta sulle bozze di stampa].

Matematica. — *Nuclei isotropi e loro autofunzioni.* Nota di G. Ascoli, presentata [1] dal Socio M. Picone.

Non è nuova la considerazione di nuclei simmetrici $K(P, Q)$ definiti sulla ipersfera unitaria ω_n dell'S_n e aventi come autofunzioni le relative funzioni ipersferiche, in modo, più precisamente, che le funzioni di un dato grado s corrispondano ad un medesimo autovalore λ_s. Nel noto trattato di Appell e Kampé de Fériet [2] viene, ad esempio, stabilita questa proprietà per il nucleo

$$K(P, Q) = \frac{1}{\sin^{n-2}\left(\frac{1}{2}\gamma(P, Q)\right)}$$

nel quale $\gamma(P, Q)$ rappresenta l'angolo, tra O e π, dei raggi OP e OQ; i λ_s hanno in corrispondenza i valori

$$\lambda_s = \frac{2s + n - 2}{2^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\pi^{n/2}}.$$

Altri esempi (per $n = 2$, ma immediatamente estendibili al caso generale) vengono segnalati da Whittaker e Watson [3], come applicazioni del classico integrale di Poisson.

Ma nè da questi Autori, nè forse da altri, viene notato quanto sia ampia la classe di siffatti nuclei, nè come sia facile caratterizzarli; onde – per quanto l'osservazione possa apparire banale, potendosi facilmente connettere al noto sviluppo del nucleo per le autofunzioni – non stimo inutile dedicarle questa breve Nota. Si vedrà da essa come il risultato possa essere conseguito con estrema semplicità evitando ogni ricorso alla teoria delle equazioni integrali e l'uso di coordinate sull'ipersfera, procedimento che si collega ad una mia Memoria [4] sui « sistemi lineari isotropi », e precisamente ad una teoria sintetica delle funzioni ipersferiche in essa sviluppata (nn. 7, 8 e 10) a cui rimando il lettore per una più completa comprensione del metodo.

La trattazione è identica per ogni valore di $n > 2$; il caso elementare $n = 2$ verrà studiato a parte per circostanze particolari che in esso si presentano.

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) P. Appell et J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéometriques et hypersphériques–Polynomes d'Hermite.* Paris, 1926, p. 210. Per il confronto si tenga conto che qui è indicata con $n + 2$, anzichè con n, la dimensione dello spazio ambiente.

(3) E. D. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis.* Cambridge, 1935, p. 231, es. 8.

(4) *Sopra i sistemi lineari isotropi e le loro proprietà integrali.* « Comment. Pont. Acad. Scient. », VII, n. 10, pp. 207–279. Questa Memoria sarà in seguito richiamata con (M).

1. Chiamiamo *funzione isotropa* di due punti P e Q dell'ipersfera unitaria ω_n dell'S_n una funzione $K(P, Q)$ che rimane invariata per ogni rotazione ν dell'ipersfera in sè:

$$K(\nu P, \nu Q) = K(P, Q).$$

Come è quasi evidente, una tale funzione non è altro che una arbitraria funzione dell'angolo $\gamma(P, Q)$, in quanto se

$$\gamma(P, Q) = \gamma(P', Q')$$

esiste sempre una rotazione che muta P in P' e Q in Q'; essa è quindi simmetrica nei suoi argomenti. Il ragionamento cade nel caso $n = 2$, che lasceremo per ora in disparte.

Si supponga ora che le due funzioni isotrope $H(P, Q)$, $K(P, Q)$ siano integrabili su ω_n ed esista inoltre il loro « prodotto di composizione »

$$I(P, Q) = \int_{\omega_n} H(P, R) K(R, Q) \, d\omega_n(R)$$

si prova allora facilmente che *esso è ancora una funzione isotropa*. Si ha infatti, per un'arbitraria rotazione ν:

$$I(\nu P, \nu Q) = \int_{\omega_n} H(\nu P, R) K(R, \nu Q) \, d\omega_n(R)$$

ed eseguendo in questa il cambiamento di variabili $R = \nu R'$, il cui jacobiano, in quanto rapporto degli elementi di misura corrispondenti, vale 1,

$$I(\nu P, \nu Q) = \int_{\omega_n} H(\nu P, \nu R') K(\nu R', \nu Q) \, d\omega_n(R') =$$

$$= \int_{\omega_n} H(P, R') K(R', Q) \, d\omega_n(R') = I(P, Q),$$

ciò che prova l'asserto.

Ne segue anche che *due funzioni isotrope sono sempre permutabili.*

2. Si ha ora: *Un nucleo isotropo integrabile* $K(P, Q)$ *ammette come autofunzioni le funzioni ipersferiche dell'*S_n, *quelle di ordine s corrispondendo ad un medesimo autovalore.*

Per dimostrarlo occorre ricordare [(M), n. 7, *c*)] che per ogni grado *s* esiste una funzione isotropa $V_s(P, Q)$, e precisamente un certo polinomio π_s di grado *s* nella variabile $\cos\gamma(P, Q)$, che è funzione ipersferica di P e di Q (funzione *zonale*); essa è determinata a meno di un fattore costante,

il quale si fissa mediante la condizione $V_s(P, P) = 1$ (o $\pi_s(1) = 1$). Dalla composizione di V_s e di K risulta allora il nucleo isotropo, e quindi simmetrico,

$$\varphi(P, Q) = \int_{\omega_n} K(P, R)\, V_s(R, Q)\, d\omega_n(R).$$

Si vede poi subito che $\varphi(P, Q)$ è ancora funzione ipersferica di ordine s di Q; difatti se M è il punto (ρ, Q) di raggio vettore ρ situato sulla semiretta OQ, $\rho^s V_s(R, Q)$ è una forma armonica di grado s nelle coordinate di M e tale è quindi anche

$$\int_{\omega_n} K(P, R) \cdot \rho^s V_s(R, Q)\, d\omega_n(R) = \rho^s \varphi(P, Q).$$

Per la simmetria, $\varphi(P, Q)$ è allora anche funzione ipersferica di P, e può quindi differire solo per un fattore costante dalla $V_s(P, Q)$; si ha cioè:

$$(1) \qquad \int_{\omega_n} K(P, R)\, V_s(R, Q)\, d\omega_n(R) = c_s V_s(P, Q)$$

onde $V_s(P, R)$ è, per ogni R, autofunzione – in senso esteso (5), potendo essere $c_s = 0$ – del nucleo $K(P, Q)$.

Si passa di qui al caso di una qualunque funzione ipersferica Y_s ricordando [(M), n. 7, *g*)] che una tale funzione è combinazione lineare di un conveniente gruppo di funzioni $V_s(P, R_i)$; oppure moltiplicando i due membri della (1) per $Y_s(Q)\, d\omega_n(Q)$ ed integrando su ω_n. Per la nota formula [(M), n. 8, *a*)]

$$\int_{\omega_n} V_s(P, Q)\, Y_s(Q)\, d\omega_n(Q) = \lambda_s Y_s(P)$$

ove λ_s è una certa costante non nulla, si ottiene subito infatti:

$$\int_{\omega_n} K(P, R)\, Y_s(R)\, d\omega_n(R) = c_s Y_s(P)$$

onde ogni $Y_s(P)$ è effettivamente autofunzione del nucleo isotropo $K(P, Q)$, per lo stesso valore di c_s.

Si aggiunga che, per la completezza del sistema delle Y_s, il nucleo non potrà avere altre autofunzioni.

(5) Seguendo vari Autori (Hellinger e Toeplitz, Kovalewski, ecc.) considero come autofunzioni « in senso esteso » le funzioni ortogonali al nucleo, cioè corrispondenti all'autovalore infinito. Esse hanno molte proprietà in comune con le altre autofunzioni, non però tutte: per esempio possono esservene anche un'infinità (numerabile) linearmente indipendenti. Naturalmente, esse possono esistere solo se il nucleo non è chiuso.

3. Per determinare il valore della costante c_s, immaginiamo scritta la K nella forma:

$$K = f[\cos\gamma(P, Q)]$$

e facciamo nella (1) $P = Q$. Si avrà:

$$c_s = \int_{\omega_n} f[\cos\gamma(P, R)]\, V_s(R, P)\, d\omega_n(R)$$

ove il secondo membro non dipende dalla scelta di P. Assumiamo allora:

$$P = (0, 0, 0 \cdots 1) \quad , \quad R = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$$

donde

$$\cos\gamma(P, Q) = \xi_n \quad , \quad V_s(R, P) = \pi_s(\xi_n).$$

Ricordiamo inoltre che rappresentando opportunamente il punto R mediante la coordinata ξ_n e un punto S di una ipersfera unitaria ω_{n-1} dell'S_{n-1} [(M), n. 10, *d*)] si ha:

$$d\omega_n(R) = (1 - \xi_n^2)^{(n-3)/2}\, d\omega_{n-1}(S)\, d\xi_n .$$

Ne segue:

$$c_s = \int_{-1}^{1} \int_{\omega_{n-1}} f(\xi_n)\, \pi_s(\xi_n)\, (1 - \xi_n^2)^{(n-3)/2}\, d\omega_{n-1}(S)\, d\xi_n$$

ossia:

$$c_s = \omega_{n-1} \int_{-1}^{1} f(t)\, \pi_s(t)\, (1 - t^2)^{(n-3)/2}\, dt ,$$

dove ω_{n-1} è l'estensione dell'ipersfera unitaria dell'S_{n-1} (6).

4. Il risultato dimostrato al n. 2 si può agevolmente invertire nella forma seguente: *Ogni nucleo continuo* K(P, Q) *avente per autofunzioni* – nel senso ormai noto – *le funzioni ipersferiche dell'* S_n *è isotropo.*

Infatti, assumendo in particolare la funzione ipersferica $V_s(P, Q)$, con Q arbitrario, si avrà, per una conveniente costante c_s, indipendente da Q,

$$c_s\, V_s(P, Q) = \int_{\omega_n} K(P, R)\, V_s(R, Q)\, d\omega_n(R)$$

(6) Per $n = 3$ è, in particolare,

$$c_s = 2\pi \int_{-1}^{1} f(t)\, X_s(t)\, dt$$

dove X indica il polinomio di Legendre di grado *s*.

e di qui, mutando P, Q, R, in $\nu P, \nu Q, \nu R$, dove ν è una rotazione arbitraria, e notando, come al n. 1, che l'jacobiano della trasformazione vale 1,

$$c_s V_s(\nu P, \nu Q) = \int_{\omega_n} K(\nu P, \nu R) V_s(\nu R, \nu Q) d\omega_n(R)$$

cioè

$$c_s V_s(P, Q) = \int_{\omega_n} K(\nu P, \nu R) V_s(R, Q) d\omega_n(R).$$

Di qui, come al n. 2, segue, per qualunque funzione ipersferica Y:

$$c_s Y_s(P) = \int_{\omega_n} K(\nu P, \nu R) Y_s(R) d\omega_n(R)$$

mentre è poi, per ipotesi,

$$c_s Y_s(P) = \int_{\omega_n} K(P, R) Y_s(R) d\omega_n(R)$$

onde le funzioni $K(P, Q)$, $K(\nu P, \nu Q)$ di P hanno, rispetto ad un qualunque sistema ortogonale completo di funzioni ipersferiche, i medesimi coefficienti di Fourier. Ne segue, per la supposta continuità [(M), n. 10, *d*)]

$$K(\nu P, \nu Q) = K(P, Q)$$

che esprime appunto l'affermata isotropia del nucleo K.

5. Consideriamo ora il caso $n = 2$; in esso si avranno da considerare funzioni K di due punti del cerchio unità, cioè funzioni di periodo 2π delle loro anomalie θ e φ. E l'isotropia sarà espressa dall'equazione:

$$K(\theta + \alpha, \varphi + \alpha) = K(\theta, \varphi)$$

Assumendo in questa $\alpha = -\varphi$ si ha:

$$K(\theta, \varphi) = K(\theta - \varphi, 0) = f(\theta - \varphi)$$

cioè K funzione dell'argomento $\theta - \varphi$. Una tale funzione non sarà necessariamente simmetrica; occorre e basta per questo che la f sia funzione pari del suo argomento. Ciò equivale a dire che è anche:

$$K(-\theta, -\varphi) = K(\theta, \varphi)$$

cioè che K rimane invariata per le simmetrie del cerchio in sè (isotropia simmetrica; cfr. (M), n. 12).

Si verifica allora subito che *sono autofunzioni di un nucleo isotropo integrabile le funzioni* $e^{is\theta}$, *con* s *intero*. E difatti, con le notazioni precedenti, tenuto conto della periodicità della f si ha:

$$\int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi)\, e^{is\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\theta - \varphi)\, e^{is\varphi}\, d\varphi = \int_{\theta-2\pi}^{\theta} f(\theta - \varphi)\, e^{is\varphi}\, d\varphi$$

e ponendo $\varphi = \theta - t$

$$\int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi)\, e^{is\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{is(\theta - t)}\, dt = e^{is\theta} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ist}\, dt = c_s\, e^{is\theta}$$

ove

$$c_s = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ist}\, dt\,.$$

Si noti che se il nucleo è simmetrico, cioè f pari, è $c_s = c_{-s}$, come si vede mutando nell'ultimo integrale t in $-t$; ad un medesimo valore c_s corrispondono allora le due autofunzioni indipendenti $e^{is\theta}$, $e^{-is\theta}$, a cui possono sostituirsi le altre $\cos s\theta$, $\sin s\theta$.

Viceversa, *un nucleo continuo che ammetta le autofunzioni* $e^{is\theta}$, *con* s *intero, è isotropo*. Difatti dall'ipotesi segue:

$$\int_0^{2\pi} K(\theta, \varphi)\, e^{is\varphi}\, d\varphi = c_s\, e^{is\theta}$$

da cui, posto $\theta + \alpha$ e $\varphi + \alpha$ per θ e φ:

$$\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} K(\theta + \alpha, \varphi + \alpha)\, e^{is(\varphi+\alpha)}\, d\varphi = c_s\, e^{is(\theta+\alpha)}$$

donde, per la periodicità,

$$\int_0^{2\pi} K(\theta + \alpha, \varphi + \alpha)\, e^{is\varphi}\, d\varphi = c_s\, e^{is\theta}.$$

Segue che $K(\theta + \alpha, \varphi + \alpha)$ e $K(\theta, \varphi)$, come funzioni di θ, hanno rispetto al sistema $e^{is\theta}$ gli stessi coefficienti di Fourier. Per la nota proprietà di chiusura e per la continuità di K risulta allora

$$K(\theta + \alpha, \varphi + \alpha) = K(\theta, \varphi)$$

che esprime appunto l'asserita isotropia. Si vede poi facilmente che se è sempre $c_s = c_{-s}$, K è anche simmetrico.

Matematica. — *Sulle serie doppie di Fourier.* Nota di L. Cesari, presentata [1] dal Socio M. Picone.

Sia

$$(1) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y)$$

una serie doppia di Fourier e sia $f(x, y)$ la sua funzione generatrice, cioè sia la (1) la serie doppia di Fourier della funzione $f(x, y)$ periodica di periodo 2π, rispetto ad x e rispetto ad y, e integrabile secondo Lebesgue nel quadrato fondamentale $Q \equiv (0, 0, 2\pi, 2\pi)$.

Siano

$$s_{mn}(x, y) = \sum_{r=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} \lambda_{rt} A_{rt}(x, y), \qquad m, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

le somme parziali della serie [2].

È molto importante conoscere procedimenti generali di sommazione che permettano, quasi ovunque in Q, il calcolo della funzione generatrice di una data serie doppia di Fourier.

Un procedimento del tutto generale è quello costituito dai polinomi trigonometrici di De La Vallée Poussin, come è stato stabilito fin dal 1924 da L. Tonelli [3]. Altri procedimenti sono stati studiati recentemente da S. Bochner [4] che si è servito delle così dette medie sferiche; da J. Marcinkiewicz e A. Zygmund [5] che si sono serviti del limite:

$$\lim_{\substack{m \\ n \end{subarrow} \to \infty \\ 1/\lambda < m/n < \lambda}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} s_{rt} \text{ [6]},$$

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(3) L. Tonelli, « Mem. R. Accad. delle Scienze di Bologna », ser. III, vol. 2 (1924), pp. 53–60. Inoltre *Serie Trigonometriche*, Bologna, Zanichelli (1928), pp. 501–507.

(4) S. Bochner, *Summation of molliple Fourier series by spherical means.* « Proc. Mat. Accad. Sci. U. S. A. », vol. 21, pp. 353–355 (1935). *Summation of multiple Fourier series by spherical means.* « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 40 (1936), pp. 175–207.

(5) I. Marcinkiewicz and A. Zygmund, *On the summability of double Fourier series*, « Fundam. Math. », tom. 32 (1939), pp. 122–132.

(6) S. Saks [*Remark on the differentiality of the Lebesque indefinite integral*, « Fundam Math. », tom. 22 (1934) pp. 122–132] ha dimostrato che esistono serie di Fourier per le quali, in tutti i punti di Q, si ha:

$$\overline{\lim_{\substack{m \\ n \end{subarrow} \to \infty}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} s_{rt} = +\infty}.$$

e infine da L. Fejér [7], J. Marcinkiewicz [8] e G. Grünwald [9] per mezzo delle medie (C, k) della successione

$$s_{00}, s_{11}, s_{22}, \cdots, s_{nn}, \cdots.$$

Più precisamente G. Grünwald, migliorando il risultato dei precedenti AA., ha dimostrato che, quasi ovunque in Q, si ha

$$\lim_{n\to\infty} (s_{00} + s_{11} + \cdots + s_{nn})/_{n+1} = f(x, y).$$

Successivamente G. Grünwald [10], in una recente aggiunta al precedente lavoro, ha dimostrato che, quasi ovunque in Q, si ha pure:

$$\lim_{n\to\infty} (s_{0n} + s_{1,n-1} + s_{2,n-2} + \cdots + s_{n0})/_{n+1} = f(x, y).$$

Sia ora

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{2}$$

una serie doppia numerica e siano:

$$s_{mn} = \sum_{r=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} a_{rt}, \qquad m, n = 0, 1, 2, \cdots,$$

le somme parziali.

Poniamo

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{r+t=k} a_{rt}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Si dice che la (2) converge per diagonali se esiste determinato e finito il

$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Si dice poi che la (2) è sommabile $(C, 1)$ per diagonali se esiste determinato e finito il

$$\lim_{n\to\infty} (S_0 + S_1 + \cdots + S_n)/_{n+1}$$

e questo limite dicesi la somma generalizzata della serie (2). Io ho dimostrato [11] che, per ogni serie doppia numerica, vale la seguente identità

(7) L. Feiér, *Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe.* «Proc. Cambridge Phil. Soc.», vol. 34 (1938), pp. 503–509.

(8) J. Marcinkiewicz, *Sur une méthode remarquable de sommation des séries doubles de Fourier.* «Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa», II ser., vol. 8, pp. 149–160 (1939).

(9) G. Grünwald, *Ueber die Summabilität der Fourierschen Reihe,* «Acta Math. Szeged», vol. 10 (1941), pp. 55–63.

(10) G. Grünwald, *Eine Bemerkung zu meiner Arbeit "Ueber die Summabilität der Fourierschen Reihe".* «Acta Math. Szeged», vol. 10 (1941), pp. 105–108.

(11) L. Cesari, *Sulle serie doppie,* «Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa», ser. II, vol. 1 (1932), pp. 297–314.

$$S_0 + S_1 + \cdots + S_n = s_{0n} + s_{1,n-1} + s_{2,n-2} + \cdots + s_{n0}$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Dall'ultimo risultato di G. Grünwald sopracitato e da questa identità, risulta ora immediatamente il seguente definitivo

Teorema. – *Ogni serie doppia di Fourier è sommabile* (C, 1) *per diagonali quasi ovunque in* Q, *e la somma generalizzata coincide, quasi ovunque in* Q, *con la funzione generatrice.*

Matematica. — *Sulla approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi*[1]. Nota di L. Merli, presentata [2] dal Corrisp. E. Bompiani.

1. Indichiamo con

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)},$$

n punti distinti dell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ e siano

$$f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \cdots, f(x_n^{(n)}),$$

i valori assunti in tali punti da una funzione $f(x)$, definita nello stesso intervallo. Il polinomio

$$L_n[f] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x), \tag{1}$$

ove

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \tag{2}$$

con

$$\omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \cdots (x - x_n^{(n)}),$$

è l'unico polinomio di grado $n - 1$ al massimo, che nei punti di ascissa $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ prende i valori $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \cdots, f(x_n^{(n)})$, rispettivamente. Esso è il polinomio di interpolazione di Lagrange relativo alla funzione $f(x)$ ed alle ascisse assegnate $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$. Il polinomio

$$H_n[f] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) h_k^{(n)}(x), \tag{3}$$

dove

$$h_k^{(n)}(x) = v_k^{(n)}(x)[l_k^{(n)}(x)]^2, \tag{4}$$

$$v_k^{(n)}(x) = 1 - (x - x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}, \tag{5}$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.
(2) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

è, invece, l'unico polinomio di grado al massimo $2n-1$, che per i valori $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ assume rispettivamente i valori $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \cdots, f(x_n^{(n)})$, e la cui derivata si annulla nei medesimi punti. Esso è il polinomio interpolante di Hermite.

È noto che il problema dell'approssimazione di una funzione continua, $f(x)$, mediante i polinomi $L_n[f]$ di Lagrange, presenta questo interessante aspetto negativo: non è possibile una scelta di ascisse per la quale il polinomio $L_n[f]$ converga, per $n \to \infty$, verso $f(x)$, qualunque sia $f(x)$ continua. Anche nel caso in cui le ascisse $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$, siano gli zeri del polinomio di Tchebycheff di I^a specie $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$, cioè per

$$(6) \qquad x_k^{(n)} = \cos\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2n}, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n \; ; \; n = 1, 2, \cdots),$$

che si presenta come il caso più favorevole, si può costruire una funzione continua in $-1 \leq x \leq 1$, per la quale la successione $L_n[f]$ diverge in tutto l'intervallo [3]. Occorre quindi imporre alla $f(x)$ delle condizioni oltre alla continuità perchè si abbia $\lim_{n\to\infty} L_n[f] = f(x)$, in $-1 \leq x \leq 1$ [4].

Studiando, invece, il problema della approssimazione delle funzioni continue con la formula di interpolazione di Hermite, L. Fejér [5] ha dimostrato che si ha

$$\lim_{n\to\infty} H_n[f] = f(x),$$

in $-1 \leq x \leq 1$, qualunque sia $f(x)$ continua, nell'ipotesi che le ascisse $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ siano gli zeri del polinomio di Tchebycheff di I^a specie e la convergenza risulta uniforme nello stesso intervallo [5]. Il diverso comportamento di $L_n[f]$ e di $H_n[f]$ è dovuto al fatto che mentre il polinomio $L_n[f]$ è di grado $n-1$, il polinomio $H_n[f]$ è di grado $2n-1$: l'innalzamento del grado, porta la convergenza verso $f(x)$.

Recentemente G. Grünwald [6], ha preso in considerazione il polinomio $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k^2(x)$, di grado $2n-2$; nell'ipotesi che le ascisse $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}$ formino un sistema di punti *normalmente distribuiti* cioè di punti per i quali risulti verificata la condizione

$$(7) \qquad v_k^{(n)}(x) \geqq \rho > 0, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n \; ; \; n = 1, 2, \cdots),$$

(3) G. Grünwald, *Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen*, « Annals of Math. », 37 (1936), pp. 908–918.

(4) L. Fejér, *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen Konjugierten Punkte*, « Mathematische Annalen », *106* (1932), pp. 1–55.

(5) L. Fejér, *Über Interpolation*, « Nachrichten d. k. Gesellschaften Göttingen » (1916), pp. 66–91.

(6) G. Grünwald, *On the theory of interpolation*, « Acta Mathematica », *75* (1943), pp. 219–245.

$-1 \leq x \leq 1$, $v_k^{(n)}(x)$ essendo dato dalla (5). Per tali particolari ascisse, che sono importanti anche per lo studio della convergenza dei polinomi $L_n[f]$ ed $H_n[f]$, Egli ha dimostrato il seguente teorema:

Se $f(x)$ è una funzione continua in $-1 \leq x \leq 1$, allora si ha per tutti i sistemi di punti normalmente distribuiti

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^2(x) = f(x), \qquad -1 < x < 1, \tag{8}$$

e la convergenza è uniforme in $-1+\lambda \leq x \leq 1-\lambda$, con $\lambda > 0$. Tale teorema vale in particolare se si assume come sistema di punti fondamentali quello formato dagli zeri del polinomio di Tchebycheff di I^a specie [7]: ma la convergenza ha luogo soltanto internamente all'intervallo $(-1, 1)$. Qui vogliamo studiare il comportamento dei polinomi $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k^2(x)$ in tutto l'intervallo $(-1, 1)$ e dimostreremo che:

Se la funzione $f(x)$ definita in $-1 \leq x \leq 1$ è ivi continua e costruiamo il polinomio di grado $\leq 2n-2$, $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, l_k^2(x)$, che interpola la funzione $\sqrt{1-x^2}\, f(x)$, negli zeri del polinomio di Tchebycheff di I^a specie $T_n(x)$, si ha, allora, uniformemente in $(-1, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, l_k^2(x) = \sqrt{1-x^2}\, f(x), \quad (-1 \leq x \leq 1), \tag{9}$$

e mentre con la formula di Hermite la convergenza uniforme è realizzata con polinomi di grado $\leq 2n-1$, nel nostro caso la si realizza con polinomi di grado $\leq 2n-2$.

2. Ci occorre in primo luogo dimostrare che, posto

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left| \sqrt{1-x_k^2}\, \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} (x - x_k)\, l_k^2(x) \right|,$$

si ha:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0, \quad \text{uniformemente in} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(7) Infatti, usando l'equazione differenziale $(1-x^2)\,\omega_n''(x) - x\omega_n'(x) + n^2\omega_n(x) = 0$, $\omega_n(x) = T_n(x)$, si ha, per $x = x_k$, $\frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} = \frac{x_k}{1-x_k^2}$, per cui risulta $v_k(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)}(x - x_k) = \frac{1 - x\,x_k}{1-x_k^2}$, ed essendo $v_k(x_k) = 1$, $v_k(-1) = \frac{1}{1-x_k}$, $v_k(1) = \frac{1}{1+x_k}$ e $-1 < x_k < 1$, risulta $v_k(x) > \frac{1}{2}$ per $-1 \leq x \leq 1$, cioè è verificata la (7) e quindi i punti sono normalmente distribuiti. Vedi: L. Fejér, lavoro citato nella nota (4).

A tale scopo osserviamo che, nel nostro caso, essendo $\omega_n(x) = \cos n\theta$, con $\theta = \arccos x$, e che $x_k^n = \cos\theta_k$, con $\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$, tenuto conto della (2), si ha:

$$\omega_n'(x) = n\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad , \quad \omega_n'(x_k) = (-1)^{k+1}\frac{n}{\operatorname{sen}\theta_k},$$

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}\cos n\theta \operatorname{sen}\theta_k}{n(\cos\theta - \cos\theta_k)}, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

È inoltre:

$$\frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} = \frac{x_k}{1 - x_k^2} = \frac{\cos\theta_k}{\operatorname{sen}^2\theta_k},$$

per cui si ha:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{1-x_k^2}\,\frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)}(x - x_k)\,l_k^2(x)\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen}\theta_k\cos^2 n\theta}{n^2(\cos\theta - \cos\theta_k)}\right| = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen}\theta_k \operatorname{sen}^2 n(\theta - \theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_k}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right| \text{ (8)}.$$

Valutiamo ora l'ultima somma ottenuta e dimostriamo che si ha uniformemente, per $0 \leq \theta \leq \pi$,

$$\text{(10)} \qquad \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right| = O(n\log n).$$

Infatti, per $\theta_{R-1} + \frac{\pi}{2n} \leq \theta \leq \theta_{R+1} - \frac{\pi}{2n}$, $(R = 2, 3, \cdots, n-1)$, è

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_R)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_R}{2}}\right| +$$

$$+ \sum_{k=R+1}^{n}\left|\frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right| \text{ ed essendo } \left|\frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_R)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_R}{2}}\right| \leq 2n,$$

(8) È infatti: $|\cos n\theta| = |\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k)|$; inoltre:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_k}{\operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_k}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\theta_k}{2}\cos\frac{\theta_k}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta_k}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta_k}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \leq \frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} \leq 2$$

e $|\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k)| \leq 1$.

sarà:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\operatorname{sen} n(\theta-\theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}} + 2n + \sum_{k=R+1}^{n} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{R-1} \frac{\frac{\theta-\theta_k}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}} \cdot \frac{2}{\theta-\theta_k} + 2n + \sum_{k=R+1}^{n} \frac{\frac{\theta-\theta_k}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}} \cdot \frac{2}{\theta-\theta_k} \leq$$

$$\leq 2\left[\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{R-1}\frac{1}{\theta-\theta_k} + n + \frac{\pi}{2}\sum_{k=R+1}^{n}\frac{1}{\theta-\theta_k}\right].$$

Osserviamo ora che è

$$\sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{\theta-\theta_k} < \sum_{k=1}^{R-1} \frac{2n}{\pi(2R+1-2k)} < C'_R\, n \log n,$$

con C'_R costante assoluta. Analogamente

$$\sum_{k=R+1}^{n} \frac{1}{\theta-\theta_k} < C''_R\, n \log n,$$

con C''_R costante assoluta. Avremo allora, per

$$\theta_{R-1} + \frac{\pi}{2n} \leq \theta \leq \theta_{R+1} - \frac{\pi}{2n}, \qquad (R = 2, 3, \cdots, n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\operatorname{sen} n(\theta-\theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}} \right| < C_R\, n \log n,$$

con C_R costante assoluta.

Analogamente ragionando per $0 \leq \theta \leq \theta_1 + \frac{\pi}{2n}$ e $\theta_n - \frac{\pi}{2n} \leq \theta \leq \pi$ si ottiene, per $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\operatorname{sen} n(\theta-\theta_k)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_k}{2}} \right| < Cn \log n,$$

con C costante assoluta (9). La (10) è quindi dimostrata.

(9) Cfr. D. Jackson, *The theory of approximation*, «Am. Math. Colloquium», XI (1930), p. 119.

Risulta allora:

$$S_n(x) = O\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \text{per cui} \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0,$$

uniformemente in $-1 \leq x \leq 1$.

3. Osserviamo ora che si può scrivere:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, l_k^2(x) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, l_k^2(x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, h_k(x),$$

e, tenuto conto delle (4) e (5):

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, l_k^2(x) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k) \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} (x \quad x_k)\, l_k^2(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, h_k(x).$$

Ma si ha, uniformemente in $-1 \leq x \leq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, h_k(x) = \sqrt{1-x^2}\, f(x);$$

d'altra parte, indicando con M il massimo di $|f(x)|$ in $-1 \leq x \leq 1$, è

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k) \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} (x - x_k)\, l_k^2(x) \right| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{n} \left| \sqrt{1-x_k^2}\, \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)} (x - x_k)\, l_k^2(x) \right| = M S_n(x).$$

Ed essendo $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$ uniformemente in $-1 \leq x \leq 1$, si ha pure uniformemente in $-1 \leq x \leq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k)\, l_k^2(x) = \sqrt{1-x^2}\, f(x),$$

che è appunto la (8).

Matematica. — *Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficiente periodico reciproco di quello di Mathieu.* Nota II [1] di E. Cambi, presentata dal Socio U. Bordoni.

Soluzioni periodiche ed autofunzioni. – 10. Le serie trigonometriche scritte (ad esempio le (10)), rappresentanti in ogni caso funzioni quasi-periodiche della x, rappresentano delle funzioni periodiche ordinarie se le successive frequenze, cioè le $u_0 + n$, ammettono un massimo comun divisore. Questo accade tutte le volte che u_0 sia razionale; ed il periodo della funzione risultante è allora dato da 2π diviso per il m. c. d. Il periodo è perciò tanto più grande quanto minore è il massimo comun divisore, cioè quanto maggiore è il denominatore di u_0.

Luogo di soluzioni periodiche sono tutte le curve (p, γ) la cui equazione si ottiene scrivendo che l'equazione di risonanza è soddisfatta dal dato valore razionale di u_0. Esse corrono interamente nelle regioni di stabilità, con andamento analogo a quello delle curve di contorno.

11. Fra le soluzioni periodiche, rivestono particolare importanza quelle corrispondenti a valori interi di u_0 (periodo 2π), e quelle per cui u_0 è multiplo dispari di $\frac{1}{2}$ (periodo 4π). Le curve luogo sono, in questo secondo caso, i contorni delle regionti di instabilità.

Le funzioni soddisfacenti l'equazione per questi valori particolari dei parametri, sono le *autofunzioni* della equazione differenziale (1) o (6). Riferendosi alle espressioni per la $y'' = z$ (serie (A)) si hanno per le autofunzioni *semiperiodiche*, scrivendo $u_0 = n + \frac{1}{2}$ nelle espressioni generali, le due serie di Fourier:

$$K_{n+\frac{1}{2}} = (A_{-n} + A_{-n+1}) \cos \frac{x}{2} + (A_{-n+1} + A_{-n-2}) \cos \frac{3x}{2} + \cdots$$

$$\Sigma_{n+\frac{1}{2}} = (A_{-n} - A_{-n+1}) \sin \frac{x}{2} + (A_{-n+1} - A_{-n-2}) \sin \frac{3x}{2} + \cdots$$

Poichè sulle curve luogo si verifica rispettivamente una delle uguaglianze $v\left(\frac{1}{2}\right) = \pm 1/\gamma$, i valori delle successive v, cioè dei coefficienti A si deducono elementarmente, senza valutare alcuna frazione continua, se gli

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1946. Vedi Nota I di questi «Rendiconti», p. 1035.

autovalori p e γ sono noti. È però di immediata verifica il fatto che su ciascuna delle due curve, sussiste una delle uguaglianze generali

$$A_{-n+k} \pm A_{-n-k-1} = 0$$

per qualunque k, talchè una delle due serie si annulla identicamente. Lungo ognuna delle curve limite esiste perciò soltanto *una* autofunzione periodica: la seconda soluzione della equazione differenziale definirebbe *una funzione di seconda specie* (instabile).

La definizione delle autofunzioni corrispondenti ad $u_0 = n$ (periodo 2π) non è ugualmente lecita per sostituzione diretta di n ad u_0 nelle espressioni generali. È tuttavia possibile dimostrare che le due autofunzioni

$$K_n = A_{-n} + A_{-n+1} \cos x + A_{-n+2} \cos 2x + \cdots$$

$$\Sigma_n = \quad A_{-n+1} \sin x + A_{-n+2} \sin 2x + \cdots$$

soddisfano effettivamente la (6) (cioè il loro integrale secondo soddisfa la (1)), e *sussistono lungo la stessa curva* (p, γ).

Tutte le espressioni precedenti si modificano in espressioni valide per gli integrali y della (1) sostituendo i coefficienti A_n con i B_n.

12. Le autofunzioni (B) *non sono ortogonali*; tali sono invece le autofunzioni (A), cioè quelle scritte esplicitamente più sopra, nel senso che gli integrali:

$$\int K_r K_s \, dx \quad , \quad \int \Sigma_r \Sigma_s \, dx \quad , \quad \int K_r \Sigma_s \, dx$$

estesi ad un periodo comune (ad esempio fra i limiti 0 e 4π, che sono estremi di periodo per tutte le autofunzioni) sono nulli, se i rispettivi autovalori sono legati dalla $r_r^2 \gamma_r = r_s^2 \gamma_s$ $(s \neq r)$. La condizione è quella per cui si verifica la ortogonalità delle funzioni di Mathieu.

La constatazione dà ragione della precedente affermazione circa la maggiore importanza funzionale della equazione intera (6), nei confronti della originaria (1). La conclusione è ulteriormente confermata dalle considerazioni che seguono.

Forma generalizzata della equazione di risonanza. — 13. L'equazione di risonanza

$$\gamma^2 v(u) v(-u+1) = 1$$

esprime in modo assai compatto ed intelligibile la condizione che deve essere soddisfatta dall'esponente caratteristico. Essa ha tuttavia senso solo in quanto risultino convergenti le frazioni continue che definiscono la v, cioè solo per $2\gamma < 1$.

Anche in questo caso però, la equazione permette di definire le radici u_0 in modo numericamente conveniente soltanto quando esse siano reali, mentre

è praticamente inutilizzabile quando le radici siano complesse, cioè quando il punto (p, γ) appartenga ad una regione di instabilità.

La formulazione di una condizione di risonanza, che non cada in difetto per particolari valori dei parametri della equazione, riveste perciò notevole imporanza teorica.

Nella espressione delle ampiezze A, la funzione $v(u)$ figura sempre in termini della forma $w(u) = -\gamma v(u)$, che possono riguardarsi come i fattori elementari delle $A_n = \prod_1^n w(u+k)$. In base alle ricorrenti (8), le w soddisfano ovviamente la equazione alle differenze del primo ordine non lineare:

$$w(u+1) + \frac{1}{w(u)} + \frac{G(u)}{\gamma} = 0.$$

Se si pone ora $w(u) = V(u+1)/V(u)$, si trova immediatamente che la V deve soddisfare la equazione alle differenze *lineari* del secondo ordine [2]:

$$\gamma V(u+2) + G(u) V(u+1) + \gamma V(u) = 0 \tag{11}$$

ovvero:

$$\gamma u^2 V(u+2) + (u^2 - p^2) V(u+1) + \gamma u^2 V(u) = 0.$$

L'integrale generale della predetta equazione (che è di tipo *normale*, nel senso di Nørlund) è noto appena si siano definiti due integrali linearmente indipendenti. Ciò si sa fare in due modi diversi. Assumendo $V(u)$ come la *trasformata* di una funzione φ secondo la relazione integrale:

$$V(u) = \int t^{u-1} \varphi(t)\, dx$$

(ove l'integrale sia *definito* lungo un opportuno cammino nel piano complesso t), si trova che φ deve soddisfare una equazione differenziale del secondo ordine, di tipo fuchsiano. Le singolarità della equazione sono in $t = 0$ e $t = \infty$, oltre a due singolarità al finito nei punti P e Q per cui $t = \frac{-1 \mp \Delta}{2\gamma}$. In ciascuna di queste ultime due singolarità si sanno definire due determinazioni di φ, una regolare e una irregolare (logaritmica). Siano φ_1 e φ_2, rispettivamente, i due integrali irregolari intorno alle due singolarità P e Q.

Se ora si introduce, nell'integrale V, la determinazione φ_1, e si estende l'integrale al cammino chiuso partente da $t = 0$ e circondante la sola sin-

(2) Per le questioni inerenti alle equazioni alle differenze, cfr. N. E. NØRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Springer, Berlin. Le citazioni nel seguito si riferiscono alla edizione del 1924. I capitoli interessanti l'equazione attuale sono principalmente i X, XI, e XV.

golarità P, e in modo analogo si procede con la determinazione φ_2, e la singolarità Q, si ottengono due funzioni $V_1(u)$ e $V_2(u)$, soddisfacenti l'equazione alle differenze e linearmente indipendenti fra loro. Esse costituiscono il *primo sistema canonico di integrali* di (11) [3].

Procedendo analogamente su cammini partenti dalla singolarità all'infinito, e circondanti le singolarità come sopra, si definiscono due nuovi integrali indipendenti, $\bar{V}_1(u)$ e $\bar{V}_2(u)$, costituenti il *secondo sistema canonico* [4].

Uno qualunque dei due sistemi, ad esempio il primo, è sufficiente a definire ogni altra soluzione della (11), sotto forma di una combinazione lineare dei due integrali, con coefficienti periodici [5]. In particolare, i due integrali del secondo sistema (o i loro prolungamenti analitici) saranno esprimibili in termini di quelli del primo:

$$\bar{V}_1 = \pi_{11} V_1 + \pi_{12} V_2$$

$$\bar{V}_2 = \pi_{21} V_1 + \pi_{22} V_2 .$$

Se ora si trasforma l'equazione di risonanza $1/w(u) = w(-u+1)$ in termini di funzioni V, tenendo conto delle relazioni esistenti tra integrali canonici e frazioni continue [6], si trova che essa equivale semplicemente alla

$$\pi_{22} = 0$$

cioè: *i valori di u che possono essere esponenti caratteristici di una soluzione della data equazione,* (che cioè annullano il determinante del sistema lineare infinito), *sono quelli che annullano il coefficiente di un integrale canonico della equazione alle differenze, nella espressione del corrispondente integrale dell'altro sistema canonico.*

Si trova che il coefficiente π_{22} è una funzione periodica pari di u, avente la semplice forma $1 - \dfrac{k}{1 - \cos 2\pi u}$, con k costante, dipendente dai parametri della equazione differenziale. La equazione di risonanza assume allora la forma $1 - \cos 2\pi u = k$, e conserva pieno significato anche quando le radici u_0 siano complesse.

(3) V_1 e V_2 risultano formalmente espresse sotto forma di serie di fattoriali inversi (serie di facoltà), del tipo

$$a_0 + \frac{a_1}{u} + \frac{a_2}{u(u+1)} + \frac{a_3}{u(u+1)(u+2)} + \cdots$$

convergenti nel semipiano $\mathfrak{Re}(u) > 0$. [$\mathfrak{Re}(u)$ sta per 'parte reale di u'].

(4) $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$ risultano definite da serie di facoltà, convergenti per $\mathfrak{Re}(u) < 2$.

(5) Le 'costanti arbitrarie' di una equazione differenziale sono sostituite da 'funzioni periodiche arbitrarie' (con periodo uno), nel caso di una equazione alle differenze, in quanto quest'ultima lega fra loro valori della funzione incognita di argomenti equidifferenti, senza interessare i valori intermedî.

(6) Nørlund, cap. XV, p. 441 sgg.

Significato funzionale della equazione di risonanza. – 14. La via per cui si è giunti a scrivere l'equazione di risonanza nella forma compatta $\pi_{22} = 0$, è alquanto laboriosa; in quanto l'equazione alle differenze (11) è stata scritta attraverso la considerazione delle frazioni continue $v(u)$, introdotte a loro volta dalla considerazione del determinante del sistema lineare scritto fra i coefficienti dell'integrale della (1), assunto nella forma di una serie di Floquet. Per la stessa ragione, nulla autorizza ad estendere la validità della nuova forma oltre i limiti di validità della equazione in frazioni continue.

Tuttavia, la semplicità, non soltanto formale, della $\pi_{22} = 0$, lascia intuire un significato funzionale più profondo che possa non soltanto trascendere i limiti delle ipotesi in cui la relazione è stata dedotta, ma eventualmente investire proprietà generali delle equazioni a coefficienti periodici, di cui l'attuale verrebbe a costituire un caso particolare.

15. – Il legame fra equazione differenziale ed equazione alle differenze è effettivamente strettissimo. Se di un integrale della

$$\text{(6)} \qquad D^{-2}\zeta + r^2(1 + 2\gamma\cos x)\zeta = 0$$

si considera la *trasformata di Fourier* $V(u) = \int e^{\pm i(u-1)x}\zeta \cdot dx$, ove l'integrale sia definito lungo un cammino opportuno [7], applicando l'operatore alla equazione si trova che la $V(u)$ deve soddisfare una equazione alle differenze, che è appunto la (11). Al variare del doppio segno nell'esponente, si ottengono integrali appartenenti a due diversi sistemi canonici. È quindi evidente che la φ di Nørlund e la nostra ζ debbano essere in stretta relazione l'una con l'altra.

La φ soddisfa una equazione (risolvente differenziale secondo Nørlund), *asimmetrica* per quanto concerne la distribuzione delle singolarità. Ma è facile osservare che, posto $\varphi(t) = \frac{g(t)}{t}$, la g deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\text{(12)} \qquad t^2(\gamma t^2 + t + \gamma)g'' + t(3\gamma t^2 + t - \gamma)g' + (\gamma t^2 - p^2 t + \gamma)g = 0$$

che è *simmetrica* nel senso che non si altera scambiando t con $1/t$. *L'equazione non è che la* (6) *ove si scriva* g *in luogo di* ζ *e* t *in luogo di* e^{ix}: sappiamo perciò che di essa si possono scrivere due integrali indipendenti nelle forme rispettive $t^{u_0}\Omega(t)$ e $t^{-u_0}\Omega\left(\frac{1}{t}\right)$ ove Ω rappresenti una serie di Laurent convergente nella corona circolare fra le due circonferenze passanti per le

(7) Tale che, nell'integrazione per parti di $\int e^{\pm i(u-1)x} D^{-2}\zeta\, dx$ la parte finita si annulli.

due singolarità al finito $t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\gamma^2}}{2\gamma}$ (corrispondenti alle singolarità $2\gamma \cos x = -1$ della (6)).

Data la forma simmetrica della (12) è evidente che da ogni integrale $g(t)$ può dedursene un altro della forma $g(1/t)$. Così dall'integrale $g_1(t)$, avente singolarità in $t = P = \frac{-1-\sqrt{1-4\gamma^2}}{2\gamma}$ si può ottenere l'altro, $g_2(t)$, $\left(\text{con singolarità in } t = Q = \frac{-1+\sqrt{1-4\gamma^2}}{2\gamma}\right)$ scambiando t con $1/t$. Si constata allora che i quattro integrali canonici secondo Nørlund si riducono agli integrali

$$V_1 = \int_{(O,P)} t^{u-2} g_1(t)\, dt \quad ; \quad \overline{V}_1 = \int_{(\infty,P)} t^{u-2} g_1(t)\, dt = -\int_{(O,Q)} t^{-u} g_1\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$V_2 = \int_{(O,Q)} t^{u-2} g_1\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad ; \quad \overline{V}_2 = \int_{(\infty,Q)} t^{u-2} g_1\left(\frac{1}{t}\right) dt = -\int_{(O,P)} t^{-u} g_1(t)\, dt.$$

Il simbolo (O , P) (ad esempio) indica l'integrazione lungo il cammino chiuso partente da $t = 0$ e circondante la singolarità P.

16. Per la definizione degli integrali canonici è però lecito introdurre sotto il segno di integrazione, in luogo delle particolari funzioni $g_1(t)$ e $g_2(t)$ (definite come gli integrali irregolari della equazione differenziale costruiti intorno alle singolarità P e Q) *qualunque* funzione soddisfacente la equazione differenziale (12). Intorno a ciascuna delle singolarità ogni integrale della (12) si esprime infatti come combinazione lineare a coefficienti costanti dell'integrale irregolare g_1 o g_2, e del secondo integrale dell'equazione intorno alla stessa singolarità: integrale che è *regolare* e come tale non dà contributo nella V [8].

I quattro integrali canonici sono perciò semplicemente proporzionali (secondo fattori costanti) agli integrali di Laplace $\int t^{u-2} f(t)\, dt$ *di una stessa soluzione* f della (12), definiti lungo i diversi cammini (O , P), (O , Q); (∞ , P), (∞ , Q). In particolare possiamo assumere per f uno di quegli integrali che, nella corona circolare sopra considerata, sono definiti nella forma $t^{+u_0} L(t)$ ove $L(t)$ rappresenta per definizione una funzione *univoca* di t (cioè una funzione periodica di x).

Se u è uno degli esponenti caratteristici, cioè è congruo con u_0, il prodotto $t^{u-2} f(t)$ è allora funzione univoca di t avente in P e Q delle

(8) Nel caso particolare $2\gamma = 1$, le due singolarità confluiscono in $t = -1$; il ragionamento deve essere leggermente modificato di conseguenza.

singolarità isolate. Gli integrali lungo i cammini (O, P) e (∞, Q) ad esempio (che si possono deformare in due circonferenze concentriche contenute nella corona circolare in cui la funzione integranda è univoca) sono allora semplicemente uguali in valore assoluto.

Ciò significa che, quando u sia congrua con u_0, cioè sia uno degli esponenti caratteristici, gli integrali V_1 e V_2 sono proporzionali fra loro. Data l'indipendenza lineare di V_1 da V_2 questo porta di necessità alla condizione $\pi_{22} = 0$.

17. Ricondotti gli integrali canonici a integrali curvilinei *di una stessa funzione*, la formulazione delle relazioni lineari esistenti fra essi, in particolare della espressione esplicita del cofficiente π_{22}, è una questione ordinaria di analisi. Benchè, nel caso in cui le singolarità della equazione differenziale siano in numero relativamente elevato, la formulazione delle relazioni lineari sia di una certa complicazione, il problema è perfettamente definito, e non dà luogo a difficoltà di natura particolare. Nel caso della equazione (12) il carattere involutorio delle relazioni esistenti fra le singole coppie di integrali indipendenti vale a semplificare alquanto il problema accennato.

È evidente che il ragionamento attuale si può applicare, con modificazioni più o meno importanti, a qualunque equazione differenziale a coefficienti periodici, e conduce alla formulazione di una condizione per gli esponenti caratteristici, equivalente alla equazione determinantica di Hill ma eventualmente più conveniente di questa [9].

Matematica. — *Studi sopra le algebre senza base finita* [1]. Nota di I. Barsotti, presentata [2] dal Corrisp. E. Bompiani.

Sono in corso di pubblicazione alcuni miei lavori sopra le algebre senza base finita; dò qui alcune indicazioni sopra i risultati raggiunti:

1° *Algebre senza base finita.* I. — Studio in questo lavoro i sistemi lineari, senza nessuna assunzione circa la finitezza o l'esistenza di una base. Dopo la definizione, e la dimostrazione dell'indipendenza e della compatibilità dei postulati, studio la possibilità di esistenza del complementare di ogni sub-sistema di un dato sistema, ed i legami fra tale possibilità e

(9) Per le questioni inerenti alla equazione di Hill in generale confronta: M. J. O. Strutt, '*Lamésche-Mathieusche und verwandte Funktionen*'. Berlin 1932; E. T. Whittaker – G. N. Watson, '*Modern Analysis*. Cambridge 1935, cap. XIX; G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Bologna 1941, cap. VI. Per le questioni inerenti alle equazioni alle differenze, cfr. la citata opera di Nørlund.

(1) Lavori eseguiti nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

l'esistenza di una base. Dimostro infine che sia l'esistenza di una base, come la possibilità sopra descritta sono sempre assicurate qualora si ammetta il postulato della scelta.

2° *Algebre senza base finita.* II. — In questo lavoro definisco e studio le algebre senza base finita sopra un corpo qualsiasi. Passo in rassegna tutti i teoremi classici della teoria delle algebre con base finita, selezionando quelli che continuano ad essere validi, e modificando gli altri. Si rende necessaria la definizione, accanto ai divisori dello zero ed alle algebre primitive, degli « elementi singolari » e delle « algebre divisorie ». Dò a tal proposito esempi di algebre primitive ma non divisorie, e primitive ma senza modulo. Resta inalterata la teoria delle congruenze rispetto ad una sub–algebra invariante, e quella della somma diretta, mentre viene notevolmente complicata, nelle dimostrazioni ma non nei risultati finali, quella del prodotto diretto. Per quanto riguarda la teoria degli automoduli, pur essendo verificata la decomposizione di Peirce, si ha anche l'esistenza di algebre non pseudonulle e prive di automoduli. Questo punto viene però meglio precisato nel lavoro 4° ove tratto delle « algebre algebriche ». Anche i teoremi fondamentali sopra le algebre normali continuano ad essere validi. Nelle algebre riducibili è ancora verificato il criterio di Scheffers. Cambia invece la teoria delle algebre semi–semplici, e non può ancora essere dato un analago del teorema di Wedderburn sulla decomposizione delle algebre semplici (tale analogo verrà dato in 4°).

3° *Algebre senza base finita.* III. — Parte prima: algebre regolari. – Definisco come algebra regolare l'algebra delle trasformazioni lineari sopra un sistema. Dopo qualche teorema di esistenza, dò le condizioni cui deve soddisfare una trasformazione lineare per essere un automodulo, o un divisore dello zero, o per essere dotata di inverso, e studio i sistemi di Peirce di un automodulo di un'algebra regolare. Studio poi gli autoisomorfismi nelle algebre regolari, e dimostro la equivalenza degli automoduli primitivi, e dei primi sistemi di Peirce legati ad automoduli equivalenti. Dimostro che un'algebra regolare non è semplice, se non ha base finita, ma che contiene una sub–algebra invariante semplice, costituita da tutte le trasformazioni di rango con base finita. Dimostro che ogni algebra è sub–algebra di un'algebra regolare, e che il commutatore in questa di quell'algebra è un'algebra reciproca alla data. Termino con un accenno alle matrici infinite.

Parte seconda: algebre booleane. – Dopo aver introdotto la nozione di autosimbolo, di autovalore e di atomo (quest'ultima analoga alla definizione dello Stone), dò una definizione di algebra booleana sopra un corpo qualsiasi, che in un corpo di caratteristica 2 è una estensione del noto concetto di anello booleano, e che in altri corpi ha attinenze con le algebre di funzioni. Dò poi un teorema strutturale per algebre non booleane, che vengono decomposte in un'algebra booleana e in una priva di atomi.

I lavori 1°, 2°, 3° fanno parte della mia tesi di laurea presentata all'Università di Pisa nel 1942. Il successivo lavoro 4° ne è una continuazione, portata a termine nell'aprile 1943.

4° *Contributo allo studio delle algebre senza base finita.* — Chiamo « semiregolare » un'algebra che sia l'insieme delle trasformazioni lineari con rango a base finita di un sistema lineare e di cui in 3° ho già dimostrato la semplicità. Dimostro, con altro metodo, la semplicità del prodotto di un'algebra semiregolare per una divisoria, del prodotto diretto di due algebre semiregolari, e di quello di un'algebra regolare a base finita per una semplice. Dò un criterio di finitezza della base di un'algebra semplice. Introduco quindi gli elementi algebrici e trascendenti, e le algebre algebriche e trascendenti, e dò alcuni teoremi preliminari. Mostro poi il legame fra l'algebricità di un elemento, la sua singolarità e l'essere, o no, un divisore dello zero, e ne deduco un teorema che lega l'esistenza di automoduli con quella di elementi algebrici non pseudonulli. Trovo anche vari legami fra la primitività di un'algebra, la sua divisorietà, l'algebricità e l'esistenza di automoduli. Dò inoltre un teorema strutturale per le algebre a modulo primitivo. Dimostro infine un teorema strutturale per le algebre semplici algebriche il cui modulo è somma di un numero finito di automoduli primitivi, che è l'analogo del teorema di Wedderburn.

I quattro lavori sopra descritti non hanno potuto fino ad ora essere pubblicati per le note difficoltà dipendenti dallo stato di guerra.

Meccanica. — *Il getto piano turbolento studiato con la teoria del trasporto.* Nota di G. Moretti, presentata [1] dal Corrisp. M. Panetti.

Che la teoria del trasporto turbolento [2] presti il fianco a molte critiche, è noto ed ho cercato di mostrare ancora una volta in uno studio recente [3]. In esso, prendendo particolarmente in esame la turbolenza libera bidimensionale, sono giunto alle seguenti conclusioni: Essendo possibile ridurre lo studio del fenomeno a quello dell'unica equazione:

$$(1) \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

(dove U, V sono le componenti della velocità media del fluido, u', v' le componenti della oscillazione turbolenta di velocità, ed x la direzione prin-

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Prandtl, *The mechanics of viscous fluids*, §§ 21 segg. (in *Aerodynamic Theory* di Durand, vol. III, Berlin 1935).

(3) *La teoria del trasporto turbolento.* « Aerotecnica », 1946.

cipale del moto medio), si tratta di definire l'espressione $\overline{u'v'}$ in funzione del campo di moto medio. Tale definizione viene compiuta in modi diversi dai vari Autori, in base a differenti teorie di trasporto, ognuna delle quali contiene elementi arbitrari. D'altra parte, ognuna è sostenibile in base ad un principio universalmente accettato, che cioè una teoria possa essere attendibile quando dia, in casi concreti, risultati in buon accordo con l'esperienza. Ora avviene che, nei casi finora studiati di turbolenza libera bidimensionale, sia la teoria di Prandtl (4) che quella di Taylor (5) e quella di Mattioli (6) soddisfano quasi ugualmente bene a quell'esigenza. È dunque lecito concludere che, non potendo essere vere tutte le teorie, esse debbano contenere tutte una parte essenzialmente esatta ed una parte la cui arbitrarietà non è tale da pregiudicare il risultato dei calcoli. Senza ricorrere a teorie di trasporto si può dare al termine $\overline{u'v'}$ la forma:

$$\overline{u'v'} = \frac{\partial U}{\partial y} f\left(U, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \cdots\right). \tag{2}$$

La funzione f è appunto quella che le varie teorie di trasporto cercano di definire, riducendola ora ad una semplice costante (Mattioli), ora alla sola $\frac{\partial U}{\partial y}$ (Prandtl, Taylor).

Mi propongo ora di mostrare in un caso concreto come la funzione f possa venir approssimata *a posteriori* in base all'esame di risultati sperimentali; non appare dunque necessario costruire una teoria per ottenere un risultato raggiungibile con una formula assai generale, quale la (2).

Come ho accennato nella Nota citata, si può intanto sostituire alla f un suo sviluppo in serie:

$$f = a_1 U^* + a_2 U + a_3^2 \frac{\partial U}{\partial y} + a_4^3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \cdots$$

e considerarne solo i primi termini. I coefficienti a_i sono quelli da determinare empiricamente. È ovvio che risultati molto diversi si ottengano a seconda del numero di termini che si considera; non altrimenti avviene quando si calcolino i coefficienti di un polinomio che voglia rappresentare approssimativamente una certa funzione, a seconda del grado del polinomio stesso. Ma dal punto di vista della critica alla teoria del trasporto, è sufficiente mostrare che il calcolo sia possibile, senza pretendere di trovare, per via puramente empirica, la *vera* forma della funzione f.

(4) PRANDTL, *Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*. «ZS. f. ang. Math. u. Mech.», 5 (1925), p. 136.

(5) TAYLOR, *The transport of vorticity and heath through fluids in turbulent motion*. «Proc. R. Soc. London», (A) *135* (1932), p. 685.

(6) MATTIOLI, *Getti piani turbolenti*. «Atti R. Ist. Veneto», *94* (1935), p. 607, e: *Teoria dinamica dei regimi fluidi turbolenti*, Padova 1937, p. 250.

Il fenomeno preso in esame nel presente lavoro è quello del getto piano turbolento. Esso si ottiene lanciando un fluido a forte velocità entro fluido in quiete, attraverso una fenditura rettangolare di dimensioni trasversali trascurabili rispetto a quelle longitudinali. Il fenomeno è stato studiato sperimentalmente da Förthmann [7] e da Reichardt [8], teoricamente da Tollmien [9] che fa uso della teoria del trasporto di Prandtl, da Mattioli [6] con la propria teoria, da Okaya e Hasegawa [10] che usano la teoria di Prandtl in una forma più perfezionata. La stessa trattazione di Mattioli si trova ripetuta in una Nota di Görtler [11].

In base a considerazioni di affinità fra i profili della U (cioè della componente principale della velocità nella direzione dell'asse del getto) tracciati per varie sezioni normali, si conviene universalmente di accettare in prima approssimazione una funzione di corrente della forma:

$$\varphi = U_0 \sqrt{sx}\, F(\eta)$$

dove U_0 ed s sono costanti, aventi rispettivamente le dimensioni di una velocità e di una lunghezza, ed $\eta = \frac{y}{x}$. Si ha allora:

$$(3) \qquad \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} = -\frac{U_0^2 s}{2} x^{-2} (FF')'$$

indicando con apici le derivate rapporto ad η.

D'altra parte, secondo la (2) semplificata, si ha:

$$(4) \qquad \overline{u'v'} = U_0^2 s x^{-1} F'' (\varkappa_1 + \varkappa_2 F' + \varkappa_3 F'' + \varkappa_4 F''' + \cdots)$$

avendo posto:

$$a_1 U^* = \varkappa_1 U_0 \sqrt{sx} \quad , \quad a_2 = \varkappa_2 x \quad , \quad a_3^2 = \varkappa_3 x^2 \quad , \quad a_4^3 = \varkappa_4 x^3, \cdots$$

I coefficienti $\varkappa_i$ sono dunque adimensionali.

Sostituendo le espressioni ora trovate nella (1) e semplificando, possiamo eliminare la x e ridurre lo studio a quello dell'unica equazione adimensionale nella variabile η:

$$(5) \qquad FF' = 2 (\varkappa_1 F'' + \varkappa_2 F' F'' + \varkappa_3 F''^2 + \varkappa_4 F'' F''' + \cdots).$$

(7) Förthmann, *Über turbulente Strahlausbreitung*. «Ing. Archiv», *5* (1934), p. 42[illegible].

(8) Reichardt, *Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz*. «VDI–Forschungsheft», *414*, (1942).

(9) Tollmien, *Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge*. «ZS. f. ang. Math. u. Mech.», *6* (1926), p. 468.

(10) Okaya e Hasegawa, *On the velocity distribution in plane jet*. «Proc. Physico–Math. Soc. of Japan», III, *22* (1940), p. 771.

(11) Görtler, *Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz*. «ZS. f. ang. Math. u. Mech.», *22* (1942), p. 244.

In base alla teoria di Prandtl si ottiene invece:

$$FF' = 2\varkappa_3 F''^2 \tag{6}$$

ed in base a quella di Mattioli:

$$FF' = 2\varkappa_1 F'. \tag{7}$$

Usando la seconda forma della Mischungsweg di Prandtl e semplificando il risultato [10], si ha infine:

$$FF' = 2\varkappa_4 F'' F'''. \tag{8}$$

Fra la formula attuale e quelle già proposte non sussiste dunque altra differenza se non che questa può compendiarle tutte, in quanto ognuna di quelle si ottiene da questa lasciando diverso da zero uno solo dei coefficienti $\varkappa_i$. Ma è vantaggio essenziale della (5) l'esser stata ottenuta senza far ricorso a teorie di trasporto; delle altre formule essa mette in luce la genesi comune ed il lato arbitrario.

Quanto alla determinazione dei coefficienti $\varkappa_i$ nelle formule su riportate, si tenga presente che questi sono comunque sempre costanti universali per il fenomeno del getto turbolento. È noto infatti che l'angolo di apertura del getto è universale (beninteso negli stessi limiti d'approssimazione accettati per giungere alle formule su scritte [nota [2], p. 164]). In altre parole, dicendo larghezza del getto b per una data ascissa x il quadruplo dell'ordinata y^* per cui è $U = \frac{1}{2} U_{max}$, si ha $\frac{b}{x} = \text{cost.}$, cioè $\frac{y^*}{x} = \text{cost.} = \alpha$ e dagli esperimenti di Förthmann si deduce $\alpha = 0{,}105$. D'altra parte anche U_{max} dipende da x in modo molto semplice; dagli esperimenti di Förthmann si ha ancora $U_{max} = \frac{13800}{\sqrt{x}}$.

Pertanto, se vogliamo rappresentare la distribuzione della velocità media U con una curva universale, possiamo, come si fa di solito, indicare sulle ordinate i valori di $F' = U/U_{max}$ (che vanno quindi da 1, nel centro del getto, a zero all'esterno; cfr. fig. 1) e sulle ascisse i valori di $\zeta = \frac{\eta}{\eta^*} = \frac{y}{y^*}$. La curva passa necessariamente per il punto $(1 ; 0{,}5)$. La velocità U in un punto (x , y) di un getto qualunque (cioè in un punto situato a distanza x dalla fenditura e a distanza y dall'asse del getto) si trova cercando nel grafico il valore $\zeta = \frac{y}{0{,}105\, x}$ e moltiplicando il valore corrispondente di U/U_{max} per $\frac{13800}{\sqrt{x}}$. Per avere i valori delle costanti $\varkappa_i$ tali che dalle curve teoriche si possano dedurre, con lo stesso processo e usando gli stessi parametri numerici, le velocità U nei vari punti di un getto, basta deter-

minarle in modo che le curve teoriche, portate su un diagramma (ζ, F'), passino per i punti (0 ; 1) e (1 ; 0,5).

Dalle misure di Förthmann possiamo dedurre la distribuzione della velocità media U, come indicata in fig. 1.

Sfortunatamente, la curva ivi tracciata come valor medio dei risultati empirici di Förthmann non può aver pretese di precisione eccessiva. Infatti i dati sono stati necessariamente desunti dai soli grafici allegati alla sua Nota citata (7); un errore di valutazione, anche piccolo, compiuto nelle ridu-

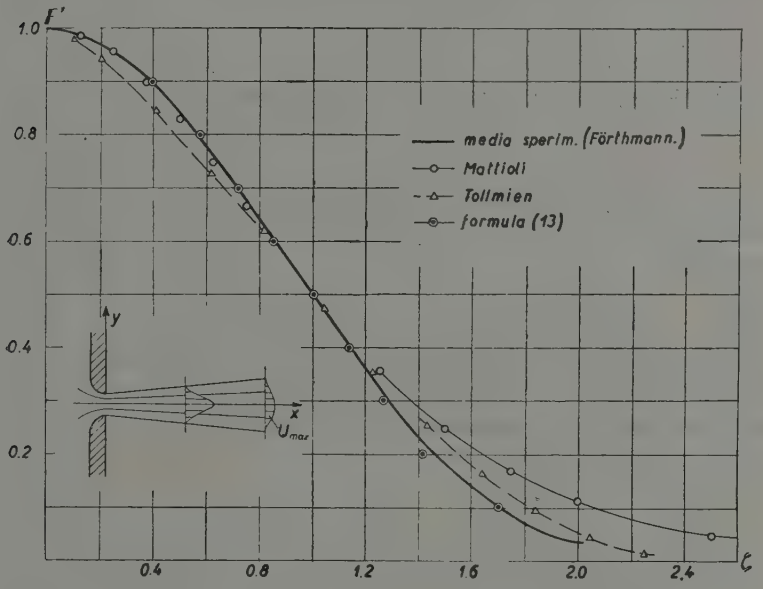


Fig. 1.

zioni delle ascisse porta a scostamenti sensibili per valori delle ascisse abbastanza grandi, sicchè la parte di curva relativa alla zona esterna del getto non è tanto sicura come quella relativa alla zona centrale. Altrettanto dicasi per gli errori di valutazione dei vari U_{max} necessari per ridurre ad 1 l'ordinata corrispondente a $\zeta = 0$; gli errori sono tanto più grandi quanto più U è piccolo. D'altra parte anche le misure sperimentali sono affette da errori in misura altrettanto grande; anche qui l'incertezza cresce verso l'esterno del getto. Non è quindi il caso di esagerare nella ricerca di una coincidenza perfetta tra curva teorica e curva sperimentale.

Tuttavia l'approssimazione presumibilmente ottenuta con la curva empirica della fig. 1 mi sembra sufficiente per poter osservare che la curva

di Tollmien-Prandtl se ne scosta sensibilmente al centro e all'esterno [12], mentre quella di Mattioli se ne scosta fortemente all'esterno ma riproduce bene i dati sperimentali al centro del getto [13]. Poichè, come si vede dal confronto delle (5) e (7), la formula di Mattioli non è se non la nostra formula generale, arrestata al primo termine dello svilppo in serie, mi pare plausibile cercare di migliorare l'approssimazione che con quella si ottenne, tenendo conto di altri termini dello sviluppo stesso.

Non è necessario andare molto in là; basta nella (5) considerare i primi due termini. Si ha infatti l'equazione:

$$FF' = 2(\varkappa_1 F'' + \varkappa_2 F' F''). \tag{9}$$

Ora, essendo $\frac{U}{U_{max}} = F'$, le condizioni iniziali sono:

$$F = 0 \quad ; \quad F' = 1 \quad \text{per } \eta = 0$$

(il getto è simmetrico, quindi F' deve essere pari ed F dispari, da cui il valore di F per η nullo). Tenendo conto di queste, la (9) si integra subito in:

$$-F^2 + 2\varkappa_2 F'^2 + 4\varkappa_1 F' - 4\varkappa_1 - 2\varkappa_2 = 0. \tag{10}$$

Vale a dire: Ammessa vera la (9) come approssimazione della (5), la relazione fra F ed F' è rappresentata geometricamente da una conica. La natura della curva non cambia anche se in luogo della variabile η si introduce la variabile $\zeta = \frac{\eta}{\eta^*}$.

(12) Per far passare la curva di TOLLMIEN per il punto (1 ; 0,5), ai valori di $\eta / \sqrt[3]{2c^2}$ da lui dati nella Nota citata sono stati sostituiti i valori di η/η^*, con $\eta^* = 0{,}98 \sqrt[3]{2c^2}$.

(13) Il MATTIOLI cerca di spiegare il divario fra la sua curva teorica e quella sperimentale con due ordini di argomentazioni. Nella Nota sostiene che il divario non è dovuto a difetto di teoria ma al fatto che il campo di fluido in quiete entro il quale è lanciato il getto negli esperimenti di FÖRTHMANN non è indefinito e ne consegue una perturbazione rispetto all'andamento ideale del fenomeno. Ora ciò non è completamente convincente, data la vastità dell'ambiente nel quale gli esperimenti sono stati fatti rispetto alla semilarghezza del getto (15 cm. al massimo). Se una parete dell'ambiente provocasse sensibili scostamenti da una curva ideale, si dovrebbe notare un divario sensibile fra i risultati nella parte destra e in quella sinistra del getto, in quanto – come appare dalla fig. 1 del citato articolo di FÖRTHMANN – l'esperimento è stato eseguito a distanze notevolmente differenti dalle due pareti del laboratorio parallele all'asse del getto; ciò non risulta invece dal grafico sperimentale.

Nel libro, MATTIOLI sostiene che il divario possa esser dovuto al fatto che la parete da cui esce il getto non è indefinita. Ma non sembra che una parete indefinita possa portare ad un aumento della velocità all'esterno del getto; chè anzi, proprio partendo da tale ipotesi, REICHARDT (8) mostra come ai margini del getto si debba riscontrare addirittura una velocità negativa.

Vediamo allora se la relazione empirica fra $\frac{U}{U_{max}}$ e il suo integrale sia approssimabile con un arco di conica.

L'integrazione della curva della fig. 1 ci dà:

$$\int F' \, d\zeta = \int F \frac{d\zeta}{d\eta} \, d\eta = \frac{F}{\eta^*}.$$

Conviene quindi tracciare la curva fra F' ed $\frac{F}{\eta^*}$; i valori numerici corrispondenti sono indicati nella Tabella I e la curva nella fig. 2.

TABELLA I.

ζ	$F' = \frac{U}{U_{max}}$	$\frac{F}{\eta^*}$
0	1.000	0.000
0.2	0.970	0.197
0.4	0.890	0.384
0.6	0.775	0.551
0.8	0.640	0.693
1	0.500	0.802
1.2	0.365	0.893
1.4	0.240	0.954
1.6	0.140	0.991
1.8	0.070	1.011
2	0.030	1.020

Nella formula (7) di Mattioli è $x_2 \equiv 0$, sicchè la (10) diventa:

$$F^2 = 4 x_1 (F' - 1), \tag{11}$$

equazione di una parabola. Integrando la (11) si deduce:

$$x_1 = -\frac{\eta^{*2}}{(1{,}7627)^2} = -0{,}322\,\eta^{*2}$$

e, sostituendo nella (11):

$$\left(\frac{F}{\eta^*}\right)^2 = 1{,}288\,(1 - F'). \tag{12}$$

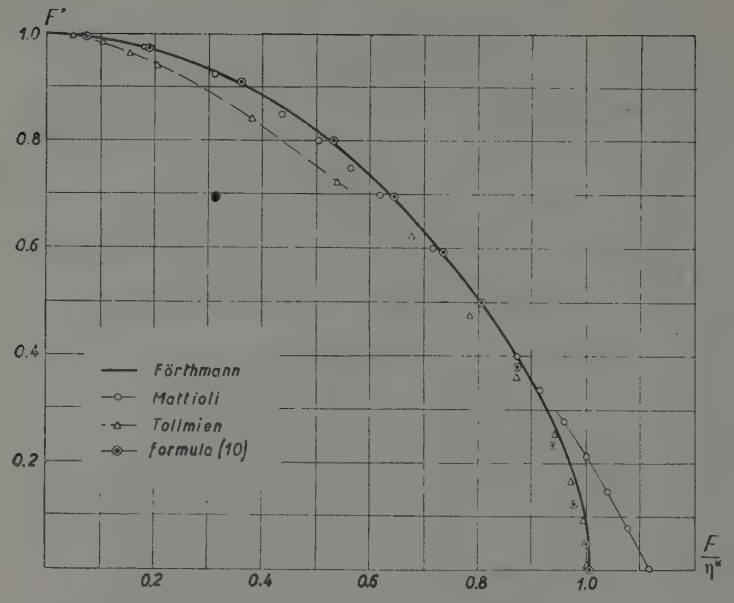


Fig. 2.

La parabola (12) è indicata per punti nella fig. 2. L'accordo con la curva sperimentale è ottimo finchè $F' \geqq 0{,}5$; ovviamente le due curve differiscono per piccoli valori di F'.

L'accordo fra il calcolo e l'esperienza può essere migliorato sostituendo alla parabola (12) l'ellisse (10). Si nota subito che neppure la (10) può dare un risultato completamente soddisfacente, in quanto la curva sperimentale della fig. 2 è normale ad entrambi gli assi coordinati nei punti d'intersezione. Infatti $\frac{dF'}{dF} = \frac{dF'}{d\eta}\frac{d\eta}{dF} = \frac{F''}{F'}$ tende ad ∞ quando F' tende a zero. Se dunque la curva ellittica (10) fosse una rappresentazione analitica affatto aderente ai risultati empirici, il suo centro dovrebbe anzitutto stare nell'origine, e se ne dedurrebbe $x_1 = 0$, cioè sparirebbe il primo termine della (9); ma ciò cambierebbe totalmente la natura dell'equazione. Neppure la (9) è pertanto l'equazione esatta del problema del getto; ma in prima approssimazione può essere ritenuta molto più soddisfacente di quella di Mattioli.

Imponiamo infatti alla (10) di passare per i punti (0,802 ; 0,5) e (1,02 ; 0). Otteniamo per x_1 e x_2 rispettivamente i valori:

$$x_1 = -0{,}13\,\eta^{*2} \quad ; \quad x_2 = -0{,}25\,\eta^{*2}.$$

L'ellisse, che ha centro nel punto $(0\,;-0{,}52)$ e semiasse minore uguale a 1,075, è disegnata per punti in fig. 2 e risulta pressochè sovrapposta alla curva sperimentale.

Ponendo, per semplificare i calcoli, $x_2 = -0{,}26\,\eta^{*2}$, si ha dalla (10), con passaggi affatto elementari:

$$\zeta = \sqrt{0{,}52}\left[\pi - 2\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right] \tag{13}$$

essendo:

$$t^2 = \frac{2+F'}{1-F'}\,.$$

I corrispondenti valori di F′ e ζ sono indicati in Tabella II e in fig. 1. L'accordo con i risultati sperimentali appare più soddisfacente che con la formula di Mattioli.

Tabella II.

ζ	F′
0.00	1
0.40	0.9
0.58	0.8
0.72	0.7
0.85	0.6
1.00	0.5
1.13	0.4
1.26	0.3
1.41	0.2
1.70	0.1

Per completezza, nella fig. 2 sono indicati anche i valori di F′ in funzione di $\frac{F}{\eta^*}$ seguendo la formula di Prandtl e tratti dalla tabella di p. 473 della citata Nota di Tollmien (in accordo con quanto detto alla nota [12], anche i valori della terza colonna della Tabella devono essere divisi per 0,98). La relazione fra F′ ed F è di natura diversa da quelle precedentemente studiate; si ha infatti dalla (6):

$$F' = \left[1 - \left(\frac{F}{\eta^*}\right)^{3/2}\right]^{2/3}.$$

Astronomia (Astrofisica). — *La protuberanza eruttiva del 24 agosto 1946* [1]. Nota di M. Girolamo Fracastoro, presentata [2] dal Socio G. Abetti.

La mattina del 24 agosto 1946 veniva osservata al bordo ovest del Sole dallo scrivente, durante il corso regolare delle osservazioni all'equatoriale di Amici munito di spettroscopio Zeiss, una protuberanza notevolissima per la sua altezza, anche se di intensità piuttosto debole, che ne rendeva faticosa l'osservazione. Essa andava spezzandosi verso l'alto in numerose masse staccate.

La base era all'angolo di posizione di 230°, corrispondente ad una latitudine di 59° Sud. Le misure richiedevano una ventina di secondi ciascuna, per la necessità di far compiere diversi giri alla vite micrometrica che sposta la fenditura dello spettroscopio in senso radiale, fuori dell'asse ottico dello strumento. È stato necessario quindi di tener conto dell'errore di guida dello strumento, quel giorno abbastanza rilevante. All'angolo di posizione della protuberanza, in 20 secondi, lo spostamento radiale risultava di 0,8 mm. Di conseguenza le misure richiedevano una correzione in più se fatte dal basso verso l'alto della protuberanza, e viceversa. Nei calcoli si è fatto l'ipotesi che la durata di ogni misura fosse di un secondo ogni millimetro di altezza della protuberanza, cioè ogni giro del tamburo.

Nella Tabella riportiamo i dati numerici ottenuti, tenendo conto che 1 mm di spostamento della fenditura corrisponde sul cielo ad un angolo di 39″ e quindi a 28.500 km di altezza sul bordo solare ($R_o = 695.000$ km $= 950''{,}66$).

Nei giorni precedenti, fino al 20 agosto, si era osservata una protuberanza vivace, all'incirca allo stesso angolo di posizione, alta circa 26.000 km.

Per quel che riguarda le osservazioni visuali, questa protuberanza è la più alta osservata ad Arcetri, raggiungendo un'altezza quasi doppia di quella del 18 aprile 1941 (351.000 km). Essa supera i due terzi dell'altezza osservata fotograficamente con lo spettroeliografo della torre solare di Arcetri, il 25 dicembre 1938.

Questo risultato è dovuto anche alla limpidezza del cielo, che permise di seguire i deboli noduli di questa protuberanza.

(1) Lavoro eseguito nell'Osservatorio astrofisico di Arcetri-Firenze.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

La velocità di innalzamento risulta, fino alle $9^h\,06^m$ di circa 100 km/sec; dalle $9^h\,08^m$ alle $9^h\,21^m$ di circa 210 km/sec. Alle $9^h\,31^m$ essa era completamente sparita.

TABELLA.

Agosto 24	altezza dal basso	altezza dall'alto	correz.	altezza in km
$8^h\,36^m$ T. U.	10.1	...	+ 0.6	305.000
39	...	12.1	— 0.6	328.000
42	11.5	...	+ 0.6	345.000
44	....	12.8	— 0.6	348.000
la massa gassosa si è del tutto staccata dalla base.				
47	12.9	...	+ 0.6	385.000
57	14.2	...	+ 0.7	425.000
9 01	...	16.2	— 0.7	442.000
04	16.4	...	+ 0.7	487.000
06	...	18.0	— 0.8	490.000
il nodulo più elevato è estremamente debole e non sarà più osservato.				
08	15.5	...	+ 0.7	462.000
tutta la protuberanza è diventata debolissima.				
11	17.3	...	+ 0.8	516.000
16	19.2	...	+ 0.8	570.000
19	20.1	...	+ 0.8	595.000
21	...	23.0	— 0.8	633.000
si misura l'altezza di un nodulo debolissimo staccato.				

Si aggiunge per informazione, la notizia della fugace comparsa, il 28 settembre 1946 e il giorno successivo di un piccolo gruppo di macchie alla latitudine veramente eccezionale (specialmente considerata la fase del ciclo undecennale di attività) di 41° sud. Alle $8^h\,49^m$ T. U. il gruppo era costituito di due piccole macchie sullo stesso parallelo solare; poche ore dopo la seguente si era sdoppiata ed era apparsa una piccola macchia fra i due elementi.

Il giorno successivo il gruppo era ancora visibile in prossimità del meridiano centrale del Sole. Il 30 settembre invece era sparito.

Elettrochimica. — *Nuove esperienze nel trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. Sistemi Rame–Stagno, Rame-Piombo, Rame–Cadmio* [1]. Nota [2] di G. Bianchi, presentata dal Corrisp. O. Scarpa.

1. Nella Nota precedente [3] ho comunicato i risultati di esperienze sul trasporto elettrico di ioni nel sistema Rame solido-Zinco liquido. Operando in modo simile ho esteso la ricerca ai sistemi formati con cilindretti di Rame solido in contatto con i metalli: *Stagno*, *Piombo*, *Cadmio*, allo stato liquido. Nel medesimo crogiolo contenente il metallo allo stato liquido ho perciò immersi, per ogni sistema, cinque cilindretti uguali di Rame fasciati lateralmente con amianto di cui due sono collegati rispettivamente al polo positivo e al negativo di una dinamo, facendoli così percorrere per un dato tempo da una corrente continua, mentre due altri sono fatti percorrere da corrente alternata di uguale intensità efficace: il quinto è pure immerso nel bagno ma senza farlo percorrere dalla corrente, in modo da costituire un elemento di paragone. Il contatto con il bagno liquido avviene quindi soltanto con la superficie inferiore di ogni cilindretto, la quale è ben spianata. Per ognuno dei metalli sopra elencati si è eseguita una serie di esperienze mantenendo costante l'intensità della corrente e la durata [4] e facendo variare la temperatura del bagno. I risultati ottenuti sono raccolti nelle Tabelle I, II, III. I diagrammi rappresentano i sopraripportati risultati per lo Stagno (fig. 1) e il Piombo (fig. 2); per il Cadmio (fig. 3) i punti presentano una dispersione che non ha permesso di individuare con esattezza la posizione reciproca delle curve corrispondenti all'elettrodo positivo e a quello negativo [5]; ciò non pertanto si può asserire che l'andamento generale dei fenomeni (salvo la eventuale inesistenza della differenza fra le corrosioni provocate con il Cadmio negli elettrodi anodici e catodici) corrisponde a quello già trovato per lo Zinco e confermato per lo Stagno e il Piombo.

Anche l'aspetto macrografico delle estremità corrose dei cilindretti di Rame immersi nello Stagno e nel Piombo è del tipo trovato con lo Zinco

(1) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Elettrochimica del Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1946.

(3) «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, I, 786 (1946).

(4) Per il Piombo ho dovuto diminuire da 60 a 8 minuti la durata delle prove eseguite alle temperature maggiori: le curve della fig. 2 sono state tracciate riportando a 60 minuti la durata di tutte le prove applicando la legge di proporzionalità tra accorciamenti e durata già stabilita (come ordine di grandezza) per lo Zinco.

(5) In fig. 3 è stata tracciata un'unica curva per l'elettrodo positivo e quello negativo.

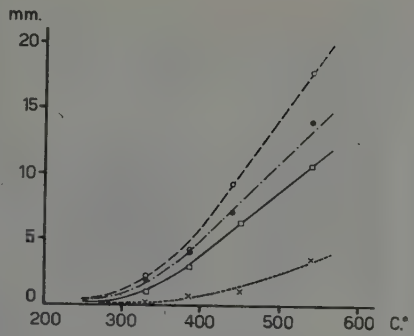


Fig. 1. – Sistema Rame–Stagno.

positivo
negativo
alternata
senza corrente.

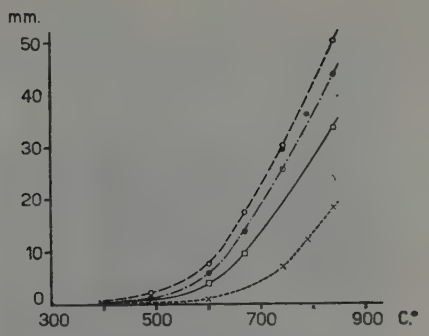


Fig. 2. – Sistema Rame–Piombo.

positivo
negativo
alternata
senza corrente.

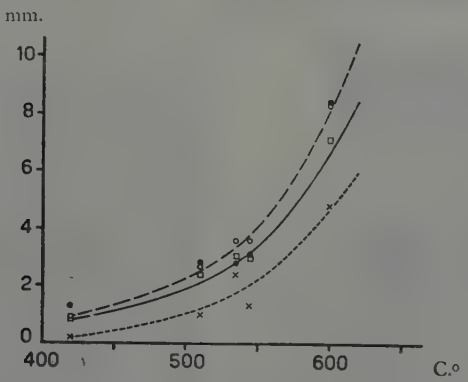


Fig. 3. – Sistema Rame–Cadmio.

continua
alternata
senza corrente.

mentre l'esame microscopico delle estremità dei cilindretti di Rame immersi nello Stagno non mi ha permesso di stabilire una differenza di struttura tra i vari campioni percorsi da corrente e tra quest'ultimi e il campione non percorso da corrente.

2. Per il sistema Rame solido-Zinco liquido (di cui alla precedente Nota) l'indagine macroscopica e microscopica sulle estremità corrose dei cilindretti di Rame (sezionati parallelamente all'asse del cilindro stesso) alla quale ho accennato nella precedente Nota, è riprodotta nelle figure 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Esse mostrano che la corrosione dà luogo ad un cratere

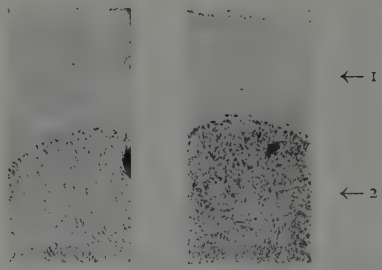


Fig. 4. – Aspetto macroscopico dell'estremità dei cilindretti di rame percorsi da corrente (ingrandimento × 8).

1 rame 2 bagno di zinco solidificato.

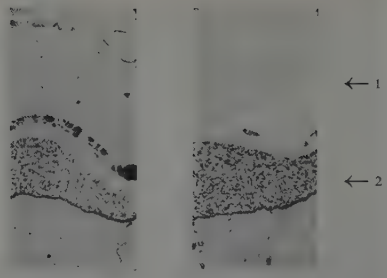


Fig. 5. – Aspetto macroscopico dell'estremità dei cilindretti di rame non percorsi da corrente (ingrandimento × 8).

1 rame 2 bagno di zinco solidificato.

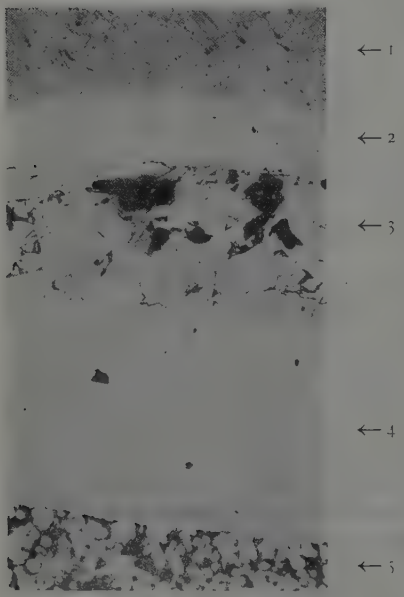


Fig. 6. – Campione non percorso da corrente (prova a 600° con 100 A e 23 % Cu nel bagno. Durata 1 h) (ingrandimento × 100).

1 rame 2 soluzione solida α 3 $\beta + \gamma$
4 soluzione solida γ 5 bagno solidificato.

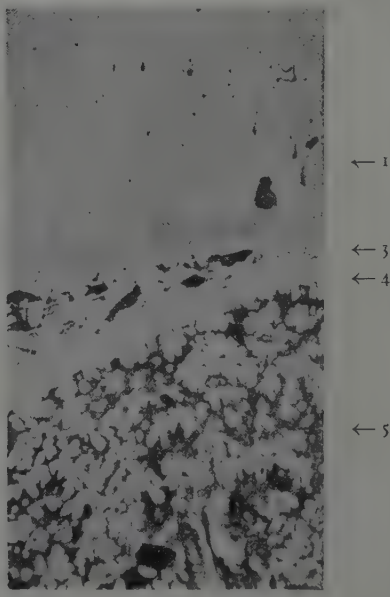


Fig. 7. – Campione percorso da corrente (elettrodo positivo).

(Idem fig. 6).

di forma regolare nei campioni percorsi da corrente, sia continua che alternata (fig. 4), mentre nei campioni non percorsi da corrente il cratere ha una forma irregolare (fig. 5). L'osservazione microscopica è stata fatta

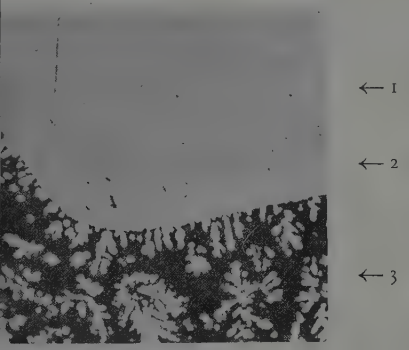


Fig. 8. – Campione non percorso da corrente (prova a 600° con 100 A e bagno di zinco puro. Durata 1 h) (ingrandimento × 100).

1 rame 2 soluzione solida γ 3 bagno solidificato.

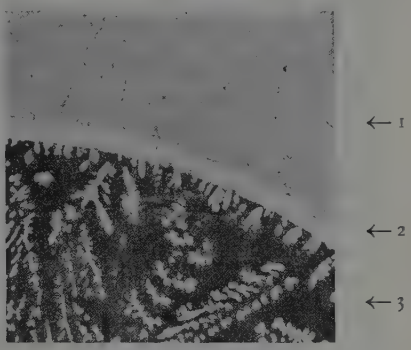


Fig. 9. – Campione percorso da corrente (elettrodo positivo).

(Idem fig. 8).

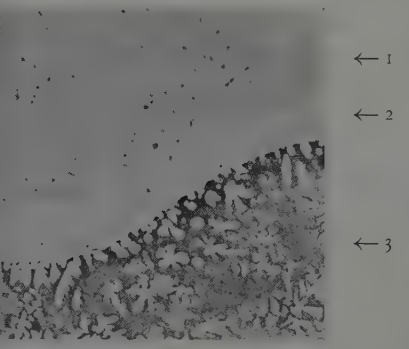


Fig. 10. – Campione non percorso da corrente (prova a 600° con 50 A e 6 % Cu nel bagno. Durata 1 h) (ingrandimento × 100).

rame 2 soluzione solida γ 3 bagno solidificato.

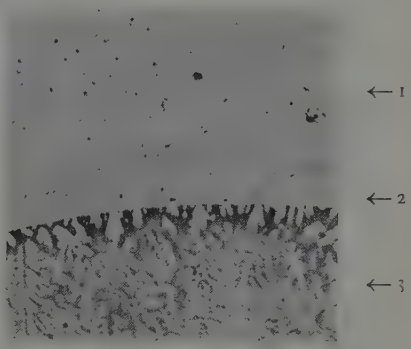


Fig. 11. Campione percorso da corrente (elettrodo negativo).

(Idem fig. 10).

sui campioni senza attacco e ha mostrato che in tutti i campioni si forma, aderente al Rame, la soluzione solida α a cui segue uno strato di soluzione solida γ e infine la struttura (in generale $\varepsilon + \eta$) corrispondente alla com-

posizione del bagno metallico, una piccola porzione del quale solidificava nel manicotto d'amianto. I campioni delle prove eseguite con un'alta percentuale di Rame nel bagno di Zinco fuso mostrano anche, tra la soluzione solida α e quella γ, uno strato avente la struttura $\beta + \gamma$. Nessuna differenza di struttura mi è stato possibile riscontrare, a parità di temperatura, corrente e composizione del bagno, tra il campione collegato col polo positivo e quello collegato col polo negativo o tra questi due e quelli percorsi da corrente alternata. Per i campioni non percorsi da corrente ho sempre riscontrato uno spessore di soluzione α, e specialmente di soluzione γ, maggiore che nei campioni percorsi da corrente. Lo spessore degli strati delle strutture sopradette aumenta con l'aumentare del contenuto di Rame nel bagno di Zinco liquido; il rapporto tra gli spessori degli strati del campione non percorso da corrente e gli spessori degli strati dei campioni percorsi da corrente diminuisce col diminuire dell'intensità della corrente e col diminuire del contenuto di Rame nel bagno.

Per la discussione delle microfotografie è da tener presente che, dopo interrotta la corrente, i campioni rimanevano immersi per qualche minuto nel bagno di Zinco fuso mentre si procedeva allo smontaggio dell'apparecchiatura sperimentale e quindi può essere avvenuto in questo frattempo un'alterazione nello spessore delle strutture.

TABELLA I.

Sistema Rame–Stagno.

Temp. °C	Durata minuti	Corrente Amp.	Variazione lunghezza elettrodi in mm.				
			corrente continua		corrente alternata		senza corrente
			positivo	negativo			
250	10	100	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2
330	10	100	2,1	1,8	1,0	0,9	0,1
385	10	100	4,1	4,0	2,5	3,1	0,6
440	10	100	9,2	7,0	—	—	—
450	10	100	—	—	6,2	6,2	1,0
540	10	100	17,7	14,0	11,6	9,7	3,5

TABELLA II.

Sistema Rame–Piombo.

Temp. °O	Durata minuti	Corrente Amp.	Variazione lunghezza elettrodi in mm.				
			corrente continua		corrente alternata		senza corrente
			positivo	negativo			
390	60	100	0,1	0,2	0,1	0,4	0,05
490	60	100	—	2,0	1,0	0,6	0,2
600	60	100	7,4	5,9	3,5	4,1	0,8
670	8	100	2,3	1,8	1,1	1,4	—
745	8	100	4,0	3,9	3,8	3,0	0,9
790	8	100	7,6	4,8	6,7	5,9	1,6
840	8	100	6,7	5,8	4,2	4,7	2,4

TABELLA III.

Sistema Rame–Cadmio.

Temp. °O	Durata minuti	Corrente Amp.	Variazione lunghezza elettrodi in mm.				
			corrente continua		corrente alternata		senza corrente
			positivo	negativo			
420	3	100	0,9	1,3	0,8	0,9	0,2
510	3	100	2,7	2,8	2,7	2,1	1,0
535	3	100	3,6	2,8	3,3	2,8	2,4
545	3	100	3,6	3,1	3,1	2,8	1,3
600	3	100	8,3	8,4	6,6	7,6	4,8

I risultati delle prove impiegando il Mercurio e le amalgame come metallo liquido verranno comunicati in Note successive.

Ringrazio il prof. Oscar Scarpa, Direttore del Laboratorio, che mi ha guidato durante la ricerca.

Geologia. — *Sulla esistenza di colate riolitiche post-alpine in Sila*[1]. Nota di A. RITTMANN, presentata[2] dal Socio R. FABIANI.

Nella sua *Descrizione geologica della Calabria*[3], E. Cortese menziona il ritrovamento di « porfidi arcaici » in varie località della Sila e della Serra S. Bruno e ne dà una sommaria descrizione macroscopica. Ma, secondo la sua abitudine di non eseguire studi microscopici[4], egli riunisce nel gruppo di questi « porfidi » tutta una serie di rocce, effusive ed intrusive, di età molto varia, le quali hanno, come unica caratteristica comune, la tessitura porfirica.

Durante le ricerche geologiche che esegue, sotto la mia direzione, il Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I. è stato rivelato che tra queste rocce si rinvengono anche rioliti e micrograniti che si devono ascrivere ad un'epoca molto recente.

Le rioliti si presentano in genere poco alterate con fenocristalli di plagiocasi acidi, di anortoclasi e di quarzo corroso in una massa fondamentale costituita da un fitto feltro di feldspato alcalino e quarzo, in molti casi prodotto dalla devetrificazione di un vetro ossidianico. Come minerali femici si riscontrano biotite o anfibolo, talvolta cloritizzati. In altri campioni i fenocristalli scarseggiano o mancano affatto: in tal caso si distinguono varietà che devono considerarsi quali ossidiane devetrificate, da altre varietà a tessitura originariamente olocristallina a grana fine (micrograniti).

Queste rioliti formano colate e cupole, talvolta a struttura colonnare, più o meno intaccata dall'erosione, ma giacenti su di una superficie di erosione molto recente, che differisce di poco da quella attuale. In molti punti la forte erosione ha messo a nudo i condotti vulcanici che si rivelano come delle lunghe fratture riempite da micrograniti, mostranti tutti i termini di passaggio a rioliti effusive. In una delle cupole riolitiche si sono rinvenuti ciottoli di quarzo xenolitici, evidentemente asportati dalla profondità. E poichè questa cupola giace direttamente sulla superficie di erosione

(1) Lavoro eseguito nel Centro Ricerche Geominerarie dell'I. R. I. presso L'Istituto di Geologia Applicata e di Arte Mineraria dell'Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

(3) E. CORTESE, *Descrizione geologica della Calabria*. Tip. G. Bertero; Roma, 1895 (ristampata nel 1934).

(4) « La geologia pura non si fa col microscopio, e siccome qui parliamo di geologia, mi perdonerà chi mi legge, se l'autorità del microscopio non è mai invocata ». E. CORTESE, op. cit., p. 81.

del granito appartenente alla falda di ricoprimento [5], i ciottoli possono provenire solo dal muro della falda e quindi è giuocoforza ammettere che le manifestazioni riolitiche siano posteriori al ricoprimento alpino.

Si è inoltre constatato che le fratture, attraverso cui avvenne l'estrusione del magma, appartengono ad un sistema di faglie prodotte dal sollevamento tardi – o postterziario.

Per tutti i motivi accennati, siamo stati condotti a concludere che questo vulcanesimo postorogenetico, acido, della Sila deve ascriversi ad un'epoca abbastanza recente, probabilmente del Quaternario.

Nella regione del m. Carlo Magno, nella Sila Grande, abbiamo eseguito un rilievo di dettaglio di queste manifestazioni vulcaniche. Tale rilievo, lo studio petrografico dei campioni e le discussioni relative saranno publicate dettagliatamente in sede opportuna al più presto.

Biologia. — *Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello* (Petromyzon planeri) *di fronte ai coloranti vitali.* – II. *Leucociti* [1]. Nota [2] di Leo Raunich, presentata dal Socio A. Pensa.

Diversi A. [3] hanno dimostrato che i coloranti vitali mettono in evidenza nei leucociti delle particolari granulazioni che si colorano metacromaticamente, e che variano di numero e volume a seconda della categoria di leucociti. Nei granulociti neutrofili i granuli sono poco numerosi, ma crescono considerevolmente di volume, assumendo l'aspetto di discreti vacuoli colorati; nei granulociti eosinofili compaiono pure granuli metacromatici, ma in numero esiguo e senza raggiungere cospicue dimensioni;

(5) L'esistenza di una grande falda di ricoprimento, costituita da rocce cristalline (magmatiti e metamorfiti) al di sopra di sedimenti, appartenenti ad epoche che vanno dal Paleozoico al Mesozoico Superiore, è stata accertata dal nostro studio, ancora in corso. Nè vi è dubbio che tale ricoprimento sia da ascrivere al ciclo orogenetico alpino, come il susseguente sollevamento, perdurante ancor oggi.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna diretto dal prof. P. Pasquini.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1946.

(3) Cito qui solo i lavori più importanti e con abbondante bibliografia: J. A. Hammar, *Lipoidbildung in den weissen Blutkörperchen. Mikroskopische Studien zur Autolyse des Blutes, nebst einigen Beobachtungen über Vitalfärbung des Zellkerns.* « Kungl. Svenska Vetenskapsakad. », Handl., *49*, 1912; A. Jokl, *Ueber vitalfärbbare Erythrocytengranulationen (« Substantia metachromatico-granularis ») beim Rochen, nebst weiteren Bemerkungen über das Blut dieser Tiere.* « Z. mikr. anat. Forsch. », 2, 1925; M. E. Simpson e J. M. Deming, *The identification of myeloblasts with vital stains.* « Fol. Haematol. », *34*, 1927; R. S. Cunningham e E. H. Tompkins, *The supravital staining of normal human blood cells.* « Fol. Haematol. », *42*, 1930; B. E. Hall, *A critical review of the haematological literature dealing with the results of the supravital staining method.* « Fol. Haematol. », *43*, 1931; P. jr. Dustin, *Contribution à l'étude histophysiologique et histochimique des globules rouges des Vertèbrés.* « Arch. Biol. », *55*, 1944.

nei monociti sono invece presenti in tale quantità da riempire completamente la cellula; nei linfociti sono per lo più scarsi; nei granulociti basofili compaiono in scarso numero e senza aumento di volume. Negli elementi immaturi sono assai scarsi. Sono stati studiati in qualche specie di Mammiferi (Uomo compreso), di Uccelli, di Rettili, di Anfibi, e in diversi Pesci fra Teleostei e Selaci. L'unico A. (4) che si è occupato del sangue della Lampreda dal punto di vista della colorazione vitale, ha sostenuto che i suoi leucociti non si colorano con i coloranti vitali.

Le attuali mie osservazioni fanno parte di un gruppo di ricerche per una migliore conoscenza del sangue della Lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*), ancora nel complesso poco noto. È stato studiato il sangue dal punto di vista della colorazione vitale in ammoceti di mm. 58, 115, 130, 138, 140 e in un adulto (femmina sessualmente matura). Le tecniche impiegate sono le seguenti:

1ª Il sangue viene steso in strato sottile su di un portaoggetti previamente coperto con un esilissimo velo di sostanza colorante; si trasferisce lo striscio immediatamente in camera umida e vi si fa permanere per un tempo variabile.

2ª Il colorante viene disteso in strato sottile su di un coprioggetto, col quale si copre una goccia di sangue posta su un portaoggetti; si luta tutto all'intorno con olio di paraffina.

3ª Una certa quantità di sangue, esattamente misurata, viene diluita con una certa quantità di soluzione di colorante a titolo noto in liquido fisiologico; le sospensioni si conservano in salierine di vetro con coperchio. A vari intervalli di tempo si prelevano con pipettine campioni, che si osservano al microscopio.

Sono stati usati il Brillantkresylblau, il Rosso neutro, il Bleu Nilo, il Verde Luce, il Sudan III.

Sul quadro della serie bianca avrò occasione di ritornare diffusamente in un prossimo lavoro; basterà qui accennare che le opinioni espresse dai pochi AA. che si sono occupati dell'argomento divergono notevolmente. I risultati delle mie osservazioni mi hanno permesso di stabilire la presenza delle seguenti ben definite categorie di globuli bianchi:

1ª granulociti neutrofili e loro forme giovanili e immature.
2ª granulociti eosinofili e loro forme giovanili e immature.
3ª monociti;
4ª trombociti e loro forme immature.

Esiste inoltre tutta una quantità di elementi di tipo linfocitario, di aspetto e dimensioni varie, di difficile interpretazione, e sui quali nella attuale Nota non insisto, rimandando ogni discussione al prossimo lavoro.

(4) E. Giglio Tos, *Il rosso neutrale (Neutralroth) ed i granuli emoglobigeni*. «Z. f. wiss. Mikroskopie», *15*, 1898.

Passo ora ad esporre i risultati delle osservazioni compiute coi coloranti vitali, trattando separatamente ogni categoria di leucociti.

A) Granulociti. – Nei preparati di sangue fresco non colorati si distinguono nei granulociti numerose e fini granulazioni, in vivace movimento browniano. Emettono lunghi pseudopodi ramificati e si muovono strisciando con movimento ameboide sul vetrino.

Col Brillantkresylblau si colorano immediatamente nel citoplasma due categorie di granuli: gli uni, più piccoli, in violetto cupo, gli altri, più grandi, in color porpora. Osservando lo stesso preparato a vari intervalli di tempo, si nota che i granuli violetti non subiscono modificazioni di forma e volume, mentre quelli porporini crescono di volume, taluni fino a diventare grossi vacuoli colorati, altri restando più piccoli. Dopo un certo tempo (che varia fra 24 e 36 ore, e anche più) entrambe le categorie di granuli impallidiscono e scompaiono nuovamente, probabilmente perchè il colorante è stato ridotto nel leucoderivato. Col Rosso neutro si ottengono risultati simili, i vacuoli diventano soltanto più grossi e durano più a lungo; con questo colorante tuttavia non è possibile distinguere le due categorie di granuli, in quanto tutti questi inclusi si colorano in rosso arancione. I rapporti numerici fra i due tipi di granuli variano: in alcuni granulociti si incontrano poche sferette porporine e abbondanti granuli violetti; in altri invece sono abbondantissimi i granuli porporini e scarsi quelli violetti. Accanto a queste due categorie di granuli se ne incontrano costantemente altri, simili a minute goccioline sospese nel citoplasma, che restano incolori tanto con i coloranti anzidetti quanto con il Sudan III e che non si rivelano birifrangenti al polarizzatore. Col Bleu Nilo si mettono in evidenza gli stessi vacuoli, colorati metacromaticamente in rosso violetto, che però non raggiungono le dimensioni di quelli ottenuti col Rosso neutro, nonchè granulazioni più minute, colorate ortocromaticamente in azzurro. Col Verde Luce si è solo colorato, in modo scarso e poco ben definibile, qualche piccolo granulo. Le tecniche 2ª e 3ª hanno dato risultati identici, vale a dire variando la concentrazione di colorante non variano i risultati. Con la tecnica 1ª invece si sono solo colorati pochi granuli, ortocromaticamente.

Non mi è stato purtroppo possibile di trovare un granulocito eosinofilo nei miei preparati a fresco, e ciò in relazione con la rarità di tali forme in circolo.

B) Monociti. – A fresco riesce molto difficile distinguere i monociti dai granulociti; come criteri differenziali servono la presenza delle granulazioni minute danzanti nei granulociti (che corrispondono alle granulazioni specifiche, che non si colorano con i coloranti impiegati e quindi non sono confondibili con le granulazioni descritte, molto più evidenti) e la emissione di pseudopodi più tozzi da parte dei monociti. Con i coloranti

vitali si comportano approssimativamente alla stessa maniera: anche nei monociti si mettono in evidenza numerosi vacuoli metacromatici, che possono raggiungere cospicue dimensioni, in numero forse ancora maggiore che nei granulociti; scarse sono invece le granulazioni ortocromatiche.

C) Trombociti. – I trombociti della Lampreda sono cellule piccole, con citoplasma basofilo e nucleo voluminoso, a ferro di cavallo, inciso o bipartito. Presentano a fresco movimenti ameboidi con emissione di pseudopodi tozzi. Col Brillantkresylblau e col Rosso neutro si mettono in evidenza nel citoplasma pochi vacuoli metacromatici, in numero di 2–4, che hanno la tendenza ad aumentare di volume col passare del tempo, ma non raggiungono mai dimensioni ragguardevoli; scompaiono prima dei vacuoli dei granulociti. Si riscontrano pure granulazioni ortocromatiche in scarso numero, situate in prossimità del nucleo. Con la tecnica 1ª si mettono in evidenza nel citoplasma tutta una quantità di minuti granulini ortocromatici.

D) Elementi di tipo linfocitario. – Come già accennato, esiste in circolo tutta una quantità di elementi di tipo linfocitario (ossia con citoplasma più o meno basofilo, nucleo voluminoso rotondeggiante), che presentano caratteri citologici diversi fra loro. Negli strisci, colorati col Giemsa, a parte le forme immature dei granulociti ed eritrociti, scarse ma perfettamente identificabili, si incontrano elementi perfettamente sovrapponibili ai linfociti della ematologia umana, con citoplasma scarso, basofilo, e nucleo con cromatina addensata in blocchi; altri invece presentano una struttura nucleare simile a quella dei monociti, da cui differiscono però per altri caratteri; altri ancora, reperibili per lo più nel sangue di individui giovani, sono da interpretarsi come forme immature di trombociti e monociti, alcuni forse anche come emocitoblasti nel senso di Ferrata; piccoli elementi, con nucleo picnotico, con scarsissimo citoplasma colorabile in rosso col verde metile-pironina, talora abbondantissimi, variamente interpretati dai vari AA. che se ne occuparono, attendono ancora una spiegazione soddisfacente. Tutti questi elementi non costituiscono categorie ben definite, in quanto presentano una grande variabilità strutturale, per cui una categoria sfuma gradualmente in un'altra con molte forme intermedie.

Da quanto esposto emergono le gravi, e per il momento insuperabili difficoltà che incontra l'osservatore nella valutazione di tutti questi elementi nei preparati a fresco. Dal punto di vista generale possiamo soltanto dire che con le colorazioni vitali questi elementi presentano un comportamento vario: alcuni con scarsissimo citoplasma e nucleo voluminoso, mostrano solo scarsissimi vacuoli metacromatici, che non aumentano di dimensioni, e non presentano granuli ortocromatici; emettono tozzi lobopodi e sembrano quegli elementi avvicinabili ai linfociti della ematologia umana; altri, con citoplasma più abbondante, hanno diversi vacuoli metacromatici più grandi,

che aumentano di volume, e alcuni granulini ortocromatici accanto al nucleo; emettono vivaci pseudopodi tozzi; in alcuni si mette in evidenza nel nucleo un corpicciuolo (nucleolo?). Con la tecnica 1ª anche qui si mettono in evidenza nel citoplasma solo abbondanti granulini ortocromatici disposti di preferenza nella immediata vicinanza del nucleo.

Si può dunque concludere:

Il Brillantkresylblau e il Rosso neutro mettono in evidenza nei leucociti di Lampreda tre categorie di granulazioni:

1ª Vacuoli che si colorano metacromaticamente in tutti i leucociti, e che possono raggiungere cospicue dimensioni nei granulociti e monociti. Nei linfociti restano piccole.

2ª Granuli più minuti, che si colorano ortocromaticamente, che non aumentano di volume e numero; sembrano mancare nei linfociti. Occorre ben distinguere queste granulazioni, che compaiono *in vivo*, da altre, pure ortocromatiche, che si mettono in evidenza in tutte le categorie di leucociti con la tecnica 1ª.

3ª Piccoli vacuoli, simili a goccioline, che non si colorano con i coloranti anzidetti, nè col Sudan III, e che non sono birifrangenti. Li ho notati soltanto nei granulociti.

Biologia. — *Sviluppo di gonadi in assenza di cellule sessuali nell'embrione di pollo. – Sterilizzazione completa mediante esposizione a raggi γ allo stadio di linea primitiva* [1]. Nota di R. Dulbecco, presentata [2] dal Socio G. Levi.

La dottrina di Weissmann della continuità del plasma germinale è oggi, specialmente dopo l'immenso sviluppo della genetica, solidamente fondata. Però la dimostrazione obbiettiva di una « via germinale » a partire dalla segmentazione dell'uovo sino agli stadi più inoltrati dello sviluppo, fu data soltanto in casi singoli: in Ascaris ed in qualche altra specie; di singolare importanza sono i reperti di Bounoure nella rana; se questi saranno confermati, avremo la certezza che nei vertebrati il plasma germinale ha nell'uovo un'impronta propria, già prima della fecondazione. Comunque è certo che in molte specie le cellule sessuali non differiscono dalle cellule somatiche, cosicchè il metodo descrittivo è inadeguato a dimostrare l'attendibilità della dottrina della via germinale.

Spetta all'embriologia sperimentale il merito di aver fornito prove convincenti in favore di questa dottrina in talune specie, in cui è stato possi-

(1) Ricerca eseguita nel Centro di studi sull'accrescimento e la senescenza alle dipendenze del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso l'Istituto Anatomico di Torino.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

bile distruggere i gonociti in periodi precoci dello sviluppo. Il primo tentativo di questo genere è stato fatto da Levi, ma senza risultati chiari.

In un periodo più recente si tentò per varia via di distruggere le cellule sessuali primordiali (gonociti (3)) (Benoit, Reagan, Willier). Spetta specialmente a V. Dantschakoff il merito di avere intrapreso un gruppo molto completo di ricerche sperimentali su quest'argomento. Dantschakoff cercò di distruggere col calore nell'embrione di pollo allo stadio di linea primitiva l'area semilunare situata all'estremo anteriore del blastoderma, la quale secondo Swift sarebbe la sorgente dei gonociti.

Ed infatti per effetto di quest'intervento, secondo la Dantschakoff, non solo i gonociti in stadi successivi sono assenti, ma la gonade non si costituisce.

Io stesso ho ripetuto quest'esperienze distruggendo coll'elettrolisi la zona semilunare situata anteriormente alla linea primitiva, ma i risultati furono poco soddisfacenti; si svilupparono embrioni con malformazioni talmente gravi che non erano utilizzabili per il fine che mi ero prefisso; attribuisco l'insuccesso di quest'esperienze a lesione delle due vene vitelline anteriori.

Ho perciò dato la preferenza ad un altro metodo, che era stato già seguito dalla Dantschakoff, quello di distruggere i gonociti colle radiazioni. Però mentre la Dantschakoff aveva distrutto con raggi X i gonociti, dopochè essi erano immigrati nella gonade, io ho preferito di esporre il blastoderma alle radiazioni (raggi γ del radio) allo stadio di linea primitiva, sia prima che dopo la formazione del prolungamento cefalico. Durante l'irradiazione dell'uovo, la finestra praticata nel guscio era ricoperta con uno strato di cerotto adesivo.

Ho eseguito l'irradiazione applicando un ago contenente 1 mg. di radium con parete di $^1/_2$ mm. di spessore di platino, a 3 mm. di distanza dal blastoderma, messo allo scoperto colla tecnica consueta nelle esperienze su embrioni di pollo; l'uovo era mantenuto durante l'irradiazione a 38°. Il risultato che mi ero proposto fu raggiunto soltanto per effetto d'irradiazione dalla 22ª alla 24ª ora d'incubazione; l'irradiazione fu protratta per un periodo di 24 ore.

Successivamente l'uovo veniva incubato a 38°. Secondo i miei calcoli la dose complessiva di radio somministrata corrispondeva a 0,181 millicurie distrutti.

Ho così irradiato un centinaio di embrioni. Molti di questi morirono durante l'irradiazione; solo tre embrioni potevano essere mantenuti in vita fino rispettivamente al 7°, 8°, 12° giorno di incubazione, e a questa età fissati quando erano ancora in vita.

I tre embrioni così ottenuti presentavano uno sviluppo del tutto normale, corrispondente all'età e non erano malformati. In questi le gonadi

(3) Preferisco la denominazione di gonociti proposta da Waldever a quella adottata da alcuni autori recenti di protogoni.

erano di sesso femminile, di sviluppo conforme all'età dell'embrione, ma completamente prive di cellule sessuali.

Prescindendo dall'assenza di cellule sessuali, lo sviluppo dell'abbozzo appariva normale; si riconosceva una sottile corteccia ed al disotto di questa dei cordoni o dei tubuli.

In un embrione irradiato, il quale fu fissato al 12° giorno d'incubazione, si notava una maggior altezza dell'epitelio germinativo, ed al disotto di questo degli elementi allungati disposti a palizzata parallelamente alla superficie, di dubbia natura. Al disotto di questo strato si vedevano numerosi nuclei rotondeggianti, ma mancavano del tutto gli elementi a nucleo vescicoloso, a citoplasma abbondante, caratteri nettamente specifici delle cellule sessuali; tra i suddetti nuclei fitti, i quali costituiscono il blastema della gonade, e sono destinati a trasformarsi in mesenchima, vi erano cordoni cellulari con sottile lume; si tratta evidentemente dei cordoni midollari.

In un embrione di controllo, allo stadio corrispondente sia nell'epitelio germinativo che nei sottostanti cordoni sessuali di 2ª formazione le cellule sessuali sono numerosissime.

È stato pertanto possibile ottenere per la prima volta un embrione completamente privo di cellule sessuali, irradiando l'embrione in un periodo precocissimo dello sviluppo, in cui i gonociti non sono ancora comparsi nell'abbozzo della gonade, e seguire lo sviluppo della gonade fino a periodi avanzati.

I risultati di queste irradiazioni permettono di giungere alle seguenti conclusioni:

1° l'irradiazione con raggi γ in quantità adeguata, eseguita sull'embrione di pollo prima che esso raggiunga i 25 somiti, e cioè prima che nell'abbozzo delle gonadi compaiano gonociti morfologicamente riconoscibili, permette lo sviluppo di un embrione normale, provvisto di gonadi completamente sterili;

2° le gonadi di tali embrioni vanno incontro ad uno sviluppo sessuale perfetto, sebbene completamente prive di cellule sessuali fin dall'inizio dello sviluppo;

3° la distruzione precoce dei gonociti, prima che essi compaiano nell'abbozzo della gonade, non è seguìta da neoformazione di gonociti a spese di cellule somatiche, il che depone per l'esistenza nel pollo di una via germinale.

Pertanto si può ritenere dimostrato che le cellule della via germinale non esercitano un'azione formativa sullo sviluppo della gonade, ma che questa si costituisce in modo del tutto indipendente dalla presenza o meno di questi elementi.

Lasciamo per il momento impregiudicata la questione della sede da cui i gonociti traggono origine (se dalla semiluna anteriore oppure in altra sede), e della via che essi seguono nella loro migrazione.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Giovanni D'Achiardi

letta dal Socio Angelo Bianchi nella seduta del 16 ottobre 1946

Mentre la grande tragedia della guerra mondiale si abbatteva sul nostro Paese, Giovanni D'Achiardi, stroncato da un improvviso attacco di embolia cerebrale, quando più attiva e feconda si esplicava la sua molteplice operosità, trascinava miseramente gli ultimi anni di sua vita in un letto di dolore: triste ed immeritata fine di una preziosa esistenza, che non aveva conosciuto stanchezze, nè soste, tutta dedita con generosa e infaticabile energia alla Scuola, alla Scienza, alla Città sua.

Il 9 settembre 1944, nella villa di Fauglia, lo spirito di Giovanni D'Achiardi ritrovava libera ala dalla prigionia infelice del corpo.

Era nato a Pisa il 25 aprile 1872 ed era cresciuto alla scuola del padre Antonio, che fu con Quintino Sella, con Arcangelo Scacchi e con Giovanni Strüver fra i maggiori Maestri che nel secolo scorso diedero vita e cammino sicuro alla Scienza mineralogica italiana.

Allievo e continuatore fedele ed appassionato dell'indirizzo naturalistico del padre suo, Giovanni D'Achiardi ne assunse per incarico nel 1902 e per concorso nel 1905 la cattedra dell'Università di Pisa, che tenne poi con indefessa attività per quasi un quarantennio.

All'Ateneo pisano diede per vari anni l'impronta della sua autorità e della sua competenza, reggendone le sorti dal 1923 al '25 e dal 1935 al '39.

Alla città di Pisa offrì pure esempio mirabile di rettitudine e di saggezza come Sindaco dell'Istituto del Credito Agrario, come Presidente dell'Istituto delle Bonifiche toscane, come Presidente del Consiglio di Amministrazione della Cassa di Risparmio.

Membro del Consiglio Superiore della pubblica istruzione e del Comitato geologico; due volte Presidente della Società Geologica Italiana, nel 1915 e nel 1921, Socio dell'Accademia dei Georgofili e dell'Istituto di studi etruschi; Socio Corrispondente dei Lincei dal 1924 e Nazionale dal 1932.

Nel 1934 fu nominato Senatore del Regno.

Dalla sua snella figura, dal tratto nobilissimo, dal viso aperto incorniciato da una fluente barba candida di apostolo, dalla parola facile ed elegante, trasparivano aperta intelligenza e pronta intuizione, elevatezza di sentimenti e cortesia d'animo, disciplina di costumi e severità di propositi.

Nell'Istituto mineralogico fra i suoi allievi era Maestro amatissimo e guida preziosa, compagno di ricerca e fervente animatore di studi.

L'opera scientifica di Giovanni d'Achiardi, varia e vasta, affidata a più di cento pubblicazioni originali e ad altri scritti di carattere divulgativo, ha segnato

un'orma incisiva nella illustrazione naturalistica della Toscana, così ricca di giacimenti mineralogici e minerari di vario tipo.

Le sue Memorie sui magnifici cristalli di tormalina del classico giacimento di S. Piero in Campo all'Elba, in cui sono ben esaminati i rapporti fra caratteri morfologici, colore e proprietà elettriche; gli studi sulle zeoliti del filone della Speranza e sul granato dell'Affaccata; le ricerche mineralogico–petrografiche sulla magnesite della Grotta d'Oggi e sui fenomeni di contatto del Posto dei Cavoli, costituiscono un complesso di lavori fondamentali per la conoscenza mineralogica dell'Isola d'Elba. Nè meno interessanti sono le pubblicazioni sui minerali dei marmi di Carrara e sulla loro genesi.

Degno di particolare rilievo è poi il ciclo dei lavori riguardanti i minerali dei soffioni boraciferi di Larderello in Val di Cecina, che diedero modo al D'Achiardi di rivedere e correggere le conclusioni a cui erano giunti altri autori nell'esame di alcuni borati, di precisare l'appartenenza al sistema triclino dei cristalli di acido borico, e di individuare un nuovo borato di calcio naturale distinto col nome di *Ginorite*.

Un altro minerale nuovo fu da lui pure scoperto fra le zeoliti dell'Isola d'Elba, ben caratterizzato da una singolare geminazione polisintetica, e dedicato al padre suo col nome di *Dachiardite*.

Nè le ricerche scientifiche di Giovanni D'Achiardi si limitarono all'ambiente prediletto della Toscana e dell'Elba. Anche minerali e rocce di Sardegna e dell'Eritrea furono oggetto di suoi studi, condotti con l'abituale maestria. All'industria mineraria e metallurgica etrusca dedicò alcune interessanti conferenze.

Ricordiamo infine il successo della sua *Guida al Corso di Mineralogia*. La parte generale, cioè il primo volume che deriva da un precedente trattato del padre rielaborato dal figlio, ha spiccate doti di precisione e di chiarezza; ed è vero peccato che non abbia avuto in seguito nuovi aggiornamenti moderni. La parte speciale, cioè il secondo volume più recente, si fa notare per la ricchezza di notizie riguardanti i giacimenti mineralogici e minerari italiani.

Fra gli allievi di Giovanni D'Achiardi dobbiamo ricordare a suo onore: Pietro Aloisi, Socio corrispondente della nostra Accademia e assegnatario del Premio reale nel 1935, che tenne con tanta autorità scientifica dal 1922 al '38 la Cattedra di Mineralogia di Firenze, e che purtroppo, per l'acuirsi di un male contratto in servizio militare durante la prima guerra europea, ci fu strappato anch'egli anzi tempo da quel crudele destino che nel giro di pochi anni ha tolto tanti maestri di valore alle Scuole mineralogiche italiane; Carlo Giannotti, che era già una sicura promessa per la nostra Scienza, quando per un tragico incidente di volo assurse nel cielo degli Eroi che hanno dato la loro giovinezza alla Patria; Stefano Bonatti, che oggi sulla cattedra di Pisa e nell'Istituto mineralogico coltiva con amore di allievo il culto delle memorie e delle tradizioni e ravviva di nuova luce la fiamma di quella Scuola che Antonio d'Achiardi accese e che Giovanni D'Achiardi lasciò in pieno fulgore.

Commemorazione del Socio Giovanni Boeris

letta dal Socio Angelo Bianchi nella seduta del 16 ottobre 1946.

Ricordando qui brevemente Giovanni Boeris, Socio Corrispondente dei Lincei dal 1916 e Nazionale dal 1928, mi par quasi di usare affettuosa violenza al desiderio da lui espresso di andarsene in silenzio, senza discorsi d'occasione.

Tale era la modestia dell'uomo, così semplice e spontanea era in lui l'assenza di ogni esibizione, che il suo valore di studioso e la sua nobile figura di cittadino vanno ricercati quasi contro sua volontà, con riverente cura, e ne risultano più intimi e più profondi ora ch'Egli non è più fra noi.

Era nato a Chivasso nel 1866. Si era laureato in Scienze naturali a Pavia nel 1890 e successivamente in Chimica a Bologna nel 1893, ed aveva iniziato la sua vita scientifica con ricerche di Chimica condotte in collaborazione con Giacomo Ciamician e con Angeli. Da quelle era passato all'esame cristallografico delle sostanze organiche e quindi per transizione agli studi di Mineralogia.

All'inizio di questo secolo, poco più che trentenne, era professore di Mineralogia a Sassari e quindi a Parma passando poi nel 1905 alla cattedra di Bologna dove rimaneva per altri 32 anni, fino al collocamento a riposo.

La sua produzione scientifica, tutta improntata ad una coscienziosa precisione di indagine e ad un severo rigore di deduzioni, si svolse con ritmo regolare fra il 1890 ed il 1925, comprendendo una quarantina di lavori.

Un gruppo notevole di questi è dedicato allo studio cristallografico d'un gran numero di sostanze organiche.

Un altro ciclo di lavori riguarda la illustrazione di minerali italiani e dei loro giacimenti. E risalta tra questi il gruppo relativo ai giacimenti piemontesi di Val d'Ala, Val di Susa, Val d'Aosta ed a quelli della Comba di Compare Robert presso Avigliana, che il Boeris ha scoperti ed illustrati con particolare perizia.

Fra le pubblicazioni di carattere cristallografico è ben nota agli specialisti la Memoria sulla tridimite dei Colli Euganei in cui è ammirevole anche la perfezione dei difficili disegni, che riproducono con insuperabile esattezza i complessi geminati multipli a lamelle compenetrate.

Anche i giacimenti dell'Appenino Bolognese e quelli di Val di Fassa e di Val Malenco furono oggetto di interessanti ricerche mineralogiche del Boeris, che amava visitarli nelle sue solitarie escursioni e che vi raccolse prezioso materiale per il Museo di Bologna.

Degni di rilievo sono pure i lavori su alcuni idrocarburi cristallizzati, rinvenuti nei banchi di lignite, uno dei quali fu da lui determinato per la prima volta e contraddistinto come nuova specie col nome di *Simonellite*.

È nei suoi lavori una cura scrupolosa nelle ricerche, una serietà di giudizi e di conclusioni, che rispecchiano i nobili tratti del suo carattere e l'onestà della sua vita.

Una crescente sordità gli rendeva frattando sempre più difficili le relazioni dirette ed Egli, anche per questo oltre che per naturale tendenza, si andava sempre più appartando nel suo Istituto, particolarmente dedito alle cure della biblioteca e del museo.

Dopo il collocamento a riposo e la nomina a Professore emerito dell'Ateneo Bolognese, Egli parve quasi aver cura di farsi dimenticare, accontentandosi di rare visite all'Istituto mineralogico.

Giunto alla soglia degli ottant'anni Giovanni Boeris ci lasciava il 1° aprile 1946 dopo aver preso congedo dall'Università con una lettera, che è espressione sintetica del suo carattere, chiedendo che per la sua morte non fossero sospese le lezioni, non fosse provveduto a cerimonie accademiche, non venissero pronunciati discorsi di rito.

Per questo, con un senso di riverente riguardo, io che ero uno dei colleghi a Lui più caro, ho scostato lievemente con mano pietosa e commossa la cortina di silenzio e di quiete a Lui d'attorno, ed ho tenuto l'elogio nella forma più semplice e piana, quasi per timore di non fargli cosa grata.

Commemorazione del Socio Carlo Fabrizio Parona
(1855-1939)

letta dal Socio Giorgio Dal Piaz nella seduta del 16 ottobre 1946

Carlo Fabrizio Parona nacque a Melegnano nel 1855. La sua famiglia diede alla Patria illustri studiosi, patriotti, uomini politici, autorevoli magistrati.

Compiuti gli studi liceali, Carlo Fabrizio Parona entrò nell'Università di Pavia e si iscrisse nelle Facoltà di Scienze. Sotto la guida di un insigne Maestro quale era il Taramelli, di cui fu per vari anni assistente, si avviò ben presto all'indagine geologica.

Le sue prime ricerche, rivolte all'esame del Pliocene dell'Oltrepo pavese, gli fornirono il mezzo di preparare un interessante lavoro che rivelò la sagacia e lo spirito critico del giovane naturalista.

Da allora le pubblicazioni di carattere geologico e specialmente paleontologico del Parona si susseguirono con grande frequenza anche negli ultimi anni della sua lunga vita. Notevoli fra gli altri sono gli studi geologici sul lago d'Orta, sulla Valle Strona e quelli sulla Valle Sesia, che gli era particolarmente cara. Importante, anche dal punto di vista delle pratiche applicazioni, la grossa monografia pubblicata da un'apposita commissione, della quale il Parona fu solerte Presidente, sulla Tripolitania Settentrionale. La sua maggiore atti-

vità venne rivolta però all'illustrazione paleontologica degli invertebrati fossili e alle deduzioni cronologiche che si possono ricavare dal loro studio, nel quale campo il Parona raggiunse una grande autorità riconosciuta tanto dai colleghi nazionali quanto dagli stranieri che ebbero ad occuparsi di tali argomenti.

Nella brevità del tempo che ci è concesso non possiamo passare in rassegna la numerosissima serie degli studi ch'Egli pubblicò in questo campo. Alcuni di essi sono inseriti nelle «Memorie» e negli «Atti» della nostra Accademia, ai lavori della quale egli prese parte con grande assiduità anche quando gli anni gli rendevano faticoso l'intervento.

Chiamato in giovane età a coprire la cattedra di Geologia dell'Università di Torino diede vita ad una feconda Scuola, dalla quale uscirono numerosi allievi che fecero onore al Maestro. Era di abitudini solitarie, di tratto garbato, piuttosto riserbato, ma ciò non gli impediva di avere uno spirito indipendente, improntato a fermi propositi; doti che tutti gli riconobbero e per le quali ebbe molte ed ambite cariche.

Egli fu infatti per due volte Presidente della Società Geologica Italiana; Membro e poi Presidente del Comitato Geologico; per lunghi anni Presidente dell'Accademia di Torino; Preside della Facoltà di Scienze e Rettore dell'Ateneo piemontese; Membro di molte Accademie e di vari Sodalizi di cultura che si onoravano di annoverare il suo nome fra i componenti le rispettive associazioni scientifiche.

Nella tarda età di 84 anni, il 15 gennaio 1939, Carlo Fabrizio Parona chiudeva a Busto Arsizio la sua esistenza operosa circondato dalle affettuose cure dei suoi familiari e il compianto di quanti ebbero la fortuna di conoscerlo e di apprezzare le elette virtù del suo animo e del suo ingegno.

Commemorazione del Socio Giulio Chiarugi

letta dal Socio G. Levi nella seduta del 16 ottobre 1946

Giulio Chiarugi, nato a Siena il 28 gennaio 1859, incominciò ad insegnare Anatomia umana nell'Università della sua città natale, giovanissimo, sin dal 1886, quando il suo Maestro Guglielmo Romiti si trasferì a Pisa. Quattro anni più tardi il Chiarugi fu chiamato all'Istituto di Studi superiori alla successione del Tafani, valente embriologo, spentosi in età giovanile. Da allora Egli non lasciò più l'Istituto anatomico di Firenze; collocato a riposo nel 1934 per limiti d'età, continuò a lavorare scientificamente sino al giorno della sua morte, avvenuta il 17 marzo 1944.

Nel novembre 1890 Egli iniziava il corso di Anatomia in Firenze con una prolusione *Problemi dell'Anatomia scientifica*; io ero allora studente del 2° anno di medicina ed ho ancor oggi vivo il ricordo di quel giovane modesto e timido nel contegno, ma dall'espressione vivacissima, che conservò sin negli ultimi anni della sua vita.

Quella sua prolusione era una professione di fede ed un programma al quale il Chiarugi si è sempre fedelmente attenuto nell'insegnamento e nella ricerca. Nel suo stile conciso, eppure lucidissimo, – era questa una delle sue caratteristiche – Egli esprimeva il convincimento che la descrizione delle forme dell'uomo a completo sviluppo deve essere integrata colla conoscenza del loro divenire durante l'ontogenesi, e delle analogie tra le forme dell'uomo e quelle degli animali; il metodo embriologico ed anatomo–comparativo è destinato a darci la ragione d'essere delle forme dell'uomo maturo, della posizione dell'uomo nella natura e delle parentele esistenti tra l'uomo e le forme ad esso inferiori.

Oggi queste affermazioni possono sembrare banali; ma conviene riportarsi allo spirito dominante a quel tempo tra gli anatomici italiani, i quali, con poche eccezioni (tra queste vanno ricordati Carlo Giacomini, il Todaro, il Romiti) pretendevano che l'Anatomia dovesse essere strettamente descrittiva e limitata a ciò che è rilevabile colla dissezione, escludendone in tal modo l'istologia e l'embriologia. Oggi questi dibattiti appartengono ad un passato remoto; dopo il movimento rinnovatore iniziato da Guglielmo Roux e proseguito da Braus e da tanti altri, i contatti tra Anatomia e Fisiologia vanno diventando sempre più intimi; ed in questo punto di contatto si sviluppò l'istofisiologia, la quale si propone di rintracciare nella sostanza vivente dal punto di vista causale le manifestazioni della vita visibili microscopicamente. Ma dobbiamo essere riconoscenti a coloro che lottando contro vieti preconcetti, seppero impedire che l'Anatomia stagnasse nella palude della descrizione delle variazioni ossee e muscolari, oppure che fosse esclusivamente una preparazione allo studio della medicina. E quando molti anni più tardi furono emanati dal Ministro di allora provvedimenti, i quali non potevano a meno di portare una limitazione dell'Anatomia umana a fini essenzialmente pratici, Chiarugi ribadì in un suo scritto il principio che l'insegnamento dell'Anatomia umana dovesse avere un contenuto scientifico; perchè il Nostro per il suo carattere fermo era poco incline a lasciarsi trascinare dalla moda o dai capricci di un Ministro.

Le ricerche originali alle quali il Chiarugi ha legato principalmente il suo nome, riguardano lo sviluppo dei nervi encefalici negli amnioti, pubblicate nel 1889 ed il 1897; ricerche accuratissime, esposte lucidamente e senza prolissità, e che furono grandemente apprezzate da Froriep, da van Wijhe e da altri morfologi del periodo eroico dell'Embriologia. Il Chiarugi per il primo confermò con ricerche embriologiche quanto già Fürbringer aveva dimostrato con metodo comparativo, che l'ipoglosso è un nervo spinale, assimilato alla testa e che anche il vago, è, almeno in parte, un nervo di natura spinale; più precisamente deriverebbe da associazione di radici spinali dorsali con nervi branchiali; questa doppia origine del vago fu molti anni dopo confermata dal Beccari. Per il trigemino il Chiarugi suppose pure un'origine polimera, da almeno due abbozzi branchiali, con partecipazione molto meno evidente di componenti spinali.

Pure notevole è la sua opera sulle variazioni correlative del cranio e della superficie cerebrale, nella quale opera Egli propugna il concetto sostenuto da Henle e da Bischoff, che la prima formazione dei solchi e delle circonvoluzioni cerebrali dipenda almeno in parte dalle azioni meccaniche esercitate dalla resistenza del cranio. Oggi invero i dati desunti dall'embriologia e dalla teratologia ci fanno ritenere più probabile che il cranio si modelli sull'encefalo (Fick, Schwalbe, Bluntschli ed altri); però i dati di fatto raccolti dal Chiarugi e le deduzioni che ne trasse sono degne della massima considerazione. Di singolare importanza è pure la dimostrazione data dal Nostro, in un succinto scritto, della capacità contrattile del cuore dell'embrione di pollo molto prima che esso sia innervato, non solo, ma prima ancora che nei suoi elementi si siano differenziate le miofibrille; argomento che doveva trovare più ampio sviluppo in un periodo recente.

Più ancora che in queste ed altre pregevoli opere d'indole monografica, sulle quali non mi soffermerò, la personalità del Chiarugi si è affermata nei suoi due grandi trattati: *Istituzioni di Anatomia dell'uomo* e *Trattato di Embriologia*; il primo a contenuto strettamente didattico, e che ebbe larghissima diffusione tra gli studenti di tutte le università italiane, l'altro destinato a dare agli studiosi un quadro dello stato attuale delle nostre conoscenze nell'embriogenia e nell'organogenesi.

Chi ha come me assistito per vari anni alle sue lezioni, vede riflesse nel suo trattato di Anatomia le eccezionali doti didattiche del Chiarugi; parlatore elegante ed efficacissimo, sapeva rendere attraenti i capitoli più aridi della morfologia umana. Secondo il mio avviso quell'opera per la lucida ed esatta esposizione, per il continuo aggiornamento a cui sottopose le numerose edizioni che si sono succedute nel volger degli anni, per l'equilibrio tra i vari argomenti svolti, è di gran lunga superiore a tutti i trattati italiani non solo, ma ai molti altri apparsi in Germania contemporaneamente, se si prescinde dal trattato di Anatomia di Hermann Braus, che per la originalità del suo indirizzo anatomo–fisiologico non può essere paragonato a nessun altro.

Del suo trattato di Embriologia il 1° volume apparve nel 1929, la 2ª parte del 4° ed ultimo volume fu pubblicata dopo la sua morte; vi troviamo discussi con profondità, con acume e con spirito critico tutti i problemi del divenire delle forme nell'uomo e nei vertebrati. Senza tema di errare affermo che nessun altro libro di embriologia, neppure le due opere più complete che possedevamo in un periodo molto anteriore, quella di Embriologia comparata di O. Hertwig, e l'altra di Embriologia dell'uomo di Keibel e Mall (l'una e l'altra compilate colla collaborazione di vari Autori) reggono per ricchezza di contenuto il paragone con questa poderosa opera di Chiarugi.

I primi due volumi sono dedicati all'Embriogenia, il 3° alla fissazione dell'uovo alla parete uterina, il 4°, suddiviso in due parti, all'organogenesi.

Specialmente dai primi due volumi emerge una conoscenza perfetta delle più recenti conquiste dell'Embriologia sperimentale; e nel 3° troviamo una modernissima esposizione delle più recenti scoperte sugli ormoni sessuali.

È sorprendente che il Chiarugi sia riuscito in età avanzata a rendersi padrone in modo magistrale di argomenti per Lui del tutto nuovi ed ad esporli in modo tanto perfetto. E forse ancor più sorprende che Egli abbia riconosciuto l'immensa portata di un orientamento della Morfologia tanto diverso da quello da Lui seguìto nei suoi giovani anni, differenziandosi in tale riguardo dalla più gran parte degli studiosi, anche grandissimi, i quali a tarda età sono restii ad accettare un rinnovamento nei fini e nei metodi delle discipline da essi professate.

Questa duttilità di mente conservatasi inalterata sino agli ultimi anni della sua vita, fu la dote maggiore di Chiarugi; dote che gli permise di avere tra i suoi collaboratori giovani con tendenze disparate ed ai quali Egli lasciò sempre la più grande libertà di lavorare, secondo le loro tendenze e le loro attitudini. L'Istituto anatomico di Firenze fu per 30 anni certamente la più importante scuola anatomica italiana; 8 dei suoi allievi divennero Professori di Anatomia o di Anatomia comparata (Ercole Giacomini, Socio Nazionale della nostra Accademia fu nei suoi giovani anni assistente del Chiarugi), sei divennero titolari di altri insegnamenti, molti altri divennero liberi docenti di Anatomia, di Patologia generale, di discipline applicate.

Eppure il Chiarugi non era uomo che si lasciasse facilmente avvicinare da persone che non appartenevano alla ristretta cerchia dei suoi intimi. Chi lo conosceva davvicino sapeva che questa sua ritrosia non dipendeva da scarso spirito sociale, ma da timidezza. Ad ogni modo non era certo il Chiarugi che cercava i suoi giovani collaboratori, ma questi si sentivano attratti dal fascino della sua personalità di eccezione; è a questo suo fascino personale che è legato il successo della Scuola che egli seppe creare.

Il Chiarugi era Socio onorario dell'« Institut international d'Embryologie » di Utrescht; da molti anni apparteneva alla Società italiana delle Scienze (detta dei XL); era Socio corrispondente delle principali Accademie italiane (delle Scienze dell'Istituto di Bologna, delle Scienze di Torino, dell'Istituto lombardo di scienze e lettere, dell'Istituto veneto delle Scienze, lettere ed arti).

Il Chiarugi colla fondazione nel 1890 del Monitore zoologico italiano e nel 1902 dell'Archivio italiano di Anatomia e di Embriologia, contribuì efficacemente alla diffusione all'estero delle Memorie di morfologi italiani, prima di allora sparpagliate in periodici destinati ad accogliere in prevalenza pubblicazioni di argomenti medici e scarsamente diffusi all'estero. Perchè, pur essendo Egli alieno da gretto spirito nazionalistico, fu sua preoccupazione costante di far conoscere all'estero la parte migliore della nostra produzione scientifica; e fu soltanto per questo, e non certo per meschine vanità personali, che egli volle fondare quei due periodici e con scrupolosa cura si adoperò per mantenerli vitali.

Le qualità morali ed umane di Giulio Chiarugi non erano certo inferiori alle sue doti intellettuali; tutta la sua vita fu improntata a grande nobiltà, le sue abitudini erano più che semplici, austere, il suo carattere integerrimo; nonostante la sua timidezza e sebbene non certo di spirito combattivo, egli diede in

varie occasioni prova di grande fermezza, ribellandosi contro atti che gli apparivano ingiusti. Per queste sue doti i suoi colleghi lo elessero per oltre 30 anni a Preside della Facoltà di medicina, la sua città natale lo elesse deputato al parlamento, la città di Firenze lo volle sindaco. Nel 1924, quando l'Istituto di studi superiori fu trasformato in Università, fu nominato Rettore; carica che però non mantenne a lungo; pochi mesi dopo la sua nomina, una vergognosa gazzarra degli studenti fascisti, dimentichi di quanto Egli aveva fatto per l'Università di Firenze, lo costrinse a dimettersi da quella carica. Memore dei suoi precedenti (era stato inviato al parlamento dai partiti popolari) Egli si mantenne sino agli ultimi anni della sua vita irriducibilmente avverso ad una corrente di pensiero, che urtava contro il suo innato buonsenso e che offendeva il suo sentimento ed il suo spirito di giustizia.

Commemorazione del Corrispondente Ubaldo Barbieri
(1874-1945)

letta dal Socio Gino Cassinis nella seduta del 16 ottobre 1946

Dopo anni di sofferenze, che non voleva confessare e alle quali reagiva con energia e volontà ferree, si è spento, all'inizio dell'aprile 1945, a Genova, il nostro collega Ubaldo Barbieri, professore di Geodesia in quella Università fin dal 1907, membro della Commissione Geodetica Italiana dal 1920 e Socio Corrispondente dell'Accademia dei Lincei dal 1935.

La Sua scomparsa, avvenuta pochi giorni prima della liberazione della città che considerava ormai come seconda patria (era nato a Lecce il 2 giugno 1874, ma apparteneva a famiglia emiliana), è stata avvertita da pochissimi. Io stesso, che Lo avevo visitato alla fine di gennaio, porgendogli l'augurio di tutti coloro che Lo ricordavano con affetto, venni a conoscenza della morte con due settimane di ritardo e quindi fui nella impossibilità di tributargli le estreme onoranze, ciò che rese per me ancora più triste la Sua dipartita.

Avviato alle armi, era divenuto Ufficiale effettivo del Genio Militare, ma presto lasciò quella carriera per dedicarsi agli studi. A questa determinazione certamente non fu estraneo Pietro Burgatti, amico carissimo del Barbieri, poi professore insigne di Meccanica razionale a Bologna. Cosicchè il Nostro, laureatosi in matematica, divenne assistente di Vincenzo Reina nella Scuola di Ingegneria di Roma. Là io Lo conobbi nel lontano 1904 mentre ero studente e Lo sostituii nell'assistentato nel 1907, quando Egli vinse il concorso di Geodesia per Genova. Si strinse così tra noi, fin dalla mia prima giovinezza, l'amicizia che solo la morte potè troncare.

I Suoi primi lavori (1902–04) furono di Geometria differenziale classica e precisamente trattarono problemi di rappresentazione delle superfici: su questi argomenti Egli ritornò nel 1910: le Sue note sono semplici ed eleganti, ispirate al metodo del Suo maestro Reina. Altri studi teorici il Barbieri pubblicò in quel periodo: in particolare ricordo qui le note *Sulla precisione conseguibile col metodo di Villarceau nella determinazione del geoide* e *Di un confronto tra la espressione di Helmert e quella di Pizzetti pel potenziale della gravità*, entrambe condotte con alta perizia ed eleganza e con acutezza di mente.

A Genova si orienta verso i lavori di osservazione e finisce col dedicare completamente la Sua attività scientifica allo studio prima delle sole deviazioni locali e poi anche delle anomalie della gravità lungo il meridiano di Mondovì, nell'intento di estendere e perfezionare le determinazioni effettuate oltre un secolo e mezzo avanti da P. Beccaria. Vedono così la luce numerose note Sue, quasi tutte pubblicate nei « Rendiconti dei Lincei », che riferiscono sulle determinazioni di latitudine, longitudine, azimut eseguite nei vertici di 1° ordine della rete italiana in quella zona, i cui risultati sono riassunti nella Memoria dell'Accademia d'Italia *Stazioni astronomico-geodetiche di latitudine, azimut e longitudine compiute lungo il meridiano di Mondovì* (1935), dove si riscontra che i piani delle deviazioni locali nei diversi vertici convergono verso una zona situata immediatamente a NW di Alessandria, nella quale pure le anomalie negative della gravità raggiungono il loro massimo valore numerico (90 ÷ 100 mgal). Una grande deficienza di materia esiste certo nella crosta terrestre in cotesta zona ed è merito del Barbieri averla messa in evidenza, per quanto si possano non approvare certe conseguenze un poco affrettate che Egli trae dalla constatazione.

Ma la malattia che Lo insidiava Gli rende impossibile di completare le ricerche eseguendo altre misure, come si proponeva, e deve accontentarsi di cercare di ultimare i computi di quelle effettuate negli anni precedenti.

Anche il lavoro didattico, sempre compiuto con grande amore e diligenza, diventa di mese in mese più gravoso ed Egli, per l'accresciuto tremito alle mani, non riesce più a scrivere alla lavagna, come non può più dipingere, arte che coltivava con grande sensibilità e perizia, come dopo qualche altro mese non è più capace di scrivere sulla carta. Viene la guerra: sfollamenti, morte della moglie che vivamente amava, malattie, patimenti di ogni genere e anche bombardamento dell'ospedale dove è ricoverato: solitudine.

In questa immensa tristezza Egli si spegne, come ho detto, nell'aprile 1945. Le vicende che Lo hanno condotto a morte mi riportano col pensiero alla morte di un altro nostro collega, intendo dire di Emanuele Soler, che – per quanto in migliori condizioni di salute fisica del Barbieri – soffrì lungamente le pene della solitudine e morì quando cercava di raggiungere il conforto indispensabile unendosi ai nipoti lontani.

Ad entrambi si rivolge il nostro pensiero rievocante e devoto.

Commemorazione del Corrispondente Nazzareno Strampelli
(1866-1942)

letta dal Socio G. Gola nella seduta del 16 novembre 1946

La fama di Nazzareno Strampelli vola alta da tempo tra gli agricoltori italiani come di quello che ha impresso alla nostra granicoltura un insperato incremento, grazie alle nuove razze da lui ottenute.

Intorno al 1920 un valentissimo agronomo della Romagna, descrivendomi la perfezione tecnica della granicoltura romagnola, conchiudeva affermando « gli agricoltori romagnoli hanno fatto quanto potevano per ottenere dalla pianta il massimo prodotto; procedere più oltre non è possibile perchè la pianta ne soffre; dateci una pianta che sia atta a sostenere un maggiore incremento di cure agrarie e noi produrremo di più »; e pochi anni dopo la pianta venne per opera di Strampelli e proprio nella Romagna si affermò per prima quella nuova tecnica adatta proprio a quelle razze e valse a raggiungere in Italia quelle produzioni che erano proprie solo di altri Paesi.

Questo successo e questa benemerenza dello Strampelli non si debbono ad un caso fortunato, ma proprio all'applicazione delle più rigorose norme della genetica. Come è noto la genetica, che rappresenta forse la più grandiosa conquista della biologia in questa prima metà del secolo, ha avuto la singolare ventura di essere stata fondata dal Mendel, e poi completamente allora ignorata, di essere stata riscoperta 36 anni dopo contemporaneamente da tre studiosi, l'uno ignaro dell'altro; lo Strampelli può essere in certo modo aggiunto a questa singolare e gloriosa triade, non per aver dato forma alle leggi fondamentali della genetica, ma per averne tra i primi, se non per primo, tratta una così grandiosa applicazione pratica.

È solo da pochi anni che la genetica è entrata come norma indispensabile per il razionale miglioramento delle piante agrarie, ma nei primi anni lo studio della genetica fu oggetto quasi esclusivamente di speculazione scientifica.

Lo Strampelli aveva non tanto lo spirito della speculazione scientifica, quanto piuttosto la visione esatta delle finalità alle quali poteva servire la genetica e la profonda conoscenza della vita di ogni razza di cereali: così che poteva creare nella sua mente la pianta desiderata prima che essa divenisse realtà.

Egli entrò in questo campo tanto promettente di risultati nel 1900, quando era insegnante a Camerino, nell'anno stesso della riscoperta delle leggi di Mendel, e sembra che egli le abbia ignorate fino al 1905; ma le sue ibridazioni e le selezioni nelle successive filiazioni furono condotte colla sicurezza di chi ha la piena conoscenza delle modalità colla quale si trasmettono i caratteri nella discendenza.

Nella stazione di granicoltura di Rieti che lo Stato aveva istituito nel 1904, egli ebbe il campo per seguire in pieno le proprie originali vedute, e vi

si dedicò praticando numerosissime ibridazioni e ne fece il centro di tutta la nuova granicoltura italiana.

Fu così che, dopo una serie di ibridazioni tra le più varie, che valsero ad affinare in lui quella sensibilità che gli permetteva di prevedere l'esito delle nuove razze da lui, per così dire, progettate, egli poté nel 1920 presentare agli agricoltori italiani il primo di una serie di frumenti nuovi i quali portarono tanto beneficio ad una gran parte dell'agricoltura italiana. Fino dal primo di questa serie di razze elette, l'Ardito, si trovarono riuniti insieme quei caratteri che eliminavano le più gravi manchevolezze che travagliavano la granicoltura italiana. La scelta dei progenitori delle nuove razze era stata da lui determinata in base alla più completa conoscenza dei caratteri morfologici e funzionali delle singole razze.

Dalle pubblicazioni dello Strampelli, dai protocolli delle infinite sperimentazioni sulle quasi centomila filiazioni derivate da 800 ibridazioni da lui praticate risultano quanti fatti di genetica egli abbia veduti, alcuni precorrendo quelli che la scienza ufficiale rese noti solo più tardi.

Ma la finalità della sua opera non era tanto quella di aprire nuove vie agli studiosi, ma di dare un beneficio tangibile alla economia della nazione. « Le mie pubblicazioni – egli scrisse – quelle a cui tengo veramente, sono i miei grani, non conta se essi non portano il mio nome, ma ad essi resta affidata la modesta opera mia svolta nell'interesse della granicoltura del mio Paese ».

La straordinariamente rapida adozione di queste razze in una gran parte della granicoltura italiana, i riflessi che questi successi ebbero nel dare nuovo incremento alle attività agricole del nostro Paese, indicano quanto grande sia stata l'opera sua, e come giustamente la nostra Accademia lo abbia onorato, dapprima conferendogli il Premio Santoro, chiamandolo poi tra i suoi Soci corrispondenti.

Commemorazione del Socio Enrico Carano
(1877-1943)

letta dal Socio G. Gola nella seduta del 16 novembre 1946

Enrico Carano mancò alla scienza e alla scuola nella nativa Gioia del Colle, lontano dall'Istituto di Roma, nel quale aveva svolto quasi tutta la sua vita scientifica di studioso e di maestro.

Egli aveva, come di consuetudine, lasciato per un breve riposo l'Istituto al quale aveva dedicato ogni sua attività, nè travolto dalla bufera della guerra, potè più rivederlo.

Alla Scuola di Romualdo Pirotta Egli aveva formato la Sua personalità scientifica dedicandosi specialmente agli studi di morfologia. Dapprima furono

ricerche legate alla classica anatomia, secondo la scuola cara al Suo maestro. Ma in questo campo assunse presto una piena autonomia di indirizzo, così che i lavori di pura morfologia costituirono il termine di partenza per nuove ricerche alcune di carattere tecnico, che restano definitive acquisizioni della nostra scienza, altre aventi interesse per l'anatomia generale dei vegetali.

Ma sopratutto è da notare in queste ricerche la profondità delle indagini che lo portavano ad approfondire sempre più il problema dell'origine delle particolarità morfologiche da lui osservate, così da spingersi fino ad osservare all'origine prima dei tessuti che egli andava studiando. Si trovò così nel campo dell'embriologia, che allora andava sviluppandosi come una branca importante della morfologia e della fisiologia della riproduzione.

In questo indirizzo di lavoro assunse in Italia la posizione di caposcuola, e da lui discendono i valentissimi cultori dell'embriologia vegetale che onorano la nostra scienza.

Sono state dapprima le Composite che furono per lui vasto campo di lavoro riconoscendovi importanti particolarità nell'organizzazione del gametofito; in seguito si rivolse ad altri gruppi di piante. Di particolare rilievo è la scoperta di un nuovo tipo di formazione del gametofito di *Euphorbia dulcis*, il quale è di grande interesse nel quadro delle dottrine embriologiche.

Non mi soffermo a ricordare numerose Memorie di carattere vario, sistematico floristico, applicativo, storico, che si debbono al Carano.

Di carattere assai riservato, dedito esclusivamente allo studio e alla scuola, egli si era fatta una preparazione culturale notevolissima, assai superiore a quella che può risultare dalla sue pubblicazioni; egli era perciò maestro insuperabile non solo di metodo, ma anche di dottrina a quanti si volessero indirizzare nei più diversi campi della botanica.

Commemorazione del Corrispondente Lionello Petri

(1875-1946)

letta dal Socio G. Gola nella seduta del 16 novembre 1946

Lionello Petri aveva seguìto a Firenze gli studi naturalistici dedicandosi alla zoologia alla scuola di Targioni Tozzetti, ma si era distinto anche come botanico, così che Oreste Mattirolo lo volle suo assistente. A queste due scuole di alta fama Egli apprese le basi zoologiche e botaniche della sua attività scientifica; quando il Cuboni chiese consigli al Mattirolo per ricercare un assistente ben preparato ad affrontare i problemi della Stazione di fitopatologia di Roma, il Petri passò a Roma, dove alla scuola del grande biologo, quale fu il Cuboni, il Petri completò la sua personalità di studioso.

Con questa preparazione di alta coltura e di rigoroso metodo di lavoro il Petri assunse subito una posizione di primo piano, per la sua eccezionale atti-

vità di studioso, per la costante originalità del modo col quale affrontava le indagini. Molti dei più importanti problemi fitopatologici che travagliano l'agricoltura nostra ebbero dal Petri la soluzione universalmente accettata; così è di alcune malattie dell'olivo, del mal dell'inchiostro del Castagno, del mal secco degli agrumi: la soluzione di uno solo di tali problemi basterebbe a fissare un diritto di grande benemerenza.

Ma non vi è, si può dire, problema della fitopatologia italiana che non sia stato da parte sua oggetto di indagini profonde e ricche di risultati; ricordo per tutte le ricerche sull'arricciamento della vite.

Nei suoi quasi 250 lavori sono molti i campi di studio, anche lontani dal diretto riferimento alla fitopatologia, al quale Egli ha dedicato la sua mente geniale.

Caratteristica della sua *forma mentis* era quella di non fermare l'indagine allo stretto campo della difesa da un malanno per la nostra agricoltura, ma di elevare il fatto contingente ad un problema biologico generale. È per questo che egli a buon diritto è stato considerato non solo un grande fitopatologo ma anche un grande botanico.

La risonanza della Sua opera volava alta oltre i confini dell'Italia dove Egli aveva più volte rappresentato il pensiero della fitopatologia italiana sui più importanti problemi che la interessano.

Austero, lontano da tutti i rivolgimenti morali e politici che hanno travagliato il nostro Paese negli anni in cui fu in un posto di alta responsabilità, Egli costituì un esempio insigne di alta personalità scientifica, di dedizione agli studi e al dovere.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Crocco accenna alla notizia apparsa sulla stampa delle onoranze tributate a Chicago al Socio Enrico Fermi e propone che l'Accademia si associ a tali onoranze che sono un giusto riconoscimento dei meriti dell'eminente Collega.

Il Presidente interpretando il pensiero unanime dei presenti, accoglie la proposta del Socio Crocco e assicura che provvederà a inviare un telegramma a nome dell'Accademia.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente comunica che sono giunti all'Accademia quattro plichi suggellati, tre dell'ing. Pietro Bonna, depositati presso la Cancelleria rispettivamente in data 21 giugno 1946, 28 agosto 1946, e 22 novembre 1946; e uno del prof. Vasco Ronchi, depositato presso la Cancelleria il 9 agosto 1946. Tutti e quattro i plichi saranno conservati negli Archivi dell'Accademia a disposizione dei depositanti secondo le norme consuete.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente presenta in omaggio il I volume della *Collana di Classici* delle Scienze Fisiche Matematiche e Naturali edita dalla Casa Sandron sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche e con la direzione dei professori Castelnuovo e Enriques. Questo primo volume contiene il Dialogo dei massimi sistemi di Galileo. Ad esso seguiranno altri volumi che riguarderanno la pubblicazione delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* di Gauss, le opere di Avogadeo e di Cannizzaro, e scritti di Lobatchefski, Bolyai, Riemann, Beltrami, Goethe e Mendel.

Il Socio Silvestri presenta in omaggio una sua Nota sui « Nuovi Stafilinidi Termitofili dell'America Meridionale » e ne parla.

Il Corrispondente Brunelli presenta in omaggio i volumi XIII–XIV e XV della *Bibliographia Oceanographica* riguardanti gli anni 1940, 1941 e 1942, pubblicati a cura della Delegazione italiana della Commissione Internazionale per l'esplorazione scientifica del mare Mediterraneo, e ne parla. Presenta anche un volume di studi vulcanologici sul vulcano Paricutin pubblicati dall'Istituto di geologia dell'Università del Messico.

L'Accademico Segretario Bordoni, presenta le opere giunte in dono alla Accademia segnalando un grosso gruppo di pubblicazioni del prof. Godofredo Garcia professore nelle Facoltà di Scienze dell'Università di S. Marco di Lima.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note e Memorie per l'inserzione negli Atti accademici i Soci Cassinis, Perucca, Bompiani, Silvestri, Armellini, Carrelli, Checchia–Rispoli.

L'Accademico Segretario Bordoni legge l'elenco delle Note inviate prima della seduta.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Carrelli A., « Sulla polarizzazione della luce del cielo ». Nota IV.

Cassinis G., « Sulla teoria degli strumenti goniometrici ».

Abele M., « Studio energetico in regime transitorio di un bipolo lineare passivo » (pres. dal Socio E. Perucca).

Cimino M., « Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma ». Nota I (pres. dal Socio G. Armellini).

Cortellessa M. L., « Ricerche sull'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale degli anfibi » (pres. dal Socio F. Silvestri).

Dulzetto F., «Osservazioni sulla deposizione di "Murex Trunculus L."» (pres. dal Socio A. Russo).

Grasso V., « Le specie di Tilletia del frumento esistenti in Italia » (pres. dal Corrisp. G. Negri).

Grossetti E., « Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli liquidi di notevole viscosità » (pres. dal Corrisp. A. Carrelli).

Giuliano L., « Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano ». Nota I (pres. dal Corrisp. E. Bompiani).

Giuliano L., « Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano ». Nota II (pres. dal Corrisp. E. Bompiani).

Krall G., « Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose ». Nota II (pres. dal Socio C. Somigliana).

Levi-Montalcini R., « Ricerca sperimentale sull'origine dei gangli del glosso–faringeo e del vago nell'embrione di pollo » (pres. dal Socio G. Levi).

Maxia C., « Nuova formazione di facies limnica pleistocenica presso Rignano Flaminio (Tuscia Romana)» (pres. dal Corrisp. G. Checchia–Rispoli).

Vinaccia G., « Nuovo sistema per il calcolo rapido del soleggiamento urbanistico ed edile. Termoeliografometria » (pres. dal Socio G. Armellini).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 16 Novembre 1946.

Bibliographia Oceanographica. Johannes Magrini, fundator. Voll. XIII, XIV, XV. Romae, ex Typis Johannis Bardi, 1941–1944.

CASTELNUOVO Guido. — Vedi: GALILEI Galileo.

GALILEI Galileo. — *Dialogo dei massimi sistemi, II–III giornata.* A cura di G. Castelnuovo. Introduzione di F. Enriques. Roma, Editrice Sandron, 1945. Pp. 498, in 16°, con figg. (Collana dei Classici delle Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali).

GARCIA Godofredo. — *Application astronomique de l'invariant adiabatique en mécanique einsteinienne.* Estr. da « Annales de la Société Polonaise de Mathématique », vol. XIII, 1934.

— *El problema general de la Balística Exterior.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLIII, n. 432.

— *El problema de los tres cuerpos.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLIV, 1942, n. 440.

— *Generalización de la teoría del Virial.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLVI, n. 447.

— *Generalization of Sundman's fundamental equality to the case of more than three bodies — Generalization of the inequality of Sundman to the case of more than three bodies and to the case of a gravitational gas.* Estr. da « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. XXVIII, 1942, n. 10.

— *Influencia de la rotación del planeta en el movimiento del proyectil en un medio resistente.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLI, n. 429.

— *Le problème général de la balistique extérieure.* Estr. da « Comptes–rendus des séances de l'Académie de Sciences », vol. CCVII, 1938 e da « Bulletin des Sciences mathématiques », vol. LXIV, 1940.

GARCIA Godofredo. — *Le problème secondaire de la balistique extérieure.* Estr. da « Comptes–rendus des séances de l'Académie des Sciences », vol. CCVIII, 1939.

— *Movimiento de un sistema continuo por sola gravitación. — Aplicación a las nebulosas.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima », vol. VI, a. VI, 1943, fasc. 2.

— *Resolución general del problema balístico comprendiendo las correcciones de esfericidad del planeta de densidad del medio, de la gravedad y de la acción del viento.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLI, n. 429.

— *Sobre el estado actual del sistema Solar.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima », vol. VII, a. VII, 1944, fasc. 4.

— *Sobre el fenómeno giroscópico en el movimiento del proyectil.* Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima », vol. V, a. V, 1942, fasc. 3.

— *Sobre el problema de los n cuerpos y el movimiento del gas gravitacional (o de una nebulosa).* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLIV, n. 442.

— *Sobre la intervención en el Sistema Solar además de la atracción universal de fuerzas disipativas y de fuerzas giroscópicas.* Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLVII, n. 452.

GARCIA Godofredo. — *Sobre la propagación de las ondas sísmicas del señor C. Somigliana en los medios que tienen las propiedades del sistema cristalino cúbico*. Estr. da « Revista de Ciencias », a. XLIII, n. 436.

— *Sobre la regularización del problema plano del los tres cuerpos*. Estr. da « Revista de Ciencias », a.. XLV, numeri 443, 444; e da « Homenaje a Julio Rey Pastor », vol. I. Rosario, 1943.

— *Sobre una nueva forma de las desigualdades de K. Sundman en el problema de los tres cuerpos*. Estr. da « Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima », vol. V, 1942, fasc. 4.

— *Sobre una nueva teoría cosmogónica*. Estr. da « Revista de Ciencias ». Lima a. XLVI, n. 450.

— et ROSENBLATT Alfred. — *Sur la formule de Stokes dans la théorie de la gravité*. Estr. da «Comptes–rendus des séances de l'Académie des Sciences », voll. CCVI, CCVII, 1938 e da « Bulletín des Sciences mathématiques », volume LXIII, 1939.

GARCIA Godofredo et ROSENBLATT Alfred. — *Sur la régularisation du problème plan des trois corps*. Estr. da « Comptes–rendus des séances de l'Académie des Sciences », vol. CCIV, 1937.

INSTITUTO de Geología (Universidad Nacional Autonoma de Mexico). — *El Paricutin. Estado de Michoacan*. Mexico, Impr. Universitaria, 1945, Pp. VI–166, in 4°, con tavv. e figg. (Estudios Vulcánológicos).

MAGRINI Giovanni. — Vedi: *Bibliographia Oceanographica*.

SILVESTRI Filippo. — *Nuovi stafilinidi termitofili dell'America Meridionale*. Estr. da « Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli », s. IV, vol. XIV, 1946.

SPARN Enrique. — *Lista sistemática de los nuevos géneros, especies, y variedades de plantas y animales fósiles de la Argentina, cuyas descripciones se publicaron durante 1942-1944*. Estr. da « Boletín de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Córdoba » a. IX, 1946, n. 1.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 dicembre 1946

Presidenza del Socio G. Castelnuovo

NOTE DI SOCI

Geodesia. — *Sulla teoria degli strumenti goniometrici.* Nota [1] del Socio G. Cassinis.

Nella presente Nota mi propongo di precisare qualche punto della teoria dei goniometri (equatoriali, altazimutali e derivati) che non mi risulta messo in evidenza nelle ricerche precedenti. Ai risultati arrivo impiegando un semplice metodo di studio delle « rotazioni finite della sfera », che consente la trattazione analitica rigorosa e *unitaria* del problema, e quindi anche quella approssimata di qualsiasi ordine. Limitatamente all'approssimazione del 1° ordine, il procedimento, con alcune modificazioni di forma, era stato seguito da A. Antoniazzi [2] nelle sue *Lezioni di Astronomia,* 1921, mentre una trattazione generale del problema, con la quale però non si arriva alla valutazione analitica degli errori con approssimazione superiore al 1° ordine, è stata fatta da F. Casorati fin dal 1875 [3]. Trattazioni *parziali* rigorose si trovano in alcuni libri, in particolare nella *Geodesia* di P. Pizzetti [4].

1. Rotazioni della sfera. – Sia Z il polo delle coordinate polari (u, v) assunto sulla sfera unitaria, e ZX il meridiano origine per gli angoli v valutati positivamente nel verso destrorso. Siano $M_0\,(u_0, v_0)$ il punto intorno al quale si fa rotare la sfera (sempre nel verso destrorso), e $M\,(u, v)$ un punto qualunque della sfera.

(1) Presentata nella seduta del 16 novembre 1946.

(2) A. Antoniazzi, *Lezioni di Astronomia.* Parte prima (Litografato), La Litotipo, Padova, 1921.

(3) F. Casorati, *Sulla regola seguita da Bessel...* « Atti Lincei », ser. II, t. 2, 1875.

(4) P. Pizzetti, *Trattato di Geodesia teoretica.* Zanichelli, Bologna, 1928.

Supposto di effettuare intorno a M_0 la rotazione rigida θ della sfera, le coordinate (u', v') del punto M' raggiunto da M si possono ottenere nel modo che segue. Si assume M_0 come polo di un nuovo sistema (U, V) di coordinate, contando V dal meridiano ZM_0. Dal triangolo ZM_0M, si hanno, per le coordinate (U, V) di M, le formule:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos U = \cos u_0 \cos u + \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} u \cos (v - v_0) \\ \operatorname{sen} V = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} (v - v_0) \csc U \\ \cot V = \cos u_0 \cot (v - v_0) - \operatorname{sen} u_0 \cot u \csc (v - v_0). \end{cases}$$

Delle due ultime si potrà scegliere, a seconda dei casi, quella che farà più comodo per il calcolo di V, come – del resto – si potrà ricorrere, volendo, alle altre ben note formule di risoluzione del triangolo sferico.

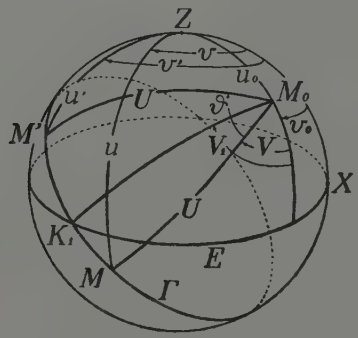


Fig. 1.

Dopo la rotazione θ, che porta M in M', le coordinate di questo punto rispetto a M_0 sono: U, V + θ. Da esse si ottengono le coordinate (u', v') rispetto a Z con le formule:

$$(2)\quad \begin{cases} \cos u' = \cos u_0 \cos U - \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} U \cos (V + \theta) \\ \cot (v' - v_0) = \cos u_0 \cot (V + \theta) + \operatorname{sen} u_0 \cot U \csc (V + \theta), \end{cases}$$

o con altre analoghe della trigonometria sferica.

2. Cerchi minori. – Durante la rotazione, il punto M descrive un cerchio Γ di polo M_0, la cui equazione è U = cost. In generale, si tratta di un cerchio minore, il quale diviene l'equatore di M_0 quando $U = \pi/2$. In coordinate (u, v), l'equazione di Γ, il cui piano è inclinato dell'angolo u_0 sul piano dell'equatore E di Z, è data dalla prima (1). Facendo ivi $u = \pi/2$ (equazione di E), si ottiene:

$$\cos (v - v_0) = \csc u_0 \cos U,$$

che dà le anomalie (o longitudini) rispetto a Z dei punti K_1, K_2 intersezioni di Γ, con l'equatore E. Gli angoli analoghi V_1, $V_2 = 360° - V_1$ rispetto M_0 sono dati da:

$$\cos V_1 = \cot u_0 \cot U, \tag{3}$$

e l'angolo di cui deve rotare K_1 per passare in K_2 è:

$$\Theta = 360° - 2\,V_1. \tag{4}$$

3. Cerchi obliqui. – Sia sempre M_0 il polo delle rotazioni, e si consideri un cerchio minore Γ^* avente la distanza polare Ω dal suo polo M^*, distinto da M_0. La distanza angolare su Γ^* di due punti S, T ad esso appartenenti è misurata dall'angolo η tra i cerchi massimi M^*S, M^*T; mentre l'angolo η_0

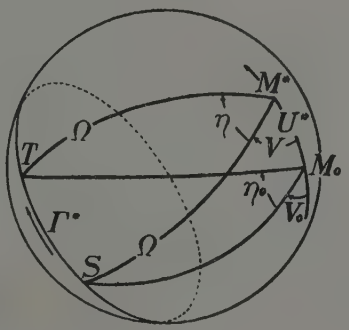


Fig. 2.

di cui deve rotare intorno a M_0 il cerchio massimo M_0S fino a giungere alla posizione M_0T è, in generale, diverso da η. Questo particolare problema di «riduzione in centro» sulla sfera, si risolve con le formule rigorose (v. fig. 2):

$$\begin{cases} \cos U^* \cot V - \cot V_0 = \operatorname{sen} U^* \cot \Omega \csc V \\ \cos U^* \cot (V + \eta) - \cot (V_0 + \eta_0) = \operatorname{sen} U^* \cot \Omega \csc (V + \eta). \end{cases} \tag{5}$$

Posto

$$\Omega = \frac{\pi}{2} - \omega \quad , \quad V_0 = V + \Delta V \quad , \quad \eta_0 = \eta + \Delta\eta,$$

e ritenuto U^*, ω quantità piccole del 1° ordine, dalle precedenti si ricava:

$$\begin{cases} \Delta V = U^* \left(\omega + \frac{U^*}{2} \cos V_0\right) \operatorname{sen} V_0 + t_3 \\ \Delta\eta = \frac{1}{2} U^{*2} \operatorname{sen} \eta \cos (2\,V_0 + \eta) + 2\,U^* \omega \operatorname{sen} \frac{\eta}{2} \cos \left(V_0 + \frac{\eta}{2}\right) + t_3; \end{cases} \tag{6}$$

cosicchè, come è ben conosciuto, la correzione da apportare all'angolo indicato su Γ^* (che può essere un cerchio graduato di un strumento goniometrico) per ridurlo a quello di cui effettivamente ha rotato la sfera, è piccola del 2° ordine. Ma, in aggiunta a quanto fin qui notò, oltre la correzione dovuta all'errore di ortogonalità tra asse e cerchio, si deve tener presente quella derivante da un errore di inclinazione o di collimazione ω, che influisce con ammontare analogo alla prima, purchè questa esista.

4. Formule fondamentali intrinseche per un goniometro. – Nello studio che segue farò astrazione, in un primo tempo, dall'eccentricità dei cerchi graduati e dell'asse di collimazione, come dalla esistenza di assi di ripetizione o di reiterazione distinti dai fondamentali. Ed inoltre, dopo i risultati del n. 3, anche dagli errori di ortogonalità tra assi e rispettivi cerchi graduati.

In tali ipotesi, le condizioni interne, o intrinseche, di funzionamento « perfetto » dello strumento sono: ortogonalità tra l'asse principale (fisso) e il secondario (mobile), ortogonalità tra l'asse mobile e l'asse di collimazione.

Supposte verificate queste condizioni, sia Z il polo strumentale (o intrinseco) di un goniometro: esso è il polo dell'asse fisso dello strumento, considerato dalla parte dalla quale si vede crescere, nel verso orario, la graduazione del cerchio fisso (o principale).

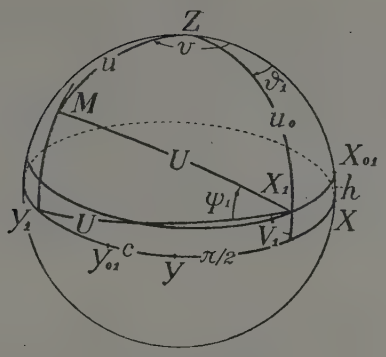
Nelle « condizioni iniziali », in posizione cerchio mobile a sinistra (C. S.), l'estremo dell'asse mobile che porta il cerchio secondario sia rappresentato dal punto X (fig. 3), mentre l'asse di collimazione si supponga contenuto nel piano dell'equatore E di Z e il suo verso uscente dall'obbiettivo del cannocchiale sia rappresentato dal punto Y. I tre archi di cerchio massimo ZX, XY, ZY valgono ciascuno $\pi/2$.

Si introducano, ora: l'*errore di inclinazione*, portando X in X_{01} (sempre sul cerchio massimo ZX, origine delle anomalie v) alla distanza b da X; e l'*errore di collimazione attuale* o *apparente*, portando Y in Y_{01} (sempre sull'equatore E) alla distanza c da Y. Le coordinate rispetto a Z dei punti X_{01}, Y_{01} sono date nel seguente specchietto:

	u	v
X_{01}	$90° - b$	0
Y_{01}	$90°$	$90° + c$.

Si effettui la rotazione θ_1 intorno a Z: i punti X_{01}, Y_{01} passano rispettivamente in X_1, Y_1, di coordinate:

X_1	$90° - b$	θ_1
Y_1	$90°$	$90° + c + \theta_1$,



$U = U_1 = 90^\circ + c_0$

Fig. 3.

e le coordinate $U_1 = 90^\circ + c_0$, V_1 di Y_1 rispetto X_1, dove c_0 è l'*errore di collimazione propriamente detto*, per le (1), si calcolano dalle relazioni:

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos U_1 = -\operatorname{sen} c_0 = -\cos h \operatorname{sen} c, \\ \cot V_1 = -\operatorname{sen} h \tan c, \\ \operatorname{sen} U_1 \operatorname{sen} V_1 = \cos c_0 \operatorname{sen} V_1 = \cos c \\ \operatorname{sen} U_1 \cos V_1 = \cos c_0 \cos V_1 = -\operatorname{sen} h \operatorname{sen} c, \end{cases}$$

la prima delle quali:

$$(7')\qquad \operatorname{sen} c = \sec h \operatorname{sen} c_0$$

esprime in modo rigoroso l'errore di collimazione apparente in funzione di quello propriamente detto. Si noti che, in realtà, quando esiste l'errore di inclinazione, le misure, fatte a mezzo del cerchio E, portano alla determinazione di c e non a quella di c_0, come si suppone di solito, commettendo un errore del 3° ordine, perchè infatti da (7'), ritenendo h, c_0 piccole del 1° ordine, si ha:

$$(7'')\qquad c = c_0 + \frac{h^2 c_0}{2} + t_5 .$$

A noi converrà quindi di conservare nelle formule c, in luogo di introdurvi c_0.

Si effettui, ora, la rotazione diretta ψ_1 intorno al punto X_1: se Λ è la lettura iniziale al cerchio mobile (supposto graduato in senso inverso o sinistrorso), la lettura diventa:

$$(8_1)\qquad S = \Lambda + \psi_1$$

e il punto Y_1 passa in M, le cui coordinate rispetto X_1 sono U_1, $V_1 + \psi_1$. Dalle (2) si ricavano, allora, le seguenti formule rigorose per il calcolo delle coordinate u, v di M rispetto a Z:

$$(9_1)\quad \begin{cases} \cos u = \{\cos c \operatorname{sen} \psi_1 + \operatorname{sen} h \operatorname{sen} c \cos \psi_1 - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} c\} \cos h \\ \cot (v - \theta_1) = \dfrac{\operatorname{sen} h \cos c \operatorname{sen} \psi_1 + \operatorname{sen}^2 h \operatorname{sen} c \cos \psi_1 + \cos^2 h \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \psi_1 - \cos c \cos \psi_1}. \end{cases}$$

Si rimetta lo strumento nella posizione iniziale e si effettui la rotazione di 180° intorno a Z: i punti X_{01}, Y_{01} assumono le posizioni X_{02}, Y_{02} con le coordinate:

X_{02}	$90° - h$	$180°$
Y_{02}	90_0	$270° + c$,

mentre la lettura iniziale al cerchio mobile è sempre Λ. Per raggiungere ancora il punto M (u, v), saranno necessarie: una rotazione θ_2 intorno a Z, che porterà i punti X_{02}^*, Y_{02} nelle posizioni X_2, Y_2 di coordinate:

X_2	$90° - h$	$180° + \theta_2$
Y_2	$90°$	$270° + c + \theta_2$;

e una rotazione diretta ψ_2' intorno ad X_2, che porterà Y_2 in M. Si vede subito che le coordinate di Y_2 rispetto X_2 sono ancora date dalle (7); e quindi le coordinate di M rispetto X_2 sono U_1, $V_1 + \psi_2'$.

Conviene dare a ψ_2' un'espressione in cui si tiene conto del fatto che il piano Γ del cerchio mobile, per l'esistenza dell'errore di inclinazione, non è normale all'equatore E, e, in causa dell'errore di inclinazione, determina sulla sfera un cerchio minore. Si potrebbe a tal fine usare la (3), ma, nel caso specifico è più vantaggioso l'impiego della seconda (7), che le equivale. Ponendo $V_1 = 90° + \varepsilon$, si ha da essa:

$$(10)\qquad \tan \varepsilon = \operatorname{sen} h \tan c$$

e, da (4):

$$\Theta = 180° - 2\varepsilon.$$

Gioverà, allora, scrivere:

$$\psi_2' = 180° - \psi_2 - 2\varepsilon,$$

introducendo un angolo ψ_2, che sarebbe uguale a ψ_1 qualora non esistessero gli errori h, c.

La lettura fatta sul cerchio mobile nella posizione C. D. risulta:

$$(8_2)\qquad D = \Lambda + \psi_2' = \Lambda + 180° - \psi_2 - 2\varepsilon:$$

mentre dalle (2) si ottengono le formule seguenti, analoghe alle (9_1), per il calcolo rigoroso delle coordinate u, v di M:

$$(9_2)\quad \begin{cases} \cos u = \{\cos c \operatorname{sen} (\psi_2 + 2\varepsilon) - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} c \cos (\psi_2 + 2\varepsilon) - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} c\} \cos h \\ \cot (v - \theta_2) = \dfrac{\operatorname{sen} h \cos c \operatorname{sen} (\psi_2 + 2\varepsilon) - \operatorname{sen}^2 h \operatorname{sen} c \cos (\psi_2 + 2\varepsilon) + \cos^2 h \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} h \operatorname{sen} c \operatorname{sen} (\psi_2 + 2\varepsilon) + \cos c \cos (\psi_2 + 2\varepsilon)}. \end{cases}$$

5. Determinazione delle distanze polari strumentali. – Le quattro equazioni (9_1), (9_2), rigorose e valevoli qualunque siano h, c, consentono, in linea di principio, di determinare i valori delle rotazioni $\theta_1, \psi_1; \theta_2, \psi_2$ che è necessario compiere rispettivamente nelle posizioni C. S., C. D. per raggiungere le coordinate intrinseche u, v.

Si osservi, intanto, che, uguagliando le espressioni entro le graffe della prima (9_1) e della prima (9_2), ed eseguendo facili passaggi, si ottiene rigorosamente $\psi_2 = \psi_1 = \psi$.

Ponendo:

$$\psi = 90^\circ - (u + \Delta\psi), \tag{11}$$

dalle (8_1), (8_2), si hanno le relazioni rigorose:

$$\begin{cases} \zeta = \Lambda + 90^\circ = \dfrac{D+S}{2} + \varepsilon \\ u = \dfrac{D-S}{2} + \varepsilon - \Delta\psi, \end{cases} \tag{12}$$

la prima delle quali dà il cosidetto zenit strumentale, mentre la seconda serve a valutare la distanza polare (intrinseca) u.

Per poter effettivamente determinare quest'ultima necessita calcolare $\Delta\psi$, e ciò noi faremo sostituendo (11) nella prima (9_1) e sviluppando nell'ipotesi che h, c siano quantità piccole del 1° ordine. Si trova:

$$\Delta\psi = hc - hc \csc u - \frac{h^2 + c^2}{2} \cot u + t_4, \tag{13}$$

e poichè, nello stesso ordine di approssimazione, si ha $\varepsilon = hc + t_4$, segue:

$$u = \frac{D-S}{2} + hc \csc u + \frac{h^2 + c^2}{2} \cot u + t_4. \tag{12'}$$

Poichè, per (7''), si può nella precedente sostituire c_0 a c senza che essa muti di forma, si ottiene la relazione ben nota, che mostra come la correzione da apportare alla semidifferenza delle letture per ottenere la distanza polare sia piccola del 2° ordine.

6. Determinazione delle anomalie strumentali. – Se, nelle seconde equazioni (9_1), (9_2), si pone: $\psi_1 = \psi_2 = \psi$,

$$v - \theta_1 = 90^\circ + \Delta\theta_1 \quad , \quad v - \theta_2 = 90^\circ + \Delta\theta_2, \tag{14}$$

si ottengono per $\tan\Delta\theta_1$ e $\tan\Delta\theta_2$ due espressioni che mostrano essere *rigorosamente* verificata la conclusione $\Delta\theta_2 = -\Delta\theta_1$ ordinariamente ammessa, in base a ragionamenti fatti ritenendo piccole del 1° ordine le scorrezioni h, c e quindi trascurando i loro quadrati. A tal fine basta sommare il secondo membro della seconda equazione (9_2) col secondo membro della seconda (9_1),

riducendo allo stesso denominatore e tenendo conto del valore di $\tan\varepsilon$ dato da (10): si ottiene un risultato identicamente nullo qualunque sia il valore dell'angolo ψ. Si ha, quindi:

$$(14') \qquad \begin{cases} v - 90^\circ = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} \\ \theta_2 = \theta_1 + 2\,\Delta\theta\,. \end{cases}$$

Se ne conclude che, ammessa la perfetta centratura dei cerchi graduati e dell'asse di collimazione, la regola di Bessel vale in modo rigoroso qualunque sia il valore delle scorrezioni strumentali interne, come già ha dimostrato Casorati. Inoltre, dalle nostre formule si ricava, con qualsiasi ordine di approssimazione, il valore della correzione $\Delta\theta = \Delta\theta_1$ da apportare alla lettura C. S. per ridurla a ciò che sarebbe ove non esistessero gli errori b, c. Sviluppando in serie la seconda (9_1), tenendo conto di (10), (13), si ha infatti:

$$(15) \qquad \Delta\theta = (b\cot u + c\csc u) + \frac{1}{6}(b\cot u + c\csc u)^3 + \\ + \frac{b^3}{3}\cot u - \frac{c^3}{6}\csc u + t_5\,.$$

7. Riferimento al polo esterno o astronomico P. – Può trattarsi o del polo terrestre (strumento equatoriale) o dello zenit locale (teodolite). Senza che ciò costituisca limitazione, si può ritenere che, nelle condizioni iniziali di fig. 3, il polo P appartenga al cerchio massimo origine ZX. Assunto il sistema di coordinate (u', v') di origine P, avente per origine delle anomalie il cerchio PZX, siano $u' = p$, $v' = 0$ le coordinate del polo strumentale Z. Dal triangolo PZM, si ha:

$$(16) \qquad \begin{cases} \cos u' = \cos p\cos u - \operatorname{sen} p\operatorname{sen} u\cos v \\ \operatorname{sen} v\cot v' = \operatorname{sen} p\cot u + \cos p\cos v\,. \end{cases}$$

Ritenuto p piccola del 1° ordine e posto $u' = u + \Delta u$, $v' = v + \Delta v$, si trova:

$$(17) \qquad \begin{cases} \Delta u = p\cos v + \dfrac{p^2}{2}\cot u\operatorname{sen}^2 v + t_3\,, \\ \Delta v = -p\cot u\operatorname{sen} v + p^2\left(\csc^2 u\cot v + \cot^2 u - \frac{1}{2}\cot^2 u\tan v\right)\operatorname{sen}^2 v + t_3\,. \end{cases}$$

Introducendo u' al posto di u, la prima (12), che dà lo zenit strumentale, valore eminentemente intrinseco dello strumento, rimane invariata, mentre la seconda diventa:

$$(18) \qquad u' = \frac{D - S}{2} + p\cos v + t_2\,.$$

Analogamente, da (14) e (17) si ha:

$$v' = 90^\circ + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - p \cot u \operatorname{sen} v + t_2,$$

come pure è ben noto.

8. Influenza dell'eccentricità dei cerchi graduati. — a) *Cerchio mobile.* – Nel caso in cui esiste l'eccentricità lineare e, le letture D, S devono essere corrette. Se Σ è la lettura, che diremo « iniziale », corrispondente all'estremo del diametro del cerchio situato dalla parte in cui si trova il centro di rotazione, e r è il raggio della graduazione, le letture corrette sono date da:

$$(\Sigma - D^*) = (\Sigma - D) + \frac{e}{r} \operatorname{sen} (\Sigma - D) + \cdots$$

$$(\Sigma - S^*) = (\Sigma - S) + \frac{e}{r} \operatorname{sen} (\Sigma - S) + \cdots,$$

e quindi si ha:

$$(D^* + S^*) = (D + S) - \frac{e}{r} \{\operatorname{sen} (\Sigma - D) + \operatorname{sen} (\Sigma - S)\} + \cdots$$

$$= (D + S) - 2 \frac{e}{r} \operatorname{sen} (\Sigma - \zeta) \cos u + \cdots$$

$$(D^* - S^*) = (D - S) + 2 \frac{e}{r} \cos (\Sigma - \zeta) \operatorname{sen} u + \cdots$$

ovvero:

$$(19) \quad \begin{cases} \zeta = \dfrac{D + S}{2} - \dfrac{e}{r} \operatorname{sen} (\Sigma - \zeta) \cos u + \varepsilon + t_3 \\ u = \dfrac{D - S}{2} + \dfrac{e}{r} \cos (\Sigma - \zeta) \operatorname{sen} u + \varepsilon - \Delta\psi + t_3. \end{cases}$$

Se ne conclude, come è noto, che, usando un solo microscopio di lettura, l'influenza dell'eccentricità non si elimina *mai*, neppure quando *non* esistono gli altri errori strumentali.

b) *Cerchio fisso.* – Se T è la lettura « iniziale », e se il valore dell'angolo θ_1 si ottiene facendo la differenza delle letture L_1'' e L_1', si può scrivere:

$$\theta_1 = (L_1'' - T) - (L_1' - T)$$

e il valore corretto di θ_1 risulta:

$$(20_1) \quad \begin{cases} \theta_1^* = \theta_1 + \delta\theta_1 = \theta_1 + \dfrac{e}{r} \{\operatorname{sen} (L_1'' - T) - \operatorname{sen} (L_1' - T)\} + \cdots \\ \qquad = \theta_1 + 2 \dfrac{e}{r} \operatorname{sen} \dfrac{\theta_1}{2} \cos \left(\dfrac{L_1' + L_1''}{2} - T \right) + \cdots. \end{cases}$$

Analogamente, si ha:

$$\theta_2^* = \theta_2 + \delta\theta_2 = \theta_2 + 2 \frac{e}{r} \operatorname{sen} \frac{\theta_2}{2} \cos \left(\frac{L_2' + L_2''}{2} - T \right) + \cdots$$

ovvero, essendo $L_2' = L_1' + 180° + \cdots$, $L_2'' = L_1'' + 180° + \cdots$, dove i termini non scritti sono del 1° ordine rispetto agli errori strumentali e a e/r:

$$(20_2) \qquad \theta_2^* = \theta_2 + \delta\theta_2 = \theta_2 - 2\frac{e}{r}\operatorname{sen}\frac{\theta_2}{2}\cos\left(\frac{L_1' + L_1''}{2} - T\right) + \cdots.$$

Poichè da (14) si ha:

$$\theta_1 = v - 90° - \Delta\theta \quad , \quad \theta_2 = v - 90° + \Delta\theta,$$

quando sussistono gli errori h, c, e quindi $\Delta\theta \neq 0$, si ha anche $\theta_2 \neq \theta_1$, e le due correzioni $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ dovute all'eccentricità *non* sono uguali e di segno contrario.

Quindi, con un solo microscopio di lettura, l'influenza dell'eccentricità, per quanto riguarda il cerchio fisso, si elimina solamente se *non* esistono gli errori strumentali h, c (3).

Nel caso in cui questi errori sussistono, supponendo e/r dello stesso ordine di grandezza di h, c, l'errore commesso è del 2° ordine e la sua parte principale è proporzionale a $\frac{e}{r}\Delta\theta$, dove $\Delta\theta$ è dato da (15).

Fisica. — *Sulla polarizzazione della luce del cielo.* Nota IV (1) del Corrisp. A. Carrelli.

Misure di polarizzazione e d'intensità in punti simmetrici. – I tre elementi caratteristici della polarizzazione: intensità totale I, grado di polarizzazione $p\alpha$ e direzione α del vettore elettrico possono evidentemente ottenersi mediante tre misure ed un metodo molto utile a tale riguardo è stato proposto dal Medi in alcune ricerche sulla polarizzazione (2). Noi abbiamo elaborato il metodo seguente: per la misura relativa ad un qualunque punto del cielo si utilizza un nicol che assume tre posizioni a 120° una dall'altra, registrando le tre deviazioni d_1, d_2, d_3 che si hanno relativamente alle tre posizioni. Il procedimento teorico che permette di ottenere i dati caratteristici è il seguente: la luce del cielo è costituita da una parte di luce depolarizzata d'intensità 2 I_1 ed una parte polarizzata I_2 (fig. 1); in tutte le direzioni v'è la componente I_1 che ha sempre lo stesso valore qualunque sia la direzione considerata, e la componente $I_2 \cos\alpha$ di I_2 in tale direzione che fa un angolo α con la direzione di I_2. Se ora un nicol assume tre direzioni distinte a 120° l'una dall'altra si avranno al galvanometro, connesso con la cella fotoelettrica che si trova dopo il nicol, tre deviazioni d_1, d_2, d_3 proporzionali all'intensità di luce che passano attraverso il nicol in queste tre posizioni. Noi consideriamo le tre deviazioni tali che sia $d_1 > d_2 > d_3$. Queste devia-

(1) Presentata nella seduta del 16 novembre 1946.

(2) Esistono vari metodi; cfr. E. Medi, *Sulla polarizzazione...* «Ric. Scient.», a. X, p. 790. Nella Nota citata si tratta ancora del problema dell'intensità totale in relazione con altri dati metereologici.

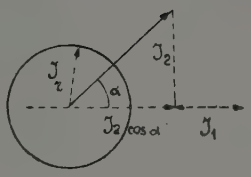


Fig. 1.

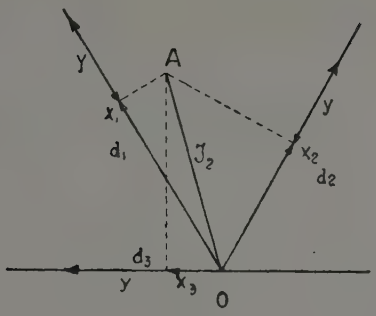


Fig. 2.

zioni sono evidentemente la somma di una quantità proporzionale a I_1 ed uguale per tutte e tre le posizioni, ed una parte che è invece proporzionale all'intensità della componente della parte polarizzata. Se la direzione di I_2 (fig 2) si suppone per un istante nota, si ha evidentemente che Ox_1, Ox_2 e Ox_3 sono le tre componenti di OA ed a queste bisogna aggiungere i segmenti $y_1 = y_2 = y_3 = y$ che rappresentano il contributo della parte non polarizzata, in modo che le tre deviazioni d_1, d_2 e d_3 sono rispettivamente proporzionali a $x_1 + y$, $x_2 + y$ e $x_3 + y$, e che consideriamo proprio uguali a d_1, d_2, d_3. Il problema che si pone è dunque il seguente: dati d_1, d_2, d_3 ritrovare la direzione e grandezza di OA e il valore di y.

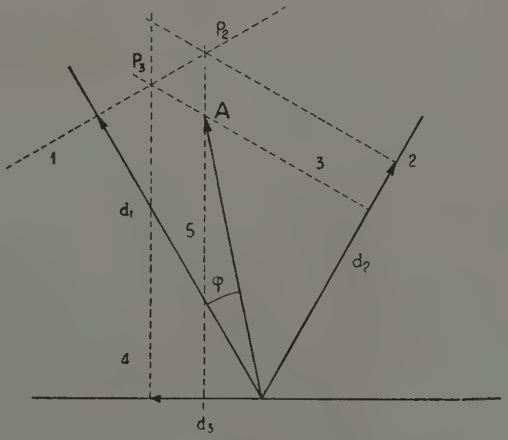


Fig. 3.

Conducendo le due normali a d_1 e d_2 (fig. 3) dai loro estremi si vengono ad individuare due rette 1 e 2 d'equazioni

$$y \cos 30° - x \operatorname{sen} 30° - d_1 = 0$$
$$y \cos 30° + x \operatorname{sen} 30° - d_2 = 0$$

quindi il punto P_2, punto d'incontro di queste due rette, ha come ascissa

$$x_{P_2} = -(d_1 - d_2).$$

Conduciamo ora la retta 4 che è normale a d_3, questa retta ha la seguente equazione: $x = -d_3$, e quindi

$$x = -\frac{c_4}{b_4} = -d_3.$$

Le coordinate del punto P_3, punto d'incontro della retta 4 con la retta 1, sono:

$$y_{P_3} = \frac{b_1 c_4 - b_4 c_1}{a_1 b_4 - a_4 b_1} = \frac{d_1 - d_3 \operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ}; \qquad x_{P_3} = -d_3.$$

Si consideri ora la retta 3 che passa per il punto P_3 ed è parallela alla retta 2; questa retta ha come equazione

$$y = -x \operatorname{tg} 30^\circ + D$$

dove

$$D = \frac{d_3 - a}{\cos 30^\circ}; \qquad a = d_3 - (d_1 - d_2)$$

e cioè

$$y \cos 30^\circ + x \operatorname{sen} 30^\circ - (d_1 - d_3) = 0$$

e quindi

$$a_3 = \cos 30^\circ \qquad b_3 = \operatorname{sen} 30^\circ \qquad c_3 = -(d_1 - d_3).$$

La retta 5 ha come equazione

$$x = -(d_1 - d_2) = -\frac{c_5}{b_5}$$

ed il punto A, che è il punto d'incontro della retta 5 con la retta 3, ha come coordinate

$$y_A = \frac{b_5 c_3 - b_3 c_5}{a_5 b_3 - a_3 b_5} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ (d_1 - d_2) + d_1 - d_3}{\cos 30^\circ}; \qquad x_A = -(d_1 - d_2)$$

e cioè

$$y_A = \frac{(d_1 - d_2) + 2(d_1 - d_3)}{\sqrt{3}}; \qquad x_A = -(d_1 - d_2).$$

Di qui si ricava che il vettore OA vale

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2 + (d_1 - d_2)(d_1 - d_3)}$$

e quindi l'intensità totale I è data da

$$I = OA + 2\{d_3 - (d_1 - d_2)\};$$

il grado di polarizzazione p è dato da

$$p = \frac{OA}{OA + 2\{d_3 - (d_1 - d_2)\}}.$$

Il vettore di polarizzazione OA fa un angolo α con la normale a d_3 e quest'angolo è dato da

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_A}{y_A} = \frac{\sqrt{3}(d_1 - d_2)}{(d_1 - d_2) + 2(d_1 - d_3)}$$

e l'angolo φ è dato da $\varphi = 30° - \alpha$. Un altro metodo che porta più rapidamente ad una soluzione si giova delle seguenti relazioni:

$$OA \operatorname{tg}\varphi = d_1 - \{d_3 - (d_1 - d_2)\} \; ; \; OA \operatorname{tg}(60° - \varphi) = d_2 - \{d_3 - (d_1 - d_2)\}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(60° - \varphi)} = \frac{2d_1 - (d_2 + d_3)}{2d_1 - (d_1 + d_3)}.$$

Di qui si ricava che evidentemente si può calcolare

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg} 60° - \varphi} = f(\varphi),$$

e quindi noti d_1, d_2, d_3 e cioè ottenuto un determinato valore di $f(\varphi)$ si può ricavare da questo valore conosciuto di $f(\varphi)$ il valore di φ; determinato φ si ha subito $OA = \frac{2d_1 - (d_2 + d_3)}{\operatorname{tg}\varphi}$, e noto OA e cioè I_2 si può avere I, cioè con tale metodo si possono ricavare tutte le quantità richieste.

Il metodo precedente è stato utilizzato per ottenere informazioni sullo stato d'omogeneità dell'atmosfera nelle condizioni normali; si è cioè proceduto alla determinazione dello stato del cielo in due punti simmetrici rispetto al piano del Sole. In condizioni ideali bisognerebbe avere gli stessi valori per I, p e α, ma per la variabilità della costituzione (e cioè differenza di contenuto di pulviscolo, variazione d'indice di rifrazione, diversità di albedo) si può prevedere una diversità fra le due posizioni. Misure in tal senso sono state fatte a Meta di Sorrento, dove prevalentemente si ha atmosfera chiara senza gli intorbidimenti dovuti al pulviscolo industriale o in generale cittadino. Le serie riportate fra le numerose ottenute nella tabella I in primo luogo assicurano una variazione di polarizzazione e d'intensità fra i due punti, non ugualmente sicure sono le diversità di direzione del vettore di polarizzazione. Le variazioni si mantengono di valori piuttosto limitati; non è molto facile poter stabilire una relazione fra i valori ottenuti e le possibili cause di variazioni. Il calcolo degli errori dimostra che in tali condizioni le variazioni dei dati misurati sono molto piccole. In fig. 4 *a* e fig. 4 *b* sono riportati due casi caratteristici, ottenuti a Meta di Sorrento; in essi non solo si dimostra la limitata grandezza delle variazioni ma si fa vedere entro

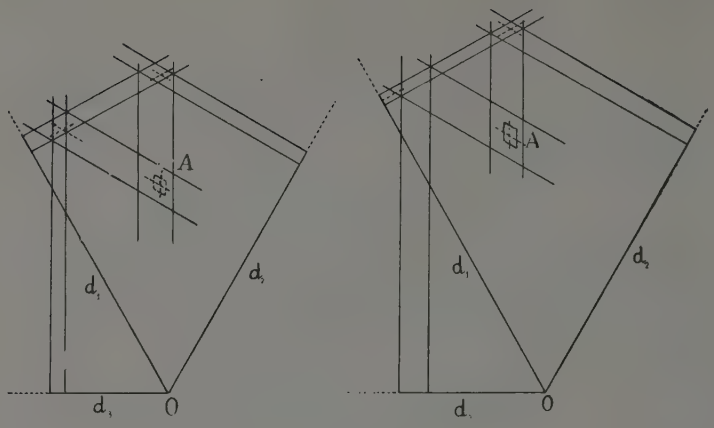


Fig 4 *a*.

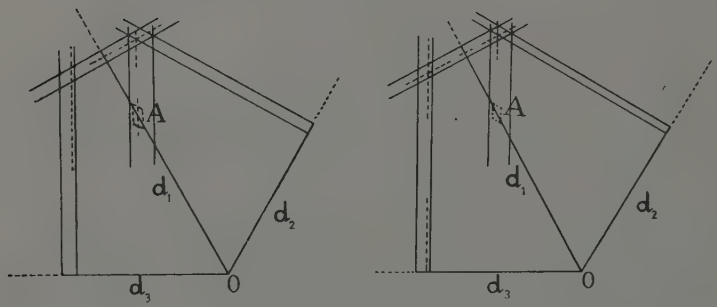


Fig. 4 *b*.

quali limiti sono comprese le variazioni delle misure. Procedendo nelle misure a Napoli sul terrazzo dell'Università i risultati sono stati diversi: in primo luogo vi è una notevolissima dissimetria, e questa dissimetria è relativa sia all'intensità che alla polarizzazione; ma v'è pure una diversità molto notevole nell'angolo del vettore, e questo comportamento, messo in evidenza col metodo descritto, merita un più attento esame eseguendo misure nella stessa zona col metodo di Hurion di cui si parlerà in seguito. L'azione è principalmente dipendente dalla presenza del pulviscolo, che dà anche una grande variabilità al valore della polarizzazione anche in brevi intervalli di tempo (circa 10'— 15'); infatti le misure che sono state compiute per confronto sulla collina di Posillipo, in una zona dove non c'è pulviscolo industriale o cittadino o per lo meno non con la stessa densità, hanno dato nuovamente valori come quelli ottenuti a Meta, e cioè con variazioni contenute entro limiti molto più modesti.

Tabella I.

I in scala arbitraria	p	α	5 novembre 1944
28.7	0.43	28°.40′	$\varphi_0 = 27°.5$ $\varphi = 15°$
31.2	0.36	28°.9′	$\lambda = \pm 20°$
28.7	0.45	29°.30′	$\varphi_0 = 30°$ $\varphi = 15°$
31.2	0.41	27°.27′	$\lambda = \pm 20°$
28.1	0.51	1°.59′	$\varphi_0 = 28°$ $\varphi = 15°$
30.9	0.58	8°.9′	$\lambda = \pm 90°$
			19 Novembre 1944
18.3	0.54	29°.41′	$\varphi_0 = 23°$ $\varphi = 30°$
18.8	0.48	30°.44′	$\lambda = \pm 20°$
19.4	0.54	7°.30′	$\varphi_0 = 26°$ $\varphi = 26°$
20.5	0.50	1°.39′	$\lambda = \pm 115°$
28.7	0.65	13°.53′	$\varphi° = 28°$ $\varphi = 30°$
23.1	0.51	11°.0′	$\lambda = \pm 90°$

Formazione dei punti neutri. – Una questione da chiarire relativamente alle anomalie di polarizzazione riguarda le modalità di formazione dei punti neutri. Noi abbiamo compiuto in tal senso questo tipo di misure: abbiamo determinato col Sole piuttosto alto, e cioè in condizioni per le quali non si ha la presenza di punti neutri, la differenza fra la direzione teorica del vettore di polarizzazione (che deve essere normale al piano individuato dal punto osservato e dalla direzione dei raggi solari) e quella sperimentale col metodo suggerito da Hurion; il metodo consiste essenzialmente in questo: mediante un'alidala girevole intorno all'asse del polariscopio, e munita di un opportuno specchietto mobile, è possibile determinare la direzione dei raggi solari dirigendo l'asse del tubo che porta al polariscopio in una qualunque direzione; determinando quindi al polariscopio di Savart la posizione del vettore elettrico della luce proveniente dal punto osservato è possibile stabilire qual'è questa direzione rispetto a quella dei raggi solari, e quindi dedurre, se è presente, il valore dell'anomalia. Da numerose serie di misure compiute a Meta di Sorrento si è già detto che in assenza di punto neutro si può giungere, nella parte solare, fino alle zone di depolarizzazione completa senza

che si riscontri un'anomalia nella posizione del vettore, o per lo meno può dirsi che la differenza di polarizzazione è così piccola che mediante il sistema che fa ricorso alla visibilità delle frange nel polariscopio non è possibile metterle in evidenza, e quindi determinare la posizione del punto neutro. Ora, si ha la formazione del punto neutro, con la zona anomala che lo accompagna, quando i raggi solari entrano nell'anello diffondente; se questo anello ha carattere ben delimitato, se cioè l'andamento della concentrazione del pulviscolo, oppure una quantità di essa proporzionale e cioè A, ha in funzione dell'altezza l'andamento della fig. 5 I ritornando alla formula elementare che dà per $tg^2 \varphi_1 = tg^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ il valore

$$tg^2 \varphi_1 = \frac{2A + 4}{5A},$$

s'intuisce che il punto neutro si forma bruscamente nel senso che nella fase della comparsa v'è piccola variazione della sua posizione (rispetto alla posi-

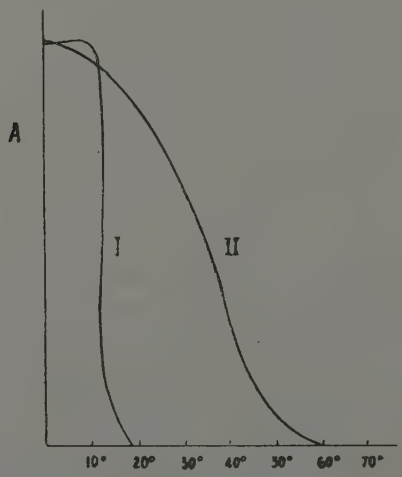


Fig. 5.

zione del Sole). Se invece l'anello diffondente è molto distribuito come in fig. 5 II allora, sempre in base alla formula elementare, si ha una grande variabilità nella posizione iniziale del punto. Noi abbiamo ricavato teoricamente i due andamenti supponendo che il valore di A (cioè la distribuzione del pulviscolo) sia tale che il valore di α corrisponda a circa 20° per il Sole all'orizzonte, ed i valori ottenuti per α relativamente alle altre altezze del Sole sono riportate nella seguente tabella:

Altezza del Sole	α
50°	8°.10′
40°	12°.30′
30°	14°.40′
20°	16°.30′
10°	17°.20′
0°	18°. 0′

Nell'altro caso riportato in figura, e cioè nel caso nel quale l'anello ha un andamento molto ben definito, l'andamento di α è il seguente:

Altezza del Sole	α
...	...
20°	0°
15°	8°
10°	18°
5°	18°
0°	18°

Ora noi abbiamo studiato sperimentalmente l'andamento della formazione del punto neutro nel modo seguente: determinando nel piano del Sole per varie altezze le due componenti, quella nel piano e quella normale al piano: il punto nel quale queste due curve si tagliano è il punto neutro. In tal modo procedendo in queste determinazioni per varie posizioni del Sole è possibile ottenere l'andamento della formazione della zona d'anomalia. In fig. 6 si riportano quali esempio alcuni dei risultati ottenuti relativamente al punto di Arago, in fig. 7 i risultati si riferiscono al punto di Babinet: dai dati sperimentali raccolti pare possa affermarsi che la formazione del punto neutro è un processo rapido, e cioè che i raggi solari incontrano un anello diffondente con limiti abbastanza bene determinati.

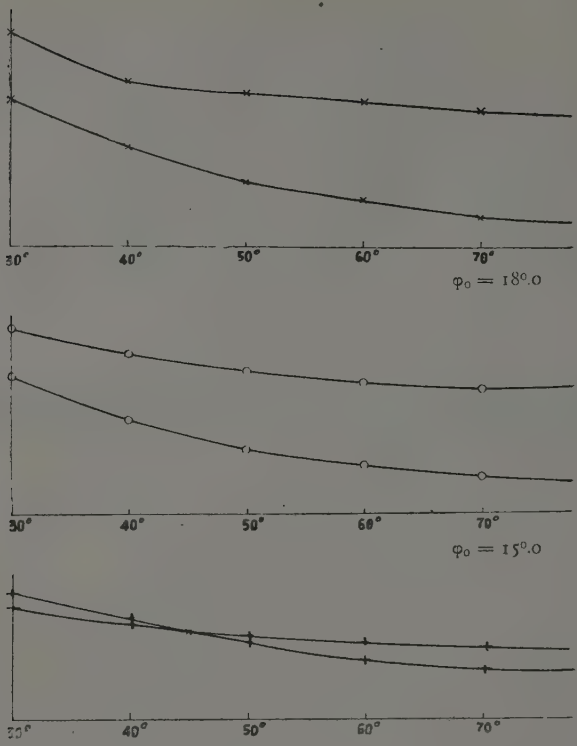
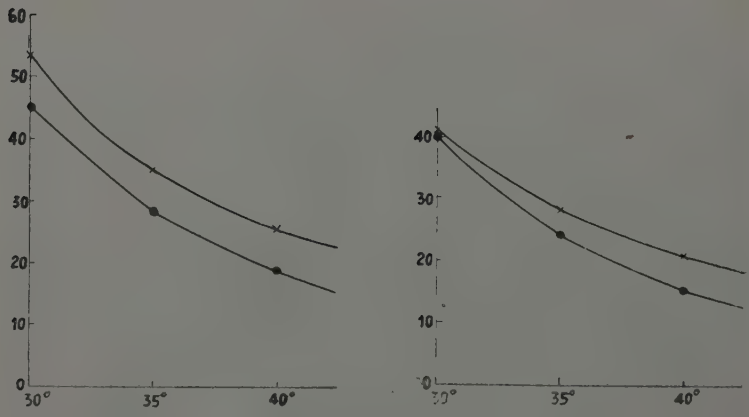
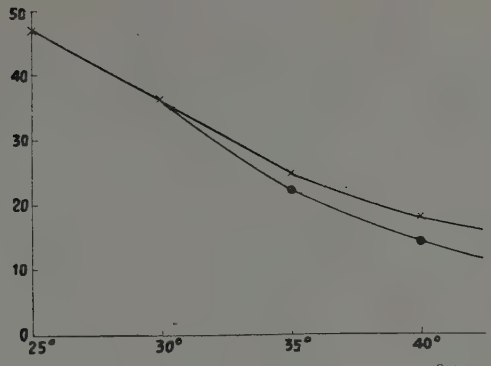


Fig. 6. $\varphi_0 = 12°.0$



$\varphi_0 = 13°.0$ Fig. 7 *a*. $\varphi_0 = 12°.0$



$\varphi_0 = 10°.5$

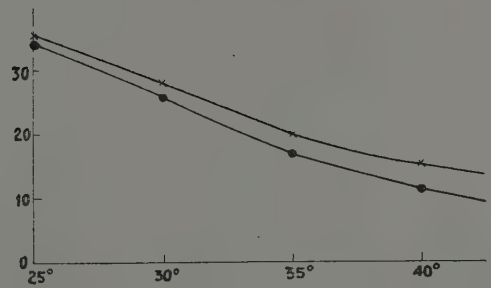
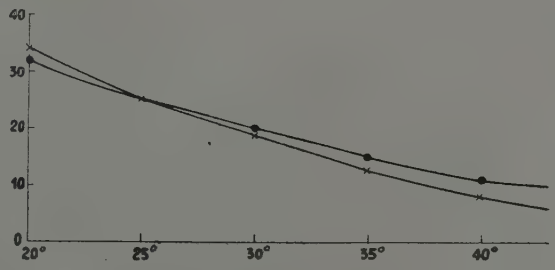


Fig. 7 *b*. $\varphi_0 = 8°.0$



$\varphi_0 = 5°.5$

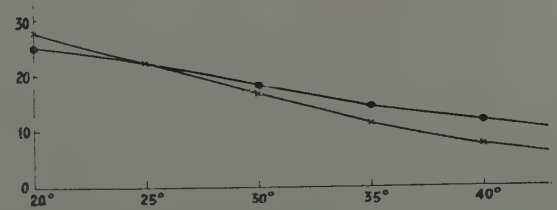


Fig. 7 *c*. $\varphi_0 = 4°.5$

Chimica. — *Sull'attività antibatterica di due acidi lichenici: acido usnico ed acido vulpinico* [1]. Nota di G. Bargellini, E. Del Pianto e G. B. Marini-Bettòlo, presentata [2] dal Socio G. Bargellini.

Gli studi sull'antibiosi hanno portato, in breve volgere di tempo, alla conoscenza di un numero assai grande di sostanze attive. Siccome la maggior parte di queste sostanze sono prodotte da funghi inferiori, era naturale che, ad un certo momento, si pensasse che anche i licheni, i quali sono formati dalla associazione di alghe e funghi, potessero essere produttori di sostanze dotate di azione antibatterica. È appunto in seguito a questa considerazione che Burkholder e Coll. [3] hanno studiato l'azione di estratti di numerosi licheni su vari batteri. Queste esperienze avevano un significato più che altro orientativo, in quanto gli Autori sperimentarono con estratti bruti, senza isolare i principî attivi. Su 42 specie di licheni, 27 furono trovate attive verso lo *Staphylococcus aureus* o il *Bacillus subtilis*, 4 inibivano il *Proteus vulgaris* e l'*Alcaligenes faecalis*, mentre nessuno era attivo verso l'*Escherichia coli*.

In un secondo lavoro, Burkholder e Evans [4] trovarono, su di un centinaio di specie licheniche sperimentate, 52 specie attive verso lo *S. aureus* o il *B. subtilis* o verso ambedue contemporaneamente, ed osservarono che, in generale, i batteri Gram positivi venivano inibiti dagli estratti lichenici, mentre i Gram negativi si sviluppavano normalmente.

Gli Autori sopracitati [3] pensarono che l'attività antibatterica di questi estratti bruti fosse da attribuire agli acidi lichenici, che sono prodotti caratteristici di molte delle specie studiate. Per questa ragione, essi eseguirono esperimenti per vedere se tre di questi acidi, e precisamente l'antranorina, l'acido fumarprotocetrarico e l'acido usnico fossero attivi verso lo *S. aureus*, l'*Escherichia coli* e il *B. subtilis*. I primi due acidi risultarono inattivi verso i tre microorganismi, mentre l'acido usnico era attivo solo verso il *B. subtilis*.

Recentemente è stato studiato dal Barry [5] un altro acido lichenico, la diploicina, sostanza di natura depsidica, la quale, quando venga idrolizzata in modo da rompere il legame depsidico, diventa attiva verso il *M. tubercolosis* e verso il *C. diphteriae*.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico della Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) P. R. Burkholder, A. W. Evans, I. Mc Veigh, H. K. Thornton, «Proceedings Nat. Ac. Sciences», *30*, 256 (1944).

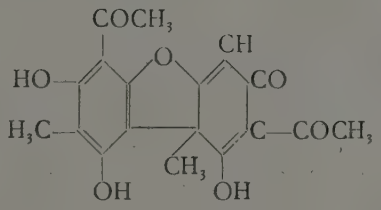
(4) P. R. Burkholder, A. W. Evans, «Bull. Torrey Bot. Club», *72*, 157 (I).

(5) V. C. Barry, «Nature» (London), *158*, 132 (1946).

Come si vede da questi brevi cenni bibliografici, lo studio sull'argomento è appena agli inizi, tanto più se si considera che il numero di acidi lichenici fino ad oggi conosciuti è abbastanza elevato: circa un centinaio.

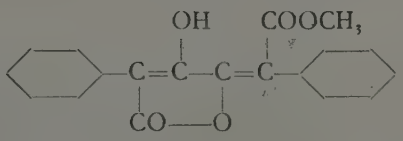
Per questa ragione, abbiamo desiderato iniziare uno studio sull'argomento rivolgendo, per ora, la nostra attenzione a due degli acidi lichenici più noti: l'acido usnico e l'acido vulpinico.

L'acido usnico, che già 50 anni or sono era stato studiato in questo Istituto dal Paternò, è stato oggi completamente chiarito nella sua costituzione. Quasi concordemente gli si attribuisce la formula proposta da Robertson e Curd [6]



L'acido usnico è stato anche studiato nella sua azione biologica e, secondo le osservazioni di Mikoshiba [7], presenta una azione paralizzante sul centro respiratorio e sui centri motori di animali omeotermi ed eterotermi, ed una azione tossica sui parameci.

L'acido vulpinico, definitò nella sua costituzione da Spiegel [8], risulta essere l'etere metilico di un lattone non saturo derivato del difenil butano



Questo acido, noto da molto tempo per la sua azione tossica sui mammiferi, secondo le recenti osservazioni di Lauger e Coll. [9] è risultato tossico anche per gli insetti, e tale azione viene ascritta alla presenza del sistema lattonico insaturo.

Nelle nostre esperienze abbiamo sperimentato i due acidi lichenici con 11 specie batteriche Gram positive e Gram negative, usando un terreno di coltura contenente, oltre ai comuni sali, l'1 % di estratto carneo stan-

(6) F. H. Curd e A. Robertson, «J. Chem. Soc.», (London), 1937, 894.

(7) K. Mikoshiba, «Jap. J. Med. Soc.», IV, 9, 77 (1936); «Chem. Zentr.», 1938, II, 1990.

(8) A. Spiegel, «Liebig's Ann.» *219*, 1, (1883).

(9) P. Lauger, H. Martin e P. Müller, «Helv. Chim. Acta», *27*, 892 (1944).

dardizzato per batteriologia (Acas) e l'1 % di peptone (Witte). Il pH del terreno era 7 e la temperatura di sviluppo 37° C. Per gli altri dettagli di tecnica rinviamo ad un precedente lavoro [10].

La tabella seguente riassume i risultati delle esperienze:

Specie batterica.	Concentrazione alla quale si ha inibizione completa.	
	Acido usnico, sale di K.	Acido vulpinico.
Staphylococcus aureus	1/ 60.000.	1/10.000
Corynebacterium diphtheriae	1/110.000	1 20.000
Bacillus anthracis	1/180.000	1/60.000
Bacillus megatherius	1/110.000	1, 15.000
Bacterium pyocianeum	—	—
Escherichia coli	—	—
Bacterium flexneri	—	—
Salmonella typhi	—	—
Salmonella parathyphi B	—	—
Bacterium disenteriae	—	—
Bacterium pneumoniae	—	—

Nel caso dello *S. aureus* abbiamo sperimentato otto ceppi diversi, ottenendo valori leggermente differenti; nella tabella è riportata la media di tali valori. Questi risultati non concordano con quelli di Burkholder e Evans, i quali, come abbiamo detto, trovarono l'acido usnico inattivo verso lo *S. aureus*. Tale discordanza deve probabilmente essere attribuita al fatto che gli Autori usarono, nelle loro esperienze, l'acido usnico, mentre noi abbiamo usato il suo sale di potassio il quale, essendo notevolmente più solubile, consente di raggiungere concentrazioni che non si possono ottenere con l'acido libero.

Come si vede dalla tabella, i due acidi sono attivi soltanto verso i batteri Gram positivi. Ricordiamo che, in generale, anche gli estratti lichenici saggiati da Burkholder ed Evans [9], si comportavano allo stesso modo e, d'altra parte, è noto che numerose sostanze antibiotiche, quali la penicillina la piocianina, la chetomina, la citrinina, la violaceina, ecc. presentano anche

(10) G. B. Marini-Bettòlo e E. Del Pianto, «Pont. Ac. Sc. Comm.», 10, 87, (1946).

loro la stessa caratteristica di essere attive soltanto verso i germi Gram positivi.

Dei due acidi, l'usnico risulta notevolmente più attivo del vulpinico e, tra i batteri sperimentati, il più sensibile è il *B. anthracis*.

Abbiamo osservato anche, in separate esperienze ancora in corso, che l'attività batteriostatica dei due acidi esaminati, viene diminuita dalla presenza di peptone; tale comportamento, come è noto, è proprio di numerose altre sostanze antibatteriche quali i sulfammidici [11], i chinoni [12] ecc.

Nulla possiamo ancora dire circa il meccanismo di azione di questi due acidi. Ci sembra però interessante fare osservare come l'acido vulpinico abbia in comune con un altro antibiotico, l'acido penicillico (isolato dal *Penicillium puberulum* Bainier e dal *P. cyclopium* Westling) oltre alla struttura lattonica, un sistema di doppi legami, attivati da gruppi =CO, sistema che, secondo Geiger e Conn [13], sarebbe responsabile dell'attività batteriostatica dell'acido penicillico. Questa ipotesi è stata confermata recentemente da Amstutz e Coll. [14], i quali hanno sintetizzato composti aromatici contenenti tale sistema, composti che sono risultati attivi.

Il sistema dei due doppi legami adiacenti ad un gruppo carbonilico, seppure facente parte di un anello idroaromatico, è presente anche nell'acido usnico.

Prodotti di demolizione di questo composto, come gli acidi decarbousnico e pirousnico, i quali non contengono l'anello insaturo sopranominato, sono risultati inattivi in esperienze da noi effettuate, per ora, solo verso lo *S. aureus*.

Concludendo possiamo, quindi, affermare che:

1° l'acido usnico e l'acido vulpinico presentano azione batteriostatica verso 4 delle 11 specie batteriche sperimentate e precisamente verso le Gram positive (*S. aureus, C. diphteriae, B. anthracis, B. megatherius*), mentre sono inattivi verso le altre 7 specie Gram negative;

2° l'acido usnico è notevolmente più attivo del vulpinico;

3° l'attività batteriostatica dei due acidi viene diminuita dalla presenza del peptone.

(11) A. Fleming, « J. Path. Bact. », *50*, 69 (1940).

(12) A. E. Oxford, « Biochem. Journ. », *36*, 438 (1942).

(13) W. B. Geiger e J. E. Conn, « J. Am. Chem. Soc. », *67*, 112 (1945).

(14) E. D. Amstutz, E. A. Fehenel e C. R. Neumoyer, « J. Am. Chem. Soc. », *68*, 349 (1946).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. – *Un criterio per la misurabilità degli insiemi.* Nota di L. Cesari, presentata [1] dal Socio M. Picone.

1. Nella presente Nota, dò un criterio per la misurabilità di un insieme e, più in generale, per la quasi continuità di una funzione reale di due variabili reali.

Sia $f(x,y)$ una funzione definita in tutti i punti del quadrato $Q \equiv (0,1,0,1)$. Diremo che essa soddisfa alla condizione P se

P_1) per quasi ogni $\bar{x}$ di $(0,1)$ la funzione della sola y, $f(\bar{x},y)$, $0 \leq y \leq 1$, è quasi continua in $(0,1)$.

P_2) ad ogni intero n si può far corrispondere un plurintervallo aperto Δ_n di punti x di $(0,1)$ di ampiezza $< 1/n$ e tale che, detto N_n l'insieme dei punti dell'insieme chiuso $(0,1) - \Delta_n$ che sono di accumulazione da ambo i lati per questo insieme [2], per ogni $\bar{x}$ di N_n e per ogni $0 \leq \bar{y} \leq 1$, esiste almeno uno dei limiti

$$(1') \quad f_d(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{\substack{x \to \bar{x}+0 \\ x \in (0,1)-\Delta_n}} f(x,\bar{y}) \quad , \quad (1'') \quad f_s(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{\substack{x \to \bar{x}-0 \\ x \in (0,1)-\Delta_n}} f(\bar{x},y).$$

e risulta

$$(2') \quad f_d(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y}) \quad , \quad \text{oppure} \quad (2'') \quad f_s(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y}).$$

Dimostrerò nei numeri 2-6 il seguente

Teorema. – *Ogni funzione reale $f(x,y)$ definita in tutti i punti di Q e soddisfacente alla condizione* P *è quasi continua in* Q.

Dimostrerò il teorema dapprima per le funzioni $\varphi(x,y)$ assumenti soltanto i valori 0 ed 1 (nn. 2-5), cioè per le funzioni caratteristiche di un insieme I. In tali condizioni il teorema assicura la misurabilità dell'insieme I. Nel n. 6 estenderò poi il teorema alle funzioni assumenti valori qualsiasi (sempre finiti). Dalla dimostrazione risulterà in particolare che, per ogni intero n, i limiti (1') e (1'') e le relazioni (2') e (2'') coesistono in quasi tutti i punti $(\bar{x},\bar{y})$ di Q con $\bar{x}$ non appartenente a Δ_n.

2. Sia $\varphi(x,y)$ una funzione definita in tutti i punti di Q, assumente i soli valori 0 ed 1 e soddisfacente la condizione P. Possiamo supporre che, per ogni n, il plurintervallo Δ_n ricopra l'eventuale insieme di misura nulla dei punti $\bar{x}$ di $(0,1)$ per i quali la funzione $\varphi(\bar{x},y)$, $0 \leq y \leq 1$, non è quasi continua come funzione della sola y.

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) L'insieme N_n contiene certamente tutti i punti di densità dell'insieme chiuso $(0,1) - \Delta_n$, ossia quasi tutti i punti di $(0,1) - \Delta_n$, perciò N_n ha misura pari a quella di $(0,1) - \Delta_n$ e cioè $> 1 - 1/n$.

Per ogni $\bar{x}$ di N_n, diciamo $I_d(\bar{x})$ l'insieme dei punti $\bar{y}$ di $(0,1)$ nei quali esiste il limite (1') e vale la (2'), diciamo $I_s(\bar{x})$ l'insieme dei punti $\bar{y}$ di $(0,1)$ nei quali esiste il limite (1'') e vale la (2''). Intanto $I_s(\bar{x}) + I_d(\bar{x}) = (0,1)$. Sia $R \equiv [\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_i, \cdots]$ un insieme numerabile e ovunque denso in $(0,1) - \Delta_n$ di punti di $(0,1) - \Delta_n$, contenente tra l'altro tutti gli estremi degli intervalli aperti costituenti Δ_n (3).

Per ogni $\bar{x}$ di N_n e per ogni i poniamo

$$\psi(\bar{x}, y, i) = |\varphi(\bar{x}, y) - \varphi(\rho_i, y)|, \qquad i = 1, 2, \cdots,$$

e, per ogni intero m,

$$\psi'_d(\bar{x}, y, m) = \Big|\sum_i \psi(\bar{x}, y, i)\Big|_0^1, \qquad \psi'_s(\bar{x}, y, m) = \Big|\sum_i \psi(\bar{x}, y, i)\Big|_0^1,$$

ove le sommatorie sono estese a tutti gli indici i per i quali, rispettivamente,

$$\bar{x} < \rho_i \leq \bar{x} + \frac{1}{m}, \qquad \bar{x} - \frac{1}{m} \leq \rho_i < \bar{x}.$$

Le funzioni $\varphi(\bar{x}, y)$, $0 \leq y \leq 1$, e $\varphi(\rho_i, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $i = 1, 2, \cdots$, sono tutte quasi continue e perciò lo sono pure le funzioni $\psi(\bar{x}, y, i)$, $0 \leq y \leq 1$, e le funzioni $\psi'_d(\bar{x}, y, m)$, $\psi'_s(\bar{x}, y, m)$, $0 \leq y \leq 1$, per ogni $m = 1, 2, \cdots$. Inoltre, per ogni m,

$$\psi'_d(\bar{x}, y, m) \geq \psi'_d(\bar{x}, y, m+1), \qquad \psi'_s(\bar{x}, y, m) \geq \psi'_s(\bar{x}, y, m+1)$$

e quindi esistono e sono quasi continue in $(0,1)$ le seguenti funzioni della y, $0 \leq y \leq 1$,

$$\psi''_d(\bar{x}, y) = \lim_{m \to \infty} \psi'_d(\bar{x}, y, m), \qquad \psi''_s(\bar{x}, y) = \lim_{m \to \infty} \psi'_s(\bar{x}, y, m).$$

Dimostriamo che $\psi'''_d(\bar{x}, y) = 1 - \psi''_d(\bar{x}, y)$, $0 \leq y \leq 1$, coincide con la funzione caratteristica dell'insieme $I_d(\bar{x})$.

Sia $\bar{y}$ un punto di $I_d(\bar{x})$. Allora esiste un intervallo $\bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \delta$, per tutti gli x del quale che non cadono in Δ_n risulta $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(x, \bar{y})$ e perciò, a maggior ragione, $\varphi(\rho_i, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$, $\psi'(\bar{x}, \bar{y}, i) = 0$ per tutti gli i tali che $\bar{x} < \rho_i \leq \bar{x} + \delta$. Per ogni $m > 1/5$ è allora $\psi'_d(\bar{x}, \bar{y}, m) = 0$ e infine $\psi''_d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $\psi'''_d(\bar{x}, \bar{y}) = 1$.

Sia $\bar{y}$ un punto tale che $\psi'''_d(\bar{x}, \bar{y}) = 1$, onde $\psi''_d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Esiste allora un $\bar{m}$ tale che per ogni $m \geq \bar{m}$, $\psi'_d(\bar{x}, \bar{y}, m) = 0$. Ne segue $\psi'(\bar{x}, \bar{y}, i) = 0$, $\varphi(\rho_i, \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ per ogni i tale che $\bar{x} < \rho_i < \bar{x} + 1/\bar{m}$. Dimostriamo che, per ogni $x' \in (0,1) - \Delta_n$, $\bar{x} < x' < \bar{x} + 1/\bar{m}$, risulta pure $\varphi(x', \bar{y}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che, per un certo x', sia $\varphi(x', \bar{y}) \neq \varphi(\bar{x}, \bar{y})$.

(3) Si può sempre supporre che gli intervalli aperti costituenti il plurintervallo Δ_n siano a due a due senza punti interni nè estremi in comune. L'insieme $(0,1) - \Delta_n$ è così privo di punti isolati, perfetto e di misura $> 1 - 1/n$. È noto come si possa procedere per la costruzione dell'insieme R.

Il punto x' non può essere un estremo di uno degli intervalli aperti di Δ_n perchè allora sarebbe anche un punto ρ_i.

Allora x' è punto di accumulazione da ambo i lati dell'insieme chiuso $(0,1) - \Delta_n$ ed esiste perciò almeno uno dei limiti $\varphi_d(x',\bar{y})$, $\varphi_s(x',\bar{y})$. Pertanto esiste tutto un intorno U destro, oppure sinistro, di $(x',\bar{y})$ sulla retta $y=\bar{y}$ in tutti i punti $(x'',\bar{y})$ del quale che appartengono a $(0,1)-\Delta_n$ risulta $\varphi(x'',\bar{y}) = \varphi(x',\bar{y})$ e possiamo supporre che U sia completamente contenuto in $(\bar{x}, \bar{x}+1/\bar{m})$. Per gli infiniti valori di i per cui $\rho_i \in U$ risulta

$$\varphi(\rho_i,\bar{y}) = \varphi(x',\bar{y}) \neq \varphi(\bar{x},\bar{y})$$

e, per gli stessi i, $\psi_d(\bar{x},\bar{y},i) = 1$. Infine $\psi'_d(\bar{x},\bar{y},\bar{m}) = 1$ mentre, come sappiamo, è $\psi'_d(\bar{x},\bar{y},\bar{m}) = 0$.

È così dimostrato che, per ogni $\bar{x} < x' < \bar{x} + 1/\bar{m}$, risulta $\varphi(x',\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$. Esiste dunque il limite $\varphi_d(\bar{x},\bar{y})$, è $\varphi_d(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$ e il punto $(\bar{x},\bar{y})$ appartiene ad $I_d(\bar{x})$.

Risulta così completamente dimostrato che $\psi''_d(\bar{x},y)$, $0 \leq y \leq 1$, è la funzione caratteristica dell'insieme $I_d(\bar{x})$. Analogamente si dimostra che $\psi''_s(\bar{x},y) = 1 - \psi''_s(\bar{x},y)$, $0 \leq y \leq 1$, è la funzione caratteristica dell'insieme $I_s(\bar{x})$ e poichè $\psi''_d(\bar{x},y)$ e $\psi''_s(\bar{x},y)$ sono funzioni quasi continue, ne risulta altresì che $I_s(\bar{x})$ e $I_d(\bar{x})$ sono insiemi linearmente misurabili.

3. Sia $\bar{x}$ un punto qualunque di N_n. Dal limite

$$\psi''_d(\bar{x},y) = \lim_{m\to\infty} \psi'_d(\bar{x},y,m), \qquad 0 \leq y \leq 1,$$

segue pure, trattandosi di funzioni equilimitate in $(0,1)$,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 |\psi'_d(\bar{x},y,m) - \psi''_d(\bar{x},y)|\, dy = 0.$$

Ad ogni intero ν si può far corrispondere un intero m_ν e un insieme chiuso $E_{d\nu}(\bar{x})$ tali che

$$(3) \qquad E_{d\nu}(\bar{x}) \subset I_d(\bar{x}) \quad , \quad |E_{d\nu}(\bar{x})| > |I_d(\bar{x})| - \frac{1}{\nu},$$

$$\psi'_d(\bar{x},y,m) = \psi''_d(\bar{x},y) \quad \text{per ogni } y \in E_{d\nu} \quad \text{e per ogni } m \geq m_\nu.$$

Per ogni x tale che $\bar{x} < x < \bar{x} + 1/m_\nu$, $x \in (0,1) - \Delta_n$ e per ogni $y \in E_{d\nu}(\bar{x})$ risulta $\varphi(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(x,\bar{y})$ e quindi, per ogni x' di N_n con $\bar{x} < x' < \bar{x} + 1/m_\nu$, esistono entrambi i limiti $\varphi_s(x',y)$ e $\varphi_d(x',\bar{y})$ e si ha

$$\varphi_d(x',\bar{y}) = \varphi_s(x',\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) = \varphi(x',\bar{y}).$$

Ne consegue, per ogni x' tale che $x' \in N_n$, $\bar{x} < x' < \bar{x} + 1/m_\nu$,

$$I_s(x') \supset E_{d\nu}(\bar{x}) \quad , \quad I_d(x') \supset E_{d\nu}(\bar{x}).$$

In forza delle (3) risulta anche, per gli stessi x',

$$|I_s(x')| > |I_d(\bar{x})| - \frac{1}{\nu} \quad , \quad |I_d(x')| > |I_d(\bar{x})| - \frac{1}{\nu} .$$

Per l'arbitrarietà di ν risulta

$$|I_d(\bar{x})| \leq \lim_{\substack{x' \to \bar{x}+0 \\ x' \in N_n}} |I_d(x')| \quad , \quad |I_d(\bar{x})| \leq \lim_{\substack{x' \to \bar{x}+0 \\ x \in N_n}} |I_s(x')| .$$

Diciamo $\chi_s(x)$ e $\chi_d(x)$ le funzioni, definite in tutti i punti N_n,

$$\chi_s(x) = |I_s(x)| \quad , \quad \chi_d(x) = |I_d(x)| .$$

Manifestamente, per ogni $\bar{x}$ di N_n,

$$(4') \qquad \chi_d(\bar{x}) \leq \lim_{\substack{x \to \bar{x}+0 \\ x \in N_n}} \chi_d(x) \quad , \quad \chi_d(\bar{x}) \leq \lim_{\substack{x \to x+0 \\ x \in N_n}} \chi_s(x) .$$

Quanto si è detto vale pure per la funzione $\chi_s(x)$ e pertanto si ha, per ogni $\bar{x}$ di N_n,

$$(4'') \qquad \chi_s(\bar{x}) \leq \lim_{\substack{x \to x-0 \\ x \in N_n}} \chi_d(x) \quad , \quad \chi_s(\bar{x}) \leq \lim_{\substack{x \to x-0 \\ x \in N_n}} \chi_s(x) .$$

La funzione $\chi_d(x)$ è dunque semicontinua inferiormente a destra relativamente all'insieme N_n e analoga proprietà ha la funzione $\chi_s(x)$. Le funzioni $\chi_s(x)$ e $\chi_d(x)$ sono dunque quasi continue in N_n (4).

Per ogni intero ν esiste perciò un plurintervallo Δ'_ν di ampiezza $< 1/\nu$ e tale che le funzioni $\chi_s(x)$ e $\chi_d(x)$ sono continue in $(0,1)$ quando si tenga conto soltanto dei punti x di N_n e di $(0,1) - \Delta'_\nu$.

Possiamo anche costruire, per ogni ν, un plurintervallo Δ''_ν di ampiezza $< \frac{1}{n} + \frac{2}{\nu}$, ricoprente interamente Δ_n, Δ'_ν e i punti di $(0,1) - \Delta_n$ che non fanno parte di N_n. Allora per ogni $\bar{x}$ di $(0,1) - \Delta''_\nu$ risulta, in forza delle (4),

$$\chi_d(\bar{x}) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in (0,1) - \Delta''_\nu}} \chi_d(x) \leq \lim_{\substack{x \to x \\ x \in (0,1) - \Delta''_\nu}} \chi_s(x) ,$$

$$\chi_s(\bar{x}) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in (0,1) - \Delta''_\nu}} \chi_s(x) \leq \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in (0,1) - \Delta''_\nu}} \chi_d(x) ,$$

(4) Sia $\varphi(x)$ una funzione reale semicontinua a destra in ogni punto x di $(0,1)$. Sia m un numero reale qualsiasi e sia i_m l'insieme di tutti i punti x di $(0,1)$ nei quali $\varphi(x) > m$. Se un punto x appartiene ad i_m, tutti i punti di un intorno destro di x appartengono ad i_m. L'insieme i_m è dunque costituito di intervalli non sovrapponentisi aperti a destra e chiusi o aperti a sinistra. Perciò i_m è la somma di un plurintervallo Δ e di un numero finito o una infinità numerabile di punti che sono estremi di intervalli di Δ. L'insieme i_m è dunque uno pseudointervallo (Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, I, Bologna, Zanichelli, 1923, p. 122). Essendo m arbitrario segue, con ragionamenti noti, che $\varphi(x)$ è quasi continua in $(0,1)$. La presente dimostrazione si estende senz'altro anche alle funzioni semicontinue inferiormente a destra (o a sinistra) in un insieme.

e quindi anche

$$(5) \qquad \chi_d(\bar{x}) = \chi_s(\bar{x}) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in (0,1) - \Delta''_\nu}} \chi_d(x) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in (0,1) - \Delta''_\nu}} \chi_s(x) .$$

È così dimostrato che, in quasi tutti i punti x di N_n, risulta $\chi_s(x) = \chi_d(x)$ e tali funzioni sono quasi continue in $(0,1)$.

4. Diciamo J l'insieme di misura nulla dei punti di N_n nei quali non vale la relazione $\chi_s(x) = \chi_d(x)$. Quasi ogni punto di N_n gode delle seguenti proprietà:

$$(6) \qquad \lim_{l \to 0} \frac{1}{l} \int_{(\bar{x}, x+l) N_n} \chi_d(x)\, dx = \chi_d(\bar{x}) \quad , \quad \lim_{l \to 0} \frac{|(x, x+l) N_n|}{l} = 1 .$$

Diciamo J' l'insieme di misura nulla dei punti di N_n nei quali non valgono le (6). Per ogni punto $\bar{x}$ di $N_n - J - J'$ valgono le seguenti proprietà:

α_1) valgono le (5) e (6);

α_2) ad ogni intero $\nu > 0$ si possono far corrispondere un intero m_ν e un insieme chiuso $E_{d\nu}(\bar{x}) \subset I_d(\bar{x})$ per i quali valgono le (3).

Per il teorema di copertura di Vitali, esiste un gruppo finito di punti $x_1, x_2, \cdots, x_M$ e di intervalli $\delta_j \equiv (x_j, x_j + l_j)$, $j = 1, 2, \cdots, M$, tali che

β_1) $\qquad \chi_s(x_j) = \chi_d(x_j) \quad , \quad x_j \in N_n , \qquad j = 1, 2, \cdots, M ;$

β_2) $\qquad l_j < 1/m_\nu \quad , \quad \delta_j \delta_k = 0 \quad , \qquad j, k = 1, 2, \cdots, M ;$

β_3) $\qquad \sum l_j > |N_n - J - J'| - 1/\nu = |N_n| - 1/\nu ;$

β_4) $\qquad \left| \frac{1}{l_j} \int_{\delta_j N_n} \chi_d(x)\, dx - \chi_d(x_j) \right| < 1/\nu , \qquad j = 2, \cdots, M ;$

β_5) $\qquad |\delta_j N_n| l_j > 1 - 1/\nu , \qquad j = 1, 2, \cdots, M .$

Diciamo $L_{d\nu}(x_j)$ l'insieme di tutti i punti (x, y) di Q tali che

$$x \in N_n \quad , \quad x_j \leq x < x_j + l_j \quad , \quad \bar{x} \in E_{d\nu}(x_j) .$$

Poniamo

$$L_{d\nu} = \sum_j L_{d\nu}(x_j) .$$

Si ha

$$|L_{d\nu}| = \left| \sum_j L_{d\nu}(x_j) \right| = \sum_j |L_{d\nu}(x_j)| = \sum_j |\delta_j N_n| |E_{d\nu}(x_j)| >$$

$$> \sum_j (l_j - l_j/\nu) |E_{d\nu}(x_j)| > \sum_j l_j |E_{d\nu}(x_j)| - 1/\nu \sum_j l_j >$$

$$> \sum_j l_j [|I_d(x_j)| - 1/\nu] - 1/\nu \sum_j l_j = \sum_j l_j \chi_d(x_j) - 2/\nu \sum_j l_j >$$

$$> \sum_j l_j \left[\frac{1}{l_j} \int_{\delta_j N_n} \chi_d(x)\, dx - 1/\nu \right] - 2/\nu \sum l_j = \sum_j \int_{\delta_j N_n} \chi_d(x) - 3/\nu \sum_j l_j >$$

$$= \int_{N_n} \chi_d(x)\, dx - \int_{N_n - N_n \sum \delta_j} \chi_d(x)\, dx - 3/\nu \sum l_j >$$

$$> \int_{N_n} \chi_d(x)\, dx - | N_n - N_n \sum \delta_j | - 3/\nu \sum l_j >$$

$$> \int_{N_n} \chi_d(x)\, dx - 4/\nu \sum l_j - 1/\nu .$$

In definitiva

$$| L_{d/\nu} | > \int_{N_n} \chi_d(x)\, dx - 5/\nu . \tag{7}$$

Osserviamo ora che, per ogni x appartenente a $\delta_j N_n$, deve essere $I_s(x) \supset E_{d/\nu}(x_j)$, $I_d(x) \supset E_{d/\nu}(x_j)$ e perciò

$$I_s(x)\, I_d(x) \supset E_{d/\nu}(x_j) .$$

Ne segue

$$\int_{N_n} \chi_s(x)\, dx = \int_{N_n} I_s(x) | dx = \int_{N_n} I_s(x) - I_s(x)\, I_d(x)\, dx + \int_{N_n} I_s(x)\, I_d(x)\, dx >$$

$$> \int_{N_n} | I_s(x) - I_s(x)\, I_d(x) | dx + \sum_j \int_{\delta_j} | I_s(x)\, I_d(x) | dx >$$

$$> \int_{N_n} | I_s(x) - I_s(x)\, I_d(x) | dx + \sum_j \int_{\delta_j} | E_{d/\nu}(x_j) | dx =$$

$$= \int_{N_n} | I_s(x) - I_s(x)\, I_d(x) | dx + | L_{d/\nu} |$$

e, ricordando la (7),

$$\int_{N_n} \chi_s(x)\, dx > \int_{N_n} | I_s(x) - I_s(x)\, I_d(x) | dx + \int_{N_n} \chi_d(x)\, dx - 5/\nu .$$

Ma, per quasi ogni x di N_n è $\chi_s(x) = \chi_d(x)$ e pertanto

$$\int_{N_n} \chi_s(x)\, dx = \int_{N_n} \chi_d(x)\, dx$$

e infine

$$\int_{N_n} | I_s(x) - I_s(x) I_d(x) | dx < 5/\nu .$$

Per l'arbitrarietà di ν risulta

$$\int_{N_n} | I_s(x) - I_s(x) I_d(x) | dx = 0 .$$

Per quasi ogni x di N_n è dunque

$$| I_s(x) - I_s(x) I_d(x) | = 0 .$$

In modo analogo si dimostra che, per quasi ogni x di N_n, è

$$| I_d(x) - I_s(x) I_d(x) | = 0 .$$

Ne consegue che, per quasi tutti gli x di N_n, gli insiemi $I_s(x)$ e $I_d(x)$ differiscono al più per insiemi di misura nulla e poichè $I_s(x) + I_d(x) = (0, 1)$ per ogni x, ne consegue che, per quasi ogni x di N_n gli insiemi $I_s(x)$ e $I_d(x)$ differiscono da $(0, 1)$ per insiemi di punti di misura lineare nulla. Diciamo $J(x)$ l'insieme

$$J(x) = [(0, 1) - I_s(x)] + [(0, 1) - I_d(x)] .$$

Per quasi ogni x di N_n è $| J(x) | = 0$.

5. Per ogni $\bar{x}$ di N_n la funzione della sola y, $\varphi(\bar{x}, y)$, $0 \leq y \leq 1$, è quasi continua in $(0, 1)$ e perciò esiste un insieme chiuso $E_\nu(\bar{x})$ di misura $> 1 - 1/\nu$; sul quale la funzione $\varphi(\bar{x}, y)$, $0 \leq y \leq 1$, risulta continua. Poniamo

$$E'_\nu(\bar{x}) = E_\nu(\bar{x}) E_{d\nu}(\bar{x}) .$$

Manifestamente

$$| E'_\nu(x) | > 1 - 2/\nu .$$

Con le notazioni del numero precedente diciamo $\mathfrak{L}_{d\nu}(x_j)$ l'insieme dei punti (x, y) di Q tali che

$$x \in N_n \quad , \quad x_j + l_j/\nu \leq x \leq x_j + l_j - l_j/\nu \quad , \quad y \in E'_\nu(\bar{x}) ,$$

e

$$\mathfrak{L}_{d\nu} = \sum_j \mathfrak{L}_{d\nu}(x_j) .$$

Manifestamente $\mathfrak{L}_{d\nu} \subset L_{d\nu}$ e, ripetendo il ragionamento precedente si troverà, al posto della (7).

$$| \mathfrak{L}_{d\nu} | > \int_{N_n} \chi_d(x)\, dx - 8/\nu .$$

L'insieme $\mathfrak{L}_{d\nu}$ è chiuso e la funzione $\varphi(x, y)$ risulta continua su esso. D'altra parte, per quasi ogni x di $(0, 1)$, è $\chi_d(x) = 1$ e quindi

$$|\mathfrak{L}_{d\nu}| > \int_{N_n} dx - 8/\nu = N_n - 8/\nu > 1 - \frac{1}{n} - 8/\nu .$$

Per l'arbitrarietà di n e di ν è così dimostrato che esistono insiemi chiusi di punti di Q aventi misura vicina a quella di Q di tanto poco quanto si vuole, e sui quali $\varphi(x, y)$ risulta continua. La funzione $\varphi(x, y)$ è dunque quasi continua in Q e il teorema del n. 1 è dimostrato per le funzioni $\varphi(x, y)$ assumenti in Q i soli valori 0 ed 1.

6. Sia $f(x, y)$ una funzione reale qualsiasi definita in tutti i punti di Q e soddisfacente alla condizione P, sia m un numero reale qualsiasi e sia I l'insieme dei punti di Q nei quali $f(x, y) > m$. Sia $\varphi(x, y)$ la funzione caratteristica dell'insieme I. Manifestamente la funzione $\varphi(x, y)$ soddisfa pure alla condizione P e perciò è quasi continua in Q. Valendo ciò per ogni m, $f(x, y)$ è quasi continua in Q. Il teorema del n. 1 è così completamente dimostrato.

7. La condizione P non è necessaria per la quasi continuità della funzione $f(x, y)$. Si osservi infatti la funzione $f(x, y)$ uguale ad 1 se $y = x$, uguale a zero se $y \neq x$.

Questa funzione è quasi continua ma *non* soddisfa alla condizione P.

8. Si potrebbe pensare che la condizione P sia ancora sufficiente se allargata nel senso di supporre che, per ogni $\bar{x}$ di N_n, l'esistenza del limite (1'), oppure (1''), e la validità della relazione (2'), oppure (2''), valgano per *quasi tutti* gli $\bar{y}$ di $(0, 1)$, anzichè per *tutti* gli $\bar{y}$ di $(0, 1)$. Ma ciò non sembra possibile. W. Sierpinski (5) ha infatti costruito, sia pure mediante il postulato di Zermelo, un insieme *non* misurabile di punti di Q avente esattamente un punto su ogni retta parallela all'asse x e su ogni retta parallela all'asse y. La funzione caratteristica di tale insieme soddisfa alla condizione P, allargata nel senso espresso in questo numero, ma non è quasi continua.

(5) W Sierpinski, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, «Fund. Math.», tome 1 (1920), pp. 112–115.

Matematica. — *Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano* [1]. Nota di L. Giuliano, presentata [2] dal Corrisp. E. Bompiani.

1. In varie questioni di Analisi è molto utile il seguente lemma dovuto a Gronwall [3]:

Se per $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ *la funzione continua* $u(x)$ *soddisfa la limitazione*

$$(1) \qquad 0 \leq u(x) \leq \int_{x_0}^{x} \{ M\, u(x) + A \}\, dx + B$$

dove M, A, B *sono costanti, positive o nulle, allora si ha*

$$(2) \qquad 0 \leq u(x) \leq (Ah + B)\, e^{Mh} \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + h.$$

Molti anni prima, Peano [4] aveva stabilito una proposizione che si può enunciare come segue:

Se $u(x)$ *è una funzione assolutamente continua su un intervallo* (a, b) *e se esistono due costanti* $M > 0$ *e* $A \geq 0$ *tali che, per quasi tutti gli* x *di* (a, b) *sia*

$$(3) \qquad |u'(x)| \leq M\, |u(x)| + A$$

allora, per ogni coppia di punti x, x_0 *di* (a, b) *si ha:*

$$(4) \qquad |u(x)| \leq |u(x_0)|\, e^{M|x - x_0|} + \frac{A}{M} \left(e^{M|x - x_0|} - 1\right) \leq$$

$$\leq \{ |u(x_0)| + A\, |x - x_0| \}\, e^{M|x - x_0|}.$$

È chiaro che, *se* $u(x)$ *è assolutamente continua*, il lemma di Gronwall costituisce una diversa enunciazione della *diseguaglianza di Peano.*

Ora, la proposizione di Peano (e anche il lemma di Gronwall) si può estendere al caso in cui nella (3) (nella (1)) in luogo delle due costanti

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

(3) T. W. Gronwall, *Note on derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations.* « Annals of Mathematics », (2), 20 (1919), p. 293. Vedi anche: G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale.* Zanichelli, Bologna, Parte prima, p. 28, p. 365.

(4) G. Peano, *Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations differentielles ordinaires.* « Nouvelles Annales de Mathematiques », vol. XI (1892), pp. 79-82. Vedi E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen.* « Akademische Verlaggesellschaft », Leipzig 1930, p. 93.

M e A compaiano due funzioni non negative, quasi continue nell'intervallo (a, b) $[(x_0, x_0 + h)]$ ed ivi limitate o illimitate, purchè integrabili secondo Lebesgue (5). Però, in tutti i casi, la dimostrazione si fa sfruttando la forma particolare del secondo membro della (3) (della (1)).

Qui ci proponiamo di dimostrare che il lemma di Gronwall rientra in un teorema molto più generale dal quale dedurremo, fra l'altro, un teorema che generalizza la proposizione di Peano. Infine, metteremo il nostro teorema sotto *forma funzionale* che permetterà di allargarne notevolmente l'applicazione.

2. Premettiamo un lemma.

LEMMA. – *Se* $\Phi(x, y)$ *è una funzione definita per* $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, $y_0 - \eta_1 \leq y \leq y_0 + \eta$; *se per ogni* y *fissato nell'intervallo* $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ $\Phi(x, y)$ *è integrabile (secondo Lebesgue) sopra* $(x_0, x_0 + h)$; *se essa soddisfa a una condizione di Lipschitz in* y *nel senso che esiste una funzione* $\Lambda(x) > 0$ *integrabile (secondo Lebesgue) su* $(x_0, x_0 + h)$, *tale che per ogni coppia di valori* y_1 *e* y_2 *di* $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ *si abbia*

$$|\Phi(x, y_1) - \Phi(x, y_2)| \leq \Lambda(x)\,|y_1 - y_2|$$

in quasi tutto $(x_0, x_0 + h)$; *se* $u(x)$ *e* $v(x)$ *sono due funzioni continue in* $(x_0, x_0 + h)$ *con* $u(x_0) = v(x_0) = y_0$, *in esso sempre soddisfacenti rispettivamente alle diseguaglianze* $y_0 - \eta \leq u(x) \leq y_0 + \eta$, $y_0 - \eta \leq v(x) \leq y_0 + \eta$ *ed è per ogni* $\bar{x}$ *di* $(x_0, x_0 + h)$ *tale che* $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$, *in tutto* $(\bar{x}, x_0 + h)$:

$$(A) \qquad u(x) \leq \int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x, u(x))\,dx + u(\bar{x})$$

$$(B) \qquad v(x) \geq \int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x, v(x))\,dx + u(\bar{x})$$

allora si ha:

$$v(x) \geq u(x) \quad , \quad x_0 \leq x \leq x_0 + h.$$

Infatti, se per qualche $x > x_0$ fosse $v(x) < u(x)$, si potrebbero determinare un $\bar{x} \geq x_0$ e un numero $\sigma > 0$ tali che fosse $v(\bar{x}) = u(\bar{x})$ e, per $\bar{x} < x < \bar{x} + \sigma$, $v(x) < u(x)$. Ma allora, essendo, per $\bar{x} \leq x < \bar{x} + \sigma$:

$$u(x) - v(x) \leq \int_{\bar{x}}^{x} \{\Phi(x, u(x)) - \Phi(x, v(x))\}\,dx$$

(5) Vedi L. TONELLI, *Sulle proprietà delle estremanti.* « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », 1934, pp. 213-217, p. 223.

si avrebbe

$$|u(x)-v(x)| \leq \int_{\bar{x}}^{x} |\Phi(x,u(x))-\Phi(x,v(x))|\,dx \leq$$

$$\leq \int_{\bar{x}}^{x} \Lambda(x)\,|u(x)-v(x)|\,dx .$$

Indicato con $\mu(\alpha)$ il massimo di $|u(x)-v(x)|$ in un intervallo $(\bar{x},\alpha)$ con $\bar{x}<\alpha<\bar{x}+\sigma$ e tale da verificare la diseguaglianza:

$$\int_{\bar{x}}^{\alpha} \Lambda(x)\,dx < 1 \tag{5}$$

si ottiene:

$$\mu(\alpha) \leq \mu(\alpha) \int_{\bar{x}}^{\alpha} \Lambda(x)\,dx$$

da cui, essendo $\mu(\alpha)>0$:

$$1 \leq \int_{\bar{x}}^{\alpha} \Lambda(x)\,dx$$

che contraddice alla (5).

Il lemma è così dimostrato.

3. Dal lemma ora provato segue subito la proposizione generale a cui abbiamo accennato in principio:

Teorema: *Se $\Phi(x,y)$ è una funzione non negativa definita per $a<x<b$, $c<y<d$, con a,b,c,d finiti o infiniti; se per ogni y fissato $\Phi(x,y)$ è integrabile (secondo Lebesgue) in ogni parte finita di (a,b); se per $a<a'\leq x\leq b'<b$, $c<c'\leq y\leq d'<d$, con a',b',c',d' numeri finiti, $\Phi(x,y)$ soddisfa a una condizione di Lipschitz in y, nel senso del lemma precedente; allora, se x_0 è un punto interno ad (a,b) e $u(x)$ è una funzione continua nell'intervallo (x_0,x_0+h) appartenente ad (a',b'), ed è in tutti i punti di (x_0,x_0+h), $c'\leq|u(x)|\leq d'$; se, per ogni coppia $(\bar{x},x)$ di punti di (x_0,x_0+h) tali che $x\geq\bar{x}$ è:*

$$\big|\,|u(x)|-|u(\bar{x})|\,\big| \leq \int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x,|u(x)|)\,dx \tag{6}$$

indicata con $v_1(x)$ la soluzione dell'equazione integrale

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x,y(x))\,dx + |u(x_0)|$$

e con $v_2(x)$ *la soluzione dell'equazione integrale*

$$y(x) = -\int_{x_0}^{x} \Phi(x, y(x))\, dx + |u(x_0)|$$ (6)

per tutti gli x *per i quali* $v_1(x), v_2(x)$ *sono definite si ha:*

$$v_2(x) \leq |u(x)| \leq v_1(x) \qquad x \geq x_0.$$

Dalla (6) si deduce:

$$-\int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x, |u(x)|)\, dx + |u(\bar{x})| \leq u(x) \leq$$

$$\leq \int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x, |u(x)|)\, dx + |u(\bar{x})|$$

e siccome è evidentemente

$$v_1(x) = \int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x, v_1(x))\, dx + \int_{x_0}^{\bar{x}} \Phi(x, v_1(x))\, dx + |u(x_0)| =$$

$$= \int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x, v_1(x))\, dx + v_1(\bar{x})$$

e analogamente:

$$v_2(x) = -\int_{\bar{x}}^{x} \Phi(x, v_2(x))\, dx + v_2(\bar{x})$$

basta applicare il lemma del n. 2 per ottenere l'asserto.

4. Se è $\Phi(x, y) \equiv My + A$ dove M e A sono costanti, la prima positiva, la seconda positiva o nulla, essendo, in tal caso:

$$v_1(x) = e^{\int_{x_0}^{x} M\,dx} \left\{ \int_{x_0}^{x} A e^{-\int_{x_0}^{x} M\,dx}\, dx + |u(x_0)| \right\} =$$

$$= |u(x_0)|\, e^{M(x-x_0)} + \frac{A}{M}\left(e^{M(x-x_0)} - 1\right)$$

(6) Nelle ipotesi in cui ci siamo posti, ognuna delle equazioni integrali considerate ammette una e una sola soluzione in un conveniente intorno del punto x_0. Vedi C. CARATHEODORY, *Reelle Funktionen*. 1918, p. 675, Satz 4. Vedi anche SANSONE, loc. cit., Parte seconda, p. 130.

$$v_2(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} M\,dx} \left\{ -\int_{x_0}^{x} A e^{\int_{x_0}^{x} M\,dx}\,dx + |u(x_0)| \right\} =$$

$$= |u(x_0)|\, e^{-M(x-x_0)} + \frac{A}{M}\left(e^{-M(x-x_0)} - 1\right)$$

il teorema del n. 3 dà:

$$(7) \qquad |u(x_0)|\, e^{-M(x-x_0)} + \frac{A}{M}\left(e^{-M(x-x_0)} - 1\right) \leq |u(x)| \leq$$

$$\leq |u(x_0)|\, e^{M(x-x_0)} + \frac{A}{M}\left(e^{M(x-x_0)} - 1\right)^{(7)}$$

che contiene la (2) che compare nel lemma di Gronwall. Pertanto la (7) generalizza la (2).

Un altro caso particolare notevole si ha se è $\Phi(x, y) \equiv M(x)\, y + A(x)$ con $M(x)$, $A(x)$ funzioni non negative, integrabili secondo Lebesgue, in ogni parte finita di (a, b) [8].

5. *Il lemma del n. 2 continua a sussistere se le $u(x)$ e $v(x)$ sono funzioni assolutamente continue e se in luogo delle diseguaglianze* (A) *e* (B) *che ivi compaiono sussistono in quasi tutto $(x_0, x_0 + h)$ le altre:*

$$u'(x) \leq \Phi(x, u(x))$$

$$v'(x) \geq \Phi(x, v(x)).$$

Si deduce da qui il seguente teorema che costituisce una generalizzazione della diseguaglianza di Peano:

Teorema: *Se $\Phi(x, y)$ è una funzione non negativa, definita per $a < x < b$, $c < y < d$, con a, b, c, d finiti o infiniti; se per ogni y fissato $\Phi(x, y)$ è integrabile (secondo Lebesgue) in ogni parte finita di (a, b); se per $a < a' \leq x \leq b' < b$, $c < c' \leq y \leq d' < d$, con a', b', c', d' numeri finiti, $\Phi(x, y)$ soddisfa a una condizione di Lipschitz in y nel senso del lemma del n. 2; se x_0 è un punto interno ad (a, b) e $u(x)$ è una funzione assolutamente continua nell'intervallo $(x_0, x_0 + h)$ appartenente ad (a', b'), in esso soddisfacente alle diseguaglianze: $c' \leq |u(x)| \leq d'$; se è in quasi tutto $(x_0, x_0 + h)$:*

$$|u'(x)| \leq \Phi(x, |u(x)|)$$

indicata con $v_1(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = \Phi(x, y)$$

tale che $v_1(x_0) = |u(x_0)|$ [9] *e con $v_2(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale*

$$y' = -\Phi(x, y)$$

(7) Cfr. L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Zanichelli Bologna, vol. II, p. 168.

(8) Cfr. L. Tonelli, loc. cit. in (5).

(9) Cfr. Caratheodory, loc. cit. in (6) p. 675, Satz 4.

tale che $v_2(x_0) = |u(x_0)|$ [9], *per tutti gli* x *di* $(x_0, x_0 + h)$ *per i quali* $v_1(x), v_2(x)$ *sono definite, si ha*

$$v_2(x) \leq |u(x)| \leq v_1(x) \qquad x_0 \leq x.$$

Basta osservare che per quasi tutti gli x di $(x_0, x_0 + h)$ è:

$$\left| \frac{d|u(x)|}{dx} \right| = \left| \frac{du(x)}{dx} \right|$$

e quindi, per quasi tutti gli x di $(x_0, x_0 + h)$:

$$\left| \frac{d|u(x)|}{dx} \right| \leq \Phi(x, |u(x)|)$$

ossia:

$$-\Phi(x, |u(x)|) \leq \frac{d|u(x)|}{dx} \leq \Phi(x, |u(x)|)$$

e basta applicare il lemma precedente per ottenere l'asserto.

6. Indichiamo [10] con

$$A\left[x, y_{t_1}^{t_2}\right] \tag{8}$$

un funzionale reale cioè *un numero reale* dipendente, secondo una data legge, esclusivamente dalla x considerata e dalla funzione $y(t)$ assegnata nell'intervallo (t_1, t_2) (ove supponiamo $t_1 \leq t_2$). Intenderemo che il funzionale (8) sia definito per ogni x (reale) dell'intervallo $(a, a + h)$; per ogni t_1 (reale) pure di $(a, a + h)$; per ogni t_2 (reale) dell'intervallo $(t_1, a + h)$; per ogni funzione (reale) $y(t)$ data nell'intervallo (t_1, t_2) e in esso continua e sempre soddisfacente alle diseguaglianze:

$$\alpha \leq y(t) \leq \beta.$$

Indichiamo con

$$B\left[\varphi_{t_1}^{t_2}\right] \tag{9}$$

un funzionale reale, definito per ogni funzione appartenente a una certa classe C di funzioni (reali) $\varphi(t)$ assegnate nell'intervallo $(a, a + h)$ dipendente, secondo una data legge, esclusivamente dalla $\varphi(t)$ considerata nell'intervallo (t_1, t_2) (ove supponiamo $a \leq t_1 \leq t_2 \leq a + h$).

Diremo che il funzionale (9) è *uniformemente continuo* se, preso un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, si può corrispondentemente determinare un numero $\delta > 0$ tale che, se t_1 è un punto qualunque di $(a, a + h)$ si abbia

$$\left| B\left[\varphi_{t_1}^{t_1+\delta}\right] \right| < \varepsilon.$$

(10) Cfr. L. Tonelli, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra.* « Bulletin of the Calcutta Mathematical Society », 1929, pp. 31–48.

Supporremo in ciò che segue che il funzionale $A\left[x, y_{t_1}^{t_2}\right]$ soddisfi alla seguente condizione (di Lipschitz in y):

1) esista un funzionale $B\left[\varphi_{t_1}^{t_2}\right]$ uniformemente continuo e una funzione $\Lambda(t)$ della classe C, nella quale è definito il funzionale $B\left[\varphi_{t_1}^{t_2}\right]$, per la quale il funzionale ora considerato, per $\varphi(t) \equiv \Lambda(t)$ risulti non negativo, in modo che, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due funzioni continue in $(a, a+h)$ ivi sempre comprese fra α e β, indicato con $\mu_{t_1}^{t_2}$ il massimo modulo della differenza $y_1(t) - y_2(t)$ nell'intervallo (t_1, t_2) si abbia:

$$\left| A\left[x, y_{1_{t_1}}^{t_2}\right] - A\left[x, y_{2_{t_1}}^{t_2}\right] \right| \leq \mu_{t_1}^{t_2} B\left[\Lambda_{t_1}^{t_2}\right].$$

7. Con ragionamento analogo a quello svolto nel n. 2 si prova il seguente

Lemma. – *Se il funzionale* $A\left[x, y_{t_1}^{t_2}\right]$ *soddisfa alla condizione 1); se* $u(x)$ *e* $v(x)$ *sono due funzioni continue in* $(a, a+h)$, *ivi sempre comprese fra* α *e* β; *se è* $u(a) = v(a) = y_0$ *ed è per ogni* $\bar{x}$ *di* $(a, a+h)$ *tale che* $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$, *in tutto* $(\bar{x}, a+h)$:

$$u(x) \leq A\left[x, u_{\bar{x}}^{x}\right] + u(\bar{x})$$

$$v(x) \geq A\left[x, v_{\bar{x}}^{x}\right] + v(\bar{x})$$

allora si ha

$$v(x) \geq u(x) \qquad a \leq x \leq a + h.$$

Dal precedente lemma si deduce il seguente teorema come dal lemma del n. 2 si è dedotto il teorema del n. 3:

Teorema: *Se supponiamo che il funzionale* $A\left[x, y_{t_1}^{t_2}\right]$ *sia non negativo; se esso soddisfa alla condizione 1); se* $u(x)$ *è una funzione continua in* $(a, a+h)$ *ivi sempre soddisfacente alle diseguaglianze* $\alpha \leq |u(x)| \leq \beta$; *se, per ogni coppia* $(\bar{x}, x)$ *di punti di* $(a, a+h)$ *tale che* $x \geq \bar{x}$ *è:*

$$\left| |u(x)| - |u(\bar{x})| \right| \leq A\left[x, |u|_{\bar{x}}^{x}\right]$$

indicata con $v_1(x)$ *l'unica* (11) *soluzione (supposta esistente) dell'equazione funzionale*

$$(A) \qquad y(x) = A\left[x, y_a^x\right] + |u(a)|$$

(11) Le equazioni funzionali sopra scritte, *se ammettono una soluzione, ne ammettono una sola.* Infatti, dette, se possibile, $\bar{v}(x), \bar{\bar{v}}(x)$ due distinte soluzioni, per esempio dell'equazione (A) esistenti in un conveniente intorno di a, esisterebbe un punto $\bar{x}$ in cui $\bar{v}(\bar{x}) = \bar{\bar{v}}(\bar{x})$ e un intervallo $\bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta$ per ogni x del quale sarebbe ad esempio $\bar{v}(x) > \bar{\bar{v}}(x)$. Ma poichè è, per ogni tale x:

$$(a) \qquad |\bar{v}(x) - \bar{\bar{v}}(x)| = \left| A\left[x, \bar{v}_{\bar{x}}^{x}\right] - A\left[x, \bar{\bar{v}}_{\bar{x}}^{x}\right] \right| \leq \mu_{\bar{x}}^{x} B\left(\Lambda_{\bar{x}}^{x}\right)$$

scelto un α tale che $\bar{x} < \alpha < \bar{x} + h$ per cui

$$(b) \qquad B\left(\Lambda_{\bar{x}}^{\alpha}\right) < 1$$

e con $v_2(x)$ *l'unica*[11] *soluzione (supposta esistente) dell'equazione funzionale*

(B) $$y(x) = -A[x, y_a^x] + |u(a)|$$

per tutti gli x *di* $(a, a+h)$ *per i quali* $v_1(x), v_2(x)$ *sono definite si ha*

$$v_2(x) \leq |u(x)| \leq v_1(x) \qquad x \geq x_0 .$$

8. Alla condizione 1) soddisfano ad esempio i seguenti funzionali:

1) se è per qualunque x

$$|K(x, t, y_1) - K(x, t, y_2)| \leq \Phi(t)\,|y_1 - y_2|$$

dove $\Phi(t)$ è una funzione non negativa, integrabile secondo Lebesgue in $(a, a+h)$:

$$A[x, y_a^x] \equiv \int_a^x K[x, t, y(t)]\,dt .$$

In particolare, se $K(t, y(t))$ non dipende dalla x:

$$A[x, y_a^x] = \int_a^x K[t, y(t)]\,dt$$

2) se è, per qualunque x:

$$|K(x, t)| \leq \Phi(t)$$

dove $\Phi(t)$ è una funzione non negativa, integrabile secondo Lebesgue in $(a, a+h)$:

$$A[x, y_a^x] \equiv \int_a^x K(x, t)\,y(t)\,dt$$

3) se è, per qualunque x:

$$|K(x, t, u)| \leq \Lambda(t, u)$$

dove $\Lambda(t, u)$ è una funzione non negativa, integrabile secondo Lebesgue, per ogni t e u tali che:

$$a \leq t \leq a+h \quad , \quad a \leq u \leq a+h ,$$

$$A[x, y_a^x] \equiv \int_a^x \int_a^x K(x, t, u)\,y(t)\,y(u)\,dt\,du ,$$

ecc. ecc.

si avrebbe

$$\mu_{\bar{x}}^{\alpha} \leq \mu_{\bar{x}}^{\alpha} B\left(\Lambda_{\bar{x}}^{\alpha}\right)$$

ed essendo $\mu_{\bar{x}}^{\alpha} > 0$ si ricaverebbe $B\left(\Lambda_{\bar{x}}^{\alpha}\right) \geq 1$ che contraddice alla (*b*). Dunque è sempre per tutti gli x per cui esistono $\bar{v}(x)$ e $\bar{\bar{v}}(x)$, $\bar{v}(x) \equiv \bar{\bar{v}}(x)$.

Meccanica. — *Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose.* Nota II [1] di G. Krall, presentata dal Socio C. Somigliana.

Riprendendo la Nota I [2] dello stesso titolo consideriamo il:

Calcolo numerico degli autopotenziali $\varphi_{\varrho\tau}$ e $\varphi'_{\varrho\tau}$. – Considerata l'area di galleggiamento ω, divisa in cerchi ω_j di area totale pressapoco eguale occorre valutare per ogni disco, dapprima il corrispondente *autopotenziale* cioè il potenziale su se stesso, poi quello mutuo tra disco e disco.

Con evidenti semplificazioni si viene a scrivere

$$(\varphi_{\varrho\tau} + i\varphi'_{\varrho\tau}) = \sum_i w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_i)\, \Theta_i + \pi^2 \sum_{i\,j} w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_j)\, r_i^2\, r_j^2 \cdot \frac{e^{i\varkappa r_{ij}}}{r_{ij}}$$

con

$$\Theta_i = \int_{\omega_i}\int_{\omega_i} \frac{e^{-i\varkappa r(P,P')}}{r(P,P')}\, d\omega(P)\, d\omega(P').$$

Un siffatto integrale esteso all'area circolare interviene proprio nella citata classica ricerca del Rayleigh che l'ha calcolato con opportuni accorgimenti e sviluppi in serie.

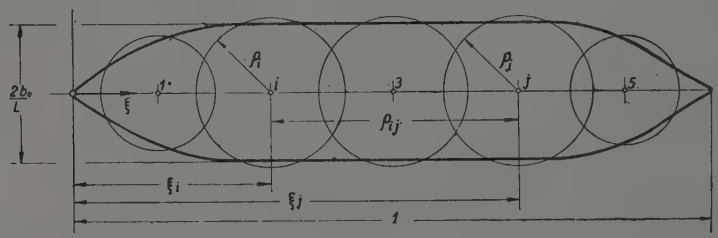


Fig. 4.

Avvalendoci in parte di quei risultati, convenendo di porre (cfr. fig. 4),

$$\rho_{ij} = \frac{r_{ij}}{L} \quad , \quad \rho_i = \frac{r_i}{L},$$

$$y = 2\varkappa r_i = \frac{4\pi r_i}{\lambda},$$

$G = G(y)$ e $H = H(y)$ essendo funzioni appresso graficamente (cfr. fig. 5) riportate, si hanno per $\varphi_{\varrho\tau}$ e $\varphi'_{\varrho\tau}$ le seguenti espressioni:

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1946.
(2) Nella formola (1) leggere non γ_a ma γ_m (densità specifica del materiale).

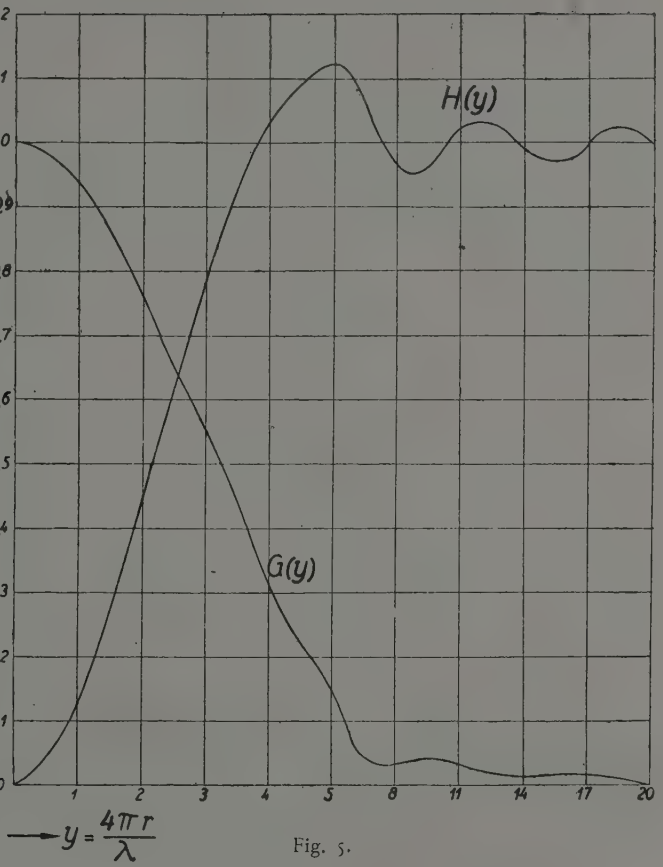


Fig. 5.

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi_{\varrho\tau} = \dfrac{8\pi}{3}\left\{\sum_i w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_i)\, \rho_i^3\, (G(y_i) + \right. \\ \qquad + \dfrac{3\pi}{8}\left.\sum_{ij} \dfrac{\rho_i^2 \rho_j^2}{\rho_{ij}}\, w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_i) \cos 2\pi \dfrac{L}{\lambda}\rho_{ij}\right\}, \\ \varphi'_{\varrho\tau} = \dfrac{\pi}{2}\left\{\dfrac{\lambda}{L}\sum w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_i)\, \rho_i^2 H(y_i) + \right. \\ \qquad + 2\pi \left.\sum_{ij} \dfrac{\rho_i^2 \rho_j^2}{\rho_{ij}}\, w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_i) \sin 2\pi \dfrac{L}{\lambda}\rho_{ij}\right\}. \end{cases}$$

Tali espressioni di $\varphi_{\varrho\tau}$ e $\varphi'_{\varrho\tau}$, per lunghezze d'onda λ grandi in raffronto a L, poichè $G(0) = 1$, $H(0) = 0$, ricadono naturalmente in quelle per i fluidi incompressibili:

$$\varphi_{\varrho\tau} = \Theta_{\varrho\tau} = \frac{8\pi}{3}\left\{\sum_i w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_i)\, \rho_i^3 + \frac{3\pi}{8}\sum_{ij}\frac{\rho_i^2\,\rho_j^2}{\rho_{ij}}\, w_\varrho(\xi_i)\, w_\tau(\xi_j)\right\},$$

(18)

$$\varphi'_{\varrho\tau} = 0.$$

Inutile rilevare che nelle espressioni (17) e (18) la coppia i, j è equivalente a j, i e va quindi contata una sola volta per l'osservazione già fatta.

Esempio elementare a titolo di controllo. – Consideriamo un'area di galleggiamento circolare. Non è frequente nel campo navale, ma l'am-

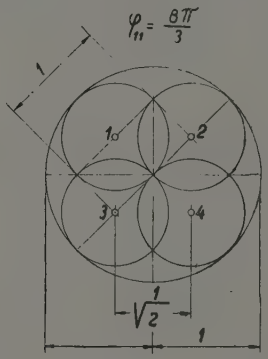


Fig. 6.

miraglio Popoff ne costruì tali, per navi da guerra, forse pensando più all'*armamento* che all'*architettura navale*.

Fissiamo l'attenzione sulla $w_1 = 1$ e limitiamoci al calcolo di Θ_{11} secondo la (18). Dovremo trovare, poichè si tratta di un cerchio di raggio 1,

$$\Theta_{11} = \frac{8\pi}{3}.$$

Pensando il disco scomposto in 4 dischi di area totale equivalente, quindi, con riferimento alla fig. 6, di raggi $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{2}$, poichè $\rho_{14} = \rho_{24} = 1$, $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{34} = \rho_{42} = 1 : \sqrt{2}$, segue senz'altro badando a non computare 2 volte le coppie, cioè considerare o la i, j o la j, i,

$$\varphi_{11} = \frac{8\pi}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4 + \frac{3\pi}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(4\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2\right)\right\} = 1{,}06\,\frac{8\pi}{3} \simeq \frac{8\pi}{3}.$$

Conclusioni. – Per tutto quanto riguarda la dinamica elastica generale della nave, in particolare l'azione dell'isteresi (introduzione dei cicli ellittici), l'impiego degli *ammortizzatori dissipativi, oscillanti* anti-vibrazioni *flessio-torsionali* ecc., rimando alle citate *Lezioni*, qui mi limito a trarre qualche

risultato dagli sviluppi ivi riportati, in particolare a trarre la teoria delle oscillazioni di emersione, beccheggio (e rollio) come corrispondente alle 2 prime autofunzioni w_0, w_1 della (12 *a*) caratterizzanti spostamenti rigidi. Per V_a finito, alle frequenze ridotte $\bar{\omega}_\varrho$, ed agli smorzamenti ridotti $\bar{h}_\varrho$, $(\bar{\nu}_\varrho = \omega_\varrho + i\bar{h}_\varrho)$ si legano le frequenze e gli smorzamenti effettivi $\omega_\varrho, h_\varrho$ secondo le relazioni

$$\omega_\varrho = \bar{\omega}_\varrho \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}_0}{\mu_0 L^4}} \quad , \quad h_\varrho = \bar{h}_\varrho \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}_0}{\mu_0 L^4}} . \tag{19}$$

Per $V_a = \infty$,

$$\bar{\omega}_\varrho = \bar{\nu}_\varrho \quad , \quad \bar{h}_\varrho = 0 ,$$

$$\nu_\varrho = \bar{\nu}_\varrho \sqrt{\frac{E\mathfrak{J}}{\mu_0 L^4}} \quad , \quad \bar{h}_\varrho = 0 . \tag{19 *a*}$$

Il numero dei giri n_ϱ è nei 2 casi

$$n_\varrho = \frac{\omega_\varrho}{2\pi} .$$

Il fattore di smorzamento in un giro è, per V_a finito, $e^{-\frac{h_\varrho}{n_\varrho}}$. In 1ª approssimazione si può porre, in conformità con la (16), ritenendo *separate* le variabili

$$\bar{\nu}_\varrho \cong \sqrt{\frac{\varepsilon^*_{\varrho\varrho}}{\mu^*_{\varrho\varrho}}} \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \cdots N) \tag{20 *a*}$$

con $\varepsilon^*_{\varrho\varrho}, \mu^*_{\varrho\varrho}$ dato dalle (14, *a*, *b*, *c*, *d*).

In 2ª approssimazione conviene combinare tra loro almeno 2 vibrazioni; ad esempio la w_0 con la w_2 per calcolare la 2ª vibrazione, la w_1 con la w_3 per calcolare la 3ª, la w_2 con la w_4 per la 4ª, la w_0 con la w_1 per studiare il moto rigido *(emersione e beccheggio)*.

Si ha nel 1° caso, ammettendo $\bar{\nu}_0 \simeq 0$ (cioè trascurando la frequenza delle oscillazioni di emersione del galleggiante rigido che è sempre piccola in raffronto anche alla vibrazione flessionale più bassa,

$$\bar{\nu}_2^2 = \frac{\varepsilon^*_{22}}{\mu^*_{22}} \frac{1}{1 - \dfrac{\mu^{*2}_{02}}{\mu^*_{00}\,\mu^*_{22}}} , \tag{20 *b*}$$

Analogamente si ha, ponendo $\bar{\nu}_1 \simeq 0$, cioè trascurando la frequenza di beccheggio,

$$\bar{\nu}_3^2 = \frac{\varepsilon^*_{33}}{\mu^*_{33}} \frac{1}{1 - \dfrac{\mu^{*2}_{13}}{\mu^*_{11}\,\mu^*_{33}}}$$

$\varepsilon^*_{\varrho\varrho}, \mu^*_{\varrho\varrho}$ essendo definiti dalle (14 *c*) con $\varepsilon_{\varrho\tau}, \mu_{\varrho\tau}$ $(\rho = 0 \div \tau)$ definiti dalle (14) e, nelle condizioni (16), dalle Tab. III e IV.

Tabella III.

$\mu_{00} = 1 - 0{,}08333\, m_2$	$\mu_{10} = -0{,}08333\, m_1$	$\mu_{20} = 0{,}0527\, m_2$	$\mu_{30} = 0$	$\mu_{40} = -0{,}00427\, m_2$
$\mu_{01} = -0{,}08333\, m_1$	$\mu_{11} = 0{,}08333 - 0{,}0125\, m_2$	$\mu_{21} = 0.0527\, m_1$	$\mu_{31} = 0{,}0131\, m_2$	$\mu_{41} = -0{,}00427\, m_1$
$\mu_{02} = 0{,}0527\, m_2$	$\mu_{12} = 0{,}0527\, m_1$	$\mu_{22} = 0{,}500 - 0{,}0604\, m_2$	$\mu_{32} = -0{,}1154\, m_1$	$\mu_{42} = 0.00017 + 0{,}03075\, m_2$
$\mu_{03} = 0$	$\mu_{13} = 0{,}01370\, m_2$	$\mu_{23} = -0{,}1154\, m_1$	$\mu_{33} = 0{,}500 - 0{,}0507\, m_2$	$\mu_{43} = 0{,}1089\, m_1$
$\mu_{04} = -0{,}00427\, m_2$	$\mu_{14} = 0{,}00427\, m_1$	$\mu_{24} = 0.00017 + 0{,}03075\, m_2$	$\mu_{34} = 0{,}1089\, m_1$	$\mu_{44} = 0.500 - 0{,}0468\, m_2$

Tabella IV.

$\varepsilon_{00} = 0$	$\varepsilon_{01} = 0$	$\varepsilon_{02} = 0$	$\varepsilon_{03} = 0$	$\varepsilon_{04} = 0$
$\varepsilon_{10} = 0$	$\varepsilon_{11} = 0$	$\varepsilon_{12} = 0$	$\varepsilon_{13} = 0$	$\varepsilon_{14} = 0$
$\varepsilon_{20} = 0$	$\varepsilon_{21} = 0$	$\varepsilon_{22} = 250{,}80 - 5{,}49\, k_2$	$\varepsilon_{23} = -102{,}02\, k_1$	$\varepsilon_{24} = \varepsilon_{42}$
$\varepsilon_{30} = 0$	$\varepsilon_{31} = 0$	$\varepsilon_{32} = 102{,}02\, k_1$	$\varepsilon_{33} = 1901{,}75 - 101{,}05\, k_1$	$\varepsilon_{34} = 656{,}81\, k_1$
$\varepsilon_{40} = 0$	$\varepsilon_{41} = 0$	$\varepsilon_{42} = 7.75 + 36{,}853\, k_2$	$\varepsilon_{43} = 656{,}81\, k_1$	$\varepsilon_{44} = 7361{,}75 - 486{,}48\, k_2$

Per $\gamma_a = 0$ la (20 a) diviene,

$$(20\,a') \qquad \bar{\nu}_{\varrho\varrho} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\varrho\varrho}}{\mu_{\varrho\varrho}}}\,,$$

e la (20 b)

$$(20\,b') \qquad \bar{\nu}_2^2 = \frac{\varepsilon_{22}}{\mu_{22}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\mu_{02}^2}{\mu_{00}\,\mu_{22}}}\,.$$

Per V_a finito, posto $\lambda_\varrho = V_a : n_\varrho$ con $n_\varrho = \dfrac{\nu_\varrho}{2\pi}$ e ν_ϱ frequenza di 1ª approssimazione, valutata ad esempio con la relazione precedente, si ha in 2ª approssimazione, ritenendo separate le vibrazioni,

$$(20\,c) \qquad \begin{cases} \bar{\omega}_\varrho = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\varrho\varrho}}{\mu^*_{\varrho\varrho}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{1 + \left(\dfrac{c_{\varrho\varrho}}{\mu^*_{\varrho\varrho}}\right)^2}} \left\{ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{c_{\varrho\varrho}}{\mu^*_{\varrho\varrho}}\right)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{b}_\varrho = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\varrho\varrho}}{\mu^*_{\varrho\varrho}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{1 + \left(\dfrac{c_{\varrho\varrho}}{\mu^*_{\varrho\varrho}}\right)^2}} \left\{ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{c_{\varrho\varrho}}{\mu^*_{\varrho\varrho}}\right)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

con le solite determinazioni di $\varepsilon^*_{\varrho\varrho}$, $\mu^*_{\varrho\varrho}$; $c_{\varrho\varrho}$ è dato dalla (14 c).

Per una nave di cui la fig. 7 indica l'area di galleggiamento ω (ridotta alla lunghezza L = 1) nella quale L = 60,00 m. per $E\mathfrak{J}_o = 141{,}14 \cdot 10^6$ t. m², $\mu_o\, g = 32{,}50$ t. m^{-1}, $\gamma_a\, g = 1{,}03$ t. m^{-3}, $V_a = 1450$ m. sec^{-1} e per una distribuzione dei pesi e dei ferri tale che nelle (16) risulta $k_1 = m_1 = 0$ e $k_2 = 4{,}54$, $m_2 = 1{,}97$, si trova, attraverso ordinato sviluppo del metodo illustrato in ogni dettaglio tabellare, nelle *Lezioni* citate, associando alle (14) o (14 d) le (17)(18) e le (19), lo specchietto sottoriportato per il numero di giri $n = \nu : 2\pi$ in sec^{-1}:

Avvalendosi della	(20 a')	(20 b')	(20 a)	(20 b)	(20 c)	h_ϱ
n_2	7,02	7,14	4,27	4,94	4,24	0,23
n_3	17,32	17,77	10,65	11,84	10,31	0,24
n_4	32,43	32,45	21,04	21,41	20,30	0,48

Le (20 b, b') sono applicate per $\nu_o \cong 0$, $\nu_1 \cong 0$,
Tenendo conto della variazione di immersione ($\nu_o \neq 0$) si ha

$$n_o = 0{,}14 \text{ sec}^{-1} \quad , \quad n_2 \cong 4{,}94 \text{ sec}^{-1}\,.$$

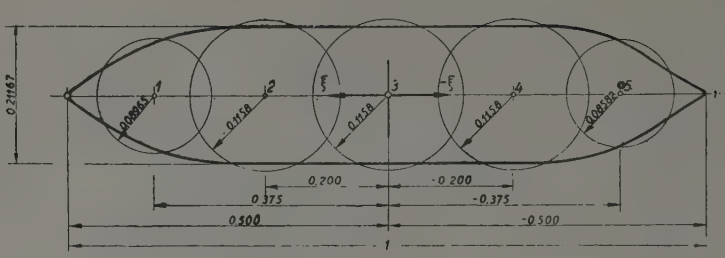


Fig. 7.

Consideriamo infine un'area di galleggiamento circolare di raggio R. Le masse sieno uniformemente distribuite con densità superficiale σ_0. Si ha evidentemente $2b_0 = 2R$, $L = 2R$, e, prendendo l'origine al mezzo nave e l'asse $\xi > 0$ rivolto a poppavia, $\mu = \mu_0\sqrt{1-\xi^2}$, $b = b_0\sqrt{1-\xi^2}$; in coordinate polari R, α ($\alpha = 0$ coincide con $\xi > 0$) $\mu = \mu_0 \sin\alpha$, $b = b_0 \sin\alpha$, $\xi = 0{,}5 \cos\alpha$, $d\xi = -0{,}5 \operatorname{sen}\alpha \cdot d\alpha$. Consideriamo le (15) limitamente alle 2 prime autofunzioni $w_0 = 1$, $w_1 = \xi$. Si rilevi che $\mu_0 = 2R\sigma_0$ se σ_0 è la massa per unità di superfice; $\gamma_a g$ il peso specifico del liquido.

Poniamo $V_a \cong \infty$ poichè per le oscillazioni di beccheggio, ecc. ν_0, ν_1 è piccolo e λ molto grande in raffronto ad R.

Si ha subito $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{01} = \varepsilon_{10} = \varepsilon_{11} = 0$ e quindi, per le considerate espressioni di w_0 e w_1, rilevando che $R : L = 0{,}5$,

$$\varepsilon^*_{00} = \eta_a \beta_{00} = \eta_a \int_{-0,5}^{0,5} \frac{b}{b_0}\, d\xi = \eta\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi} \sin^2\alpha\, d\alpha = \eta_a \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\varepsilon^*_{10} = \varepsilon^*_{01} = \eta_a \beta_{10} = \eta_a \int_{-0,5}^{0,5} \frac{b}{b_0}\, \xi\, d\xi = 0$$

$$\varepsilon^*_{11} = \eta_a \beta_{11} = \eta_a \int_{-0,5}^{0,5} \frac{b}{b_0}\, \xi^2\, d\xi = \eta_a \left(\frac{1}{2}\right)^3 \int_0^{\pi} \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha = \eta_a \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\pi}{8}.$$

Per gli autopotenziali $\varphi_{0\tau}$ risulta, posto $d\omega = d\xi \cdot d\eta$, $d\omega' = d\xi' \cdot d\eta'$, $\rho(P, P') = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}$, computando per una le 2 coppie commutate corrispondenti, poichè il raggio $R = 1/2$, essendo $L = 2R = 1$,

$$\varphi_{00} = \Theta_{00} = \int_{\omega}\int_{\omega} \frac{d\omega\, d\omega'}{\rho(P, P')} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{8\pi}{3} \quad , \quad \varphi'_{00} \cong 0,$$

$$\varphi_{01} = \Theta_{01} = \int_{\omega}\int_{\omega} \frac{\xi\, d\omega\, d\omega'}{\rho(P, P')} = 0 \quad , \quad \varphi'_{01} \cong 0,$$

$$\varphi_{11} = \Theta_{11} = \int_{\omega}\int_{\omega} \frac{\xi\xi'\, d\omega\, d\omega'}{\rho(P, P')} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{4\pi}{15} \quad , \quad \varphi'_{11} \cong 0.$$

Il calcolo di φ_{00} è riportato nella *Theorie of Sound* del Rayleigh, φ_{01} e φ_{11} risultano per via analoga.

Per i coefficienti di inerzia $\mu_{0\tau}$ si ha

$$\mu_{00} = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\mu(\xi)}{\mu_0}\, d\xi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha\, d\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$\mu_{01} = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\mu(\xi)}{\mu_0}\, \xi\, d\xi = 0$$

$$\mu_{11} = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\mu}{\mu_0}\, \xi^2\, d\xi = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\pi}{8}.$$

L'equazione delle frequenze (16) diviene, poichè si separano le variabili,

$$\eta_a \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \bar{\nu}^2 \left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \chi \frac{1}{2^3}\frac{8\pi}{3}\right] = 0$$

$$\eta_a \frac{1}{2^3}\frac{\pi}{8} - \bar{\nu}^2 \left[\frac{1}{2^3}\frac{\pi}{8} + \chi \frac{1}{2^5}\frac{4\pi}{15}\right] = 0$$

e da qui si hanno le frequenze delle oscillazioni di emersione rispettivamente di beccheggio, ricordando le espressioni di ν in termini di $\bar{\nu}$, di η_a per $b_0 = R$,

$$\nu_0^2 = \frac{2 R_0 \gamma_a g}{\mu_0} \frac{1}{1 + \frac{4}{3}\chi}, \qquad \nu_1^2 = \frac{2 R_0 \gamma_a g}{\mu_0} \frac{1}{1 + \frac{8}{15}\chi}$$

con

$$\chi = \frac{1}{\pi} \frac{(2R)^2 \gamma_a}{\mu_0}.$$

Per i periodi $T = \frac{2\pi}{\nu}$ tali relazioni si possono scrivere in forma più espressiva introducendo la distanza metacentrica δ_{M_l}, il dislocamento $\mathcal{S} = \mathcal{V}\gamma_a g$, il momento di inerzia I_p delle masse rispetto a $\xi = 0$. Rilevando che nel caso specifico

$$I_p = \frac{R^4 \pi}{4}\frac{\mu_0}{2 R_0}, \quad \delta_{M_l} = \frac{\frac{R^4\pi}{4}}{\mathcal{V}} \text{ con } \mathcal{V} = \frac{\mathcal{S}}{\gamma_a g},$$

si ha per il periodo delle oscillazioni di emersione

$$T_0 = \frac{2\pi}{\nu_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma_0}{\gamma_a g}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{\pi}\frac{\frac{4\pi}{3} R^3 \pi}{M}} \text{ con } \sigma_0 = \frac{M}{R^2 \pi};$$

per le oscillazioni di beccheggio

$$T_1 = \frac{2\pi}{\nu_1} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{M_l} I_p}{\mathcal{G}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{8\pi}{15} R^5 \gamma_a}{I_p}}.$$

Ricordando (3) le formole classiche per detti periodi T_0 e T_1 quando si trascura l'inerzia del fluido, si conclude che per le prime, l'azione dell'inerzia del fluido equivale ad aumentare la massa M del galleggiante di $\frac{2}{\pi} \times$ la massa di una sfera d'acqua di raggio R, ciò che è conforme al caso del Rayleigh, per le 2^e è come aggiungere $\frac{1}{2\pi} \times$ il momento di inerzia della stessa sfera d'acqua di raggio R.

Questi risultati così semplici sono tipici per le navi dell'ammiraglio Popoff, per le quali, tra l'altro, il rollio ha il periodo del beccheggio, ma si possono estendere ad aree di galleggiamento ellittiche con opportuno calcolo degli autopotenziali come farà vedere il dott. Betti in una prossima Nota su questi « Rendiconti ».

Ad ogni buon conto, il nostro problema riguarda le vibrazioni elastiche e l'essermi soffermato su queste vibrazioni rigide è servito più che altro a mettere in luce il metodo generale ed a valorizzare le 2 prime autofunzioni w_0, w_1 notoriamente a frequenza nulla, tipiche dell'asta volante (per $\gamma_a \to 0$) che implicano in tale caso la necessità di azioni perturbanti equilibrate cioè a risultante e momento nullo rispetto ad un punto. Nella teoria attuale, quella condizione non è manifestamente necessaria. Si osservi ancora che i periodi di rollio, beccheggio sono dell'ordine dei secondi, le lunghezze d'onda sono allora dell'ordine dei Km. e quindi effettivamente per navi lunghe dell'ordine delle decine di m. gli autopotenziali $\varphi'_{\rho\tau}$ si annullano e quelli $\varphi_{\rho\tau}$ si identificano con le espressioni $\Theta_{\rho\tau}$ $(\rho,\tau = 0,1)$ come risulta subito osservando le (14 *a*).

Per una approfondita illustrazione applicativa di tutta la problematica qui considerata, cfr. le mie *Lezioni di Idro–aerodinamica delle vibrazioni dei corpi elastici* citate nella Nota I.

(3) Cfr., ad esempio, G. Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, Cap., I, vol. I; Zanichelli, Bologna 1940.

Meccanica. — *Moltiplicatore critico* λ_{cr} *d'una distribuzione di carico su una volta autoportante.* Nota I di G. Krall, presentata [1] dal Socio C. Somigliana.

1. Carichi critici per volte autoportanti. – Il problema che involge la determinazione del carico critico, più precisamente del minimo moltiplicatore critico λ_{cr} dei carichi agenti su una volta cilindrica autoportante [2], non vi è dubbio, è un problema aperto per il costruttore di questi sistemi, di cui il criterio statico è chiarito in fig. 1 e nella sua leggenda. Nel trattato del Flügge [3] che assomma, si può ben dire, ogni nostra conoscenza sulle strutture sottili, un capitolo è dedicato all'analisi qualitativa dell'equilibrio delle volte.

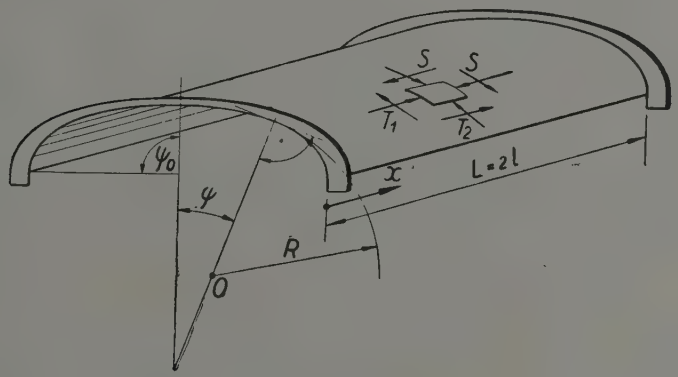


Fig. 1.

Se gli estremi di una volta cilindrica, si rendono solidali con dei timpani sufficentemente resistenti, la volta si auto-porta tra essi senza imposte e senza tiranti intermedi. Ciò può avvenire anche per volte assimilabili a veli, quindi con distribuzioni aflessionali di sforzi (T_1, T_2, S), purchè, oltre a certe condizioni di continuità, la direttrice sovrasti sulla catenaria dei carichi su di essa agenti e la distribuzione di questi sia tale da risultare ad essa tangente nei bordi $\psi = \pm \psi_0$.

Se i carichi sono verticali (ad esempio, peso proprio del velo) la direttrice potrà essere una cicloide o una semiellisse. Al bordo rimangono però non equilibrati gli sforzi di taglio S.

L'integrale di questi sforzi lungo una generatrice di bordo preso tra la sezione $x = 0$ e $x = \text{cost.}$ da luogo ad una forza (*tiro*) Z che deve venir assorbita da un tirante (*tirante di bordo*) che si fa coincidere con la generatrice $\psi = \psi_0$ rispettivamente $\psi = -\psi_0$.

Evidentemente $Z = 0$ per $x = 0$, L e $Z = Z_{max}$ per $x = \frac{1}{2} L = l$ e carichi uniformemente ripartiti o simmetrici rispetto alla direttrice $x = l$. Si generano allora, inamissibili, discontinuità negli sforzi T_1 sanabili solo sovrapponendo una soluzione flessionale tanto meno sensibile e tanto più rapidamente smorzata con ψ quanto più è sottile la volta in raffronto alle sue dimensioni globali.

Perciò, in grande, la soluzione aflessionale rispecchia le forze interne effettive.

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) Cfr. *Questioni di Matematica Applicata*, pp. 37–101. Zanichelli, Bologna 1939.

(3) W. Flügge, *Statik und Dynamik der Schalen.* Cap. IX, Springer, Berlin 1934.

Ma, dopo le premesse generali, nell'indirizzo ormai classico del Föppl [4], egli passa a trattare tre problemi che, se sono fondamentali per il costruttore di macchine: il cilindro circolare chiuso soggetto a sforzo assiale, (un po' meno conclusivamente) il caso dello sforzo eccentrico, infine, il cilindro soggetto a torsione; lasciano deluso il costruttore di cementi armati. Lo stesso avviene nella magistrale « Elastic of stability » del Timoshenko [5]; ma quì la circostanza si spiega, poichè tutta l'opera, sia pur tacitamente, è dedicata alle costruzioni metalliche, nelle quali non si considerano ancora le volte autoportanti, oltre Oceano tutt'altro che affermate.

In Europa, invece, il favore che hanno incontrato è misurabile, direi in km² di superficie coperte a parte le applicazioni come strutture essenzialmente portanti di cui ho dato [6] qualche vistoso esempio anche in questi Rendiconti per lumeggiare meglio che possibile le loro possibilità a prima vista insospettate. La quistione della stabilità si è presentata quindi ad ogni costruttore anche perchè, ad elementi che la determinano, in sostanza lo spettro dei *moltiplicatori critici* [7], si collega l'azione, talvolta perversa, della *viscosità* [8]. Qualche incidente sensibile, avvenuto all'estero, anche molti mesi dopo il disarmo, ha gettato l'allarme e condotto ad introdurre nelle volte di dimensioni notevoli una *ortotropia* [9], realizzata con nervature irrigidenti, fastidiose in ogni caso e non sempre giustificate.

Il problema della stabilità delle volte autoportanti, si trova agitato in più scritti [10], ma è incamminato su vie assai difficilmente perseguibili. Da anni io batto con doverosa diligenza alle soglie della quistione; i risultati conseguiti non sono del tutto incoraggianti, ma, comunque, credo che una loro esposizione torni utile, anche perchè il problema viene strettamente circoscritto e precisato e vien raggiunta qualche posizione atta ad intravedere, già in queste pagine, senza sensibile aberrazione, la soluzione cercata.

Questa apparirà ancor meglio in una Nota II, grazie al decisivo interessamento del prof. M. Picone, Direttore dell'Istituto Nazionale di Calcolo del C. N. R.

Per questo interessamento ho potuto superare, con l'aiuto particolare del dott. D. Caligo, collaboratore dell'Istituto, i lunghi penosi calcoli che

(4) A. u. L. Föppl, *Drang und Zwang*. § 108, Oldenbourg, Berlin 1924.

(5) S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*. London 1936 Pr.

(6) G. Krall, *Stabilità nel caso combinato di Eulero Prandtl Reissner*. « Rend. Acc. Lincei », 1946.

(7) Cfr. ad esempio G. Krall, *Meccanica Tecnica delle vibrazioni*. Vol. II, cap. VIII, Zanichelli, Bologna 1940.

(8) G. Krall, *Statica dei sistemi elastici viscosi*. « Annali di Matematica », 1947 (in corso di stampa).

(9) G. Krall, *Pressioni critiche in un involucro cilindrico rinforzato con nervature eventualmente impresse*. « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, to. XXIII (1945).

(10) A. Galli, *Premesse analitiche allo studio della stabilità delle volte autoportanti*. « Rend. Mat. R. Università di Roma », 1943.

intervengono tra la scelta delle *terne estremanti* e la valutazione effettiva dell'*estremo* di un certo rapporto tra 2 *funzionali* con cui qui si identifica il moltiplicatore critico.

Negli esempi mi limito per ora alla volta autoportante a base semicircolare ma nella annunciata Nota II, in collaborazione col dott. Caligo, considererò la base cicloidica (come più prossima a quella a base ellittica tanto usata in pratica quanto, con riguardo all'analisi qualitativa dell'equilibrio, tetragona al più persistente calcolatore) il cilindro circolare o semicircolare autoportante e portante, tra due timpani nei *ponti canale*, tra due *paratie*, nelle costruzioni navali.

2. Nozione di moltiplicatore critico λ_{cr} di una assegnata condizione di carico $\mathfrak{S}$ per una volta sottile. – Sieno T_1, T_2, S le componenti degli sforzi corrispondenti alla configurazione d'equilibrio $\mathfrak{C}_0$ corrispondente ai carichi $\mathfrak{S}$. Siano e_1, e_2, ω le componenti della deformazione corrispondenti ad una assegnata terna di spostamenti u, v, w contata a partire da $\mathfrak{C}_0$. Penseremo le e_1, e_2, ω separate in termini del 1° rispettivamente del 2° ordine negli spostamenti u, v, w; precisamente scriveremo

$$e_1 = e_1^{(1)} + e_1^{(2)}, \quad e_2 = e_2^{(1)} + e_2^{(2)}, \quad \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}$$

Sieno $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$ le variazioni di curvatura che basterà pensare limitate ai termini del 1° ordine in u, v, w. Orbene, si ha per il moltiplicatore critico λ_{cr} (cfr. 8)

$$\lambda_{cr} = \min \cdot \frac{W}{\mathfrak{L}^{(2)}} \tag{1}$$

con W potenziale elastico corrispondente alla *a priori* incognita terna minimizzante di spostamenti u, v, w, $\mathfrak{L}^{(2)}$ lavoro dello sforzo interno T_1, T_2, S corrispondente a $\mathfrak{S}$ per $e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \omega^{(2)}$ corrispondente ad u, v, w.

Per W si ha

$$W = W_f + W_e \tag{2}$$

con W_f potenziale elastico flessionale dato, secondo classiche formole [11], da

$$2\,W_f = \frac{E\,d_0^3}{12\,(1-\nu^2)} \int_\Omega \{\varkappa_1^2 + 2\nu\,\varkappa_1\,\varkappa_2 + \varkappa_2^2 + 2\,(1-\nu)\,\varkappa_{12}^2\} \cdot d\Omega\,, \tag{2a}$$

W_e potenziale elastico estensionale dato da

$$2\,W_e = \frac{E\,d_0}{1-\nu^2} \int_\Omega \left\{ e_1^2 + 2\nu\,e_1\,e_2 + e_2^2 + \frac{1-\nu}{2}\,\omega^2 \right\} \cdot d\Omega \tag{2b}$$

(11) Cof. A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4 N. ed. Cambridge, 1906.

l'integrazione essendo estesa alla superfice Ω e con le e_1, e_2, ω limitate, naturalmente, poichè intervengono in forma quadratica, ai termini del 1° ordine $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \omega^{(1)}$.

Per $\mathfrak{L}^{(2)}$ si ha infine, poichè si considerano i soli [12] sforzi T_1, T_2, S cioè uno stato di equilibrio cosidetto *a membrana*,

$$\mathfrak{L}^{(2)} = \int_{\Omega} \{ T_1 e_1^{(2)} + T_2 e_2^{(2)} + S\omega^{(2)} \} \cdot d\Omega . \tag{3}$$

Se alle generatrici di bordo libero è esistente, come talvolta necessario, un tirante, cosidetto *tirante di bordo* [12], introdotto per assorbire gli sforzi di taglio, che ivi possono non annullarsi, ove sia F l'area (sezione del ferro moltiplicata per il rapporto n dei moduli del ferro e del calcestruzzo), a W_e va aggiunto un termine

$$2\,\Delta W_e = \int EF e_1^2 \, dx ,$$

a $\mathfrak{L}^{(2)}$ un termine in funzione del tiro Z,

$$\Delta\mathfrak{L}^{(2)} = \int Z e_1^{(2)} \, dx$$

con $e_1^{(1)}, e_1^{(2)}$ calcolate sulle dette generatrici di bordo e l'integrazione essendo estesa lungo esse a tutta la portata $0 \leq x \leq L$. Ciò posto, il *primo passo sta nel calcolare le* $e^{(2)}$ *in modo opportuno perchè il calcolo di* $\mathfrak{L}^{(2)}$ *sia effettivamente perseguibile.*

3. Calcolo delle componenti $e^{(1)} + e^{(2)}$ della deformazione per una superficie qualunque. – Premettendo nota la classica trattazione del Love della teoria generale delle volte sottili [13], rifacciamo il calcolo delle e_1, e_2, ω che interessano per i nostri intenti, tenendo però conto dei termini del 2° ordine, ivi trascurati.

Senza indugiarci quindi in quelle precisazioni che si richiederebbero per una autonoma trattazione, mantenendo i simboli del Love, riferiamo la superficie, per ora qualunque, indeformata Ω ad un elemento lineare ds espresso in coordinate curvilinee α, β,

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 + 2AB \cos\chi \, d\alpha \, d\beta \tag{4}$$

essendo:

A, B in generale funzioni di α, β,

χ l'angolo che fanno tra loro le tangenti nel punto $P(\alpha, \beta)$, alle linee $\alpha = \text{cost.}, \beta = \text{cost.}$ Se ammetteremo che dette linee sieno di curvatura, sarà $\chi = \frac{\pi}{2}$.

(12) Cfr. cit. (2), p. 55.
(13) Cfr. cit. (11), p. 492, cap. XXIV.

In P consideriamo una terna x, y, z di assi essendo z orientato secondo la normale ad Ω, l'asse x tangente alla curva $\beta = \text{cost.}$, l'asse y normale ad x, e con verso tale che la terna x, y, z risulti *destra*.

Sieno: u, v, w gli spostamenti applicati a P riferiti alle tangenti, ed alla normale in P, alle curve $\beta = \text{cost.}$, $\alpha = \text{cost.}$

R_1 ed R_2 i raggi di curvatura di quelle sezioni normali della superfice che hanno per tangenti in P gli assi x, y.

Orbene, dette:

$$a) \quad e_1 = e_1^{(1)} + e^{(2)} \quad , \quad e_2^{(1)} = e_2^{(1)} + e_2^{(2} \quad , \quad e_{12} = \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}$$

le componenti della deformazione (corrispondenti nel piano cartesiano alle e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}),

b) x', y', z' le coordinate del punto P' ottenuto da P di Ω con uno spostamento definito da una terna u, v, w funzione continua con le derivate prime e seconde di α, β; essendo x', y', z' una terna *fissa*.

Con origine in P' sieno definiti rispetto ad Ω' deformata di Ω, assi x, y, z così come la terna prima considerata per Ω.

(Converrà identificare poi tale terna di Ω con x', y', z').

I coseni direttori di x, y, z, rispetto a x', y', z' sono raccolti nella matrice,

	x'	y'	z'
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

;

c) Definito con ds' l'elemento lineare di Ω' deformata di Ω, con χ' l'angolo che formano le $\alpha = \text{cost.}$, $\beta = \text{cost.}$ su Ω', si ha

$$(5) \quad ds'^2 = A^2(1+e_1)^2 d\alpha^2 + B^2(1+e_2)^2 d\beta^2 + 2AB(1+e_1)(1+e_2)\cos\chi' \, d\alpha \, d\beta.$$

Se le α, β coincidono con le linee di curvatura di Ω e sono quindi ortogonali, con che il ds^2 definito dalla (4) si riduce a

$$(4a) \qquad ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$$

risulta $\cos\chi = 0$ e $\cos\chi'$ dell'ordine di e.

Poichè $\cos\chi' = \omega = e_{12}$ si potrà anche scrivere

$$(5a) \quad ds'^2 = A^2(1+e_1)^2 d\alpha^2 + B^2(1+e_2)^2 d\beta^2 + 2AB(1+e_1)(1+e_2)\omega \, d\alpha \, d\beta.$$

In base all'espressione (5*a*) di ds' segue per i coseni direttori l_1, m_1, n_1 della tangente in P′ alla curva $\beta = \text{cost.}$,

$$(6)\quad A(1+e_1)\,l_1 = \frac{\partial x'}{\partial \alpha}\quad,\quad A(1+e_1)\,m_1 = \frac{\partial y'}{\partial \alpha}\quad,\quad A(1+e_1)\,n_1 = \frac{\partial z'}{\partial \alpha}$$

e, essendo $(l_2 \sin\chi' + l_1 \cos\chi')$, $(m_2 \sin\chi' + m_1 \cos\chi')$, $\cdots$; i coseni direttori della tangente in P′ alla curva $\alpha = \text{cost.}$, sarà

$$(7)\quad \begin{cases} B(1+e_2)(l_2 \sin\chi' + l_1 \cos\chi') = \dfrac{\partial x'}{\partial \beta}, \\ B(1+e_2)(m_2 \sin\chi' + m_1 \cos\chi') = \dfrac{\partial y'}{\partial \beta}, \\ B(1+e_2)(n_2 \sin\chi' + n_1 \cos\chi') = \dfrac{\partial z'}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Ma, poichè $\cos\chi' = \omega$ con ω piccolo del 1° ordine se l'originario ds era ortogonale e, a meno di termini d'ordine superiore al 2°,

$$\sin\chi = 1 - \frac{\omega^2}{2},$$

risulta al posto delle (7)

$$(7\,a)\quad \begin{cases} B(1+e_2)\left[l_2\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)+l_1\,\omega\right] = \dfrac{\partial x'}{\partial \beta}, \\ B(1+e_2)\left[m_2\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)+m_1\,\omega\right] = \dfrac{\partial y'}{\partial \beta}, \\ B(1+e_2)\left[n_2\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)+n_1\,\omega\right] = \dfrac{\partial z'}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Si ha infine, per i coseni direttori l_3, m_3, n_3 della normale in P′ alla Ω',

$$l_3 = m_1 n_2 - m_2 n_1\quad,\quad m_3 = n_1 l_2 - n_2 l_1\quad,\quad n_3 = l_1 m_2 - l_2 m_1.$$

Segue dalle (6) quadrando e sommando

$$(8)\quad e_1 = \frac{1}{A}\sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\right)^2} - 1.$$

Dalle (7 *a*), con le stesse operazioni, attese le condizioni di ortogonalità, si ha

$$B^2(1+e_2)^2\left[\left(1-\frac{\omega^2}{2}\right)^2+\omega^2\right] = \left(\frac{\partial x'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \beta}\right)^2$$

ovvero, trascurando il termine in ω^4,

$$(9)\quad e_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\left(\frac{\partial x'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial \beta}\right)^2} - 1.$$

Infine, per moltiplicazione di (6) per (7 *a*) si ha sommando

$$AB(1+e_1)(1+e_2)\omega = \frac{\partial x'}{\partial\alpha}\frac{\partial x'}{\partial\beta} + \frac{\partial y'}{\partial\alpha}\frac{\partial y'}{\partial\beta} + \frac{\partial z'}{\partial\alpha}\frac{\partial z'}{\partial\beta}$$

e quindi, poichè il termine a destra è del 1° ordine, si potrà ritenere dal quoziente $1:(1+e_1)(1+e_2)$ la sola parte del 1° ordine $1-e_1^{(1)}-e_1^{(1)}$ e scrivere in definitiva

$$(10)\qquad \omega = \frac{1}{AB}\left(1-e_1^{(1)}-e_2^{(1)}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial\alpha}\frac{\partial x'}{\partial\beta} + \frac{\partial y'}{\partial\alpha}\frac{\partial y'}{\partial\beta} + \frac{\partial z'}{\partial\alpha}\frac{\partial z'}{\partial\beta}\right).$$

Ciò posto, non resta che esprimere $\frac{\partial x'}{\partial\alpha},\cdots$; per tramite di u, v, w, per avere e_1, e_2, ω.

Ora si hanno, secondo Love, le seguenti relazioni fondamentali che legano $\frac{\partial x'}{\partial\alpha}, \frac{\partial x'}{\partial\beta}; \frac{\partial y'}{\partial\alpha}, \frac{\partial y'}{\partial\beta}$, ecc. a u, v, w secondo x', y', z' e corrispondenti derivate,

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial\alpha} = A + \dfrac{\partial u}{\partial\alpha} + \dfrac{v}{B}\dfrac{\partial A}{\partial\beta} - \dfrac{Aw}{R_1}, \qquad \dfrac{\partial y'}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial v}{\partial\alpha} - \dfrac{u}{B}\dfrac{\partial A}{\partial\beta}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial z'}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial w}{\partial\alpha} + \dfrac{Au}{R_1}, \\ \dfrac{\partial x'}{\partial\beta} = \dfrac{\partial u}{\partial\beta} - \dfrac{v}{A}\dfrac{\partial B}{\partial\alpha}, \qquad \dfrac{\partial y'}{\partial\beta} = B + \dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{u}{A}\dfrac{\partial B}{\partial\alpha} - \dfrac{Bw}{R_2} \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial z'}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial w}{\partial\beta} + \dfrac{Bv}{R_2}. \end{cases}$$

Queste espressioni introdotte nelle (8), (9), (10) danno, ove si trascurino potenze d'ordine superiore al 2° in u, v, w, le cercate componenti delle deformazioni $e_1 = e_1^{(1)} + e^{(2)}$, $e_2 = e_2^{(1)} + e_2^{(2)}$, $\omega = \omega_1^{(1)} + \omega^{(2)}$ con la voluta precisione, cioè compresi i termini di 2° ordine.

Con ciò il nostro problema è risoluto nello spirito della trattazione del Love.

Senza scrivere qui per disteso le espressioni di $e_1^{(2)}; e_2^{(2)}; \omega^{(2)}$ (quelle di $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \omega^{(1)}$ sono note) ci limiteremo a calcolare quelle relative ai casi specifici che tratteremo. Ma prima premettiamo, notevole, la seguente

Osservazione. – Per le superfici cilindriche che esclusivamente vien fatto di considerare nel nostro problema, converrà ridursi ad un ds^2 che scriveremo nella forma

$$(4a)\qquad ds^2 = dx^2 + R^2(\psi)\,d\psi^2$$

essendo $R = R(\psi)$ il raggio di curvatura della base, espresso in funzione dell'angolo ψ che la normale nel punto generico P fa con una direzione assegnata.

Per il caso della direttrice circolare, ψ è addirittura l'anomalia del riferimento polare, e $R = \text{cost.}$.

Per la base ellittica, ove il conteggio di ψ si inizi dall'asse minore

$$R(\psi) = a \cdot \frac{K^2}{(\sin^2\psi + K^2\cos^2\psi)^{3/2}} \quad , \quad K = \frac{b}{a} ,$$

a , b essendo i semiassi.

Alla espressione $(4\,a)$ del ds^2 per l'ellisse si arriva facilmente trasformando l'elemento lineare $ds^2 = dy^2 + dz^2$ della direttrice ellittica, riferita agli assi ortogonali y , z

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 ,$$

con le relazioni immediate

$$y = a\,\alpha(K , \psi) \quad , \quad z = b\,\beta(K , \psi)$$

nelle quali

$$\alpha(K , \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2\,\mathrm{cotg}^2\psi}} \quad , \quad \beta(K , \psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{tg}^2\psi}{K^2}}} .$$

Altre possibili direttrici della volta cilindrica sono fornite dall'equazione intrinseca

$$R(\psi) = \frac{a}{\cos^n\psi}$$

che per $n = 0$ dà il cerchio, $n = -1$ la cicloide, $n = 2$ la catenaria, $n = 3$ la parabola. I casi $n = 2 , 3$ non hanno [16], come è noto, pratico interesse nell'ambito delle volte autoportanti. Ciò posto, passiamo a scrivere per disteso le espressioni di e_1 , e_2 , ω per il ds^2 or definito.

Si ha senz'altro, $A = 1$, $B = R(\psi)$.

Le (11) porgono, identificando ψ con β, poichè $R_1 = \infty$,

$$R_2 = R(\psi) \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = 1 + u' \quad , \quad \frac{\partial x'}{\partial \beta} = \dot{u} ,$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = v' \quad , \quad \frac{\partial y'}{\partial \beta} = R + \dot{v} - w ,$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \alpha} = w' \quad , \quad \frac{\partial z'}{\partial \beta} = \dot{w} + v .$$

essendosi posto per i termini a destra

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\,)' \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = (\,)' .$$

Segue

$$e_1 = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 = u' + \frac{v'^2 + w'^2}{2}$$

quindi

$$(12\,a) \qquad e_1^{(1)} = u' \quad , \quad e_1^{(2)} = \frac{v'^2 + w'^2}{2}$$

$$e_2 = \frac{1}{R}\sqrt{\dot{u}^2 + (R + \dot{v} - w)^2 + (\dot{w} + v)^2} - 1 = \frac{1}{R}(\dot{v} - w) +$$

$$+ \frac{1}{2R^2}(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2)$$

quindi

$$(12\,b) \qquad e_2^{(1)} = \frac{\dot{v} - w}{R} \qquad e_2^{(2)} = \frac{1}{2R^2}(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + 2\dot{w}v + v^2)$$

$$\omega = \frac{1}{R}\left(1 - u' - \frac{\dot{v} - w}{R}\right)[(1+u')\dot{u} + v'(R + \dot{v} - w) + w'(\dot{w} + v)] =$$

$$= \left(\frac{\dot{u}}{R} + v'\right) + \frac{1}{R}\left[\frac{w\dot{u}}{R} - \frac{\dot{v}\dot{u}}{R} - Ru'v' + w'\dot{w} + w'v\right]$$

e quindi

$$(12\,c) \qquad \omega^{(1)} = \frac{\dot{u}}{R} + v' \qquad \omega^{(2)} = \frac{w\dot{u} - \dot{v}\dot{u}}{R^2} + \frac{\dot{w}w' + vw'}{R} - u'v' .$$

Queste espressioni (12 *a*, *b*, *c*) sono valide per una volta cilindrica con direttrice esprimibile nella forma intrinseca del tipo

$$(13) \qquad R = R(\psi)$$

R = raggio di curvatura, ψ angolo della normale con una direzione prefissata. Esse rivestono quindi una generalità e in pari tempo una semplicità di cui vedremo l'importanza. Per $R \to \infty$, con chè, posto $R\beta = y$ e

$$(\,)' = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{1}{R}(\,)' = \frac{\partial}{\partial y} ,$$

risulta in coordinate cartesiane

$$e_1^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad e_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$e_2^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad e_1^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$\omega^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \omega^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} .$$

Rileverò ancora che le $e_1^{(2)}$ $e_2^{(2)}$ sono state calcolate per via geometrica e con riguardo al solo cilindro circolare, quindi per R = cost., dal Flügge; per via analitica, sempre per R = cost., compresa la $\omega^{(2)}$, da A. Galli. Ma dette espressioni trovate per $e_2^{(2)}$ ed $\omega^{(2)}$ non coincidono per un termine con le nostre (12 *b*, *c*) per R = cost. Ciò è dovuto alla circostanza (l'osservazione è del prof. L. Broglio) che la v è misurata in quegli sviluppi non come abitualmente secondo la tangente (asse y) in P, ma sull'arco di cerchio passante per P. Si tratta quindi di definizioni diverse della componente v, che si fanno sentire sui termini di 2° grado negli spostamenti. Naturalmente tali divari scompaiono per $R \to \infty$, cioè per il cilindro ridotto al piano cartesiano.

Il risultato effettivo sta nell'aver conseguite espressioni delle $e_1^{(2)}$, $e_2^{(2)}$, $\omega^{(2)}$ invarianti rispetto alla forma della direttrice con rispetto alla base geometrica (4 *a*) nella quale interviene il solo raggio di curvatura dell'equazione intrinseca. Poichè gli sforzi T_1, T_2, S si calcolano sempre con riferimento a detta equazione intrinseca è chiaro che solo così si può accedere al calcolo di $\mathfrak{L}^{(2)}$.

Calcolo delle variazioni di curvatura $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$. – Sono sufficenti, poichè nei nostri calcoli partiamo da distribuzioni non flessionali di sforzi interni limitati alle a T_1, T_2, S che (escludendo la flessione $G_1 = G_2 = G_{12} = 0$) le espressioni limitate ai termini del 1° ordine, date dal Love e che qui trascrivo per completezza

$$(14)\qquad \left|\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)\\ \varkappa_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1}\right)\\ \varkappa_{12} &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}\right)-\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1}{AR_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Da queste si ha, con riguardo al ds^2 dato dalla (4 *a*), quindi per A = 1, $B = R_2 = R$, $R_1 = \infty$; $\alpha = x$, $\beta = \varphi$,

$$(14\,a)\qquad \varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varkappa_2 = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\psi}+\frac{v}{R}\right),\quad \varkappa_{12} = \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\psi}+\frac{\partial\left(\frac{v}{R}\right)}{\partial x}.$$

Sforzi T_1, T_2, S *per peso proprio in volte cilindriche autoportanti a spessore costante con direttrice data nella forma* $R = \dfrac{a}{\cos^n\psi}$ (per $n = 0$ *circonferenza*, $n = -1$ *cicloide*).

Caso I. – $n = 0$. *Direttrice semicircolare*:

$$(15)\qquad \begin{cases} T_1 = -\dfrac{gL^2}{R_0}(\xi - \xi^2)\cos\psi \\ T_2 = -gR_0\cos\psi \quad , \quad Z = gL^2(\xi - \xi^2) \\ S \;\; = -gL(1 - 2\xi)\sin\psi \end{cases}$$

Caso II. – $n = -1$. *Direttrice cicloidica*:

$$(16)\qquad \begin{cases} T_1 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{gL^2}{a}(\xi - \xi^2) \\ T_2 = -ga\cos^2\psi \quad , \quad Z = -\dfrac{3}{2}gL^2(\xi - \xi^2) \\ S \;\; = -\dfrac{3}{2}gL(1 - 2\xi)\sin\psi \end{cases}$$

Scelta della terna minimizzante. – Fissiamo l'attenzione su funzioni u, v, w che non dieno luogo a estensione, onde annullare nell'espressione (2) di W, il termine W_e di gran lunga prevalente su W_f come risulta immediatamente, osservando le espressioni (2 *a*) e (2 *b*). Il rapporto tra W_e e W_f è infatti dell'ordine 1 a $\left(\dfrac{R_0}{d_0}\right)^2$, quindi, per volte sottili, dell'ordine $1 : 10^4$ almeno. Perchè sia $W_e = 0$ occorre che si annullino le $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \omega^{(2)}$, dunque

$$e_1^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad e_2^{(1)} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \psi} - w\right) = 0 \quad , \quad \omega^{(1)} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ciò non è *a priori* possibile se non ricorrendo ad una ipotesi che è in parte suggerita dall'osservazione sperimentale e precisamente che, in mezzeria avvenga una plasticizzazione tale per cui si abbia il caratteristico sfiancamento a ginocchio.

Porremmo in conformità, per la volta a direttrice circolare

$$u = \Sigma_m A_m \frac{\cos m\psi}{m} \qquad v = \Sigma_m A_m \frac{x}{R_0}\sin m\psi \qquad w = \Sigma_m A_m \frac{m \cdot x}{R_0}\cos m\psi$$

$$(a)\qquad \text{per } x \leqq \frac{L}{2}$$

$$u = \Sigma_m A_m \frac{\cos m\psi}{m} \qquad v = \Sigma_m A_m \frac{L - x}{R_0}\sin m\psi \qquad w = \Sigma_m A_m \frac{L - x}{R_0}\sin m\psi$$

$$\text{per } x \geqq \frac{L}{2}.$$

Per la direttrice cicloidica conviene porre

$$u = -\Sigma_n A_n \frac{1}{L}\int R(\psi)\sin n\psi\, d\psi \quad , \quad v = \frac{x}{L}\Sigma_n A_n \sin n\psi \quad ,$$

$$w = \frac{x}{L}\cdot \Sigma_n A_n n \cos n\psi; \qquad \text{con} \quad n = 2, 4, 6, \cdots$$

Per $n = 2$ risulta

$$u = \frac{2a}{3L} A_2 \cos^3 \psi \quad , \quad v = \frac{x}{L} A_2 \sin^2 \psi \quad , \quad w = \frac{2x}{L} A_2 \cos^2 \psi ;$$

una terna che è compatibile con l'annullarsi di R in $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Per la terna (𝔄) ridotta ad un termine unico, che si suppone quindi sia già la funzione estremante salvo a sceglier il numero d'ordine m, risulta, eseguendo materialmente i calcoli,

$$\lambda_{cr}(m) = \frac{1}{24} \frac{E}{g} \left(\frac{d_0}{R_0}\right)^3 \frac{\pi}{1 - \nu^2} (m^2 - 1)^2 (4m^2 - 1) \cdot$$

$$\cdot \begin{cases} \dfrac{1 - \nu + \dfrac{m^2}{24} \left(\dfrac{L}{R_0}\right)^2}{2m^2 \left[1 + \dfrac{m^4 + m^2 + 1}{12} \left(\dfrac{L}{R_0}\right)^2\right]} & (m = 2, 4, 6 \cdots) \\ \dfrac{1 - \nu + \dfrac{m^2}{24} \left(\dfrac{L}{R_0}\right)^2}{2m^2 - 1 + \dfrac{2m^6 - 3m^4 + 10m^2 - 3}{12} \left(\dfrac{L}{R_0}\right)^2} & (m = 1, 3, 5 \cdots) \end{cases}$$

con g peso per unità di superfice di volta, quindi, indicatone con μ_s il peso specifico, $g = d_0 \cdot \mu_s$.

Si può ammettere anche, come mi osservò il prof. L. Broglio, una terna del tipo

$$(\mathfrak{B}) \qquad u = 0 \quad , \quad v = \Sigma_m \frac{A_m}{m} \sin m\psi \quad , \quad w = \Sigma_m A_m \cos m\psi .$$

Questa non soddisfa sui timpani alle condizioni di limiti, ma, come egli osserva, a ciò si può ovviare sovrapponendo una distribuzione di sforzi localizzati ad un intorno che si dimostra in rigore tanto più prossimo quanto più è sottile la volta in raffronto alle sue dimensioni globali.

Risulta allora, considerando un unico termine della (𝔅),

$$\lambda_{cr}(m) = \frac{1}{24} \frac{E}{g} \left(\frac{d_0}{R_0}\right)^3 \frac{\pi}{1 - \nu^2} \frac{(m^2 - 1)(4m^2 - 1)}{12} .$$

Data la semplicità della (𝔅) valida anche per la base cicloidica, salvo ad escludere i valori dispari di m, qui è possibile considerare simultaneamente un certo numero di termini delle serie.

Le terne (𝔄) e (𝔅) danno, evidentemente, rilievo quasi o totalmente esclusivo alla resistenza secondo le direttrici; non interviene che poco sensibilmente per la (𝔄) l'azione della flessione lungo la portata $L = 2l$. Se ciò può essere ammissibile per piccoli valori di L in raffronto alle dimensioni globali della direttrice non lo è invece in altri casi. Or si da la circostanza

sfavorevole che non si sanno trovare soluzioni *non estensionali* diverse dalle (𝔄), (𝔅) (ed anche queste tratte attraverso compromessi) ed il contributo di W_e è sempre tale da dar luogo a valori così elevati di λ_{cr} da perdere ogni significato nel campo elastico nel quale istessamente, vien fatto di credere, ha luogo l'instabilità.

Ma il problema della stabilità si può risolvere cercando un limite inferiore $\lambda'_{cr} < \lambda_{cr}$ ottenuto dalla (1) omettendo, anche ove non si annulli, il termine $W_e > 0$ e porre quindi, in ogni caso,

$$\lambda_{cr} = \min \frac{W_f}{\Sigma^{(2)}}.$$

La terna più spontanea è allora costituita dalle serie doppie

$$(\mathfrak{C}) \qquad u = \Sigma_{mn} A_{mn} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \cos m\psi \ , \quad v = \Sigma_{mn} B_{mn} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin m\psi \ ,$$

$$w = \Sigma_{mn} C_{mn} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \cos m\psi \ ,$$

che potranno esser ridotte a non estensionali almeno per rispetto alle $e_1^{(1)}$, $\omega^{(1)}$ ponendo senz'altro

$$(\mathfrak{C})' \qquad u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = \Sigma_{mn} A_{mn} \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \cos m\psi \, .$$

Per la base circolare limitandosi al caso di 2 soli termini (ad esempio $m = 1$, $n = 1$; $m = 2$, $n = 1$ posto $A_{11} = A$, $A_{12} = B$) si ottiene per $\lambda_{cr} = \lambda_{m,n}$ l'estremo rispetto alle variabili A, B oltre che rispetto ai numeri m, n

$$(19) \qquad \lambda_{cr} = \frac{E}{g} \left(\frac{d_0}{L}\right)^3 \left(\frac{R_0}{L}\right) \frac{\pi}{24 (1 - \nu^2)} \lambda_{mn}$$

con

$$\lambda_{mn}^2 (b_{11} b_{22} - b_{12}) - \lambda_{mn} (b_{11} a_{22} + b_{22} a_{11} - a_{12} b_{12}) - (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) = 0$$

a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22} essendo funzioni di m, n e di $\left(\frac{L}{R_0}\right)$ tabellate per alcuni valori di $\frac{L}{R_0} = 1, 2, 3, 4$ e per $n = 1$, $m = 1, 2$.

Come si vede la problematica della quistione è qui riportata solo nei suoi primi aspetti, che possono esser soggetti a qualche aberrazione di cui l'entità potranno precisare solo laboriose ma certo perseguibili esplorazioni, fatte con numero successivamente crescente dei termini contemplati nelle serie originarie (𝔄), (𝔅), (𝔈), (𝔈′). Nessun dubbio che l'interesse di queste ricerche è eccezionale.

Concludendo queste pagine rileverò che alle (17), (18), (19) si può dare la forma unitaria

$$(20) \qquad \lambda_{cr} = \frac{E}{g} \left(\frac{d_0}{L}\right)^3 \frac{\pi}{24 (1 - \nu^2)} \cdot \bar{\lambda}$$

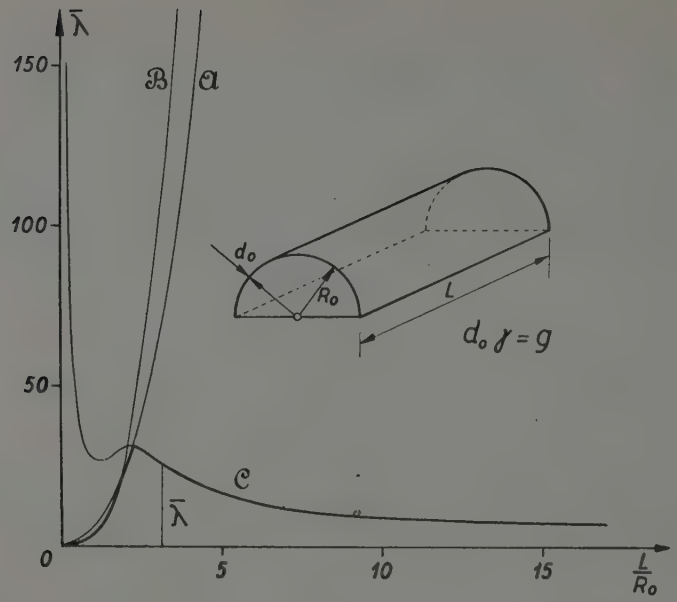


Fig. 2.

ovvia essendo, in base ad esse, la definizione di $\bar{\lambda}$. Ad esempio, per la terna (𝔈) che è riflessa nella (19),

$$\lambda = \frac{R_0}{L}\,\lambda_{mn}.$$

Delle 3 determinazioni di $\bar{\lambda}$ corrispondenti alle terne (𝔄), (𝔅), (𝔈) si si sceglierà il valore inferiore per l'assegnato rapporto $\frac{L}{R_0}$.

Il grafico fig. 2 sintetizza per la volta autoportante a base semicircolare i risultati analitici e tabellari. La scelta del valore inferiore di $\bar{\lambda}$ è immediata. Si rilevi che il ramo 𝔈 della fig. 2 è calcolato omettendo W_r come se la terna corrispondente 𝔈 fosse effettivamente priva di estensione.

Esempio. – Per una volta in calcestruzzo armato sia $L = 15{,}00$ m., $R_0 = 5{,}00$ m., $d = 0{,}05$ m., $E = 3 \cdot 10^6$ to. m^{-2}, $\nu = 0{,}125$, $\mu_s = 2{,}5$ to. m^{-3}, $g = 0{,}05 \cdot 2{,}5 = 0{,}125$ to. m^{-2}.

Si ha per $\frac{L}{R_0} = 3$, $\bar{\lambda} = 26{,}305$. Segue dalla (20), il limite *inferiore*

$$\lambda_{cr} = 3{,}109.$$

Quindi, per un carico $3{,}109 \cdot 0{,}125 \simeq 0{,}389$ to. m^{-2} si avrebbe *instabilità*.

L'azione, dominante sulla 𝔈, di una resistenza dei timpani trasversale al loro piano e quella della continuità su più campate verrà esaminata nella Nota II.

Astronomia. — *Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma.* Nota I di M. Cimino, presentata [1] dal Socio G. Armellini.

1. L'assorbimento prodotto dall'atmosfera terrestre sulla luce stellare nel cielo di Roma è stato oggetto di molte ricerche. Vanno in particolar modo ricordate le determinazioni eseguite da E. Bianchi [2] all'Osservatorio del Collegio Romano, da G. Armellini [3], G. Andrissi [4], G. Conti [5] all'Osservatorio del Campidoglio, e infine quelle recentissime e assai pregevoli di L. Gialanella [6] all'Osservatorio di Monte Mario. Fino ad oggi però mancava una discussione generale sopra l'assorbimento atmosferico a Roma della radiazione solare, pur disponendovi di una buona scorta di osservazioni piroeliometriche sistematicamente eseguite, a partire dal giugno 1929, in tutti i giorni sereni dell'anno [7].

Con la presente ricerca mi propongo di sottoporre tutto questo materiale di osservazione ad una discussione particolareggiata. Ma il mio lavoro, oltre che ad affiancarsi a quelli che hanno per oggetto l'assorbimento atmosferico della luce stellare (ore notturne) e ad allargare con nuovi dati il campo della discussione, mira anche ad uno scopo più immediato. Lo scrivente sta infatti organizzando, presso l'Osservatorio di Monte Mario, un centro per ricerche sistematiche sopra le macchie solari (aree e posizione delle macchie, loro fotometria, ecc.), valendosi come strumento principale di una camera orizzontale « Askania » di 5 metri di lunghezza, provvista di celostato. Uno studio preliminare sulla trasparenza atmosferica a Roma, con particolare riferimento alla radiazione solare, si rendeva perciò necessario.

(1) Nella seduta del 16 novembre 1946.

(2) E. Bianchi, *Primo saggio sulla estinzione atmosferica a Roma,* in « Memorie degli Spettroscopisti Italiani », serie II, vol. IV, (1915), pp. 120–125.

(3) G. Armellini, *Sulla estinzione della luce stellare nell'atmosfera di Roma,* questi « Rendiconti », vol. XXVII (1918), serie 5ª, 2° sem., pp. 83–87; *Sopra l'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre ecc.*, ibidem, vol. V (1927), serie 6ª, 1° sem., pp. 538–541.

(4) G. Andrissi, *Sull'assorbimento della luce stellare nella atmosfera di Roma,* questi « Rendiconti », vol. VII (1928), serie 6ª, 1° sem., pp. 61–65.

(5) G. Armellini, e G. Conti, *Ricerche sopra le variazioni dell'assorbimento atmosferico ed osservazioni varie,* questi « Rendiconti », vol. XIV (1931), serie 6ª, 2° sem., pp. 545–551.

(6) L. Gialanella, Memoria in corso di stampa.

(7) Fino ad oggi sono state pubblicate le osservazioni piroeliometriche dall'inizio fino a tutto il 1939. Cfr. per bibliografia: G. Andrissi, *La radiazione solare a Roma dal 1937 al 1939,* in « Rend. della R. Accademia d'Italia », vol. II (1940), serie VII, pp. 526–530.

2. Le osservazioni piroeliometriche sulle quali baseremo la nostra ricerca hanno avuto inizio il 12 giugno 1929 all'Osservatorio del Campidoglio e da allora continuano sistematicamente anche nella nuova sede di Monte Mario. Esse sono state eseguite da N. Squillace, G. Andrissi, G. Conti e, saltuariamente, da altri, con un piroeliometro a pila termoelettrica della Casa Kipp e Zonen, provvisto del relativo galvanometro di precisione. L'apparecchio permette di misurare una variazione di irradiazione di .1 millesimo di calorie-grammi per minuto primo e per centimetro quadrato. Nella parte anteriore un disco a « revolver » porta 4 filtri di luce, talchè è possibile misurare nel campo spettrale dell'azzurro, del giallo, del rosso, e della radiazione rosso cupo, oltre che la radiazione totale senza filtro.

Le determinazioni della radiazione totale e con i quattro filtri ora detti vengono eseguite a *mezzogiorno vero*, in tutti i giorni dell'anno nei quali il cielo si presenta *sereno e senza veli apparenti*. Poichè questo genere di osservazioni è quasi immune da errori personali, e poichè sia il piroeliometro che il galvanometro non sono andati soggetti a mutamenti, i risultati delle misure si possono ragionevolmente ritenere, per quanto riguarda gli errori strumentali e personali, direttamente confrontabili tra loro, anche se le misure furono eseguite da osservatori diversi e in epoche differenti. Certamente una periodica taratura dello strumento sopra uno strumento campione sarebbe stata opportuna; però è assai improbabile che strumenti del genere, se ben custoditi, subiscano variazioni sensibili nel tempo. Quanto alla precisione del valore della costante strumentale, questo ci interessa relativamente poco, non avendo noi di mira determinazioni assolute della costante solare, ma soltanto determinazioni relative della radiazione.

Invece è necessario distinguere nettamente le osservazioni della radiazione eseguite al Campidoglio da quelle eseguite a Monte Mario, poichè quest'ultima località, – che si trova a m. 143 sul livello del mare, – sovrasta la prima di 78 metri, i quali costituiscono lo strato più torbido dell'atmosfera, perchè situato immediatamente al di sopra della città.

3. – Per la riduzione delle osservazioni mi sono basato sulla relazione:

$$(1) \qquad i = i_0 \, a^{\sec z},$$

nella quale l'intensità i della radiazione al suolo, quella i_0 al di fuori dell'atmosfera, la distanza zenitale z del Sole al momento dell'osservazione si suppongono conosciute, mentre è incognito il *coefficiente di trasmissione* a. Se ci riferiamo a radiazioni monocromatiche, allora a (come i ed i_0) è funzione della lunghezza d'onda; se invece ci riferiamo alla radiazione totale, il coefficiente a può in pratica ritenersi come relativo ad una determinata lunghezza d'onda *media* dello spettro solare. *In ogni caso però, a è anche funzione dei fattori atmosferici, ed è proprio questa relazione funzionale che noi, in ultima analisi, vogliamo indagare.*

Osserviamo che l'estinzione atmosferica suole assai spesso indicarsi in grandezze stellari μ. Allora essendo:

$$\mu = -2{,}5 \log_{10} \frac{i}{i_\infty}$$

è pure, in base alla (1):

$$\mu = S \cdot \sec z ,$$

ove si è posto:

$$S = -2{,}5 \log_{10} a . \tag{2}$$

S si chiama *coefficiente di assorbimento atmosferico.*

4. - Cominciamo la nostra ricerca riferendoci alle misure della *radiazione totale eseguite al Campidoglio* dal 12 giugno 1929 al 12 aprile 1935. Dalle pubblicazioni citate si è desunto, giorno per giorno, il valore della lettura del galvanometro; alcune sviste sono state corrette sui registri originali. Questa lettura è stata moltiplicata per la costante strumentale *0,0202* e per il quadrato della distanza Terra–Sole espresso in unità astronomiche, onde ridursi all'unità di distanza dal Sole. Per i_0 si è preso il valore della costante solare dato, giorno per giorno, da una recente pubblicazione della « Smithsonian Istitution » [8]. Ho utilizzato, precisamente, i valori indicati come « preferred » nella Tabella 24, p. 85. Nei pochi casi in cui mancava il valore giornaliero ho assunto il valore medio della decade, dato dalla Tabella 27, p. 169, sempre della stessa pubblicazione.

Una volta ottenuto il valore di a per ogni giorno di osservazione, si è potuto iniziare la ricerca delle sue variazioni coi fattori atmosferici. Abbiamo cominciato col ricercare una eventuale dipendenza di a dalla stagione. Perciò sono state effettuate le *medie per decadi* e le *medie mensili* relative a ciascun anno, e poi le analoghe relative a tutti gli anni (sempre delle sole osservazioni capitoline). Tutte queste medie sono riportate nella Tabella I, ciascuna col numero delle osservazioni che vi hanno contribuito.

(8) « Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution », vol. 6, Washington, 1942.

TABELLA I.

Coefficiente di trasmissione. Medie per decadi e mensili.

	1929		1930		1931		1932		1933		1934		1935		Tutti gli anni	
	o.		o.		o.		o.		o.		o.		o.		o.	
Genn. I			756	2	—	—	756	1	—	—	783	3	779	3	773	9
II			756	5	754	1	760	3	771	1	770	3	777	3	764	16
III			712	2	764	4	739	5	—	—	748	4	756	5	747	20
Gennaio			**746**	**9**	**762**	**5**	**748**	**9**	**771**	**1**	**765**	**10**	**768**	**11**	**758**	**45**
Feb. I			709	1	740	2	720	1	733	2	759	3	—	—	739	9
II			728	4	—	—	728	3	757	3	743	6	711	4	733	20
III			690	1	731	1	712	1	—	—	—	—	738	1	718	4
Febbraio			**718**	**6**	**737**	**3**	**723**	**5**	**748**	**5**	**749**	**9**	**716**	**5**	**733**	**33**
Mar. I			656	2	—	—	721	2	700	1	621	1	712	3	690	9
II			706	2	710	1	—	—	662	3	—	—	691	2	686	8
III			702	3	727	2	692	3	694	1	—	—	701	7	702	16
Marzo			**690**	**7**	**721**	**3**	**704**	**5**	**676**	**5**	**621**	**1**	**702**	**12**	**695**	**33**
Apr. I			672	1	713	2	—	—	661	2	—	—	676	2	684	5
II			—	—	641	2	705	1	—	—	656	2	—	—	664	7
III			671	3	678	1	—	—	—	—	—	—	—	—	673	4
Aprile			**671**	**4**	**677**	**5**	**705**	**1**	**661**	**2**	**656**	**2**	**676**	**2**	**673**	**16**
Mag. I			—	—	—	—	—	—	—	—	588	3			588	3
II			663	4	609	3	663	1	631	2	—	—			641	10
III			597	2	640	3	612	2	633	1	631	7			626	15
Maggio			**641**	**6**	**625**	**6**	**629**	**3**	**632**	**3**	**618**	**10**			**627**	**28**
Giug. I	—		565	2	646	3	—	—	652	4	613	1			629	10
II	580	4	609	3	600	7	638	1	—	—	634	3			605	18
III	596	3	609	6	—	—	630	1	656	2	625	5			618	17
Giugno	**587**	**7**	**601**	**11**	**614**	**10**	**634**	**2**	**653**	**6**	**627**	**9**			**615**	**45**
Lug. I	628	5	591	6	585	2	607	2	631	4	612	4			610	23
II	586	8	646	3	632	3	638	2	637	7	613	9			618	32
III	596	5	634	9	642	5	635	4	587	6	641	6			623	35
Luglio	**600**	**18**	**622**	**18**	**628**	**10**	**629**	**8**	**618**	**17**	**622**	**19**			**618**	**90**

Segue: TABELLA I.

		1929		1930		1931		1932		1933		1934		1935		Tutti gli anni	
		o.		o.		o.		o.		o.		o.				o.	
Ag.	I	613	6	614	5	647	2	642	5	—	—	656	6			633	24
	II	589	6	629	5	630	6	618	5	582	3	635	4			615	29
	III	596	4	610	7	653	1	586	3	630	5	629	4			614	24
Agosto		**600**	**16**	**617**	**17**	**636**	**9**	**619**	**13**	**612**	**8**	**642**	**14**			**620**	**77**
Sett.	I	625	5	593	6	649	4	—	—	632	5	663	6			631	26
	II	605	3	628	4	692	1	646	4	657	2	620	4			633	18
	III	676	6	687	4	695	3	—	—	620	1	648	6			670	20
Settembre		**642**	**14**	**630**	**14**	**672**	**8**	**646**	**4**	**637**	**8**	**647**	**16**			**644**	**64**
Ott.	I	690	2	671	3	695	4	—	—	664	2	652	3			676	14
	II	672	5	681	5	714	4	737	2	724	3	744	3			704	22
	III	765	1	763	1	751	2	713	2	—	—	709	4			729	10
Ottobre		**688**	**8**	**687**	**9**	**714**	**10**	**725**	**4**	**700**	**5**	**703**	**10**			**701**	**46**
Nov.	I	716	1	737	3	709	3	742	3	—	—	732	2			729	12
	II	749	2	754	4	728	1	751	3	756	2	—	—			751	12
	III	736	3	759	2	—	—	720	1	754	1	767	5			753	12
Novembre		**737**	**6**	**750**	**9**	**714**	**4**	**743**	**7**	**755**	**3**	**757**	**7**			**744**	**36**
Dic.	I	742	1	744	3	784	1	—	—	—	—	—	—			751	5
	II	763	6	777	5	782	3	754	2	—	—	785	1			771	17
	III	750	1	—	—	784	2	747	5	—	—	764	4			759	12
Dicembre		**759**	**8**	**765**	**8**	**783**	**6**	**749**	**7**	—	—	**768**	**5**			**764**	**34**

Dall'esame di questa Tabella si rilevano subito queste notevoli circostanze:

1) *il coefficiente di trasmissione per la radiazione solare totale a Roma (Campidoglio) è maggiore nei mesi invernali che in quelli estivi.* Questa circostanza si verifica sistematicamente in *tutti* gli anni, e deve pertanto ritenersi reale. La media mensile comprensiva di tutti gli anni ha un andamento *assai regolare*, e anche le medie per decadi presentano oscillazioni relativamente piccole rispetto alle medie mensili, salvo qualche eccezione nei mesi in cui le misure sono più scarse, dovute assai probabilmente ad insufficiente compensazione delle variazioni atmosferiche (fig. 1). *Il valore del coefficiente di trasmissione oscilla tra 0,61 e 0,76 circa, con una variazione del 25 °/₀ del suo valore medio 0,683;*

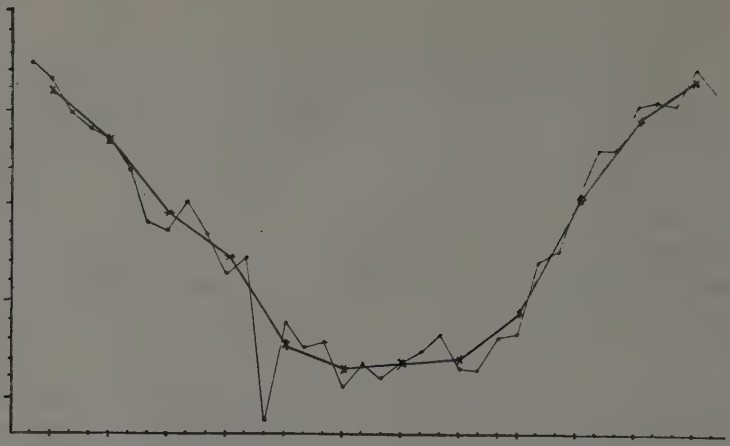


Fig. 1. - Variazione per decade (tratto fino) e mensile (tratto grosso) del coefficiente di trasmissione atmosferico a Roma (Campidoglio) per la radiazione solare totale.

2) per il *valore medio annuale del coefficiente di trasmissione* si ha:

Anno	*1930*	*1931*	*1932*	*1933*	*1934*	**Generale**
a	*0.678*	*0.690*	*0.688*	*0.679*	*0.681*	**0.683**

Queste medie annuali sono state eseguite a partire dalle medie mensili, ma senza dare ad esse alcun peso per il numero delle osservazioni, altrimenti i valori più bassi estivi avrebbero preponderato, a causa del maggior numero di giornate di osservazione;

3) al valore medio 0,683 per *a* corrisponde per il *coefficiente di assorbimento* *S* il valore medio *0.414* [9], che è in buon accordo coi valori trovati al Campidoglio per l'assorbimento della luce stellare ($S=0,45$ trovato da G. Armellini [10]) ed è circa il *doppio* di quello assegnato dal Müller ($S=0,23$) per le sue tavole fotometriche di Potsdam. Dalla nostra analisi risulta ora che *S* ha una oscillazione stagionale tra *0,54* in estate e *0,30* in inverno, con una variazione dei 33% del suo valore medio, mentre alcune determinazioni [11] dell'analoga variazione stagionale di *S* per la luce stellare forniscono il 25%.

In una prossima Nota dallo stesso titolo esamineremo le correlazioni del coefficiente di trasmissione coi fattori atmosferici e specialmente con l'umidità assoluta.

(9) Da un sommario esame dei primi 4 anni di osservazione, G. Armellini e G. Andrissi concludevano il valore: S = 0,393. Cfr. questi «Rendiconti», vol. XVII (1933), ser. 6ª, 2° sem., p. 610.

(10) Cfr. G. Armellini, *Sull'estinzione della luce ecc.*, loc. cit. nella quale è rilevato per la prima volta il disaccordo col Müller e con la determinazione del Bianchi.

(11) Cfr. G. Armellini e G. Conti, loc. cit. 547.

Astronomia. — *Nuovo sistema per il calcolo rapido del soleggiamento urbanistico ed edile. Termoeliografometria.* Nota di G. VINACCIA, presentata [1] dal Socio G. ARMELLINI.

Gli studi recenti di climatologia urbanistica hanno messo in evidenza la grande importanza che ha la buona conoscenza del soleggiamento sulla razionalizzazione dell'architettura e dell'urbanistica.

Purtroppo i calcoli relativi, che devono essere fatti luogo per luogo, sono lunghi e non alla portata di tutti. Ciò ha impedito sinora il diffondersi di questi studi e permettere agli architetti di distinguere le concezioni buone dalle errate.

Tali calcoli devono servire a determinare il corso locale del Sole, nonchè l'intensità della radiazione solare ricevuta dalle facciate e dalle coperture.

Per facilitare e volgarizzare tali calcoli è stato ideato un istrumento, denominato *termoeliografometro*, nonchè uno speciale diagramma cartesiano, *l'eliotermocalendario.*

L'ELIOTERMOGRAFOMETRO. – Nel 1939 allo scopo sempre di facilitare i calcoli del soleggiamento ideai un calcolatore solare, che depositai nell'agosto dello stesso anno. Nel 1940 ne venne pubblicata una descrizione sulla rivista « L'Ingegnere » e nel 1941 venne premiato dal C. N. R. nella Giornata della Tecnica [2].

L'eliotermografometro che qui si descrive è un perfezionamento di detto istrumento allo scopo di determinare oltre che la posizione del Sole per qualsiasi latitudine e data, anche gli effetti termici conseguenti al soleggiamento delle diverse parti dei fabbricati.

L'istrumento consta di due proiezioni ortografiche della sfera celeste, una *A* limitata alla semisfera sovrastante l'orizzonte (fig. 1) l'altra *B* della fascia intertropicale celeste nella quale apparentemente si muove il Sole nel suo cammino annuale (fig. 2).

La proiezione ortografica *A* (fig. 1), della semisfera celeste porta segnati gli almicantarat *aH* e i cerchi di verticale *cv*; quella *B* (fig. 2) i paralleli solari *ps* e i cerchi orari *co*.

Le due proiezioni vanno sovrapposte concentricamente, una di esse è trasparente così da potersi vedere attraverso le coordinate dell'altra.

Per determinare le traiettorie del Sole per un dato luogo basta che il polo celeste *P* della proiezione *B* (fig. 2) sia alto sull'orizzonte tanto quanto la latitudine del luogo. Ciò fatto, dall'intersezione dei due sistemi

(1) Nella seduta del 16 novembre 1946.

(2) Siccome questo calcolatore solare rassomiglia all'Ortosferoscopio Grillo, tengo a far presente che questo ultimo fu brevettato nel maggio 1942, cioè quasi due anni dopo del deposito del mio calcolatore solare.

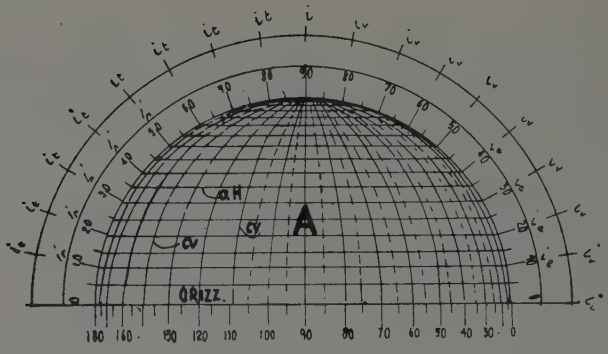


fig. 1

di coordinate viene risolto qualsiasi problema di posizione del Sole. Siccome l'intensità della radiazione solare globale, come quella delle singole lunghezze d'onda, varia a seconda dell'altezza del Sole, in corrispondenza di ogni almicantarat (proiezione *A*) sono segnate le intensità relative *i* (fig. 1).

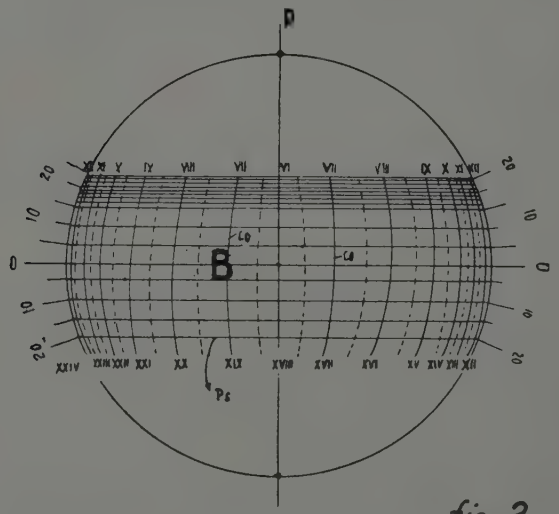


fig. 2

In corrispondenza dei singoli almicantarat sono segnate pure le intensità della radiazione solare ricevuta da varie superfici piane (orizzontale, verticale, corpo nero, vitrea, ecc.).

Tali intensità della radiazione solare segnate sulla proiezione *A* possono essere quelle effettive del luogo (risultanti da misure piroeliometriche) op-

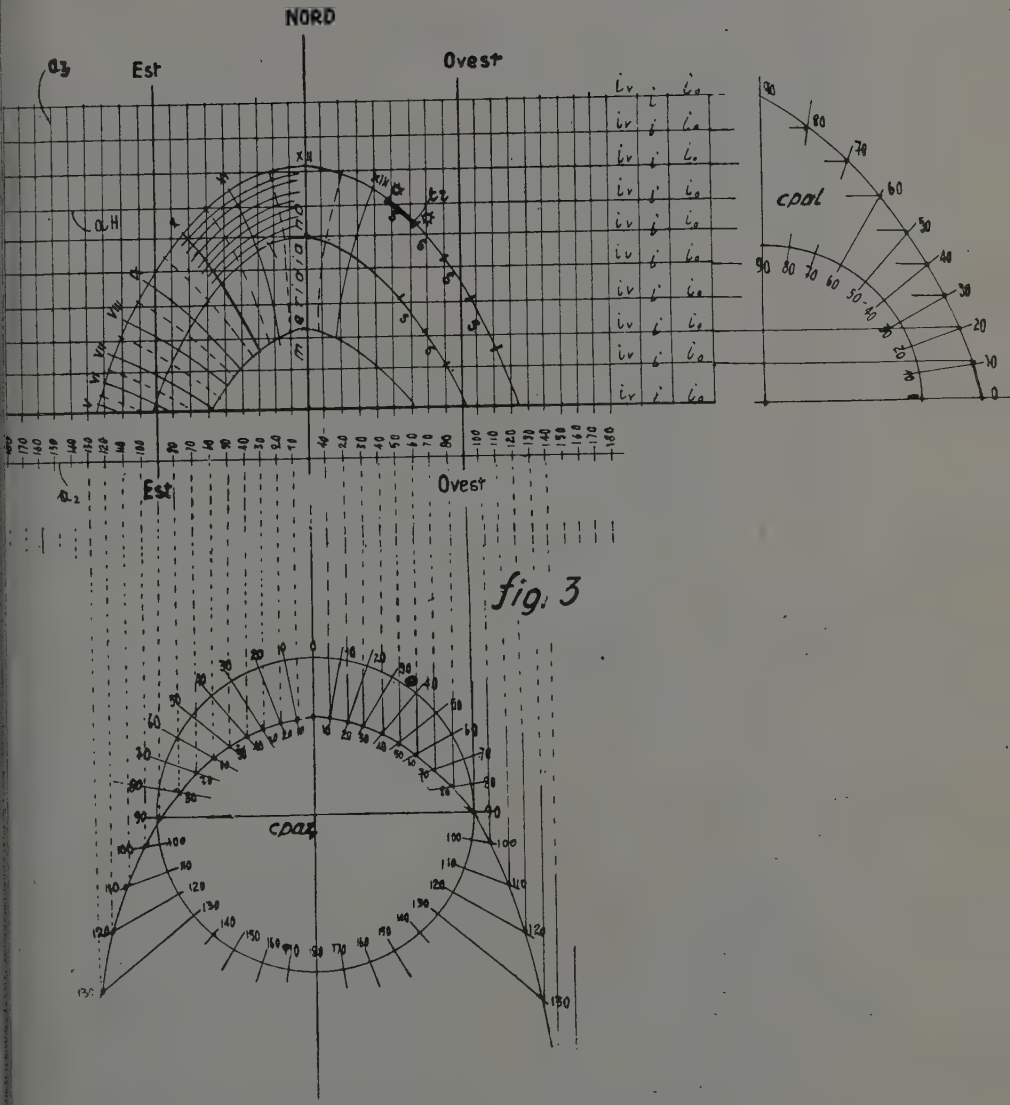


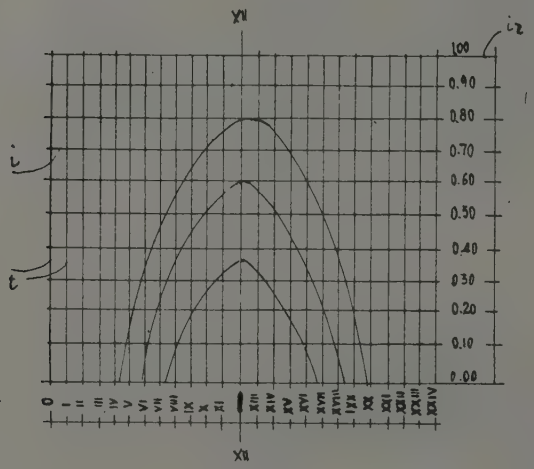
fig. 3

pure espresse in percentuale di quella al limite dell'atmosfera per un dato stato di trasparenza del cielo.

In tal modo è possibile determinare la quantità di calore ricevuta dalle facciate e dalle coperture di qualsiasi materiale e colore esse siano.

L'ELIOTERMOCALENDARIO. – Con i dati ricavati dal detto istrumento o mediante calcoli analitici si costruisce l'eliotermocalendario, diagramma cartesiano delle traiettorie solari del luogo per le varie date dell'anno (calendario solare), nel quale le ascisse *az* delle curve relative sono rappresentate dagli azimut e le ordinate *aH* dalle altezze solari (fig. 3).

fig. 4



In detto diagramma vengono segnate in corrispondenza delle altezze solari le relative intensità della radiazione solare assorbite ed emesse da varie superfici piane comunque inclinate rispetto all'orizzonte, di qualunque materiale e colore esse siano (i, i, i, ecc.).

Questo eliotermodiagramma dà il panorama di tutte le traiettorie solari e per lettura istantanea la posizione locale del Sole, in qualunque momento, con la relativa intensità della radiazione solare per una superficie piana comunque *inclinata* rispetto al piano orizzontale.

Con i dati ricavabili direttamente dall'eliotermografometro oppure dall'eliotermocalendario solare predetto, opportunamente corretti in base alla legge del coseno per tenere conto della declinazione della facciata, si costruiscono diagrammi cartesiani della variazione dell'intensità della r. s. per le superficie comunque *declinate*.

In tale diagramma (fig. 4) le ascisse *t* rappresentano il tempo e le ordinate *i* le intensità della r. s. Dall'integrazione della curva si ha la quantità di calore ricevuto dalla superficie stessa.

Allo scopo di facilitare ulteriormente il calcolo della quantità di calore ricevuto dalle superficie piane (ad esempio facciate, coperture) nell'eliotermocalendario, in corrispondenza di ogni traiettoria solare potranno segnarsi con tratti (ad esempio a colore) gli spazi di tempo *s* (fig. 3) necessari perchè una data superficie normale azimutalmente alla direzione della radiazione solare riceva una certa quantità di calore (ad esempio una caloria).

Sommando questi spazi si avrà la quantità di calore ricevuto dalla detta superficie *costantemente normale azimutalmente alla r. s.*

Se invece, come avviene in realtà con le facciate dei fabbricati, la superficie ha una precisa declinazione azimutale, allora occorrerà moltiplicare la quantità di calore di ogni tratto predetto per il seno dell'angolo che l'azimut del Sole fa con quello superficie e sommare i risultati.

Per rendere più comprensibile l'eliotermocalendario, facilitare i calcoli di luce ed ombra, non ricorrere al rapportatore, si possono segnare lateralmente le corrispondenze proiettive con le reali *inclinazioni* degli almicantarat (*cpal* fig. 3), così pure sottostantemente le corrispondenze proiettive con le reali *declinazioni* azimutali (*cpaz* fig. 3).

All'atto pratico costruito per un determinato luogo con l'eliotermocalendario si potranno fare tante copie quanti sono i tipi di superfici da considerare. Su ognuna di esse poi si segneranno a colori gli spazi di tempo necessari perchè il soleggiamento dia la quantità di calore stabilito.

Gli eliotermocalendari potranno essere fatti di grado in grado di latitudine, oppure ogni due.

Per tutta la Terra basterebbero un centinaio o una cinquantina di eliotermocalendari che verrebbero poi completati localmente con le occultazioni date dall'eventuale orografia.

Sarebbe da sperare che da tali facilitazioni i calcoli del soleggiamento abbiano la tanto necessaria divulgazione e che i problemi relativi vengano risolti sotto tutti gli aspetti, segnatamente quelli termici così spesso obliati e perciò causa di errate orientazioni.

Geodesia. — *Su alcune formule esplicite nella compensazione per direzioni delle catene di triangoli e dei sistemi centrali semplici.* Nota di A. MARCANTONI, presentata [1] dal Socio G. CASSINIS.

1. Data una semplice catena formata da n triangoli $K_1, K_2, \cdots, K_n \cdots$ (fig. 1 *a*), in cui la misurazione di tutti gli angoli abbia fornito certi errori di chiusura $v_1, v_2, \cdots, v_n$, e supponendo per ora che non vi siano da soddisfare anche equazioni alle basi, si voglia procedere alla compensazione rigorosa « per direzioni ».

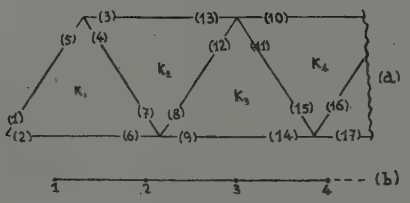


Fig. 1.

Il prof. Boaga, in un suo recente lavoro [2] ha dimostrato come si possano ricavare delle formule esplicite che forniscono direttamente i correlati in funzione dei residui suddetti.

Credo interessante tornare qui sullo stesso argomento, per mostrare una soluzione dello stesso genere, senza, oppure con una, equazione alle basi, come pure una analoga soluzione per il caso dei sistemi centrali semplici.

2. Nella fig. 1 *b* è riportata la *rappresentazione puntuale* [3] [4] della catena di triangoli, costituita in questo caso da una semplice *catena di punti* allineati. Da essa colla solita regola [3] (« ad ogni punto i corrisponde il coefficiente quadratico $a_{ii} = +3$, ad ogni lato ik il coefficiente rettangolare

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(2) G. BOAGA, *Sulla compensazione rigorosa per direzioni delle catene geodetiche.* « Atti Acc. Lincei », ser. VII, vol. I, fasc. 2, 1946.

(3) K. FRIEDRICH, *Beitragh zur direkten und undirekten Anflösung der Normalgleichungen*, ecc. « Zeitschr. f. Vermessungwesen », 1930.

(4) A. MARCANTONI, *Fondamenti di moderni metodi di calcolo*, ecc. « L'Universo – Bollettino Geodetico », I. G. M., 1944, nn. 1, 3 e 4.

$a_{ik} = -1$; tutti gli altri coefficienti sono nulli ») si deduce la *matrice normale angolare* (di ordine n)

$$(1) \qquad \| N_{n+1} \| = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & * & * \cdots\cdots * \\ -1 & 3 & -1 & * \cdots\cdots * \\ * & -1 & 3 & -1 \cdots\cdots * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & * \cdots -1 \quad 3 \end{Vmatrix}$$

che nel caso, per ora supposto, in cui non esistano equazioni alle basi, rappresenta la matrice del sistema normale ai correlati, divisa per 2.

Il determinante della (1) si indica con N_{n+1}: esso costituisce l'$(n+1)$-esimo termine della *successione di Schimper*:

$$N_0 = 0 \quad , \quad N_1 = 1 \quad , \quad N_2 = 3 \quad , \quad N_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 28 \, , \cdots, \text{ ecc.}$$

Fra questi numeri N_n esistono numerose relazioni ricorrenti, come le due seguenti classiche

$$(2) \qquad \begin{cases} N_n = 3\, N_{n-1} - N_{n-2} \\ N_n = N_r\, N_{m-r+1} - N_{m-r}\, N_{r-1} \, , \end{cases}$$

oltre a molte altre, assai interessanti e suggestive, che il prof. Boaga ha recentemente messo in luce (5). Fra queste ultime, a titolo di esempio, riportiamo la seguente che permette il calcolo diretto di N_n:

$$(3) \qquad N_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

formula che si può anche scrivere, liberandosi dagli irrazionali:

$$(3') \quad N_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_0^s \binom{n}{2i+1} 5^i\, 3^{n-2i-1} \quad \begin{cases} s = \dfrac{n}{2} - 1 & \text{per } n \text{ pari} \\ s = \dfrac{n-1}{2} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Altre delle sunnominate formule si avrà occasione di richiamare più avanti. Ciò posto, ricordiamo che, indicata con $\| N_{n-1} \|^{-1}$ l'inversa della (1), e con $f_{r,s}$ gli elementi di essa, si era stabilita in altro lavoro (4) la formula:

$$(4) \qquad f_{r,r} = \frac{N_r \cdot N_{n-r+1}}{N_{n+1}}$$

(5) G. Boaga, *Su talune relazioni ricorrenti fra le matrici normali angolari.* « Atti Acc. Lincei », ser. VII, vol. I, fasc. 3-4, 1946.

che dà, per $\| N_{n+1} \|^{-1}$, gli elementi della diagonale principale. In particolare si ha

$$f_{1\cdot 1} = \frac{N_{n+1}}{N_n}. \tag{4'}$$

Per avere le altre $f_{1\cdot s}$ $(s = 2, \cdots, n)$, si consideri il sistema di n equazioni a cui le dette quantità soddisfano:

$$\| N_{n+1} \| \begin{Bmatrix} f_{1\cdot 1} \\ f_{1\cdot 2} \\ \vdots \\ f_{1\cdot n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Sopprimendo le prime s righe, e supposta nota $f_{1\cdot s}$, ne deriva il nuovo sistema ad $n - s$ incognite

$$\| N_{n-s+1} \| \begin{Bmatrix} f_{1\cdot s+1} \\ f_{1\cdot s+2} \\ \vdots \\ f_{1\cdot n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1\cdot s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Indicando con $\psi_{r\cdot s}$ gli elementi della reciproca $\| N_{n-s+1} \|^{-1}$, si ricava dal precedente sistema

$$f_{1\cdot s+1} = \psi_{1\cdot 1} f_{1\cdot s},$$

ossia, ponendo per $\psi_{1\cdot 1}$ il valore che si ricava dalla (4') ove si sostituisca n con $n - s$:

$$f_{1\cdot s+1} = \frac{N_{n-s}}{N_{n-s+1}} f_{1\cdot s},$$

formula ricorrente che, tenuta ancora presente la (4'), fornisce successivamente

$$f_{1\cdot 2} = \frac{N_{n-1}}{N_n} \cdot \frac{N_n}{N_{n+1}} = \frac{N_{n-1}}{N_{n+1}}, \quad f_{1\cdot 3} = \frac{N_{n-2}}{N_{n-1}} \cdot \frac{N_{n-1}}{N_{n+1}} = \frac{N_{n-2}}{N_{n+1}} \cdots$$

e quindi, in generale:

$$f_{1\cdot s} = \frac{N_{n-s+1}}{N_{n+1}}. \tag{5}$$

Dalla (5) si passa in modo analogo alla valutazione di una generica $f_{r\cdot s}$, per $s = r + 1 \cdots n$. Basta all'uopo, nel sistema di ordine n a cui soddisfano le $f_{r\cdot s}$ stesse, togliere le prime r righe: si arriva così al nuovo sistema, di ordine $n - r$

$$\| N_{n-r+1} \| \begin{Bmatrix} f_{r\cdot r+1} \\ f_{r\cdot r+2} \\ \cdots \\ f_{r\cdot n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{r\cdot r} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Con ovvio significato delle $\psi_{i,k}$, si ha in questo caso

$$f_{r,r+1} = \psi_{1,1} f_{r,r} \ , \ f_{r,r+2} = \psi_{1,2} f_{r,r} , \cdots , f_{r,s} = \psi_{1,(s-r)} f_{r,r} .$$

Quindi, in base alle (4) e (5), sostituendo in quest'ultima n con $n-r$:

$$f_{r,s} = \frac{N_r N_{n-s+1}}{N_{n+1}} \qquad (s = r+1 \cdots n). \tag{6}$$

Questa formula, tenuto conto della proprietà di simmetria

$$f_{s,r} = f_{r,s}$$

fornisce senz'altro per l'inversa della matrice normale (1) l'espressione esplicita

$$\| N_{n+1} \|^{-1} = \frac{1}{N_{n+1}} \begin{Vmatrix} N_1 N_n & N_1 N_{n-1} & N_1 N_{n-2} \cdots N_1 N_1 \\ N_1 N_{n-1} & N_2 N_{n-1} & N_2 N_{n-2} \cdots N_2 N_1 \\ N_1 N_{n-2} & N_2 N_{n-2} & N_3 N_{n-2} \cdots N_3 N_1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ N_1 N_1 & N_2 N_1 & N_3 N_1 \cdots\cdots N_n N_1 \end{Vmatrix} . \tag{7}$$

Moltiplicando (a destra) questa matrice per la colonna degli errori di chiusura $v_1 , \cdots , v_n$ cambiati di segno, e dividendo per 2 dato che anche gli elementi della (1) risultavano da una divisione per 2, si ottengono i correlati $K_1 , K_2 , \cdots , K_n$: ossia

$$2 N_{n+1} K_1 = - N_1 (N_n v_1 + N_{n-1} v_2 + N_{n-2} v_3 + \cdots + N_1 v_n)$$

$$2 N_{n+1} K_2 = - N_{n-1} N_1 v_1 - N_2 (N_{n-1} v_2 + N_{n-2} v_2 + \cdots + N_1 v_n)$$

$$2 N_{n+2} K_3 = - N_{n-2} (N_1 v_1 + N_2 v_2) N_3 (N_{n-2} v_2 + \cdots + N_1 v_n) \cdots$$

e, in generale

$$K_r = - \frac{N_{n-r+1}}{2 N_{n+1}} \sum_1^{r-1} N_i v_i - \frac{N_r}{2 N_{n+1}} \sum_r^n N_{n-i+1} v_i \qquad (r = 1 \cdots n). \tag{8}$$

Per il calcolo delle correzioni di direzione $(1) , (2) , \cdots , (4n+2)$, (se n è il numero dei triangoli, quello dei lati è $2n+1$ e quello delle direzioni $4n+2$), vale la formula generale [6]

$$(i) = K_s^{(i)} - K_d^{(i)} \qquad (i = 1 , \cdots , 4n+2) \tag{9}$$

essendo $K_s^{(i)}$ e $K_d^{(i)}$ i correlati dei triangoli che stanno rispettivamente alla sinistra ed alla destra di (i): per esempio (fig. 1)

$$(1) = - K_1 \ , \ (4) = K_2 - K_1 \ , \ (7) = K_4 - K_2 = - (4) .$$

Così, se non vi sono equazioni alle basi, la compensazione rimane ultimata.

(6) F. Albani, *Sulla impostazione diretta delle equazioni normali e delle correlate*, ecc. «L'Universo – Bollettino Geodetico», n. 2, 1944.

3. Se invece esiste anche un'equazione alle basi, conviene, dopo aver calcolato le *correzioni poligonali* colle formule (8) e (9), procedere poi col *metodo del Boltz modificato* proposto dallo scrivente in un recente lavoro [7]. In detta equazione, le correzioni di direzione, avranno dei coefficienti, determinabili con note regole [6], che indicheremo con $c_1, \cdots, c_{4n+2}$. Il residuo w andrà calcolato dopo aver già portato alle direzioni le correzioni (9). La matrice del sistema normale completo ai correlati acquista ora l'aspetto

$$\begin{array}{c|c} & h_1 \\ & \cdots \\ \dfrac{2 \,\|\, N_{n+1} \,\|}{h_1 \cdots h_n} & h_n \\ & h_{n+1} \end{array}$$

dove gli *elementi di collegamento* $h_1, \cdots, h_n$ si calcolano essi pure in base a note regole [6], mentre l'elemento h_{n+1} non interviene nel procedimento.

Si deve passare ora al calcolo dei *correlati intermedi*, che si indicheranno con $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ (trattandosi di una semplice colonna, non è qui il caso di usare doppi indici). All'uopo, come è noto, basta moltiplicare (a destra) la $\| N_{n+1} \|^{-1}$ per la colonna delle $\frac{h_i}{2}$ cambiate di segno; in altre parole, le Z_i si ricavano dalla (8) ove ai residui v_i si sostituiranno i coefficienti m_i:

$$(10) \qquad Z_r = -\frac{N_{n-r+1}}{2\,N_{n+1}} \sum_{0}^{r-1} N_i \, m_i - \frac{N_r}{2\,N_{n+1}} \sum_{r}^{n} N_{n-i+1} \, m_i .$$

Per le *correzioni ai coefficienti* si hanno poi le relazioni del tutto analoghe alla (9)

$$(11) \qquad c'_i = Z_s^{(i)} - Z_a^{(i)} \qquad (i = 1, \cdots, 4n+2)$$

da cui i coefficienti della *equazione laterale modificata*

$$(12) \qquad p_i = c_i + c'_i$$

e la *matrice normale laterale modificata* (ad un solo elemento)

$$\| P \| = [pp].$$

Ne viene per l'unico *correlato laterale* il valore

$$(13) \qquad H = -\frac{w}{[pp]}$$

e quindi per le *correzioni laterali* le espressioni

$$(14) \qquad [i] = -\frac{w}{[pp]} p_i \qquad (i = 1, \cdots, 4n+2)$$

(7) A. Marcantoni, *Compensazioni rigorose e semi-rigorose di reti geodetiche.* « L'Universo - Bollettino Geodetico », n. 1, 1946.

che aggiunte alle (*i*) sopra determinate completano la compensazione rigorosa della catena.

4. Altro caso interessante, in cui si perviene a risultati espliciti, è quello del *sistema centrale* di triangoli.

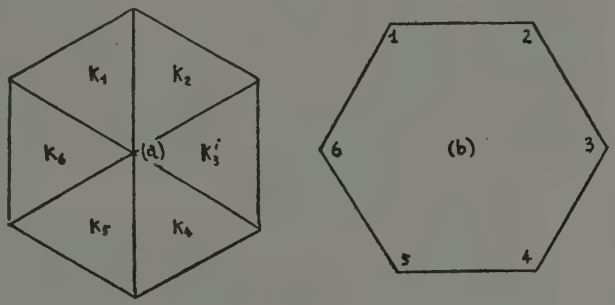


Fig. 2.

Sia in fig. 2*a* un di detti sistemi, costituito da n triangoli, e quindi in fig. 2*b* la sua *rappresentazione puntuale*. Da questa, colla regola già richiamata si trae subito la matrice normale angolare seguente

$$(15) \qquad \| M \| = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & * & * \cdots & * & -1 \\ -1 & 3 & -1 & * \cdots & * & * \\ * & -1 & 3 & -1 \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & * & * & * \cdots & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Nella matrice inversa $\| M \|^{-1}$, i cui elementi si indicano sempre con $f_{r,s}$, si hanno le seguenti relazioni, dovute alla simmetria centrale del sistema:

$$(16) \qquad f_{i,i} = f_{1,1} \quad , \quad f_{i,i+r} = f_{1,i+r}.$$
$$(r = 1, \cdots, n \ , \ n + s \equiv s),$$

sicchè, in definitiva, basta limitarsi alla ricerca dei coefficienti $f_{1,s}$. Se ora dalla rappresentazione puntuale stacchiamo un vertice qualsiasi, per esempio l'n–esimo (fig. 3), detto vertice potrà considerarsi isolatamente, purchè, anzichè il valore 3 ad esso venga attribuito il valore [3][4]:

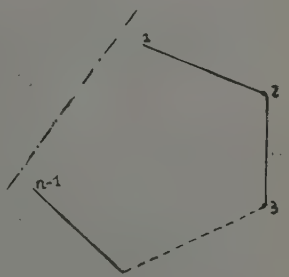


Fig. 3.

$$p = 3 - (\varphi_{1,1} + 2\varphi_{1,n-1} + \varphi_{n-1,n-1})$$

dove le $\varphi_{r,s}$ sono gli elementi reciproci per la semplice catena ad $n-1$ triangoli $K_1, K_2, \cdots, K_{n-1}$; e poichè dalla formula generale (6), sostituendo n con $n-1$, risulta

$$\varphi_{1,1} = \varphi_{n-1,n-1} = \frac{N_{n-1}}{N_n} \quad , \quad \varphi_{1,n-1} = \frac{1}{N_n},$$

vien tenendo conto della prima delle (2)

$$p = \frac{3N_n - 2N_{n-1} - 2}{N_n} = \frac{N_{n+1} - N_{n-1} - 2}{N_n}.$$

L'inversa di questa quantità dà $f_{n,n}$, e quindi anche, per le (16),

$$f_{1,1} = \frac{N_n}{N_{n+1} - N_{n-1} - 2}. \tag{17}$$

Per trovare ora gli elementi $f_{1,s}$, dal sistema normale, a matrice $\| M \|$ (15), a cui essi soddisfano si tolga la prima riga. Rimane allora il sistema

$$\| N_n \| \begin{pmatrix} f_{1,2} \\ \cdots \\ f_{1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ f_{1,1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Indicando con $\psi_{r,s}$ gli elementi reciproci della $\| N_n \|$, ed osservando che i coefficienti di $f_{1,s}$ occupano la $(s-1)$-esima colonna, avremo allora in generale

$$f_{1,s} = (\psi_{1,s-1} + \psi_{s-1,n-1}) f_{1,1}$$

ossia dalla (17) e dalla (6), in cui si ponga $n-1$ al posto di n

$$f_{1,s} = \frac{N_{s-1} + N_{n-s+1}}{N_{n+1} + N_{n-1} - 2} \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{19}$$

ormula generale che, in base alle (16) fornisce tutte le $f_{r,s}$.

Per l'inversa della matrice (15) abbiamo così ora l'espressione esplicita

$$\| M \|^{-1} = \frac{1}{N_n + N_{n-1} - 2} \begin{Vmatrix} N_0 + N_n & N_1 + N_{n-1} & N_2 + N_{n-2}, \cdots, N_{n-1} + N \\ N_1 + N_{n-1} & N_0 + N_n & N_1 + N_{n-1}, \cdots, N_{n-2} + N \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n-1} + N_1 & N_{n-2} + N_2 & N_{n-3} + N_3 \quad , \cdots, N_6 + N \end{Vmatrix} \tag{20}$$

Moltiplicando (a destra) per gli errori di chiusura v_i cambiati di segno e divisi, al solito, per 2, si ha così per i correlati l'espressione esplicita

$$2(N_{n+1} - N_{n-1} - 2) K_r = -\sum_1^{r-1} (N_{r-i} + N_{n-r+i}) v_i - \sum_r^n (N_{i-r} + N_{n+1-i}) v_i$$

che, introducendo negli indici il simbolo di valore assoluto, dà più sinteticamente

$$(21)\quad K_r = -\frac{1}{2(N_{n+1} - N_{n-1} - 2)} \sum_i^n (N_{|r-i|} + N_{n-|r-i|}) v_i \quad (r = 1, \cdots, n).$$

Avuti i correlati, le *correzioni poligonali* (i) sono ancora date dalle (9), ove i ora varia da 1 a $4n$.

Nel caso in esame, poi, vi è sempre anche una equazione laterale, e quindi la necessità di procedere anche al calcolo delle *correzioni laterali*: detto calcolo è del tutto simile a quello delle omonime correzioni per la catena con equazione alle basi, sicchè basta qui riassumerlo per sommi capi.

Si avranno intanto per detta equazione dei coefficienti $c_1, c_2, \cdots, c_n$, ed una *matrice di collegamento* $m_1, \cdots, m_n$ determinabili nei soliti modi. Vi sarà inoltre un residuo w, calcolato colle direzioni già corrette preliminarmente colle (i). I correlati intermedi anzichè dalla (10), vengono ora forniti dalla

$$(22)\quad 2Z_r - \frac{1}{N_{n+1} - N_{n-1} - 2} \sum_i^n (N_{r-i|} + N_{n-|r-i|}) m_i \quad (r = 1, \cdots, n).$$

Il calcolo delle *correzioni poligonali* $[i]$ segue poi colle stesse formule da (11) a (14), salvo che ora i varia da 1 a $4n$.

Così, anche in questo caso, la compensazione rigorosa è ultimata.

5. Osservazione. – La formula (17) che qui per maggior chiarezza riscriviamo

$$(17)\quad f_{r\cdot r} = \frac{N_n}{N_{n+1} - N_{n-1} - 2} \quad (r = 1, \cdots, n)$$

è passibile di qualche trasformazione che è interessante rilevare.

All'uopo è da distinguere il caso in cui n è pari da quello in cui n è dispari.

Primo caso: $n = 2p$. Basta ricordare le seguenti due formule, che si trovano nel lavoro già citato del prof. Boaga [5]

$$(23)\quad \begin{cases} N_{2p} = N_p (N_{p+1} - N_{p-1}) \\ N_{2p+1} - N_{2p-1} - 2 = 5 N_p^2, \end{cases}$$

da cui la prima si ricava pure dalla seconda delle (2) ponendo $r = p$. (La seconda nel lavoro citato si riferisce originariamente agli indici $2p + 3, 2p + 1, p + 1$). Si vede dunque che la (17) si riduce a

$$(17')\quad f_{\cdot\cdot n} = \frac{N_p - N_{p-1}}{5 N_p} \quad (n = 2p)$$

Secondo caso: $n = 2p + 1$. Il denominatore della (17) diventa

$$D = N_{2p+2} - N_{2p} - 2,$$

ossia, per la prima delle (23) e la seconda delle (2),

$$\begin{aligned} D &= N_{p+1} N_{p+2} - 2 N_p N_{p+1} + N_p N_{p-1} - 2 \\ &= N_{p+1} (3 N_{p+1} - N_p) - 2 N_p N_{p+1} + N_p (3 N_p - N_{p+1}) - 2 \\ &= 3 N_{p+1}^2 + 3 N_p^2 - 4 N_{p+1} N_p = (N_{p+1} + N_p)^2 + 2 T_p - 2 \end{aligned}$$

dove si è posto

$$T_p = N_{p+2}^2 = N_p^2 - 3 N_{p+1} N_p.$$

Ora, la prima delle (2) dà

$$\begin{aligned} T_p &= (3 N_p - N_{p-1})^2 + N_p^2 - 3 (3 N_p - N_{p-1}) N_p = \\ &= N_p^2 + N_{p-1}^2 - 3 N_p N_{p-1} = T_{p-1}, \end{aligned}$$

formula che dimostra che T_p è una costante. Posto in particolare $p = 1$, si ha in tal modo

$$T_p = 1 \quad , \quad D = (N_{p+1} + N_p)^2;$$

e poichè dalle citate formule del prof. Boaga, come pure dalla seconda delle (2) per $n = 2p + 1$ ed $r = p + 1$, si ha

$$N_{2p+1} = N_{p+1}^2 - N_p^2,$$

si vede che alla fine la (17) diviene in questo caso

$$(17'') \qquad f_{r,r} = \frac{N_{p+1} - N_p}{N_{p+1} + N_p} \qquad (n = 2p + 1).$$

I risultati (17') e (17'') coincidono sostanzialmente con quelli trovati dal Jenne [8] e anche dallo scrivente [4], con procedimenti alquanto più involuti. È per altro da notare che analoghe trasformazioni non sono in generale possibili per gli altri elementi $f_{r,s}$ con $r \neq s$, cosicchè i risultati suddetti non si possono utilizzare per formule esplicite come la (21): essi possono comunque essere convenienti in qualche problema speciale.

Notiamo poi la relazione fra due successivi termini della successione di Schimper, che sopra è risultata:

$$(24) \qquad N_{p+1}^2 + N_p^2 - 3 N_{p+1} N_p = 1$$

(8) W. Jenne, *Kettenbruchformeln und Korrelatentabellen*, ecc. « Veröff. d. Preuss. Geod. Inst. », N. F. n. 107, 1937.

che si può anche scrivere

$$(24') \qquad (N_{p+1} - N_p)^2 = 1 + N_{p+1} N_p ,$$

o anche, risolvendo rispetto ad N_{p+1}

$$(25) \qquad N_{p+1} = \frac{3 N_p + \sqrt{5 N_p^2 + 4}}{2}$$

(che si debba adottare per la radice il valore positivo, si vede subito ponendo $p = 0$).

La (25) permette calcolare successivamente i numeri N, ciascuno in funzione del solo precedente. Risulta pure evidente dalla (25) che l'espressione $5 N_p^2 + 4$, qualunque sia p, è sempre un quadrato perfetto.

Fisica. — *Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi di notevole viscosità.* Nota di E. Grossetti, presentata [1] dal Corrisp. A. Carrelli.

Dispositivo sperimentale. – Il quarzo generatore delle onde ultrasoniche veniva accoppiato induttivamente ad un circuito oscillante con frequenza uguale a quella sua propria mediante le oscillazioni di un uguale cristallo di quarzo situato nel circuito di griglia di un tubo elettronico. Le facce del quarzo generatore erano ricoperte di un sottilissimo foglio di stagnola incollato con mastice e fortemente compresso.

Il quarzo così montato veniva disposto su di una parete di una vaschetta a sezione trasversale trapezoidale, delle dimensioni (35 × 12 × 10 cm.) fig. 1.

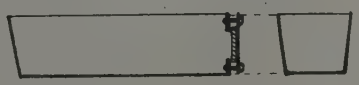


Fig. 1.

In tal modo una sola delle armature del quarzo a diretto contatto col liquido contenuto nella vaschetta funzionava da sorgente ultrasonora.

L'altra faccia del quarzo era invece a contatto della parete della vaschetta costituita da lamierino di zinco, fra quarzo e vaschetta, non tralasciando il contatto elettrico, veniva interposta una guarnizione di gomma per evitare che le vibrazioni del quarzo investissero direttamente le pareti della vaschetta.

L'intensità delle onde ultrasonore nel quarzo sia per varie posizioni che per vari liquidi veniva determinata mediante la misura della pressione di radiazione. Questa misura veniva effettuata mediante un pendolo di torsione;

(1) Nella seduta del 16 novembre 1946.

le onde colpivano la lamina P di questo pendolo generando un momento torcente, lo specchio S (fig. 2) permetteva l'osservazione degli spostamenti, un contrapeso D che era non immerso nel liquido equilibrava il sistema, ed infine un disco orizzontale C veniva utilizzato per lo smorzamento in modo da compiere la misura piuttosto rapidamente. La superficie P del diametro di cm. 1,0 era fissata ad un braccio orizzontale solidale all'asta verticale del pendolo sospeso ad un filo di torsione di nikel del diametro di 0,01 cm. Il pendolo torsionale era portato da un sostegno ed era possibile ottenere spostamenti misurabili del pendolo lungo l'asse della vaschetta ed in direzione normale di questa, in modo da centrare il disco circolare P nel fascio ultrasonoro e di misurare la pressione di radiazione a distanze varie e note dalla sorgente.

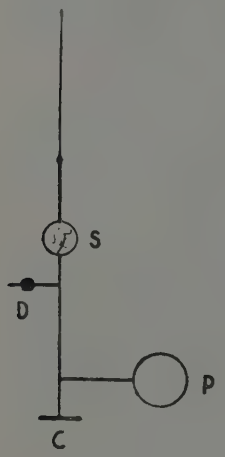


Fig. 2.

La misura del coefficiente α d'assorbimento delle radiazioni ultrasonore si facevano effettuando misure di pressione a varie distanze, riportando sulle ascisse le distanze dalla sorgente ultrasonora e sulle ordinate i logaritmi naturali delle corrispondenti deviazioni subite dal pendolo. Le distanze cui abitualmente si è fatto ricorso sono state di cm. 8,0; 12,0; 16,0; 24,0 a partire dalla superficie del quarzo emittente.

È ben noto che le misure finora effettuate del coefficiente di assorbimento per diversi liquidi hanno condotto a valori che si discostavano notevolmente dal valore dedotto dalla teoria [2].

Abbiamo in primo luogo preceduto a misure nell'acqua, poichè con tale liquido è possibile usare vaschette di forma e dimensioni diverse, dato che come primo problema ci preoccupiamo stabilire l'influenza che può avere nelle misure del coefficiente d'assorbimento la forma e le dimensioni della vaschetta usata. Sono state adoperate vasche delle seguenti dimensioni: (vasca n. 1: cm. $110 \times 45 \times 30$; vasca n. 2: cm. $75 \times 15 \times 15$; vasca n. 3: cm. $50 \times 15 \times 15$; vasca n. 4: cm. $35 \times 12 \times 10$).

Portando come ascisse i valori delle distanze x dalla superficie emittente e come ordinate i logaritmi naturali delle deviazioni φ si ottenevano rispettivamente per le vasche suddette delle rette di coefficienti angolari α rispettivamente dati da:

$$\alpha_1 = 0{,}0198 \quad \text{Vaschetta } 1$$
$$\alpha_2 = 0{,}0189 \quad \text{» } 2$$
$$\alpha_3 = 0{,}0182 \quad \text{» } 3$$
$$\alpha_4 = 0{,}0242 \quad \text{» } 4$$

(2) P. Biquard, «Ann. de Phys.», 11 serie, t. 6 (Septembre 1936).

Questi risultati mettono chiaramente in evidenza come sia criticabile il metodo ora descritto per la misura di α, in quanto che è molto evidente l'influenza che ha la grandezza della vaschetta sul valore trovato del coefficiente. Però nell'impossibilità per il momento di poter realizzare dispositivi diversi, e di poter usare vaschette molto grandi per il grande costo dei liquidi, e dato che lo scopo del presente lavoro è essenzialmente quello di studiare l'effetto della viscosità sul coefficiente d'assorbimento, cui le misure hanno carattere relativo, noi abbiamo proceduto nelle misure utilizzando la vaschetta n. 4, ed attribuendo ai risultati ottenuti per i vari liquidi valori essenzialmente comparativi.

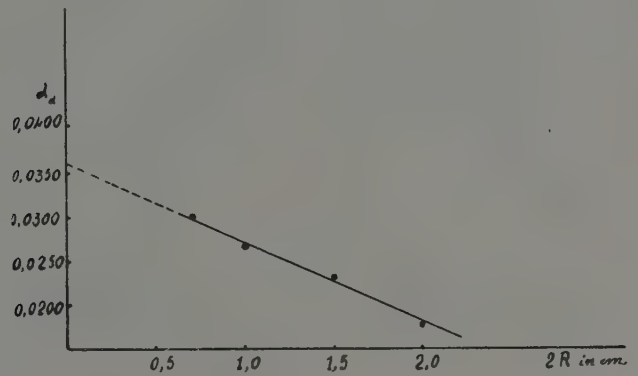


Fig. 3.

Per ridurre poi al minimo per quanto è possibile l'influenza delle pareti, influenza dipendente evidentemente dalle riflessioni, nelle misure che qui si riportano la superficie interna della vaschetta n. 4 è stata resa scabrosa mediante cemento disposto irregolarmente in modo da ottenere la riflessione irregolare delle onde ultrasonore.

Un'altra importante causa d'errore nella determinazione di α è rappresentato dal fatto che la superficie S del pendolo, che non è trascurabile rispetto alle dimensioni della sorgente, per la sua presenza perturba il campo ultrasonoro prodotto dal quarzo. Per determinare l'effettiva presenza di questa causa perturbatrice sono state eseguite, usando quale liquido l'acqua, varie determinazioni del coefficiente, utilizzando dischetti di diametro diversi, e precisamente: $2R = 2{,}0$; $1{,}5$; $0{,}7$ cm.

Riportando sulle ascisse i valori $2R$ e sulle ordinate i valori ottenuti per α (fig. 3) risulta chiaramente che la perturbazione esiste ed è anzi notevole, ed il valore di α che bisognerebbe assumere è il valore limite per R tendente a zero, se non fosse troppo ardita l'estrapolazione.

Naturalmente le misure da noi compiute non ci permettono di poter determinare α mediante l'uso di dischetti di diametri tanto piccoli, in modo che

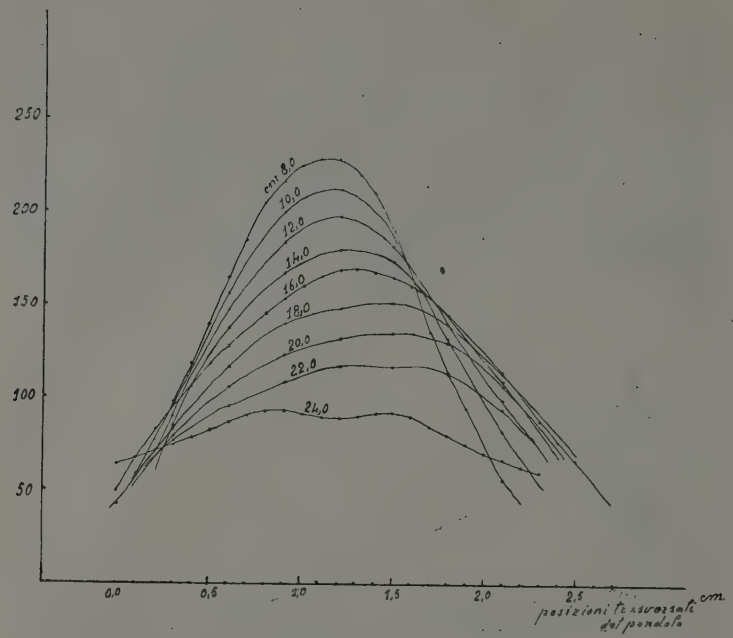

250
200
150
100
50
cm. 8,0
10,0
12,0
14,0
16,0
18,0
20,0
22,0
24,0
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
cm.
posizioni trasversali del pendolo

Fig. 4.

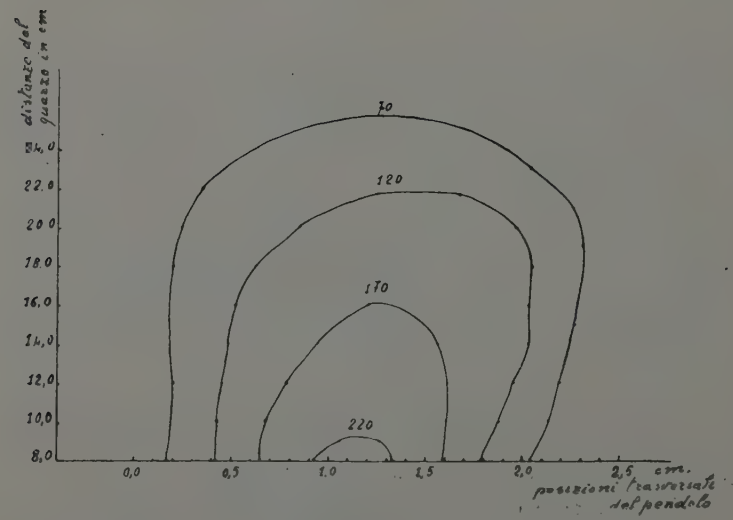

distanze dal quarzo in cm
24,0
22,0
20,0
18,0
16,0
14,0
12,0
10,0
8,0
70
120
170
220
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
cm.
posizioni trasversali del pendolo

Fig. 5.

queste dimensioni siano effettivamente trascurabili rispetto alle dimensioni del quarzo. In ogni modo il disco adoperato nelle attuali misure è del diametro di cm. 1,0 essenzialmente per il fatto che per alcuni liquidi, dato il notevole assorbimento, è necessario avere un momento torcente piuttosto notevole, e che queste misure come già si è chiaramente detto sono fatte allo scopo d'ottenere valori relativi.

Prima d'iniziare le misure è stata indagata la distribuzione della intensità del campo sonoro, usando quale liquido l'acqua, e cioè è stata determinata la pressione di radiazione per una certa distanza del quarzo, per varie posizioni trasversali del pendolo. I valori sperimentali sono riportati in fig. 4. Le curve danno la misura delle intensità per varie distanze dalla sorgente, da esse è possibile ottenere le linee che collegano i punti della stessa intensità e che sono riportate in fig. 5, e come risulta chiaramente la distribuzione sperimentale è parzialmente deformata e ciò forse sia per effetto d'imperfezione del quarzo adoperato o per effetto di riflessione sulle pareti.

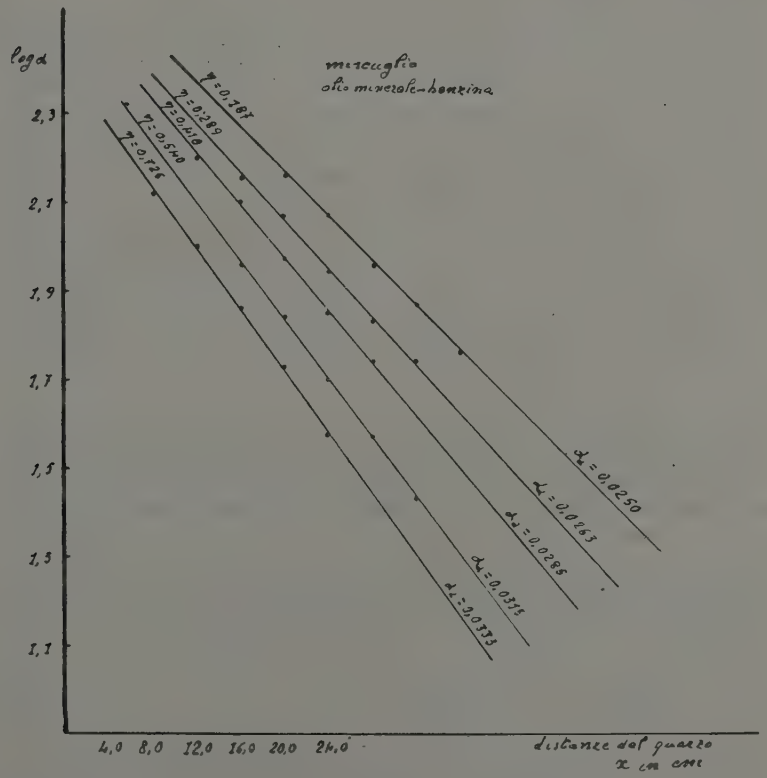


Fig. 6.

Si è quindi proceduto alla determinazione di coefficienti d'assorbimento dei vari liquidi. In primo luogo si è ottenuto quello dell'acqua che è risultato nelle condizioni sperimentali riportate $\alpha = 0{,}0242$.

Sono state effettuate determinazioni di α per altri liquidi facendo uso sempre della stessa vaschetta e la medesima frequenza ultrasonora, precisamente usando miscugli glicerina – acqua con η variabili da 0,408 a 1,111, il miscuglio olio di ricino – benzina con η variabili da 0,427 a 1,347, il miscuglio olio minerale – benzina con η variabili da 0,184 a 0,726.

Gli errori nella misura della posizione sono molto piccoli, e così anche quelli adoperati nella valutazione della pressione. Probabilmente una causa d'errore più importante è quella dipendente dal fatto che il pendolo non si trova nel massimo d'intensità del fascio ultrasonoro.

I valori α, che si ricavano calcolando il coefficiente angolare delle rette le cui ascisse ed ordinate sono le distanze ed i logaritmi delle deviazioni, sono affette in media da un errore di circa $\pm 2{,}71 \cdot 10^{-3}$.

x	$\eta = 0{,}187$		$\eta = 0{,}289$		$\eta = 0{,}410$		$\eta = 0{,}540$		$\eta = 0{,}726$	
	α	$\log \alpha$	α	$\log \alpha$	α	$\log \alpha$	α	$\log \alpha$	α	$\log \alpha$
8	143	2,1553	142	2,1528	160	2,2013	92	1,9673	128	2,1072
12	118	2,0718	120	2,0791	126	2,1003	70	1,8450	100	2,0000
16	90	1,9542	94	1,9731	94	1,9731	50	1,5989	72	1,8573
20	75	1,8750	69	1,8388	72	1,8573	28	1,5797	54	1,7323
24	57	1,7578	56	1,7481	55	1,7403	27	1,4313	38	1,5797

Fig. 7.

L'andamento di una serie di misure è riportato in fig. 6, e nella tabellina fig. 7 si riportano i risultati; in una Nota successiva si farà il confronto fra i dati sperimentali e le possibili previsioni teoriche.

Al prof. Antonio Carrelli l'espressione di vivissima gratitudine per i larghi consigli dati ed i mezzi messi a disposizione.

Fisica (Elettrotecnica). — *Studio energetico in regime transitorio di un bipolo lineare passivo.* Nota di M. Abele, presentata [1] dal Socio E. Perucca.

1. Introduzione. – Nello studio del funzionamento di un circuito elettrico, cui sia applicata una f. e. m. agente soltanto per un intervallo di tempo finito $t_2 - t_1$, è utile conoscere l'energia totale fornita dal generatore: energia che all'istante t_2 risulta generalmente in parte dissipata, in parte accumulata dal circuito sotto forma di energia elettromagnetica. Ora qualunque sia la f. e. m. applicata e qualunque sia l'intervallo $t_2 - t_1$, se il circuito non è puramente ohmico, per questa valutazione dell'energia fornita si deve in generale tenere conto del transitorio susseguente all'istante iniziale t_1 in cui la f. e. m. viene applicata al circuito. Tra le trattazioni parziali su questo argomento è notevole un'espressione integrale dell'energia dedotta dal Carson come corollario di un teorema di Rayleigh [2]. Nel presente lavoro il problema viene affrontato in forma molto generale svolgendo la trattazione completa del bilancio energetico in regime transitorio nell'ipotesi che la f. e. m. applicata sia una funzione periodica del tempo. Il caso di f. e. m. non periodica, purchè di durata limitata, rientra in questa trattazione, immaginando l'intervallo di tempo di applicazione della f. e. m. non periodica, come un periodo isolato di una f. e. m. periodica.

2. Trattazione generale. – Si consideri un bipolo originariamente in riposo, lineare e passivo, cioè privo di sorgenti di energia che si manifestino sotto forma di f. e. m. In regime alternativo sinusoidale di pulsazione ω esso è definito dalla sua ammettenza complessa $Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$ [$G(\omega), B(\omega)$, sono due funzioni reali di ω, dette rispettivamente conduttanza e suscettanza del circuito; $j = \sqrt{-1}$]. La $Y(j\omega)$ definisce il funzionamento del circuito soltanto in regime permanente. Lo studio del regime transitorio si ottiene attraverso un'estensione del concetto di ammettenza, sostituendo nella $Y(j\omega)$ alla variabile immaginaria $j\omega$ la variabile complessa $z = \alpha + j\omega$.

Per un bipolo passivo che abbia significato fisico, nel quale cioè ogni reattanza è associata ad una causa di dissipazione di energia, è lecito supporre che $Y(z)$ sia regolarmente analitica in tutto il semipiano z a parte reale positiva, contorno incluso ($\alpha \geq 0$). I punti singolari di $Y(z)$ appartengono quindi al semipiano $\alpha < 0$, a distanza finita dall'asse immaginario.

(1) Nella seduta del 16 novembre 1946.

(2) J. Carson, *Electric Circuit Theory and the Operational Calculus.* New York, 1926, p. 185.

All'istante $t = 0$ ai morsetti del bipolo sia applicata la tensione $v(t)$ periodica con periodo $T = 2\pi/\omega_0$ e sviluppabile in serie di Fourier sotto la forma esponenziale:

$$(1) \qquad v(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t},$$

in cui i coefficienti c_n, reali o complessi, sono dati dalla relazione:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

L'energia $W(t)$ assorbita dal bipolo dall'istante iniziale $t = 0$, all'istante generico t, per il teorema di Cauchy vale:

$$(2) \qquad W(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_r c_s \left[\frac{Y(jr\omega_0)}{j(r+s)\omega_0} e^{j(r+s)\omega_0 t} - \frac{Y(-js\omega_0)}{j(r+s)\omega_0} + R_{r,s}(t) e^{j(r+s)\omega_0 t} \right],$$

dove $R_{r,s}(t)$ è la somma dei residui della funzione

$$\frac{Y(z + jr\omega_0)}{z + j(r+s)\omega_0} \frac{e^{zt}}{z}$$

nei punti singolari di $Y(z + jr\omega_0)$. Per l'ipotesi fatta sulle singolarità di $Y(z)$ la funzione $R_{r,s}(t)$ soddisfa alla condizione:

$$(3) \qquad \lim_{t \to \infty} R_{r,s}(t) = 0.$$

Ora se non si avesse transitorio, cioè se già all'istante iniziale $t = 0$ si stabilisse nel circuito la corrente di regime permanente, l'energia fornita dal generatore al bipolo all'istante t considerato sarebbe:

$$(4) \qquad W_0(t) = \frac{1}{j\omega_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_r c_s Y(jr\omega_0) \frac{e^{j(r+s)\omega_0 t} - 1}{r+s}.$$

Tenendo conto della (4) la (2) diventa:

$$(5) \qquad W(t) = W_0(t) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_r c_s \left[\frac{Y(jr\omega_0) - Y(-js\omega_0)}{j(r+s)\omega_0} + R_{r,s}(t) e^{j(r+s)\omega_0 t} \right].$$

Considerando che per un circuito fisico la parte reale di $Y(j\omega)$, cioè la conduttanza $G(\omega)$, è una funzione pari di ω, mentre la parte immaginaria, cioè la suscettanza $B(\omega)$, è una funzione dispari di ω, dalla (5) si ha:

$$(6) \qquad W(t) = W_0(t) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_r c_s \left[\frac{B(r\omega_0) + B(s\omega_0)}{(r+s)\omega_0} + R_{r,s}(t) e^{j(r+s)\omega_0 t} \right].$$

La (6) definisce dunque, per ogni valore di $t > 0$, l'energia assorbita dal circuito quando gli sia applicata la f.e.m. $v(t)$ data dalla (1). Si immagini

ora di applicare al circuito all'istante $t = 0$ una tensione $v_1(t)$ arbitrariamente data per $t > 0$, e si voglia valutare l'energia $W(T)$ fornita all'istante $t = T$. Se la funzione aperiodica $v_1(t)$ nell'intervallo di tempo $0, T$ è sviluppabile in serie di Fourier, si può ad essa sostituire una tensione $v(t)$ periodica con periodo T, tale che in ogni istante t compreso nell'intervallo $0, T$ sia $v(t) = v_1(t)$. Allora, valutati analiticamente o graficamente nella (1) i coefficienti c_n, l'energia $W(T)$ fornita al circuito da $v_1(t)$ si ottiene dalla relazione generale (6) pre $t = T$.

3. Nella (6) si osserva che esiste un intervallo di tempo t_a sufficientemente grande per cui, in virtù della (3), si può scrivere:

$$|R_{r,s}(t)|_{t=t_a} \ll \left| \frac{B(r\omega_0) + B(s\omega_0)}{(r+s)\omega_0} \right|$$

per tutti i valori di r, s da $-\infty$ a $+\infty$. Allora trascorso l'intervallo di tempo t_a, che può essere considerato come durata del regime transitorio del bipolo in studio, si può scrivere:

$$W(t)_{t>t_a} = W_0(t) + \frac{1}{\omega_0} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_s c_r c_s \frac{B(r\omega_0) + B(s\omega_0)}{r+s}.$$

A regime permanente stabilito, l'energia $W(t)$ effettivamente fornita al circuito differisce pertanto dall'energia $W_0(t)$, che sarebbe fornita se già all'istante iniziale si stabilisse la corrente di regime permanente, per un termine costante rispetto al tempo ed indipendente dalla parte reale dell'ammettenza del circuito.

4. Circuiti a costanti concentrate. - Si supponga in particolare che la $Y(j\omega)$ sia data dall'espressione:

$$(7) \qquad Y(j\omega) = \frac{a_0(j\omega)^p + a_1(j\omega)^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(j\omega) + a_p}{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_{m-1}(j\omega) + b_m} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)},$$

in cui i coefficienti a_h $(h = 0, 1, 2, \cdots, p)$ b_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, m)$ sono costanti reali e gli esponenti p, m soddisfano alla relazione $p \leq m$. Si supponga inoltre che le m radici χ_i dell'equazione $D(j\omega) = 0$ siano tutte fra loro distinte. Considerato il caso più generale $p = m$, è noto che la (7) può essere scritta sotto la forma:

$$Y(j\omega) = \frac{a_0}{b_0} + \sum_1^m{}_i \frac{N(\chi_i)}{D'(\chi_i)} \frac{1}{j\omega - \chi_i},$$

in cui $N(\chi_i)$ è il valore assunto dal numeratore $N(j\omega)$ per $j\omega = \chi_i$; $D'(\chi_i)$ è il valore assunto dalla derivata del denominatore $D(j\omega)$ rispetto a $j\omega$ per $j\omega = \chi_i$. Per le ipotesi fatte la parte reale delle m radici χ_i è negativa cioè gli m punti χ_i, nei quali la funzione $Y(\chi)$ ha un polo semplice,

si trovano tutti nel semipiano $\alpha < 0$. La funzione $R_{r,s}(t)$ che compare nella formula generale (6) vale:

$$R_{r,s}(t) = \sum_{1}^{m} \frac{N(\zeta_i)}{D'(\zeta_i)} \frac{e^{(\zeta_i - jr\omega_0)t}}{(\zeta_i - jr\omega_0)(\zeta_i + js\omega_0)}$$

per cui l'energia $W(t)$ fornita al circuito è data dall'espressione:

$$W(t) = W_0(t) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_r c_s \left[\frac{B(r\omega_0) + B(s\omega_0)}{(r+s)\omega_0} + \sum_{1}^{m} \frac{N(\zeta_i)}{D'(\zeta_i)} \frac{e^{(\zeta_i + js\omega_0)t}}{(\zeta_i - jr\omega_0)(\zeta_i + js\omega_0)} \right]$$

Cioè in generale il transitorio è risultante di infinite oscillazioni sovrapposte, la cui ampiezza decresce esponenzialmente con il tempo.

Lo scrivente ringrazia il prof. Bottani per i consigli ricevuti nella stesura del lavoro.

Fisica (Elettroacustica). — *Equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici* [1]. Nota di P. G. Bordoni, presentata [2] dal Socio A. Signorini.

1. Introduzione. – I trasduttori elettromeccanici sono stati sinora studiati sotto un'aspetto prevalentemente tecnico ed applicativo, ma, anche nei lavori più recenti [3], non è stata ancora formulata una teoria che ne consideri il funzionamento da un punto di vista generale.

Nella presente Nota ci si propone di mostrare come sia possibile comprendere in una trattazione unitaria tutti i sistemi di accoppiamento elettromeccanico attualmente noti, mediante l'introduzione di un nuovo tipo di *impedenze miste elettromeccaniche di accoppiamento*, definite come rapporto tra una f. e. m. ed una velocità meccanica, o, il che è lo stesso, tra una forza meccanica ed una corrente elettrica [4]. Queste nuove impedenze offrono parecchi vantaggi rispetto ai parametri sinora usati per caratterizzare gli accoppiamenti elettromeccanici; innanzi tutto esse consentono di determinare il funzionamento di un trasduttore di qualsiasi tipo mediante un unico

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino ».

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) Vedi ad esempio W. P. Mason, *Electromechanical transducers and wave filters*. D. Van Nostrand Ed., New York, 2ª ediz., 1943; H. Hecht, *Die elektroakustischen Wandler*, J. A. Barth Ed., Leipzig, 1941.

(4) Tale rapporto è definito semplicemente come un « *complex force factor* » dall'American Standards Association, *American Standard acoustics terminology*. « J. A. S. A. », vol. 13, 1942, p. 84, senza che sia rilevata la sua identità con una resistenza o con una reattanza capacitiva, e la possibilità di dedurre da esso equazioni generali valevoli per tutti i trasduttori.

sistema di equazioni generali, nel quale esse figurano in maniera simmetrica accanto alle normali impedenze meccaniche ed elettriche. In secondo luogo esse assumono espressioni molto semplici in tutti i trasduttori adoperati nella tecnica, poichè si riducono a resistenze elettromeccaniche per gli accoppiamenti a ferro mobile, a conduttore mobile e magnetostrittivo, mentre sono invece reattanze elettromeccaniche capacitive nel caso degli accoppiamenti a condensatore e piezoelettrico; il tipo di impedenza caratterizza dunque la natura fisica dell'accoppiamento, poichè gli accoppiamenti a resistenza sono quelli in cui interviene il campo magnetico, mentre in quelli a capacità interviene il campo elettrico.

L'introduzione delle impedenze di accoppiamento consente inoltre di stabilire, anche per i trasduttori elettromeccanici, un teorema di reciprocità, che si riduce in alcuni casi particolari a quello enunciato da Rayleigh per i sistemi in cui compaiono soltanto grandezze elettriche o meccaniche. Tutte le considerazioni precedenti si riferiscono ad accoppiamenti elettromeccanici *ideali*, cioè privi di perdite, ma le equazioni generali valgono anche nel caso di accoppiamenti reali, purchè si alterino leggermente gli angoli di fase delle impedenze di accoppiamento, per tener conto della dissipazione di energia dovuta a perdite dielettriche, a fenomeni di isteresi, a correnti parassite ecc.

Le equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici stabilite in questo lavoro consentono infine di calcolare agevolmente tutte le grandezze comunemente usate per caratterizzare le impedenze dei trasduttori, come le impedenze dinamiche, il rendimento ecc., e di introdurre allo stesso scopo nuovi parametri assai significativi, la cui deduzione e la cui interpretazione fisica saranno prossimamente illustrati su questi stessi «Rendiconti» in una Nota di I. Barducci dal titolo: *Grandezze caratteristiche dei trasduttori elettromeccanici.*

2. Resistenze e capacità elettromeccaniche di accoppiamento. – Il tipo più semplice di trasduttore elettromeccanico è quello a due soli gradi di libertà, costituito da una massa $\mathfrak{M}$, da una resistenza viscosa $\mathfrak{R}$ e da una cedevolezza $\mathfrak{C}$, vibranti con la stessa velocità, ed accoppiate con un circuito elettrico formato da un'induttanza L, da una resistenza R e da una capacità C collegate in serie.

Senza limitare la generalità della trattazione si può supporre che le forze elettromotrici e vibromotrici varino nel tempo con legge sinusoidale, e che quindi anche le correnti elettriche e le velocità meccaniche seguano la stessa legge; infatti la conoscenza del comportamento del trasduttore in regime sinusoidale permette di prevederne il funzionamento sia in un qualsiasi regime periodico, sia anche in regime aperiodico, mediante lo sviluppo in serie od in integrale di Fourier.

Nell'equazione *meccanica* del trasduttore oltre alla forza vibromotrice esterna eventualmente applicata, ed alle forze di inerzia, viscose ed elastiche,

figura anche, in virtù dell'accoppiamento, una forza dipendente dalle grandezze elettriche variabili (tensione, corrente, carica). Analogamente nell'equazione *elettrica* oltre alla f. e. m. esterna eventualmente applicata ed alle cadute di potenziale induttive, resistive e capacitive, figura una f. e. m. dipendente dalle grandezze meccaniche variabili (forza, velocità, spostamento). In tutti i trasduttori invertibili comunemente adoperati l'accoppiamento può essere considerato lineare con buona approssimazione; è perciò sempre possibile nell'espressione della forza di accoppiamento mettere in evidenza una sola grandezza elettrica, per esempio la corrente, e, nella f. e. m. di accoppiamento, una sola grandezza meccanica, per esempio la velocità.

I coefficienti che legano la forza alla corrente e la tensione alla velocità, nella rappresentazione simbolica delle grandezze alternative mediante gli esponenziali, sono generalmente numeri complessi, e possono essere considerati come un nuovo tipo di impedenze miste elettromeccaniche, o *impedenze di accoppiamento*. Queste nuove impedenze saranno indicate con il simbolo **Z**, mentre con Z, $\mathfrak{Z}$ saranno rispettivamente denotate le impedenze elettriche e meccaniche; le **Z** hanno le dimensioni fisiche della radice quadrata del prodotto $Z\mathfrak{Z}$:

$$[\mathbf{Z}] = \left[Z^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{Z}^{\frac{1}{2}}\right] = \left[\frac{V}{U}\right] = \left[\frac{\mathfrak{F}}{I}\right]$$

e rappresentano, in un certo senso, un'estensione del concetto di impedenza nell'ambito dell'analogia elettromeccanica classica, la quale fa appunto corrispondere le forze alle tensioni e le velocità alle correnti.

Tutti gli accoppiamenti elettromeccanici sinora noti si riducono a due soli tipi: nei primi, che comprendono gli accoppiamenti a ferro mobile, a conduttore mobile, e magnetostrittivi, la **Z** si riduce ad una resistenza **R**, e quindi le forze vibromotrici ed elettromotrici di accoppiamento sono rispettivamente date da:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_{acc.} = \mathbf{R}I \\ V_{acc.} = \mathbf{R}U \end{cases}$$

nei secondi, che comprendono gli accoppiamenti a condensatore e piezoelettrici, la **Z** si riduce ad una reattanza capacitiva $1/j\omega\mathbf{C}$, e quindi le forze e le tensioni di accoppiamento sono espresse da:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_{acc.} = \dfrac{I}{j\omega\mathbf{C}} \\ V_{acc.} = \dfrac{U}{j\omega\mathbf{C}}. \end{cases}$$

La classificazione degli accoppiamenti elettromeccanici in base all'espressione di **Z** appare come la più naturale da un punto di vista fisico, in quanto le resistenze **R** e la capacità **C** di accoppiamento, definite dalle (1),

(2) hanno gli stessi caratteri formali delle analoghe grandezze elettriche e meccaniche, essendo, con ottima approssimazione, indipendenti dalla frequenza e dall'ampiezza delle oscillazioni. Esse sono dunque nuove grandezze caratteristiche del trasduttore, facilmente calcolabili in base ai suoi parametri elettrici e meccanici, e, nel caso dell'accoppiamento piezoelettrico a quarzo, assumono addirittura l'aspetto di una nuova costante fisica del cristallo, indipendente anche dalle sue dimensioni.

TABELLA I.

Espressioni delle impedenze elettromeccaniche nei diversi accoppiamenti, e loro ordine di grandezza in unità [MKSΩ].

Accoppiamento	**Z** $[M^{1/2} T^{-1/2} R^{1/2}]$	**C** $[M^{-1/2} T^{3/2} R^{-1/2}]$	**R** $[M^{1/2} T^{-1/2} R^{1/2}]$	Ordine di grandezza di **C** o di **R**
a condensatore	$\frac{1}{j\omega \mathbf{C}}$	$\frac{d}{V_0}$	—	$5 \cdot 10^{-7}$ m. V^{-1}
piezoelettrico a quarzo		$\frac{\varepsilon}{k E}$	—	$2 \cdot 10^{-10}$ m. V^{-1}
piezoelettrico a sale di Rochelle		$\frac{\varepsilon}{k E}\left(\frac{d_m}{d_e}\right)^2$	—	$2 \cdot 10^{-10}$ m. V^{-1}
a ferro mobile	**R**	—	$\frac{2 B_0 N}{\mu_0 \Theta}$	50. Nw. A^{-1}
a conduttore mobile		—	$B_0 l$	5. Nw. A^{-1}
magnetostrittivo		—	$\frac{B_0 N}{\mu_1 \Theta}$	500. Nw. A^{-1}

Significato dei simboli: d = distanza delle armature di un condensatore (m); V_0=tensione statica di polarizzazione (V); ε = costante dielettrica (F. m^{-1}); k = modulo piezoelettrico (Coul. Nw^{-1}); E=modulo di elasticità (Nw. m^{-2}); d_e = spessore del cristallo parallelamente all'asse elettrico (m); d_m = spessore del cristallo parallelamente all'asse meccanico (m); B_0 = induzione magnetica statica (Wb); N = numero di spire; μ_0 = permeabilità magnetica dell'aria (Hy. m^{-1}); Θ = riluttanza magnetica dinamica (sec.$^{-1}$.Ω^{-1}); l=lunghezza del conduttore (m); μ_1 = costante magnetostrittiva (Hy.m^{-1}).

Dalle (1), (2) appare chiara una essenziale differenza tra i due tipi di accoppiamento: nei primi il rapporto forza–corrente (o tensione–velocità) è indipendente dalla frequenza, mentre nei secondi è ad essa inversamente

proporzionale. A questa differenza formale corrisponde una diversità essenziale dei fenomeni fisici: poichè gli accoppiamenti a resistenza elettromeccanica sono quelli nei quali interviene un campo magnetico, mentre negli accoppiamenti a capacità elettromeccanica interviene invece un campo elettrico. Non si conoscono accoppiamenti a induttanza elettromeccanica, nei quali cioè il rapporto forza-corrente sia direttamente proporzionale alla frequenza, e che rappresentino l'analogo degli accoppiamenti induttivi elettrici.

Nella Tabella I sono raccolte le espressioni formali di $\mathbf{R}$ e di $\mathbf{C}$ per i diversi tipi di accoppiamento, ed è inoltre indicato l'ordine di grandezza dei loro valori numerici.

Le equazioni di un trasduttore elettromeccanico assumono, mediante l'introduzione delle $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ la forma seguente:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F} - \mathcal{Z}\,U - \mathcal{Z}''\,U - \mathbf{R}\,I = 0 \\ V - Z\,I - Z''\,I + \mathbf{R}\,U = 0 \end{array}\right. \quad \text{Accoppiamento a resistenza elettromeccanica}$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F} - \mathcal{Z}\,U - \mathcal{Z}''\,U - \dfrac{I}{j\omega\,\mathbf{C}} = 0 \\ V - Z\,I - Z''\,I - \dfrac{U}{j\omega\,\mathbf{C}} = 0 \end{array}\right. \quad \text{Accoppiamento a capacità elettromeccanica.}$$

Nelle (3), (4) le $\mathcal{F}, V$ rappresentano rispettivamente la forza vibromotrice ed elettromotrice esterna: quando la trasformazione di energia avviene nel senso meccanico-elettrico (microfono) la V è generalmente nulla, mentre se avviene nel senso contrario (altoparlante) si annulla la $\mathcal{F}$. Le $Z'', \mathcal{Z}''$ rappresentano a loro volta eventuali impedenze esterne di carico. Per quanto riguarda i segni dei vari termini essi sono relativi alla convenzione, analoga a quella dei trasformatori elettrici, che una corrente positiva dia luogo ad una forza vibromotrice negativa. Se si fa la convenzione opposta, soltanto i termini misti cambiano di segno in tutte le equazioni; la variazione di segno che si verifica tra $\mathbf{R}\,I$ ed $\mathbf{R}\,U$ nelle (3), è dunque indipendente dalla convenzione sui riferimenti elettrico e meccanico, ed indica una differenza essenziale tra gli accoppiamenti a resistenza e quelli a capacità poichè nelle (4) i termini di accoppiamento $I/j\omega\,\mathbf{C}$ e $U/j\omega\,\mathbf{C}$ hanno entrambi lo stesso segno. Se si analizzano i fenomeni di induzione elettromagnetica ed elettrostatica utilizzati nei due tipi di accoppiamento si può giustificare la differenza riscontrata, osservando che essa non si verificherebbe se nell'accoppiamento a resistenza fosse possibile utilizzare direttamente le variazioni di flusso magnetico, o meglio le corrispondenti forze magnetomotrici prodotte dal moto del diaframma, come nell'accoppiamento a capacità si utilizzano le correnti elettriche di carica e scarica, e le relative f. e. m. Invece nell'accoppiamento a resistenza è necessario servirsi della f. e. m. indotta in un circuito elettrico concatenato, a quale, per la legge di Lenz, è tale da

opporsi alla causa che la produce, e, secondo la convenzione fatta, ha quindi segno positivo nella seconda delle (3) [5].

In molte applicazioni tecniche nel campo dell'elettroacustica è conveniente introdurre al posto della forza vibromotrice $\mathfrak{F}$ la pressione P, ed al posto delle velocità U la portata acustica Ψ; in luogo delle impedenze meccaniche $\mathfrak{Z} = \mathfrak{F}/U$ si considerano allora le impedenze acustiche $\mathfrak{Z}_A = P/\Psi$.

Per passare dall'uno all'altro gruppo di grandezze basta moltiplicare la P e dividere la Ψ per una *superficie equivalente* S, che, nel caso di un diaframma vibrante rigidamente, coincide con la superficie geometrica, e negli altri casi è data da questa moltiplicata per un *coefficiente di forma* minore di uno. In base alle relazioni precedenti è inoltre:

$$S^2 \mathfrak{Z}_A = \mathfrak{Z}. \tag{5}$$

Accanto alle impedenze miste elettromeccaniche è quindi talvolta conveniente introdurre analoghe impedenze miste elettroacustiche $\mathbf{Z}_A$, definite come rapporto tra una pressione ed una corrente, ovvero tra una f. e. m. ed una portata acustica. Valgono per esse tutti i risultati relativi alle $\mathbf{Z}$, dalle quali si ricavano immediatamente facendo uso della relazione:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}}{S}. \tag{6}$$

3. Accoppiamento ad impedenza elettromeccanica e teorema di reciprocità. – Le considerazioni precedenti relative ai casi semplici nei quali la $\mathbf{Z}$ si riduce ad una resistenza od ad una reattanza capaciva possono essere estese al caso più generale in cui tra il sistema meccanico ed il circuito elettrico sussistano contemporaneamente accoppiamenti diversi. Per riferirsi ad un modello fisico concreto si può pensare ad un ricevitore telefonico, i poli ed il diaframma vibrante del quale siano collegati al circuito elettrico in modo da ottenere, oltre all'accoppiamento elettromagnetico, anche un accoppiamento elettrostatico.

Siccome i termini di accoppiamento si sommano, le (3), (4) possono essere scritte nella seguente forma generale, valevole per tutti i casi di accoppiamento multiplo:

$$\begin{cases} \mathfrak{F} - \mathfrak{Z} U - \mathfrak{Z}'' U - \mathbf{Z} I = 0 \\ V - Z I - Z'' I + \mathbf{Z}^* U = 0 \end{cases} \tag{7}$$

dove con $\mathbf{Z}^*$ si indica il coniugato di $\mathbf{Z}$.

(5) Come sarà più diffusamente illustrato nella successiva Nota di I. Barducci la variazione di segno nei termini misti delle (3) è inoltre resa necessaria dalla condizione che le impedenze dinamiche trasferite dal sistema meccanico al circuito elettrico, e viceversa, abbiamo una componente reale positiva, poichè si tratta di trasduttori passivi.

Dalla (7) si vede che i sistemi elettromeccanici considerati soddisfano ad un *teorema di reciprocità* [6], che può essere enunciato nel modo seguente:

in un sistema elettromeccanico una corrente produce una forza vibromotrice numericamente eguale (in un sistema di unità coerenti), al coniugato cambiato di segno della f. e. m. prodotta da una velocità numericamente eguale alla corrente.

La maggiore complicazione dell'enunciato rispetto a quello che vale quando intervengono sole grandezze meccaniche, o sole grandezze elettriche, è dovuta al fatto che le resistenze elettromeccaniche di accoppiamento **R** non possono essere considerate, analogamente alle resistenze elettriche e meccaniche, come derivate parziali di una funzione dissipativa, del tipo della F di Rayleigh, poichè in tal caso per le (3) si avrebbe:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U \, \partial I} = - \frac{\partial^2 F}{\partial I \, \partial U}$$

D'altronde le **R** non corrispondono ad una dissipazione, ma soltanto ad uno scambio di energia tra il sistema meccanico ed il circuito elettrico, il che dà una ulteriore giustificazione della variazione di segno osservata nelle (3) [7].

Gli accoppiamenti sinora considerati sono accoppiamenti *ideali*; in realtà tutti gli accoppiamenti sono accompagnati da fenomeni parassiti che, diminuendone l'efficacia possono essere considerati come *controaccoppiamenti*. Tali fenomeni sono principalmente dovuti alle perdite dielettriche, all'isteresi magnetica, alle correnti parassite ecc., ed hanno una particolare importanza per alcuni accoppiamenti a resistenza, come quello a ferro mobile.

Per tener conto di questi fenomeni, che modificano solo leggermente i risultati della teoria sinora svolta, basta osservare che l'angolo di fase tra forza e corrente non è più 0 per gli accoppiamenti a resistenza, nè $\pi/2$ per quelli a capacità. Le equazioni (7) conservano quindi la loro validità purchè si moltiplichino la resistenza **R** e la reattanza di accoppiamento **X** per due

(6) Vedi in proposito L. L. Foldy, H. Primakoff, *A general theory of Passive Linear electroacoustic Transducers and the Electroacoustic Reciprocity Theorem.* « J. A. S. A. », vol. 17, 1945, p. 109.

(7) Mentre era in corso la stampa della presente Nota, è giunta notizia del lavoro di E. M. McMillan dal titolo: *Violation of the reciprocity theorem in linear passive electromechanical systems*, pubblicato su « J. A. S. A. », vol. 18, ottobre 1946, p. 344, nel quale si osserva che il teorema di reciprocità, nel suo enunciato classico, non è generalmente valido anche per i trasduttori elettromeccanici; non è tuttavia prospettata la possibilità di un enunciato più generale, che sia valido anche per essi. Per quanto riguarda gli *one way transducers* considerati da McMillan, va osservato che essi sono trasduttori elettrico-meccanico-elettrici che non rientrano nella categoria dei trasduttori elettromeccanici a due gradi di libertà ai quali si riferisce la presente Nota.

coefficienti $e^{j\vartheta_1}$, $e^{j\vartheta_2}$ che tengano conto di questa alterazione di fase. La $\mathbf{Z}^*$ non è più allora la coniugata di $\mathbf{Z}$, ma è data da:

$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{R}\, e^{j\vartheta_1} - j\mathbf{X}\, e^{j\vartheta_2}. \tag{8}$$

4. Conclusioni. – Nei trasduttori elettromeccanici è opportuno considerare il rapporto tra la forza vibromotrice generata e la corrente che la produce come una impedenza elettromeccanica di accoppiamento; si verifica che, invertendo il funzionamento del trasduttore la f. e. m. generata è data dalla velocità di vibrazione moltiplicata per il coniugato dell'impedenza di accoppiamento cambiato di segno. È possibile rappresentare mediante un solo sistema di equazioni il funzionamento di qualsiasi tipo di trasduttore e si dimostra l'esistenza di un teorema di reciprocità che si riduce in alcuni casi particolari a quello di Rayleigh.

Ai diversi tipi di accoppiamento adoperati nella tecnica corrispondono due soli tipi di impedenze elettromeccaniche: resistiva pura per gli accoppiamenti in cui interviene il campo magnetico e capacitiva per quelli in cui interviene il campo elettrico.

Chimica. — *Sulle lastre fotografiche per l'ultravioletto estremo* [1]. Nota di L. Mazza, presentata [2] dal Corrisp. L. Rolla.

È ben noto che l'elevato assorbimento della gelatina per le radiazioni ultraviolette limita fortemente la sensibilità delle ordinarie lastre fotografiche per le lunghezze d'onda minori di 2200 A.

Schumann ha mostrato per la prima volta che il bromuro d'argento da solo ed anche le emulsioni fotografiche povere di gelatina presentano una buona sensibilità anche per l'ultravioletto estremo [3].

Le lastre fotografiche preparate secondo il metodo di Schumann permettono di registrare gli spettri nelle regioni Lyman e di Millikan [4] e sono anche vantaggiose nella spettrografia di massa (Aston) e per le ricerche con i raggi elettronici fra 25 e 5 e–volt. Le lastre ordinarie invece, a causa dell'assorbimento della gelatina, già a 2300 A mostrano una fortissima diminuzione di sensibilità e a 2000 A, ossia in un campo in cui gli spettrografi con ottica di quarzo sono perfettamente efficienti, il tempo di esposizione diviene circa 200 volte maggiore di quello normale; a 1800 A non è più possibile registrare neanche le righe più intense.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica dell'Università di Genova.

(2) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

(3) V. Schumann, «Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss.», Wien, *102* A, II, a pp. 415–475 e pp. 994–1024 (1893); V. Schumann, «Ann. d. Physik.» IV, *5*, pp. 349–374 (1901).

(4) M. Söderman, «Zeitschr. f. Physik.», *67*, pp. 790–793 (1931).

Duclaux e Jeantet [5], V. Henry e Th. Lyman [6] hanno mostrato che le lastre ordinarie possono essere sensibilizzate per l'estremo ultravioletto ed anche per gli elettroni lenti spalmandole con una sostanza fluorescente. Come sostanza fluorescente si impiega di solito l'olio di paraffina preferibilmente disciolto in benzolo od anche, in base a ricerche più recenti, il salicilato sodico in soluzione alcoolica [7].

In varie occasioni ho avuta la possibilità di preparare e di confrontare lastre tipo Schumann e lastre sensibilizzate con sostanze fluorescenti e ho potuto verificare che le prime, quando siano preparate con i necessari accorgimenti danno risultati di gran lunga superiori a quelli che si ottengono con il metodo di sensibilizzazione con sostanze fluorescenti.

Le lastre tipo Schumann sono di difficile preparazione e presentano spesso alcuni difetti quali la presenza di velo e talvolta anche di macchie e la piccola durata di conservazione. Inoltre il loro uso è molto delicato a causa della piccola aderenza dello strato sensibile di bromuro d'argento.

Anche le lastre preparate industrialmente presentano questi difetti, anzi essi sono accentuati dalla difficoltà di poter disporre di prodotti freschi, poichè la loro conservabilità è assai limitata.

Alcuni perfezionamenti alle lastre Schumann sono dovuti a Hopfield e Appleyard [8] e a Knauss e Zumstein [9]. Il metodo di Hopfield consiste nell'impiegare come supporto per l'emulsione Schumann delle lastre ordinarie fissate in iposolfito e lavate in modo da realizzare una specie di sottostrato.

Il metodo di Knauss consiste invece nel precipitare un'emulsione Schumann direttamente sullo strato sensibile di lastre ordinarie in modo da ottenere lastre non solo sensibili all'ultravioletto, ma anche al visibile.

Il metodo che viene qui brevemente descritto riunisce i vantaggi dei suddetti metodi e ne realizza anche dei nuovi.

Le lastre da me studiate sono formate da quattro strati il più esterno dei quali viene applicato dopo che la lastra è stata sviluppata e fissata. La lastra non impressionata è in realtà formata da tre strati, di cui i due più esterni sono fotosensibili. Lo strato più interno dello spessore di $2 \div 3\ \mu$ è costituito di gelatina addizionata di una piccola quantità di allume di cromo e forma un vero e proprio sottostrato destinato ad aumentare l'adesione dello strato sensibile. Al di sopra di questo strato ve ne è un altro sensibile depositato da una emulsione alla Schumann a grana fina e su di esso un terzo strato precipitato da una emulsione a grana più grossa e più sensibile. Per ottenere questi strati si lasciano depositare in tempi successivi da

(5) « Journ. de phys. », *2*, p. 156 (1921).

(6) « Nature », *112*, 202 (1923).

(7) R. Montagne e R. Richard, « C. R. Acad. Sc. Paris », *202*, pp. 477–479 (1936); Tien. Kiu, ibid, *203*, p. 1144 (1936).

(8) « J. optical Soc. Am. », *22*, 488–495 (1932); « J. A. C. S. », *26*, p. 5858 (1932).

(9) « Phys. Rev. », *45*, p. 124 (1934).

emulsioni tipo Schumann maturate a temperatura e tempi differenti e diluite in molta acqua i granuli di alogenuro di argento sulle lastre di vetro già sottostratate e disposte orizzontalmente su una adatta bacinella munita di fondo piano perfettamente livellato. Le durate di deposizione più appropriate sono di circa 12 ore e 6 ore rispettivamente. Le lastre dopo essiccazione all'oscuro in abiente asciutto e privo di polvere sono pronte per l'uso.

Il quarto strato destinato a fissare e salvare da possibili guasti gli strati di argento ridotto viene applicato dopo avere sviluppato, fissato e lavato la negativa. Esso è costituito, analogamente al primo strato, da gelatina con allume di cromo.

Alcuni perfezionamenti sono stati apportati nella preparazione dell'emulsione in confronto a quella di Schumann. In primo luogo l'aggiunta di 0,75 gr. di ioduro potassico alla prescrizione di Schumann [10] allo scopo di diminuire la velocità di maturazione e di fornire un'emulsione più sensibile. Inoltre la maturazione dell'emulsione a grana fina viene effettuata riscaldando a 55° per circa 30^m, mentre l'emulsione per lo strato più esterno viene maturata a 65° per circa 40^m in modo da ottenere un preparato a grana più grossa e più sensibile. La durata e eventualmente la temperatura di maturazione deve essere diminuita od aumentata (specialmente per l'emulsione a grana grossa) per via d'esperienza a seconda del tipo di gelatina fotografica di cui si dispone, in modo da evitare la formazione di un velo apprezzabile.

L'emulsione può anche essere sensibilizzata [11] per rendere le lastre sensibili dalla più piccola lunghezza d'onda dell'ultravioletto fino al rosso ed eventualmente all'infrarosso mediante gli opportuni e ben noti sensibilizzatori cromatici (pinaflavolo, pinacianolo, dicianina ecc.).

Le lastre preparate nel modo suddetto oltre ad una grande sensibilità (molto superiore a quella che si ottiene con la prescrizione di Schumann) presentano il vantaggio, in confronto alle lastre con strato fluorescente, di dare immagini ricche di dettaglio e prive di alone in modo da poter registrare con la massima fedeltà anche le righe più sottili.

Anche il γ risulta assai corretto e le lastre risultano molto adatte per la fotometria fotografica. La strato esterno ha infine un'azione protettiva notevolissima, talchè è possibile adoperare le lastre per la misura al comparatore, al microfotometro e per le eventuali riproduzioni con la stessa facilità delle lastre ordinarie.

(10) « Ann. d. Physik. » IV, 5, p. 349 (1901).
(11) Preferibilmente lo strato interno.

Geologia. — *Nuova formazione pleistocenica di facies limnica presso Rignano Flaminio (Tuscia Romana)* [1]. Nota di C. Maxia, presentata [2] dal Corrisp. G. Checchia-Rispoli.

In una recente Nota [3] è fatto cenno del rinvenimento, nell'estrema parte settentrionale della provincia di Roma, di un nuovo affioramento di strati di *facies* limnica del Quaternario antico. Tale formazione, prevalentemente costituita da rocce clastiche ed organogene con tufi leucotefritici intercalati, si sviluppa ad oriente di Rignano Flaminio [4], sul fondovalle del Fosso del Fontanile e dei suoi affluenti di destra, fino all'altezza della chie-

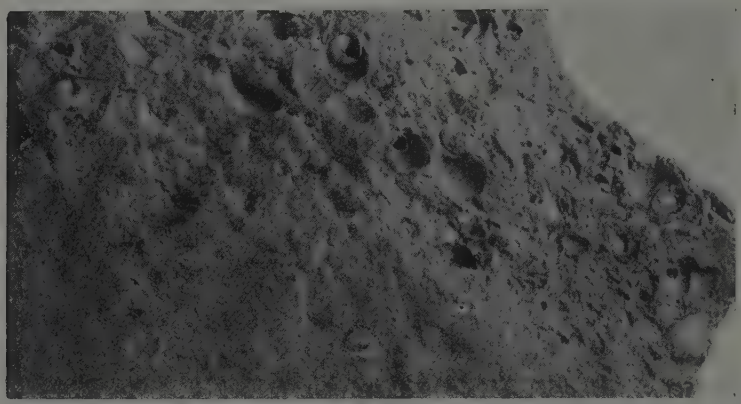


Fig. 1. - Marna a bitinie, in località S. Abbondio.

setta di S. Abbondio; di quelli di sinistra, tra l'abitato e quest'ultima località; da dove, compresa tra sabbie plioceniche alla base e tufi vulsinitici in alto, prosegue, a notevole altezza dal fondovalle, sul versante di destra del Fosso del Fontanile, per continuare quindi, con spessore ridotto, in entrambi i versanti, dove il torrente assume la direzione NO–SE.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo-paleontologico dell'Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

(3) C. Maxia, *Osservazioni geologiche sui territori di Civitella S. Paolo e di Fiano Romano*. «Boll. R. Uff. geol. d'Italia», XLIX, Roma, 1946.

(4) Tavoletta al 25.000 di «Rignano Flaminio», del Foglio n. 144 (Palombara Sabina) della Carta d'Italia al 100.000 dell'I. G. M.

La massima altezza raggiunta dalla formazione lacustre è sui m. 200, quella minima, sui m. 140; e quantunque gli strati siano leggermente dislocati per frattura, poichè essi si mantengono in giacitura suborizzontale, è facile calcolarne la potenza sui m. 60 circa.

Ecco intanto una sommaria descrizione della serie limnica di Rignano Flaminio.

Lungo i dirupati fianchi del Fosso del Fontanile nel tratto che corre dalla q. 171 alla chiesetta di S. Abbondio, come anche risalendo la mulattiera a NE di quest'ultima località, affiorano strati di marne e sabbie argillose alternate con tufi gialli terrosi, friabili, talora pisolitici. La base di questo complesso, costituita da sedimenti marini pliocenici, è generalmente mascherata dai detriti che scendono dall'alto, mentre è completamente osservabile sul versante meridionale della R.ne Grotta del Pero.

Le marne ricompaiono presso il Fontanile ad est dell'abitato (q. 173), dove si presentano in strati dello spessore di cm. 40–50 ognuno, di colore grigio plumbeo, compatte, semitenere oppure indurite, nelle quali ho potuto riscontrare soltanto rari ostracodi del gen. *Candona* e qualche gasteropoda a guscio sottile d'acqua dolce e continentale. Questa roccia riaffiora lungo l'alveo del Fosso di S. Abbondio, che scende dai SS. Martiri, sormontata dai tufi pisolitici, in cui sono contenuti, oltre scarsi cristallini tabulari di sanidino, anche ciottoletti di calcari retico–liasici.

Compreso nelle marne, e talora soprastante ad uno straterello discontinuo di scoriette color marrone poco cementate, si ha un banco, potente circa un metro, di un tufo litoide grigio chiaro, compatto, con piccole cavità tappezzate di croste derivate dall'alterazione di pomicette giallicce, e contenente rare pisoliti e cristallini di augite e di sanidino.

Si tratta di una varietà dei tufi leucotefritici dello Scherillo[5], e precisamente di quella già conosciuta nella letteratura geologica romana, col termine improprio di « peperino », che ha preso il nome dall'omonima località sulla via Flaminia e che rientra, sui fogli geologici al 100.000[6], nella leggenda: « Tufi litoidi a elementi in gran parte trachitici ».

Questo tufo appare anche, tra le marne inferiori, al guado del torrente alla q. 171 e sulla mulattiera a NE di S. Abbondio.

Le marne soprastanti al « peperino » sono ora tenere, come quelle inferiori, ora compatte, con grossi inclusi, pure marnosi, leggermente sabbiosi, induriti, talora passanti a straterelli lastroidi. In queste rocce sono anche intercalati strati sabbiosi poco calcariferi, altri di tripoli marnosi fogliettati, con qualche *Corbicula fluminalis* Mueller, piccole lenti di travertino o di calcari alabastroidi; inoltre, uno strato, potente circa cm. 30, di

(5) A. Scherillo, *Studio su alcuni tufi gialli delle regioni Sabazia e Cimina.* « Per. di Miner. », XI, Roma, 1940.

(6) Fogli al 100.000 del R. Ufficio geologico n. 143 (Bracciano) e n. 144 (Palombara Sabina).

una marna calcarea bianca, poco consistente o addirittura quasi incoerente talora così zeppa di conchigliette di bitinie, tanto da formare una vera « lumachella », specialmente nei pressi di S. Abbondio e di q. 171.

La restante parte superiore della serie limno-piroclastica si può seguire nel ricordato guado della q. 171, sotto la R.ne Maderno, sui versanti del Fosso di S. Abbondio e lungo la mulattiera tra il Fontanile e Rignano. Si ha di nuovo un'alternanza di marne compatte, di marne tripolacee fogliettate e di tufi color paglierino, ora pisolitici ora pomicei, litoidi, terrosi o cineritici; in cui macroscopicamente si distinguono cristallini di pirosseni, di biotite, di sanidino e rari ciottoletti calcarei mesozoici. Particolarmente interessanti: uno strato, spesso cm. 40–60, di pomici bianche, le quali possono raggiungere il diametro di cm. 5–6 ognuna; straterelli di tripoli, alternati a marne fogliettate o nodulari, dei quali, uno, spesso cm. 30, ricoperto da uno straterello di torba di cm. 5 al guado sotto la R.ne Maderno: ciò che sta ad indicare una fase d'acqua limpida del bacino di sedimentazione. Fra i tufi gialli, a volte conglomeratici o tal altra a grana fina, si notano anche, allineate oppure sparse nella massa, piccole concentrazioni di scoriette di lancio, di colore marrone scuro, che ricordano le « ferrugine », recentemente segnalate presso Magliano Romano (7).

Gli straterelli marnosi sono più o meno sabbiosi per la presenza di frammentini di elementi vulcanici, specialmente di pirosseni e di lava molto alterata. Il tripoli è di colore gialliccio, leggero e sottilmente fogliettato, friabile, un po' ruvido al tatto; contiene delicate valve di *Corbicula fluminalis* e conchigliette, pure molto fragili, di *Bythinia tentaculata* L. Queste sono facilmente riconoscibili per i giri ventricosi, ornati da sottilissime strie avvicinatissime, flessuose, con rare pieghette normali, il peristoma in risalto con pieghette sulla parte interna (cfr. E. Clerici, *Corbic. flumin. d. dint. di Roma;* tav. IV, fig. 27; « Boll. Soc. geol. it. », 1888).

Il prof. V. Zanon ha determinato le seguenti specie di diatomee nei tripoli alternati alle marne sottostanti al banco del tufo « peperinico », nelle marne a bitinie presso S. Abbondio e nella diatomite sottostante allo straterello di torba della q. 171:

Amphora ovalis Ktz., *A. ovalis*, var. *pediculus* Ktz., *Cocconeis placentula* Ehr., *Cyclotella ocellata* Pant., *Cymbella cymbiformis* Ktz., *C. ventricosa* Ktz., *Epithemia Muelleri* Fricke, *E. sorex* Ktz., *Gomphonema parvulum* Ktz., *Navicula cryptocephala* var. *veneta* (Ktz.) Grun., *N. cuspidata* Ktz., *N. radiosa* Ktz., *N. oblonga* Ktz., *Nitzschia denticula* Grun., *N. sinuata* Sm., var. *tabellaria* Grun., *Rhopalodia gibba* (Ehr.) Mueller; le seguenti, esclusivamente nel tripoli al guado di q. 171: *Achnanthes minutissima* Ktz., *A. coffaeiformis* Ag., *Anomoeoneis sphaerophora* (Ktz) Pftz., *Caloneis silicula* Cl., *Campylodiscus clypeus*

(7) A. Ducci, *Il centro eruttivo del M. Maggiore e alcune sue particolari facies laviche tufacee.* « Boll. R. Uff. geol. d'It. », LXIX, Roma, 1946.

Ehr., *Cyclotella comensis* Grun., *Cymbella aequalis* W. Sm., *C. austriaca* Grun., *C. amphicephala*, var. *hericina* Cl., *C. microcephala* Grun., *C. parva* (Sm) Cl., *Denticula elegans* Ktz., *Diploneis ovalis* Cl., *Epithemia argus* Ktz., *E. zebra* (Ehr.) Ktz., *Fragilaria construens* (Ehr.) Grun., *F. intermedia* Grun., *F. pinnata* Ehr., *Gomphonema bohemicum* Reich e Fricke, *G. olivaceum* Ktz., var. *minutissima* Hust., *G. olivaceum*, var. *calcarea* Cl., *Mastogloia Smithii* Cl., var. *lacustris* Grun., *M. elliptica* Ag., var. *Densei* Grun. *Navicula cryptocephala* Ktz., var. *intermedia* Grun., *N. rhynchocephala* Ktz., *Nitzschia amphibia* Grun., *N. apiculata* (Greg.) Grun., *N. fonticola* Grun., *Pinnularia major* Ktz., *P. viridis* (Nitz) Ehr., *Stephanodiscus astraea*, var. *minutula* Grun., *Surirella ovata* Ktz., *S. striatula* Turpin, *Synedra ulna* (Nitz.) Ehr., *S. Vaucheriae* Ktz.; le seguenti, esclusivamente nelle marne a bitinie di S. Abbondio: *Amphora perpusilla* Grun., *Anomoeoneis sphaerophora* (Ktz.) Pftz., *Caloneis silicula* Cl., *Epithemia turgida* Ktz., var. *granulata* Grun., *E. zebra* (Ehr.) Ktz., *Cymatopleura solea* W. Sm., *Fragilaria construens* (Ehr.) Grun., *F. pinnata* Ehr., *Pinnularia viridis* Ehr., var. *sudetica* Hust., *Stauroneis salina* W. Sn., e, finalmente, le seguenti, presenti nelle marne tra S. Abbondio e il Fontanile: *Diploneis ovalis* Cl., *D. ovalis*, var. *oblongella* Cl., *Epithemia argus* Ktz., *Mastogloia Smithii*, var. *lacustris* Grun., *M. elliptica* Ag., var. *Dansei* Grun., *Navicula bacillum* Ehr., *N. cryptocephala* Ktz.

Complessivamente quindi sessantatrè specie e varietà di diatomee, di cui qualcuna assai frequente. Le diatomee delle marne a bitinie di S. Abbondio sono quasi tutte frammentarie, ciò che indica materiale di trasporto a mezzo di torrenti. I campioni tripolacei offrono invece esemplari intieri, quantunque rappresentati da un minor numero di specie, ma abbastanza frequenti; rarissime le spicule di spongiari, le crisostomacee e la selce di graminacee. In tutti i campioni sono scarse le diatomee che si adattano ad acque salmastre: nella maggioranza si tratta di forme d'acqua dolce, con frequenti specie proprie dei laghi, sia di fondo costiero, planctoniche, che epifite di piante galleggianti o sommerse.

Sopra i sedimenti limnici e le rocce piroclastiche intercalate, le quali sono assimilabili a quelle tufacee leucotefritiche di Morlupo e di Castelnuovo di Porto [8], segue un altro complesso di tufi leggermente immerso a S–SO, culminate sulle appiattite sommità della R.ne Maderno e della chiesetta della Madonna delle Grazie. Queste rocce, per la loro composizione mineralogica e per la posizione stratigrafica, si possono scomporre in due gruppi: tufi vulsinitici e t. leucititici.

Io non posso però escludere che questa formazione tufacea sia separabile, come ambiente di sedimentazione, da quella lacustre testè descritta: ma penso che anche i tufi vulsinitici e leucititici si siano formati in seno ad un

(8) A. Scherillo, *Studi su alcuni tufi gialli della regione Sabazia orientale.* «Per. Miner.», XII, Roma, 1941.

bacino d'acqua dolce e ferma, come lo farebbe supporre, fra l'altro, la loro regolare stratificazione e la frequente presenza di inclusi legnosi.

Faccio ora seguire una breve descrizione di queste rocce, la cui successione si osserva molto bene salendo verso la R.ne Maderno dopo il guado della q. 171. Dapprima s'incontra uno straterello di ceneri vulcaniche nerastre e successivamente un grosso banco, potente una decina di metri, di un tufo nerastro, disfatto, ma nel quale non è difficile riconoscere il prodotto dell'alterazione dei caratteristici « tufi a grosse pomici nere » del 100.000 dell'Ufficio geologico[9], che sono vulsinitici[10]. Nelle pomici, che raggiungono dimensioni anche di 8–10 cm., si notano cristallini tabulari di sanidino, molto freschi, pochi pirosseni e leuciti alterate in grumi di sostanza biancastra, farinosa. Si passa, quindi, a un'alternanza di tufi terrosi, di colore giallastro, bene stratificati in grossi banchi e a tufi sabbioso–argillosi, contenenti abbondanti cristallini di leucite e di biotite e talora numerosi fustícini, probabilmente di *Taxus bacata* L.

Segue un conglomerato vulcanico poco cementato, di colore marrone, con cristalli di augite neri e verdastri, generalmente in frammenti, di leucite bianchiccia e pezzetti di leucitite in gran parte arrotondati. Componenti accessori sono scoriette nerastre e, localmente, anche frammentini ossei. Ricordo che dentro questo tufo, nella R.ne Maderno, nel corrente anno, sono stati rinvenuti resti di *Elephas antiquus* Falc. e di *Bos*[11].

Finalmente questa serie piroclastica è chiusa da grossi banchi di tufi di colore grigio, a punteggiature bianche di leucite polverulenta, di cristallini di augite, lunghi anche un centimetro, a spigoli ancora bene conservati, sebbene frequentemente spezzati.

La tessitura della roccia è sottilmente stratificata, quasi scistosa. Sembrerebbe non esservi dubbio sull'appartenenza di quest'ultimo materiale piroclastico ai tipici tufi leucititici « granulari » della Campagna romana[12]. A sud di Rignano, sopra questa roccia, si notano frammenti scoriacei e pomicei.

Tenendo conto della giacitura delle lave e dei tufi delle località prossime a sud di Rignano, la successione stratigrafica della serie quaternaria del settore Rignano–Castelnuovo di Porto sarebbe la seguente dall'alto verso il basso:

(9) Fogli geologici n. 143 e n. 144.

(10) A. Scherillo, *I tufi litoidi a scorie nere delle regioni Sabazia e Cimina.* « Per. Miner. », XI Roma, 1940.

(11) C. Maxia e A. Ducci, *Contributo alla geologia di Rignano Flaminio e notizie sul rinvenimento di resti fossili elefantini.* Comunic. fatta alla Soc. geol. ital. nella seduta del 6 aprile 1946.

(12) Per la nomenclatura adottata dai geologi romani per le rocce piroclastiche del Lazio vedi i lavori di Brocchi, Verri, Meli, Clerici, De Angelis–D'Ossat, ecc.

Classificazione della letteratura geologica più recente:	Corrispondente classificazione dei fogli al 100.000 dell'Ufficio geologico
5) Tufi leucititici (t. terroso, t. marrone, t. granulari, ecc., = t. «antichi» della Campagna romana).	Ceneri, scorie, lapilli (*v*); t. basaltici e leucitici incoerenti o litoidi (*tb*).
4) Tufi vulsinitici a pomici nere.	Tufi in gran parte litoidi con grosse pomici nere (*tp*).
3) Tufi gialli, leucotefritici e vicoitici (= t. giallo litoide e t. pisolitico di vari autori).	Tufi litoidi o terrosi a elementi in gran parte trachitici (*tt*).
3) Alternanze di rocce clastiche ed organogene di *facies* limnica, in tutto lo spessore del n. 3.	Non indicate sul 100.000.
3) Tufo leucotefritico: csd. «tufo peperinico grigio» di alcuni autori.	Tufi litoidi a elementi in gran parte trachitici (*t't*).
2) Leucotefrite di Castelnuovo di Porto e vulsinite o vicoite di Morlupo (di Scherillo), che hanno attraversato i	Non indicate sul 100.000.
1) Tufi leucotefritici di Castelnuovo di Porto.	Tufi litoidi a elementi in gran parte trachitici (*t't*).

Imbasamento pliocenico di sabbie marnose marine.

Sulla base delle sintesi sul Pliocene–quaternario della Campagna romana, riconfermate in numerosi recenti lavori di G. De Angelis–D'Ossat, non è difficile riconoscere nella descritta formazione limnica di Rignano, tenendo anche conto dei tufi vulsinitici e leucititici, l'equivalente stratigrafico del complesso orizzonte del « Maremmano », compreso tra le ultime deposizioni marine della destra del Tevere presso Roma, contenenti la ben nota « Fauna mariana » [13] (Calabriano), alla base, e i giacimenti di « pozzolana rossa », superiormente, e però corrispondente alla formazione contenente i due più antichi orizzonti diatomeiferi distinti dal Clerici a sud di Roma [14].

Riguardo all'estensione del bacino d'acqua dolce di Rignano si può dire che i suoi limiti verso nord sono definiti dall'appoggio sulle rocce plioceniche che si vedono affiorare, profondamente erose fino all'imbasamento liasico, lungo i fossi delle Caselle e del Pescarello; il graduale assottigliamento

(13) Dal Monte Mario, ad ovest di Roma.

(14) E. Clerici, *Contributo alla conoscenza dei capisaldi per la geologia dei dintorni di Roma.* «Boll. Soc. geol. it.», XX, 1901.

della formazione limnica verso est permette di indicare una costa che forse si arrestava alla dorsale pliocenica, stretta ed allungata, discontinuamente affiorante sulle rive del Fosso di S. Martino, fino oltre Capena; anche verso ovest le rive di questo bacino d'acqua dolce dovevano essere della stessa natura, sabbioso-argillosa pliocenica, e non molto distanti da Rignano. Più imprecisi sono i limiti meridionali data la presenza di altre formazioni leucotefritico-diatomeifere (Riano, ecc.) interrotte da lembi pliocenici che si abbassano sempre più verso sud. Gli scarsi depositi di calcari di origine chimica fanno comunque separare il nostro bacino da quelli di Borghetto e di Fiano Romano. Sono notevoli invece le analogie che esso presenta con la formazione indicata in località Peperino, al sesto chilometro della Via Flaminia, dove il tufo litoide leucotefritico giace sulle sabbie marnose contenenti molluschi terrestri e d'acqua dolce, e con quella tripolaceo-tufacea leucotefritica in località detta «Il Cristo», presso Riano. Ricordo anche che nei tufi «peperinici» della Valchetta e del Vescovo il Meli aveva trovato fossili d'acqua dolce: *Limnaea palustris* Muell., *L. stagnalis* L., *Planorbis umbilicatus* Muell., *Unio sinuatus* Lk. e il Clerici una mascella di *Cervus capreolus* L., foglie e fusti di piante, che gli permisero di definire questa formazione di *facies* palustre [15].

Probabilmente il bacino di acqua dolce di Rignano apparteneva a quella serie di laghetti o di stagni che nel Quaternario antico erano scaglionati, in direzione N-S o NO-SE, nel territorio a nord di Roma, e che secondo il Verri [16] e il De Angelis-D'Ossat [17] si estendeva, in forma grossolanamente ellittica, dai dintorni di Roma fino ad oltre Civita Castellana.

Per la ricostruzione paleogeografica di questi bacini d'acqua dolce, sarebbe necessario, oltre ad un accurato rilevamento di tutta la zona, anche la costruzione di una serie di profili biochimici delle formazioni lacustri.

Si potrebbe infine concludere, sulla base dell'*habitat* e dello stato di conservazione dei fossili, specialmente diatomee ed ostracodi del gen. *Candona*, che il bacino di Rignano sia stato uno specchio d'acqua dolce, tranquillo, periodicamente collegato con bacini attigui, con alternate fasi di acque basse, palustri, per la presenza di scarse diatomee di specie epifite. La disposizione a bacino dei sedimenti limnici di Rignano, nei quali è talvolta bene evidente la stratificazione incrociata e l'assottigliamento verso l'appoggio pliocenico, si può osservare nel Fosso di S. Abbondio, dove gli strati marnosi e tufacei sono immersi verso sud, cioè verso l'area centrale del lago.

(15) E. Clerici, *Sopra alcuni fossili recentemente trovati nel tufo grigio di Peperino presso Roma*. «Boll. Soc. geol. it.», VI, 1887.

(16) A. Verri, *Origine e trasformazione della Campagna romana*. «Boll. Soc. geol. it.», XXX, 1911.

(17) G. De Angelis-D'Ossat, *La spiaggia pliocenica sul versante occidentale dei monti Umbro-sabini*. «Atti Pont. Acc. Sc. N. Lincei», LXXXVI, 1933.

*
* *

L'affioramento di *facies* limnica di Rignano Flaminio è stato prima d'ora ascritto al Pliocene o non distinto dai tufi, finora ritenuti trachitici, nel foglio n. 143. È infatti nelle marne lacustri del «Fosso di Don Aurelio», presso la chiesetta di S. Abbondio, che erano stati rinvenuti i resti dell'elefante riferito al *primigenius* dal Ponzi [18] e illustrato successivamente dal Portis [19] con il nome di *E. antiquus* Falc. Ma è noto che il Ponzi sosteneva l'età pliocenica dei grossi vertebrati della Campagna romana.

Non può destare sorpresa se la formazione limnica di Rignano sia sfuggita anche agli accurati rilevatori dell'Ufficio geologico, or sono oltre sessant'anni fa. Ma bisogna tener presente che il complesso marno-sabbioso è molto scarso di fossilli macroscopici, se si eccettua il ricordato orizzonte di marne molto friabili a bitinie, che del resto, come i tripoli più o meno marnosi, affiorano soltanto per brevi tratti per essere spesso nascosti dai detriti e dalla vegetazione, la quale, nel secolo scorso, era più fitta di adesso. D'altra parte i caratteri litologici delle sabbie e delle argille quaternarie non sono molto lontani da quelli offerti dall'orizzonte più elevato della formazione pliocenica sabbioso-argillosa, la quale si scorge a NE di S. Abbondio dove la valle si allarga improvvisamente alla confluenza del Fosso delle Caselle.

Non mi consta neanche che la formazione tripolacea di Rignano sia stata oggetto di studi diatomologici, al contrario di quella coeva e prossima di Riano [20].

*
* *

La formazione lacustre di Rignano presenta qualche importanza anche dal punto di vista morfologico ed applicativo. Essa, costituita com'è da terreni plastici e friabili, mal si presta però per poterne ricavare sicuri elementi tettonici: sia in direzione, perchè in superficie questi sedimenti sono spianati o nascosti dal terreno agrario; sia in profondità, perché ricoperti lungo le incisioni da detriti. Qualche disturbo tettonico è però riscontrabile sul versante destro del ramo S-N del Fosso del Fontanile, il quale presenta un profilo asimmetrico dovuto al diverso grado di erosione dei suoi versanti: più dolce quello occidentale, molto dirupato l'altro, in conseguenza della

(18) G. Ponzi, *Sul rinvenimento di ossa elefantine sotto Rignano.* «Atti Acc. Pont. N. Lincei», XI, 1857-58. Vedi anche la fig. 1 della tav. fuori testo della nota: *Dell'Aniene e dei suoi relitti*, «Atti Pont. Acc. N. Lincei», XV, 1862.

(19) A. Portis, *Contributo alla storia fisica del bacino di Roma*, p. 268, tav. IV, fig. 33, Torino-Roma, 1893.

(20) Vedi: F. Bonetti, *Sopra il rinveninento di un materiale diatomeifero presso Riano.* «Atti Acc. Pont. Sc. N. Lincei», LXII, 1909.

diversa esposizione. Si tratta comunque di faglie a piccolo rigetto, dirette NE–SO, con immersione a NO o a SE; determinanti nell'insieme un duplice abbassamento a piccoli gradini verso NO e verso SE. Cosicchè anche i corsi d'acqua principali, d'impostazione recente, seguono in generale queste linee di frattura, oltre a quelle di direzione NO.

La tipica giovanile morfologia della Campagna romana offre nel settore di Rignano Flaminio particolari aspetti molto interessanti. Le appiattite sommità tufacee leucititiche si abbassano a gradini verso le valli, incise a cañon in corrispondenza degli strati marnosi e tufacei leucotefritici. Le rocce meno dure e più compatte, quali il macco pliocenico, alcune varietà di tufi leucotefritici e di marne lacustri, sporgono a guisa di cornici dai versanti collinosi, in cui sono disposti piccoli terrazzi d'erosione in corrispondenza dei tufi a pomici nere e di quelli più erodibili fra i leucititici.

La piccola morfologia è di tipo eolico. Nelle coperture tufacee leucititiche la corrosione produce cesellature, incavi sotto roccia e solchi (*jardangs*), allungati secondo la direzione dei venti dominanti, che sono quelli di NO e di SE. A questi si deve anche la scarsa vegetazione sulle sommità delle colline, presentanti talora estese superfici pelate, ricoperte da una sabbietta tenera e soffice.

Le argille soprastanti al « peperino » sopportano una falda acquifera di una certa importanza, la quale alimenta alcune sorgenti, di cui la più copiosa è quella detta « il Fontanile », situata a q. 173, sul torrente omonimo, sotto Rignano. Nei dintorni di quest'abitato sono riconoscibili altri due orizzonti sorgentiferi: uno, tra la formazione pliocenica ed i tufi vulsinitici; l'altro, fra quella lacustre–leucotefritica e i tufi vulsinitico-leucititici.

Alcuni saggi empirici eseguiti sulla marna argillosa del Fosso del Fontanile permettono di riconoscere ottimi requisiti per la confezione di laterizi e di terrecotte. Questa roccia è di composizione molto omogenea, avendo uno scheletro sabbioso scarso e molto fino; è purissima, non contenendo se non una moderata percentuale di carbonato di calcio disseminato nella massa. Percossa col martello si suddivide secondo piani di distacco netti e facili parallelamente alla stratificazione, in straterelli presentanti superfici liscie o delicatamente aspre, spessi 2–3 cm. Immersa nell'acqua la roccia produce un caratteristico rumore dovuto al rapido distacco di particelle provocato dal liquido, il quale la imbeve seguendo superfici concentriche di colore grigio verdastro, lasciando un nucleo completamente asciutto, di colore più chiaro. In queste condizioni si rompe facilmente secondo superfici concoidi, talora conoidi, lasciando impronte allungate, scavate oppure in rilievo. Impastata con acqua dà una massa attaccaticcia, morbida al tatto, molto plastica, che disseccata si restringe, ma che tuttavia, con aggiunta di altra acqua, è suscettibile di assumere altra forma.

Biologia (Biofisica). — *Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni.* Nota I di B. De Lerma, presentata [1] dal Corrisp. U. Pierantoni.

Si ritiene oggi, secondo ricerche degli ultimi anni, che nei batteri fotogeni il meccanismo della produzione di luce segua modalità sostanzialmente non diverse, dal punto di vista cinetico, da quelle relative alla reazione di luminescenza che si realizza *in vitro* con gli estratti di *Cypridina hilgendorfii*, il noto ostracode luminoso di cui a lungo si sono occupati Harvey e collaboratori.

È noto che la causa della luminescenza di tale ostracode e della folade fu ravvisata, sin dalle prime ricerche di Dubois e di Harvey, in una reazione di natura enzimatica tra due sostanze, *luciferina* e *luciferasi*, che ben presto furono estratte dagli organi luminosi dei detti animali: reazione le cui modalità quantitative e cinetiche sono state precisate in seguito, almeno per *Cypridina*, in tutta una serie di ricerche della scuola americana (Amberson, 1922; Stevens, 1927; Harvey e Snell, 1931; Anderson, 1933-37).

Sebbene l'impiego delle più varie tecniche (cfr. Korr, 1935) non abbia permesso a tutt'oggi di estrarre dai batteri analoghe sostanze, onde realizzarne *in vitro* la reazione e confrontarla con quella dell'ostracode, si ha ragione di ritenere che anche in essi il processo di fotogenesi, ugualmente di natura enzimatica, si svolga tra due molecole tuttora ignote – luciferina e luciferasi – ed ossigeno molecolare. Lo studio della fotogenesi batterica, senonchè, si presenta dal punto di vista fisiologico, oltre che biochimico, più complesso di quello degli ostracodi, per le interrelazioni che senza dubbio esistono tra fotogenesi e respirazione batterica, secondo è stato esaurientemente provato dalle ricerche di van Schouwenburg (1938). Egli considera infatti un'attività respiratoria globale dei fotobatteri (respiration of luminous bacteria summarized), intesa come funzione legata al consumo totale dell'ossigeno da parte del microrganismo. Tale consumo andrebbe ripartito in *Photobacterium phosphoreum* in misura del 76 % circa per la « haemin respiration », o respirazione interna propriamente detta, del 20 % per una « light respiration » e di un residuo di circa il 5 %, detto dall'Autore « rest respiration », di natura non ancora chiarita. In altri termini, esisterebbero nel plasma dei microrganismi luminosi, due differenti enzimi atti ad utilizzare l'ossigeno molecolare: uno, bloccabile elettivamente col cianuro di potassio, con l'anidride carbonica ecc., identificabile nel noto fermento respiratorio; l'altro poco sensibile al cianuro, almeno entro certi limiti, sensibilissimo per contro all'uretano di etile, che farebbe parte del siste-

(1) Nella seduta del 16 ottobre 1946.

ma bioluminescente. I due processi di « haemin respiration » e « light respiration » si svolgerebbero parallelamente, secondo un meccanismo che può così essere delineato: l'idrogeno, rimosso dai substrati nutritivi da un sistema deidrogenante, viene in parte trasferito al fermento respiratorio (come nelle cellule non luminose) ed in parte, utilizzato dal sistema enzimatico bioluminescente, si fissa su una sostanza che, con termine del tutto convenzionale, può essere denominata *luciferina*. Sulla molecola luciferinica si esercita poi l'ossidazione, sia direttamente da parte di ossigeno molecolare, sia in presenza di uno specifico enzima ossidante (detto *luciferasi*, per analogia con la corrispondente sostanza enzimatica di *Cypridina*); ma delle due maniere di ossidazione, la seconda soltanto, quella catalizzata dalla luciferasi, avverrebbe con emissione di luce.

L'esistenza nei batteri di una duplice maniera di ossidazione della luciferina – ammessa da van Schouwenburg per spiegare il comportamento delle culture di fronte all'aumentare della pressione e della percentuale di ossigeno ad esse somministrato – era già stata dimostrata da Anderson (1936) in esperienze *in vitro* su estratti di *Cypridina*. La luciferina di questo ostracode si ossida infatti con produzione di luce ed irreversibilmente, in presenza della luciferasi; ma dà luogo ad una reazione non luminosa e reversibile per diretta ossidazione con ossigeno molecolare. Giova ricordare a questo punto che Johnson (1939), studiando l'influenza che il glucosio esercita sulla durata della luminescenza batterica, ha potuto realmente provare che nei microrganismi, al pari di *Cypridina*, l'ossidazione luminosa della luciferina – quella catalizzata dalla luciferasi – è irreversibile. Il fatto, già interessante dal punto di vista biochimico, per la più completa analogia che viene a stabilire tra i due processi di fotogenesi, ci sembra non privo di significato biologico esprimendo esso *la necessità anche nel caso dei batteri di una produzione continua di luciferina a misura che la sostanza reagisce con emissione di luce, come si verifica negli animali che emettono sostanze luminose.*

Dal lato strettamente chimico il meccanismo della biofotogenesi si estrinsecherebbe secondo le fasi (van Schouwenburg, van d. Burg e Johnson, 1939):

$$(1)\quad L + XH_2 \rightleftarrows LH_2 + X$$

$$(2)\quad A + LH_2 \rightleftarrows A \cdot LH_2$$

$$(3)\quad A \cdot LH_2 + \frac{1}{2} O_2 \rightarrow A + L' + H_2O + h\nu .$$

Nella reazione (1) XH_2 rappresenta un donatore d'idrogeno da cui l'H_2 si trasferisce ad una sostanza L, formando la luciferina LH_2. Con la reazione (2) la luciferina viene adsorbita dall'enzima A (luciferasi) per formare il sistema attivato $A \cdot LH_2$ che, ossidato dall'ossigeno molecolare (reazione (3)), darebbe luogo alla reazione di fotogenesi, con liberazione

di luce, di cui *hν* indica appunto il *quantum di energia*. Prodotto di quest'ultima reazione è inoltre una sostanza L', che rappresenta il *prodotto irreversibile* dell'ossidazione della luciferina.

A tal punto delle nostre conoscenze, si presentano ancora non pochi quesiti da risolvere. A parte la struttura chimica della luciferina e della luciferasi, di cui nulla di preciso si conosce a tutt'oggi, convien domandarsi anzitutto quale delle due molecole sia responsabile dell'emissione luminosa, se la luciferina o la luciferasi. Harvey propende per quest'ultima alternativa, più che altro per il fatto che nei casi di non stretta specificità reciproca delle due sostanze – quando la luciferina di una specie dà luogo alla reazione luminosa con la luciferasi di un'altra specie affine – è la luciferasi a determinare il colore della luce emessa. Importanza biologica per una eventuale interpretazione unitaria del fenomeno presenterebbe inoltre l'accertamento se la sostanza fotogena è la medesima nei vari organismi produttori di luce (o se contiene costantemente una medesima funzione chimica responsabile dell'emissione), ovvero se si tratta di altrettante sostanze specifiche dei vari plasmi animali e vegetali. Sebbene sin da ora, in molti casi, si presenti attendibile la prima ipotesi, si deve convenire che le conoscenze al riguardo sono troppo frammentarie e limitate a pochissime specie, per consentire una veduta d'insieme del fenomeno.

Circa la metodologia d'indagine da seguire in tale studio, ci sembra che soltanto il metodo spettrografico possa dare un indizio indiretto, ma sufficientemente attendibile, di una tale identità o meno. Gli spettri delle emissioni di biofotogenesi sono difficili a caratterizzare dal punto di vista fotometrico: consistono sempre di ampie bande continue di emissione, con limiti sfumati, senza accenno ad una qualsiasi struttura. È evidente come sia indispensabile in tal caso procedere nello studio coi metodi quantitativi, determinando la distribuzione dell'energia alle varie lunghezze d'onda, unico carattere questo che può obbiettivamente definire le caratteristiche spettrali del flusso luminoso. In tal senso Eymers e van Schouwenburg (1936) hanno compiuto un interessante studio dello spettro della luce di alcune specie di batteri fotogeni; ed in seguito gli stessi AA. hanno estese le ricerche allo studio di pigmenti fluorescenti di altri microrganismi ed agli estratti luminosi di *Cypridina*. Sono anche da ricordare gli studi spettrografici di Coblentz sulla lucciola che, se pure condotti con tecnica non impeccabile (2), danno una idea abbastanza precisa dei caratteri spettrofotometrici dell'emissione. Valore più che altro storico hanno le antiche ricerche, compiute in prevalenza con osservazioni dirette allo spettroscopio, su vari organismi fotogeni.

(2) Cfr. messa a punto di De Lerma in Balli, *Trattato di radiobiologia* (Modena, 1939), vol. III, p. 1349.

Col presente studio vien preso in esame dal punto di vista quantitativo lo spettro della luce emessa da due microrganismi fotogeni, di cui già si è data comunicazione in una Nota preliminare (1941).

Materiale e tecnica. Le ricerche sono state condotte su due specie di batteri luminosi: *Vibrio pierantonii* (Zirp.), simbionte di un sepiolide, e *B. sapiae* Zirp. microorganismo che si rinviene abbondante *post mortem* sui muscoli della comune seppia. La prima specie[3] è di maggior interesse zoologico, perchè vivendo il microrganismo in simbiosi in speciali organi di *Sepiola intermedia* Naef. (Pierantoni, 1918), costituisce la sorgente della luce

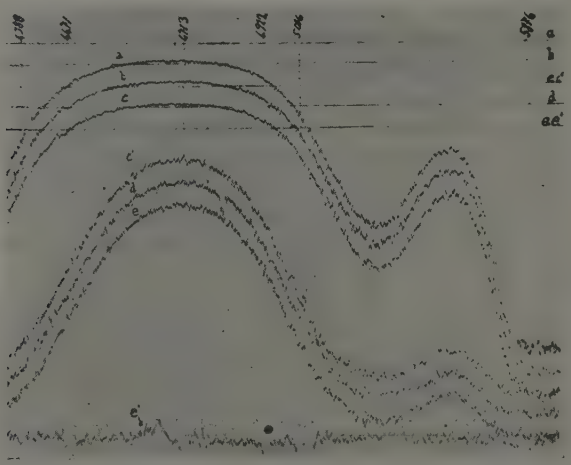


Fig. 1. – Microfotometrie dello spettro della luce emessa da *B. sepiae*: **a**, **b**, **c** a trè differenti livelli (il più basso, il medio, il più alto) di uno stesso spettrogramma registrato con 1 h. di posa; **c'**, **d**, **e** ai corrispondenti livelli di un altro spettrogramma di luce batterica ottenuto sulla stessa lastra con posa di 25'. In **e'** la microfotometria del tratto di lastra non esposta compreso tra i due spettrogrammi. (*lastra Agfa Isochrom*)

emessad al mollusco, onde ancora una volta il fenomeno della fotogenesi batterica fornisce la spiegazione di un complesso caso di luminescenza animale.

Per l'isolamento delle due specie si è tenuto conto, oltre che della tecnica di Zirpolo (1918), sovra tutto delle modificazioni apportatevi da Meissner (1926). Gli organi luminosi di *Sepiola*, prelevati in condizione di asepsi, venivano più volte lavati con soluzione fisiologica sterile e poi rapidamente sterilizzati con alcool a 95°; si cauterizzava inoltre in superficie la regione dell'organo ove occorreva introdurre l'ago di platino per

(3) Tale specie, descritta da Zirpolo (1917) sotto il nome di *Bacillus pierantonii*, è stata in seguito identificata ed estesamente studiata da Meissner (1926) come *Vibrio pierantonii*.

prelevare la massa batterica contenuta nella cavità dell'organo stesso. Il mezzo liquido di cultura aveva la seguente composizione: estratto in 1000 cc. di acqua marina, di gr. 500 di muscoli di seppia, con aggiunta dell' 1 % di peptone Witt; pH = 7,2–7,4; con aggiunta di agar al 2–2,5 % si otteneva un ottimo terreno solido. L'altro microrganismo, *B. sepiae*, veniva coltivato sul medesimo terreno.

Le fotografie degli spettri venivano prese da culture liquide a notevole concentrazione di microrganismi, allestite nel modo seguente. Si asportava con 100 cc. di soluzione di Na Cl al 3 % la patina batterica formatasi, dopo 12–15 ore d'incubazione in termostato, su 10 grandi placche di Petri insemenzate su tutta la superficie; e, separati dal liquido mediante centrifugazione, i microrganismi venivano sospesi in 20 cc. di una soluzione formata da glucosio al 10 % e da fosfato doppio di Sörensen a pH costante intorno a 7,4 in parti uguali. La detta sospensione batterica veniva posta in un parallelepipedo di vetro dipinto all'esterno con tintura bianca a riflessione neutra, meno su una faccia che si faceva aderire alla fenditura dello spettrografo. Un getto continuo di aria attraverso la cultura, ne esaltava il potere luminoso.

Sono stati impiegati due spettrografi Fuess a sufficiente intensità, di cui riportiamo le dispersioni:

λ	I Spettrografo	II Spettrografo
a 4000 Å	32 Å per mm	22 Å per mm
4250	38 »	30 »
4500	47 »	38 »
4750	57 »	48 »
5000	72 »	61 »
5250	86 »	71 »
5500	98 »	80 »
5750	108 »	92 »
6000	130 »	112 »

Le aperture delle fenditure dei due spettrografi erano regolate in modo da ottenere nel calcolo delle lunghezze d'onda medie, il medesimo fattore d'incertezza: fenditura a mm 0,1 con lo spettrografo a minor dispersione.

Le fotografie sono state eseguite su lastre Ilford Double X-Press, sufficientemente sensibili in una estesa regione dello spettro; più adatte per la debole emissione della luce batterica nel giallo arancione, le Ilford-pancromatic, mentre eccellenti per lo studio dell'azzurro si sono rivelate la Agfa Isochrom DE. Il tempo di esposizione, variabilissimo del resto a seconda del grado di luminosità delle culture, è stato regolato per tentativi in modo da ottenere volta per volta una densità di annerimento

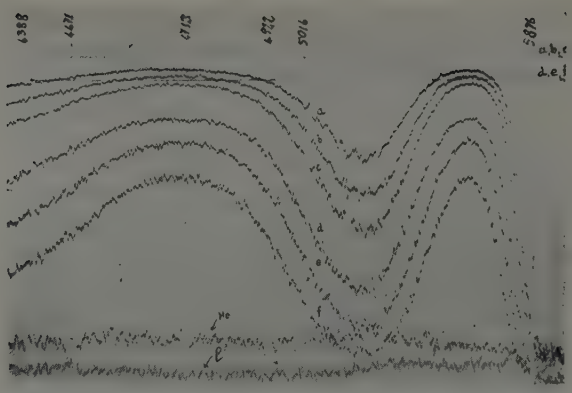


Fig. 2. – Microfotometrie degli spettri della luce emessa da una lampada tarata (densità di riferimento) a filamento di tungsteno in vari gradi di intensità di emissione corrispondenti a:

a, 5,8 amp., **b** 5,6 amp.; **c**, 5,4 amp.; **d**, 5,2 amp.; **e**, 5 amp.; **f**, 4,8 amp. In **IIe** microfotometria dello spettro di riferimento dell'elio; **l**, lastra non esposta.

(*lastra Agfa Isochrom*)

della lastra sufficiente per lo studio quantitativo: la posa più breve è stata di 30′ con *B. sepiae*, la più lunga di circa 3 ore con *V. pierantonii*.

La ricerca della legge della distribuzione di energia nello spettro è stata effettuata fotografando sulla medesima lastra tanto lo spettro della luce batterica che quelli, in vari gradi noti di affievolimento, di una sorgente continua tarata. Quest'ultima era costituita da una lampadina a basso voltaggio, con filamento di tungsteno, di cui si conosceva la relazione tra l'intensità della corrente di alimentazione tra 4 e 6 Amp. e la distribuzione spettrale dell'energia. Con un microfotometro di tipo Moll A, venivano registrate le curve di annerimento dei vari spettri, dalle quali per interpolazione si ricavava la distribuzione dell'energia nello spettro della luce batterica dopo aver ricavata alle varie λ le curve di trasparenza relativa della lastra in funzione della intensità (4).

(4) Il metodo a cui si accenna è esposto per esteso nell'applicazione allo studio dei fotobatteri, in un mio precedente lavoro del 1940. Esso rientra nella tecnica di *spettrofotometria fotografica quantitativa* (cfr. Ornstein, Moll, Burger, *Objektive Spektralphotometrie*, Berlin, 1932); per affievolire la sorgente di riferimento si è fatto gradualmente diminuire l'intensità della corrente di alimentazione (tenuta *rigorosamente* costante durante le pose, tutte di *ugual* durata), tenendo conto della legge della distribuzione spettrale dell'energia emessa dal filamento incandescente alle varie temperature ($E_{\lambda,T}$), Tale criterio, anche se piuttosto laborioso per il calcolo, offre il vantaggio sugli altri metodi di affievolimento (variazione della larghezza della fenditura, della distanza della sorgente, del tempo di esposizione, degli assorbimenti graduali, dei settori rotanti, ecc.) di una maggiore obiettività e precisione di risultati, permettendo di realizzare una quasi assoluta invarianza delle condizioni sperimentali nel corso della ricerca.

Biologia. — *Ricerca sperimentale sull'origine dei gangli del glosso-faringeo e del vago nell'embrione di pollo* [1]. Nota di R. Levi-Montalcini, presentata [2] dal Socio G. Levi.

La partecipazione dei placodi dorso-laterali ed epibranchiali alla formazione dei gangli dei nervi encefalici fu riconosciuta e studiata inizialmente nei Rettili e Anfibi, in un periodo più recente negli Uccelli e Mammiferi.

Negli Uccelli, in base a ricerche morfologiche, particolarmente di van Campenhout, si ritiene oggi che i placodi epiblastici intervengano in vario grado nella formazione dei gangli dei nervi trigemino, acustico-facciale, glosso-faringeo e vago. Il ganglio del trigemino costituito dai due lobi oftalmico e maxillo-mandibolare deriverebbe quasi esclusivamente dal placode dorso laterale omonimo, il lobo maxillo-mandibolare in prevalenza da cellule migrate dalla cresta neurale, per piccola parte dal placode epiblastico. Di origine esclusivamente placodica è il ganglio acustico, derivando dalla parete mediale della vescicola acustica; sono di provenienza mista, da placodi epibranchiali e dalla cresta neurale, il ganglio genicolato del facciale e i gangli del complesso glosso-faringeo e vago. Mancano tuttavia dati precisi sulla partecipazione delle due supposte sorgenti.

In un periodo recente il concetto di placode si estese con le ricerche di Winivarter nell'embrione di porco (1939), le quali dimostrarono la partecipazione di elementi di provenienza entoblastica alla costituzione dei gangli del glosso-faringeo e del vago. Gemme epiteliali provenienti dal territorio del terzo arco branchiale, dallo stesso abbozzo dal quale origina il timo, contribuirebbero alla formazione dei due ultimi gangli encefalici, intimamente mescolate con elementi di origine epiblastica. Una ricerca recente di Christian Coers (1946) sull'embrione di coniglio, condotta come le precedenti con metodo morfologico, conferma l'origine entoblastica di una parte delle cellule gangliari del glosso-faringeo. Di origine ugualmente entoblastica sarebbe una parte degli elementi che contribuiscono alla formazione del gaglio genicolato del facciale, mentre di origine puramente epiblastica sarebbe in questa specie il placode vagale.

Nell'embrione di pollo la cresta gangliare comune del glosso-faringeo e del vago si accenna verso la 32-38 ora (14-16 somiti). In un periodo successivo, verso la 50ª ora, inizia la migrazione degli elementi della cresta neurale raccolti in un esile cordone di cellule ancora indifferenziate, che si porta con direzione rostro-caudale e medio-laterale verso l'epiblasto laterale.

(1) Ricerca eseguita nel Centro di Studi sull'accrescimento e la senescenza alle dipendenze del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Anatomico di Torino.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

In un embrione di 60 ore impregnato con metodo argentico Cajal De Castro, si notano tra gli elementi in via di proliferazione dall'epiblasto epibranchiale alcuni neuroblasti intensamente colorati in fase unipolare in via di migrazione. Si tratta di neuroblasti di provenienza placodica, poichè il sottile cordone cellulare proveniente dalla cresta neurale, non è in questo periodo ancora giunto in prossimità della gemma epiteliale. Nello stesso preparato, in corrispondenza del I, II e III arco branchiale, si nota la scomparsa della membrana ecto–entoblastica, tuttavia in seno all'entoblasto non si osservano neuroblasti in via di differenziazione. La partecipazione dell'entoblasto del 3° arco branchiale alla formazione del ganglio nodoso del vago nell'embrione di pollo, sarebbe stata dimostrata da Jones David Smith (1946). Ricerche sperimentali di Yntema condotte in periodo più precoce dello sviluppo, e cioè prima dell'aderenza dei placodi epibranchiali alle tasche entodermiche, avrebbero invece escluso tale contributo entodermico.

Verso il terzo giorno di sviluppo gli elementi gangliari provenienti dalle due sorgenti: cresta neurale e placodi hanno dato origine ai caratteristici raggruppamenti gangliari del complesso vago glosso–faringeo: ganglio giugulare o della radice comune al IX e X paio, ganglio petroso sul decorso del glosso–faringeo e ganglio nodoso o toracico del vago.

Io mi sono proposta di analizzare con metodo sperimentale l'origine dei gangli del IX e X paio, escludendo volta a volta le supposte sorgenti con le seguenti esperienze:

1° Asportazione del rombencefalo in embrioni tra i 6 e i 12 somiti, in un periodo cioè sicuramente anteriore alla migrazione degli elementi della cresta gangliare. Questo intervento fu praticato in una cinquantina di embrioni. Di questi una ventina furono fissati in periodi successivi all'intervento, tra il 4° e il 18° giorno di sviluppo.

2° Asportazione dell'epiblasto e del mesenchima posto lateralmente al rombencefalo tra i 5 e il 7 somiti per un'estensione corrispondente a tutto il segmento rombencefalico, e cioè dal limite caudale della vescicola mesencefalica al 4° somite. Con questo intervento venne anche asportato l'entoblasto del 1°–3° arco branchiale, supposta matrice di un buon numero di elementi gangliari del IX e X paio. Questo intervento non porta perciò alcun contributo al problema impostato da Winiwarter sull'origine entoblastica di una parte degli elementi gangliari del IX e X paio.

3° Innesto del rombencefalo asportato a lato del bulbo oculare o in sede toracica.

Tutti gli embrioni furono fissati e colorati secondo la tecnica Cajal De Castro e sezionati in serie.

Risultati. – 1° L'asportazione del rombencefalo e della notocorda per un segmento corrispondente (fig. 1 *a*) non influisce sullo sviluppo ulteriore

degli embrioni, i quali non differiscono anche in periodi avanzati dello sviluppo da embrioni di controllo, né per la mole somatica né per la struttura del nevrasse, malgrado la mancanca delle vie discendenti encefaliche e dei centri bulbari. In nessun caso si ebbero tentativi di rigenerazione da parte del rombencefalo asportato, evenienza considerata molto frequente da van Campenhout nelle sue estirpazioni emilaterali del rombencefalo. In tutti gli embrioni operati, al controllo istologico si constatò la completa assenza del rombencefalo, e di conseguenza della componente motoria dei nervi vago e glosso–faringeo. Dei gangli sensitivi del IX e X paio risultò sempre mancante il ganglio della radice o giugulare, comune ai due nervi. In assenza del rombencefalo risultarono sempre presenti invece e normalmente sviluppati i gangli petroso del glosso–faringeo e toracico (nodoso) del vago. I due gangli petrosi sono connessi reciprocamente con la loro radice afferente. Le due radici sono intimamente fuse in un tronco nervoso compatto che passa

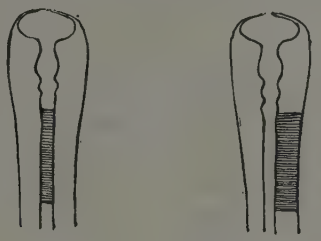


Fig. 1.

a mo' di ponte sulla linea mediana. Dai due gangli petrosi emergono i due nervi glosso–faringei ridotti alla loro componente sensitiva, e si dirigono caudalmente anastomizzandosi come di norma con il vago. Anche il ganglio nodoso del vago si presenta normalmente costituito ed identico a quello di embrioni di controllo. Come in questi ultimi, migra caudalmente con il procedere dello sviluppo, portandosi verso il 14° giorno a livello della prima vertebra toracica.

2° L'asportazione dell'epiblasto e dell'entoblasto dalla prima alla terza tasca branchiale, non è seguita da rigenerazione del territorio asportato. Negli embrioni operati (fig. 1 *b*) dal lato in esperimento le componenti motoria del vago e del glosso–faringeo emergono dal nevrasse unitamente ad una sottile radice sensitiva, la quale a breve distanza dall'emergenza, si rigonfia nel ganglio giugulare o della radice. Risultano completamente assenti dal lato operato i gangli petroso e toracico.

3° Con la terza serie di esperimenti consistenti nell'innesto del rombencefalo asportato allo stadio di sviluppo di 7–9 somiti, in vicinanza del bulbo oculare o in sede toracica, si ebbe un'ulteriore conferma dell'origine dalla cresta neurale del ganglio giugulare e della derivazione placodica dei

gangli petroso del glosso-faringeo e nodoso del vago. Dall'innesto si sviluppò infatti a lato del rombencefalo soltanto il ganglio giugulare.

Questi risultati concordano con quelli di Jones (1942) sullo stesso materiale e con quelli di Yntema in Amblystoma. Nell'embrione di pollo studiato sino al 6° giorno di sviluppo dopo l'asportazione del rombencefalo, Jones rileva che la mancanza della componente motoria del vago impedisce la formazione dei plessi cardiaco, polmonare, esofageo, gastrico e intestinale, e ne deduce che derivano nello sviluppo normale da neuroblasti migrati lungo la radice motoria del vago. Da un primo esame degli embrioni portati sino ad un periodo molto più inoltrato dello sviluppo, e cioè al 18° giorno, e che mi propongo di riferire in un'altra Nota, ritengo invece, in accordo con van Campenhout e Derymacker, che i gangli intramurali del sistema digerente, in assenza della componente motoria del vago, si costituiscano in modo del tutto normale, e che alla loro formazione non partecipino elementi migrati dal rombencefalo lungo la radice afferente del X paio.

Risulta da queste ricerche che nell'embrione di pollo il ganglio giugulare o della radice del complesso glosso faringeo vago deriva dalla cresta neurale rombencefalica. Di origine esclusivamente placodica sono i gangli petroso del glosso faringeo e nodoso del vago. L'asportazione contemporanea dell'epiblasto e dell'entoblasto dalla 1ª alla 3ª tasca branchiale non permette di affermare nè di escludere la partecipazione dell'entoblasto alla costituzione dei due gangli del IX e X paio.

Embrioni operati precocemente di asportazione totale del rombencefalo si sviluppano normalmente sino all'ultimo periodo dello sviluppo embrionale, e la loro mole somatica è uguale a quella di embrioni di controllo.

Biologia. — *Ricerche sull'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale degli Anfibi* [1]. Nota di M. L. Cortellessa, presentata [2] dal Socio F. Silvestri.

In questi ultimi anni numerose ricerche sono state svolte per chiarire il problema delle reazioni energetiche necessarie allo sviluppo embrionale, se cioè tali reazioni siano da ricercare principalmente nel campo della glicolisi oppure in quello dei fenomeni ossidativi. Uno dei punti di partenza di queste, come di tutta una serie di indagini sulle relazioni tra ossidazione e metabolismo cellulare, è stata l'osservazione di Harrop e Barron [3] sull'azione stimolante che il blù di metilene esercita sull'assunzione di ossigeno da

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Perugia.
(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.
(3) « Journ. exper. Med. », vol. 48, p. 207 (1928).

parte di globuli rossi adulti di mammiferi. Tale constatata influenza di un ossidante sui processi respiratori di alcune cellule è stata sfruttata per indagare, su materiali adatti a questo scopo, se ad una respirazione accentuata facesse riscontro un aumento della capacità di sviluppo, e ciò al fine di appoggiare o meno la teoria ossidativa dell'accrescimento.

Delle sostanze su cui ci si è soffermati - tionina e piocianina - la prima è chimicamente affine al blù di metilene. I risultati ottenuti sono vari e riguardano un certo numero di materiali sia animali che vegetali (uovo di *Paracentrotus lividus*, culture di tessuti *in vitro*, cariossidi di frumento, ecc.); diversa è anche la tecnica seguìta e specialmente il tempo di azione dell'ossidante sui soggetti in esame.

Nella presente ricerca ho voluto studiare l'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale degli Anfibi. Già Chiuini (4) aveva sperimentato l'azione della stessa sostanza su embrioni di *Bufo vulgaris*, *Bufo viridis* e *Axolotl* mantenuti nei loro involucri, constatando il nessun effetto di essa (in concentrazioni varianti tra 1 : 25000 e 1 : 5.000.000) sugli embrioni in esame.

Le uova di *Rana esculenta*, oggetto della presente ricerca, sono state private dei loro involucri e poste in capsule Petri contenenti soluzioni di tionina in acqua Marcia alle seguenti concentrazioni: 1 : 25.000; 1 : 50.000; 1 : 100.000; 1 : 500.000; 1 : 1.000.000: in una capsula di controllo era posta acqua Marcia semplice. Lo stadio di inizio delle esperienze, eseguite a temperatura oscillante tra 11°-21° e 17°-26°, variava nelle diverse serie, da quello di giovane blastula a quello di piastra neurale. Al termine delle esperienze ho potuto osservare come la tionina nelle concentrazioni 1 : 25.000, 1 : 50.000, 1 : 100.000 eserciti un'azione prima di arresto e poi letale sugli embrioni di *Rana esculenta*, mentre in concentrazione 1 : 500.000 ne favorisca l'accrescimento. Gli esemplari di *Rana esculenta* sono perciò in grado di risentire dell'azione continuativa di soluzioni di tionina, sia come agente in senso letale nelle più forti dosi, sia come favorente la crescita nelle dosi più deboli. Ricordando le esperienze di Runnström (5) sull'uovo di riccio di mare, il cui accrescimento è arrestato dall'influenza della piocianina in forti concentrazioni nello stesso tempo in cui il suo consumo di ossigeno viene esaltato, si può pensare che la tionina – anche a prescindere da un'azione tossica in sè e per sè – eserciti un impedimento più o meno notevole sui processi di sviluppo e che solo la concentrazione 1 : 500.000 permetta, forse per opera di un aumento più moderato dei fenomeni ossidativi, il migliore evolversi dell'embriogenesi.

Da tali risultati nasce spontanea l'osservazione della differenza di comportamento tra *Rana esculenta* (esperienze predette) e altri Anuri: *Bufo vulgaris* e *viridis* (Chiuini), vale a dire tra materiali che pur presentano

(4) «Boll. Soc. Ital. Biologia Sperimentale», fasc. 9, vol. XVI (1941).
(5) «Biol. Bull.», vol. 68, p. 327 (1935).

importanti analogie proprio nel campo dei processi respiratori (uguale assunzione di ossigeno, eguale eliminazione di anidride carbonica, egual quoziente respiratorio) (Spirito) [6]. Tale osservazione mi ha indotto a ricercare se la risposta non uguale a una stessa azione sperimentale fosse dovuta soltanto alla differenza di specie zoologica o non piuttosto alla diversità di qualche fattore nella condotta degli esperimenti. Un primo fattore era rappresentato dall'essere o meno gli esemplari in esperimento circondati dai loro involucri gelatinosi: di questa differenza nella condotta delle indagini, che mi si dimostrò non incidere notevolmente su un'esperienza svolta su *Bufo vulgaris*, ma che potrebbe forse avere qualche valore nelle diverse specie, ho creduto di non occuparmi, ripetendo tutte le esperienze con esemplari privi degli involucri. Pertanto il fattore differenziale da tener presente nelle esperienze era rappresentato dall'acqua in cui era stata disciolta la tionina per farne le soluzioni: uno e in pari tempo duplice fattore, perchè tra l'acqua Marcia di Roma e l'acqua di Perugia (quella cioè degli esperimenti di Chiuini) non vi era soltanto diversità di composizione chimica in sè e per sè, ma anche una differenza chimica contingente, in quanto che l'acqua Marcia era clorata, mentre quella di Perugia – nell'epoca in cui gli esperimenti erano stati condotti – non lo era.

Allo scopo di chiarire questa ipotesi, ho eseguito tre serie di esperienze: la prima su *Bufo vulgaris* e su *Bufo viridis*, le altre due ancora su *Rana esculenta*.

Ho posto embrioni di *Bufo vulgaris* in soluzioni di tionina disciolta in acqua Marcia nelle concentrazioni 1:25.000, 1:50.000, 1:100.000, 1:500.000, 1:1.000.000, 1:5.000.000 con controlli in acqua Marcia semplice (si tratta sempre di acqua Marcia di serbatoio).

L'unica concentrazione sempre letale è la 1:25.000, nella quale gli embrioni muoiono sia che vi siano stati posti in stadio precoce che in stadio più avanzato (inizio dello sviluppo della pinna codale). La concentrazione 1:50.000 non è sempre mortale. Ho ripetuto quindi l'esperienza su *Bufo vulgaris* con tionina disciolta in acqua di Perugia (anch'essa attualmente clorata). Concentrazioni 1:25.000, 1:50.000, 1:100.000. In tutte le concentrazioni i girini si sono sviluppati; soltanto, alcuni di quelli in concentrazione 1:25.000 (si ricorda che si tratta di esemplari privati degl'involucri), hanno mostrato uno sviluppo sensibilmente inferiore agli altri.

Diverso è il comportamento del *Bufo viridis*, (esemplari privati degli involucri) per il quale sono mortali le concentrazioni 1:25.000, 1:50.000, 1:100.000 in acqua Marcia; 1:25.000 e 1:50.000 in acqua di Perugia clorata; 1:25.000 in acqua di Sangemini [7].

(6) « Arch. Sc. Biol. », vol. 21 (1937).

(7) Ho creduto interessante rivolgermi pure ad altre acque: tra queste ho scelto l'acqua di Sangemini, la quale, contenendo non elevate quantità di anidride carbonica, permette un normale sviluppo degli embrioni in esperimento.

Appare evidente da questa prima serie di esperienze la differente risposta data da due specie dello stesso genere *Bufo* – oltre che dalla *Rana* e dal *Bufo* – a uno stesso stimolo biologico e, sopratutto, quanta parte abbiano le qualità proprie delle varie acque nell'azione esercitata dalla tionina disciolta, a volta a volta, nell'una o nell'altra di esse. Tale constatazione è confermata dalla seconda serie di esperienze su *Rana esculenta*: le concentrazioni 1 : 25.000, 1 : 50.000, 1 : 100.000 in acqua di Perugia clorata sono letali e quella 1 : 500.000 diminuisce lo sviluppo mentre in acqua di Sangemini le sole concentrazioni 1 : 25.000 e 1 : 50.000 provocano la morte, quella 1 : 100.000 è sfavorevole all'accrescimento e quella 1 : 500.000 talvolta lo stimola (ricordo che in acqua Marcia le concentrazioni tra 1 : 25.000 e 1 : 100.000 sono – come più sopra ho esposto – letali per la *Rana esculenta*, mentre quella 1 : 500.000 ne favorisce lo sviluppo).

Confrontando le tre acque di Perugia, di Sangemini e Marcia notiamo dunque come quest'ultima esplichi generalmente l'azione più dannosa: infatti nel *Bufo* è quella ove le soluzioni sono mortali anche nelle concentrazioni in cui l'acqua di Perugia e meglio ancora l'acqua di Sangemini non hanno lo stesso effetto; nella *Rana* invece il suo comportamento è – per quanto riguarda le concentrazioni mortali – uguale a quello dell'acqua di Perugia, ma più sfavorevole di quello dell'acqua di Sangemini.

Oltre a ciò, si è parlato precedentemente di un'eventuale influenza della clorazione dell'acqua sull'esito delle esperienze.

Una terza serie di esperimenti sulla *Rana esculenta* è stata quindi diretta ad accertare l'influenza del fattore cloro sui fenomeni provocati dalla tionina: ho fatto il confronto tra acqua Marcia di deposito normalmente attinta come per le serie precedenti, acqua Marcia prelevata alla sorgente ove non ha ancora subìto clorazione e la stessa acqua Marcia della sorgente, clorata per aggiunta di cloramina T.

In questa esperienza ho usato una più numerosa gamma di diluizioni: 1 : 25.000, 1 : 50.000, 1 : 100.000, 1 : 125.000, 1 : 200.000, 1 : 500.000, 1 : 1.000.000; sia nelle due varietà clorate che in quella non clorata le concentrazioni da 1 : 25.000 a 1 : 200.000 sono state mortali.

Si può escludere pertanto una qualsiasi influenza della clorazione sull'azione propria della tionina.

Dai risultati descritti si rileva innanzi tutto una diversità di comportamento nei confronti dell'azione continuativa di soluzioni di tionina nelle varie specie adoperate. Questa diversa risposta nello sviluppo degli embrioni di fronte all'azione di una sostanza capace di esaltare le ossidazioni cellulari, è tanto più interessante quando si pensi, come ho già detto, all'uguaglianza delle varie specie proprio a proposito dei processi respiratorî. Non si può fare a meno, intanto, di comparare i risultati differenziali ottenuti nelle varie specie con quanto si verifica a proposito delle possibilità di vita delle stesse

specie in anaerobiosi (Spirito) [8]: in tali condizioni infatti c'è una resistenza che è massima nel *Bufo vulgaris*, minore nel *Bufo viridis* e molto minore nella *Rana esculenta*. Si potrebbe pensare in tal caso che una maggiore o minore azione di arresto provocata da alcune concentrazioni di tionina sia in relazione con una maggiore o minore capacità di resistenza di fronte a un non sufficiente apporto di ossigeno comunque alterato dal trattamento con tionina; ciò che verrebbe convalidato dalle esperienze di Runnström sull'arresto dello sviluppo delle uova di riccio di mare concomitante all'elevamento del consumo di ossigeno.

Da un certo punto di vista una spiegazione analoga potrebbe essere data nei riguardi della diversa azione della tionina a seconda della qualità di acqua impiegata per la soluzione: infatti l'azione più dannosa è risultata nelle esperienze con l'acqua Marcia e cioè proprio con quell'acqua che non favorisce un normale apporto di ossigeno agli esemplari in esperimento (Spirito) [9].

Zoologia. — *Osservazioni sulla deposizione di «Murex trunculus» L.*[1]. Nota di F. Dulzetto, presentata [2] dal Socio A. Russo.

Nella maggior parte dei Gasteropodi Prosobranchi le uova non vengono deposte isolatamente, ma riunite in modo da formare degli ammassi di dimensione e forma varie. In parecchie famiglie poi, appartenenti al gruppo dei *Rhachiglossa*, come nei *Muricidae*, le uova sono racchiuse in capsule a parete pergamenacea, dette capsule ovifere, ooteche, ovisacchi, che possono essere isolati o riuniti in ammassi detti *nidosomi*. La forma e la struttura delle capsule, nonchè il modo con cui si raggruppano sono caratteristici di ciascuna specie.

Lund [3], in un suo tentativo di classificazione delle ooteche, le distinse in *aderenti* e *coerenti*. Le prime, che possono essere sessili o peduncolate, sono disposte l'una accanto all'altra su una membrana comune, che ricopre il sustrato su cui poggiano; il loro insieme costituisce un nidosoma di forma indeterminata. Chiamo coerenti quelle ooteche che si attaccano le une alle altre; esse possono presentarsi in ammassi di forma globosa, cilindrica, con disposizione ad embrice (*nidosoma strobiliforme*), o a dischi disposti a pila ed attaccati ad un ligamento comune (*nidosoma vermiforme*),

(8) «Arch. Sc. Biol.», vol. 23 (1936).

(9) «Med. e Biol.», vol. 3 (1943).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia dell'Università di Messina.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

(3) A. Lund, *Recherches sur les enveloppes d'oeufs des Mollusques Gastéropodes pectinibranches*. «Ann. Sc. Nat.», 2ª serie, I, 1834.

oppure ad anello o ad elica, in modo da limitare la parete di una mezza sfera cava.

Poche notizie si hanno sulla deposizione di *Murex trunculus* L. e di tutta la famiglia dei *Muricidae*. Lo Bianco [4] dice semplicemente che *Murex brandaris* L. e *Murex trunculus* L. depongono in maggio–giugno uova racchiuse in capsule della stessa forma, riunite in masse talvolta più grandi del capo umano. Aggiunge che le capsule sono di consistenza pergamenacea, piuttosto opache e di colore paglierino.

Lamy [5] nella sua rassegna sulla deposizione dei Gasteropodi Prosobranchi dice solo che la deposizione di *Murex* (*Chicoreus*) *pomum* Gmel. delle Indie occidentali, la quale offre una certa rassomiglianza con quella di *Buccinum undatum* L. e di *Neptunia antiqua* L., è formata di ooteche coerenti, provviste di una apertura arrotondata, e che questo è anche il caso di *Murex* (*Phyllonotus*) *trunculus* L. proveniente da Banyuls-sur–mer e dalla Tunisia.

Più recentemente Fischer e Raffy [6], che hanno potuto osservare in acquario la deposizione di *Murex trunculus*, dicono che l'aspetto ed il modo con cui le ooteche si raggruppano, ricordano la deposizione di *Buccinum undatum*; senonchè in *Murex* la superficie dell'ooteca è liscia, e presenta solo una larga depressione longitudinale su una delle sue faccie. Le capsule sono incurvate, e misurano circa mm. 6 di altezza, con una base di mm. 4-5; mancano di peduncolo evidente, e spesso si attaccano le une alle altre solo per due punti della loro base. Dal lato opposto al punto di fissazione, sulla faccia priva di solco longitudinale, si trova una regione circolare, in cui la parete è assottigliata e di colore biancastro.

Nelle acque del lago Faro, presso Messina, vive una forma di *Murex trunculus*, mutica come quella che si riscontra nello stretto lungo la costa messinese, ma di piccole dimensioni; l'adulto raggiunge infatti una lunghezza di cm. 4,5. Il 10 maggio potei avere diversi nidosomi con alcune femmine, che vi si trovavano attaccate, come è loro abitudine durante il periodo della deposizione, e che, in mancanza di acquari, andati distrutti durante il periodo bellico, collocai in grandi vaschette di vetro, con dell'acqua proveniente dallo stesso lago, la quale veniva rinnovata due volte la settimana. Questi nidosomi erano di piccole dimensioni; uno di essi era lungo cm. 8, largo cm. 4 e alto cm. 5. Ma la maggior parte, anzichè assumere la caratteristica forma globosa, era di tipo stobiliforme (Lund); essi risultavano infatti da cordoni cilindrici lunghi cm. 5–10, e con un diametro di cm. 1-2, riuniti per una

(4) S. Lo Bianco, *Notizie biologiche riguardanti il periodo di maturità sessuale degli animali del Golfo di Napoli*. « Mittheil. Zool. Stat. Neapel. », vol. VIII, 1888.

(5) E. Lamy, *La ponte chez les Gastéropodes Prosobranches*. « Journ. de Conchyliol. », vol. LXXII, 1928.

(6) P. H. Fischer et A. Raffy, *La ponte du « Murex trunculus »* L., « Bull. Instit. Océanographique », 618, 1933.

delle estremità (fig. 1). Le femmine, che se ne stavano quasi sempre fissate sulle capsule, hanno rifiutato costantemente il cibo, nonostante si siano mantenute in ottime condizioni ed abbiano, come vedremo, deposto. Anche Fischer e Raffy [7] dicono di avere tenuto in aquario due femmine di *M. trunculus* in perfette condizioni di vitalità, senza fornire loro alcun particolare nutrimento. Questo comportamento fa pensare che questi Molluschi, durante il periodo della deposizione, si alimentano scarsamente, se non restano addirittura digiuni.

Le capsule ovifere hanno la forma di un sacco, con la superficie rivolta verso l'esterno convessa, e la parte opposta, che si adagia sulla capsula sottostante, concava. Esse presentano una altezza di mm. 3-5 ed una larghezza che è anche essa compresa tra mm. 3-5; in generale però sono più alte che larghe. In corrispondenza del fondo il sacco si allarga e si

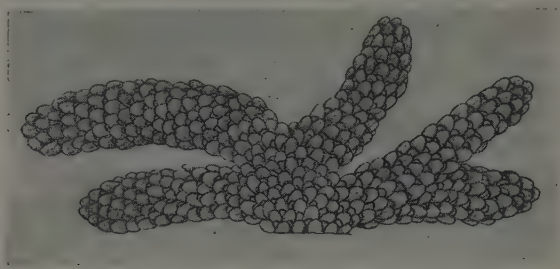


Fig. 1. – Nidosoma strobiliforme di *Murex trunculus* L. del Lago Faro (Ridotto a 2/3).

arrotonda, mentre va restringendosi verso la parte opposta, in cui le due pareti si toccano. È per mezzo di questo tratto che la capsula si attacca a quella vicina o ad un qualsiasi altro sostegno. La parete esterna convessa presenta delle striature longitudinali a guisa di nervature, che sporgono sulla superficie esterna della parete stessa (fig. 2). Esse sono più evidenti in corrispondenza del fondo e del tratto che segue immediatamente verso la faccia concava; il resto della parete ne è priva, ed appare anche più trasparente, in rapporto con il minore spessore che presenta. Essendo le nervature localizzate specialmente nella zona in cui si trovano raccolte le uova, la loro presenza serve evidentemente a conferire alla parete una maggiore resistenza. In corrispondenza della parete concava, a brevissima distanza dal fondo, si riscontra una area circolare, molto trasparente e molto più sottile, già osservata da Lamy [8] e descritta e figurata da Fischer e Raffy [9]. Senonchè Lamy la considera addirittura come una apertura, mentre

(7) Loc. cit.
(8) Loc. cit.
(9) Loc. cit.

si tratta di un'area in cui la parete è più sottile e meno consistente, sicchè al momento della fuoruscita dei piccoli si rompe facilmente, lasciando una apertura circolare. Questa sorta di finestra, che si può staccare facilmente, osservata al microscopio si presenta con aspetto omogeneo e di colorito bianchiccio, a margini regolari.

In generale ogni capsula si attacca a quella vicina o per mezzo di due sporgenze, situate ai due estremi, sicchè tra di esse la parete presenta una sella, oppure per mezzo di una lamina; ma il sacco può anche restringersi in un peduncolo, con cui si fissa dalla capsula adiacente (fig. 3).

Le uova occupano sempre il fondo slargato della capsula; quando sono da poco deposte si trovano generalmente raccolte sul lato convesso della

Fig. 2. – Capsula ovifera di *Murex trunculus* L. del lago Faro (Ingr. 1×6).

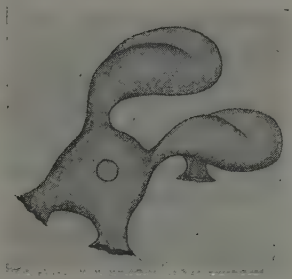


Fig. 3. – Tre capsule ovifere di *Murex trunculus* L. del lago Faro, nelle quali si vede il modo con cui si attaccano le une alle altre (Ingr. 1×5).

parete, e sono quasi sempre disposte in modo da delimitare una area circolare. Il loro numero oscilla tra un minimo di 111 ed un massimo di 168; il diametro è compreso tra μ 168 e μ 223; il numero massimo di larve trovato è stato di 5.

Una delle femmine, che era stata catturata insieme con i nidosomi, il 22 maggio cominciò a deporre. Essa se ne stava col piede attaccato alla parete della vaschetta, in modo che il margine superiore era situato appena al disopra del pelo dell'acqua. Alle ore 17,32 aveva già emesso la prima capsula. Rimasi in osservazione, ed alle 18,22 vidi defluire dall'orifizio della ghiandola pedale una sostanza muccosa, in mezzo alla quale turbinavano dei corpicciuoli bianchi, che non erano altro che le uova, come potei facilmente constatare guardando attraverso la parete trasparente con l'ausilio di una lente di ingrandimento. Lo strato superficiale della massa fluida, che andava così raccogliendosi nello spazio compreso tra la parete del recipiente ed il piede dell'animale conformato a coppa, cominciò ben presto a coagularsi. Dopo 5 minuti si era nettamente delineata una parete, sicchè la emissione

cominciava ad assumere l'aspetto di capsula; essa dopo 10 minuti era completamente formata. Frattanto il piede, che eseguiva delle continue contrazioni, cominciò a disporsi in modo da assumere la configurazione di una doccia, i cui bordi continuavano a mantenersi aderenti alla parete della vasca in modo da essere evitato il contatto con l'acqua. Successivamente l'animale cominciò a spostarsi lentamente dal lato opposto a quello in cui la doccia si era messa in comunicazione con l'esterno mediante una piccola apertura, finchè la capsula, resa libera, non si trovò accanto a quella precedentemente emessa. Ma prima di allontanare definitivamente il piede, esso si è assicurato, toccandola ripetutamente con i tentacoli, che la capsula aderisse saldamente alla parete.

Un'altra ooteca è stata deposta tra le ore 17,15 e le 17,40, ed una altra ancora tra le 19,40 e le 20; alla distanza quindi di 20–25 minuti.

Successivamente un'altra femmina, che si trovava nella stessa vasca, cominciò a deporre, sicchè a distanza di 24 ore si formarono due piccoli nidosomi, di cui uno aveva le dimensioni di circa cm. 4 per 1,5, con una altezza di cm. 2, mentre l'altro era un poco più piccolo. Essi aderivano alla parete della vasca ed avevano l'aspetto di un ammasso irregolare; le capsule erano disposte in modo che le più superficiali rasentavano il pelo dell'acqua. Il 18 giugno esse contenevano delle larve a sviluppo molto avanzato. In condizioni di vita libera evidentemente diverse femmine concorrono con le loro deposizioni alla formazione dei nidosomi.

Per controllare se la deposizione della forma marina di *Murex trunculus*, che è mutica come quella del lago Faro ma di dimensioni maggiori, presentasse delle differenze, feci eseguire delle ricerche lungo il litorale. Il 31 maggio ebbi due nidosomi, di cui uno era stato raccolto nei pressi del villaggio Pace, e l'altro sul litorale di Mortelle. Il primo, che era più voluminoso, aveva delle dimensioni simili a quelle riscontrate da Lo Bianco [10] nel golfo di Napoli; era lungo infatti cm. 25, largo cm. 19 ed alto cm 12. Quello pescato a Mortelle era più piccolo. Furono entrambi collocati in una grande vasca di vetro di forma cilindrica, nella quale l'acqua di mare veniva rinnovata due volte la settimana. Insieme col nidamento proveniente dal litorale di Pace sono state catturate tre femmine, di cui due sono morte dopo pochi giorni, mentre l'altra è rimasta quasi costantemente attaccata al nidamento.

Le capsule si presentavano con gli stessi caratteri di quelle dei nidosomi provenienti dal lago Faro, erano solo più grandi; l'altezza massima riscontrata è stata di mm. 9 e la larghezza di mm. 7, dimensioni che superano quelle delle capsule di *M. trunculus* studiate da Fischer e Raffy [11]. La parete appariva più spessa e più coriacea, le nervature erano più evidenti.

(10) Loc. cit.
(11) Loc. cit.

Le uova avevano la stessa dimensione, variava il numero, che era compreso tra 418 e 849. Le prime larve furono trovate il 29 giugno, ed in ogni capsula ne sono state riscontrate non più di 10, in diverso stadio di sviluppo. Sicchè le uova contenute in ciascuna capsula, per quanto siano state fecondate, come è presumibile, contemporaneamente, non evolvono egualmente.

Come è noto nei generi *Murex*, *Purpura*, *Buccinum* non tutte le uova contenute nelle capsule si sviluppano; la maggior parte di esse viene utilizzata per la nutrizione delle larve. E mentre in *Buccinum* le uova abortive non si segmentano, in *Murex* e *Purpura* la segmentazione si arresta dopo la formazione dei primi blastomeri, ed infine si dissolvono. Non esiste un diretto rapporto tra il numero delle uova e quello delle larve; infatti nelle capsule dei nidosomi marini, nonostante il numero delle uova fosse circa cinque volte maggiore, sono state rinvenute solo un numero doppio di larve. Sicchè in queste ultime una maggiore quantità di uova non raggiunge il completo sviluppo.

Fischer e Raffy [12] non fanno alcun cenno di quelle caratteristiche nervature, che sono invece tanto evidenti nelle capsule da me prese in esame. Questo carattere è sfuggito ai due autori o manca nei *Murex trunculus* di Banyuls e di Endoume? Neanche Lamy [13] ne fa cenno per le capsule appartenenti ai nidosomi provenienti anch'essi da Banyuls e dalle acque della Tunisia.

Fischer [14], a proposito della funzione della ghiandola della porpora, dice che frequentemente il contenuto delle capsule ovifere di *Murex* del Mediterraneo (Banyuls ed Endoume) è di colore violetto per la presenza di porpora. Aprendo delle capsule incolori, egli dice di avere osservato che il loro contenuto versato su un vetrino, a contatto con l'aria e sotto l'azione della luce, virava intensamente verso il violetto. E le stesse capsule aperte non tardavano ad emettere un odore di solfuro di allile, che viene appunto liberato durante le successive trasformazioni cui va incontro la sostanza purpurigena. Il viraggio avrebbe luogo non solo nelle capsule con embrioni, ma anche in quelle contenenti uova non ancora segmentate. L'A. viene così alla conclusione che la secrezione della ghiandola della porpora si mescola con la deposizione, e le uova si sviluppano in un mezzo ricco di sostanza purpurigena.

Nonostante Fischer si meravigli quasi che il fenomeno sia sfuggito ai precedenti osservatori, debbo rilevare che nelle deposizioni di *Murex trunculus* del lago Faro, dello stretto di Messina e del litorale di Mortelle da me prese in esame non è stato riscontrato il fenomeno da lui descritto, sicchè si deve escludere che queste capsule contengano porpora.

(12) Loc. cit.

(13) Loc. cit.

(14) P. H. Fischer, *Sur le rôle de la glande purpurigène des Murex et des Pourpres.* «C. R. Accad. des sciences», vol. 180, 1925.

Patologia vegetale. — *Le specie di Tilletia del frumento esistenti in Italia*[1]. Nota di V. Grasso, presentata[2] dal Corrisp. G. Negri.

Si è affermato finora che la carie del frumento in Italia è prodotta da due specie di *Tilletia*: la *T. levis* Kühn (= *T. foetens* Berck. et Curt.) e la *T. tritici* (Bjerk.) Winter.

Dai miei studi, intrapresi da oltre un anno sulla biologia di queste specie, sulla loro diffusione e sui mezzi di lotta per combatterle, è risultato che in Italia la carie del frumento è prodotta anche da altre due specie: la *T. triticoides* Savulescu e la *T. intermedia* Gassner. Queste specie, come è noto, sono state scoperte rispettivamente in Romania nel 1942 e in Turchia nel 1936.

Dall'esame di una parte dell'abbondante materiale proveniente da diverse regioni d'Italia, ho potuto stabilire per ciascuna specie le seguenti caratteristiche morfologiche e biometriche:

T. levis Kühn (= *T. foetens* Berck. et Curt). – Su 80 provenienze esaminate è diffusa in tutte, prevalente in 67 dell'Italia settentrionale, centrale, meridionale ed insulare. Ha clamidoconidi bruni, a parete liscia, del diametro di μ 17,80–18,00, Di forma diversa: sferica, allungata, ovale, tetraedica (fig. 1). Può trovarsi sola, come nella maggior parte dei casi, o mista nella stessa spiga o cariosside ad altre specie.

T. triticoides Savulescu. – Finora questa specie da noi era stata confusa con *T. tritici*, così come era accaduto in Romania, ma, per le sue caratteristiche morfologiche, va considerata come una specie distinta. Tra le 80 provenienze è diffusa in 20 e prevalente in 9 di esse: come nei grani di Bergamo (var. Salto) in quelli di Modena (var. Todaro 218), di Pietramelara–Firenze (var. Frassineto), di Rieti (var. omonima), di Lucca (var. Virgilio) ecc. Ha clamidoconidi bruni sferici quasi uguali a quelli della specie precedente; del diametro di μ 18,25–20,40. Ha la parete echinulata con altezza delle creste da μ 0,5 a 0,7; le areole larghe da μ 6,30 a 5,40 in un numero variabile fra 45 e 55 (fig. 2). Nella maggior parte dei campioni l'ampiezza delle areole e il loro numero sono uguali a quelli della *T. tritici*, ma in alcuni (var. di grani provenienti da Bergamo e da Lucca), le areole sono più strette e numerose fino a 65 e quindi non così numerose da richiedere un riferimento ad altra specie.

Sebbene Savulescu riferisca come numero minimo delle areole di questa specie 36, nel materiale italiano da me esaminato il minimo è 45. Questa

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Osservatorio per le malattie delle piante annesso all'Istituto di Patologia Vegetale della Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 16 novembre 1946.

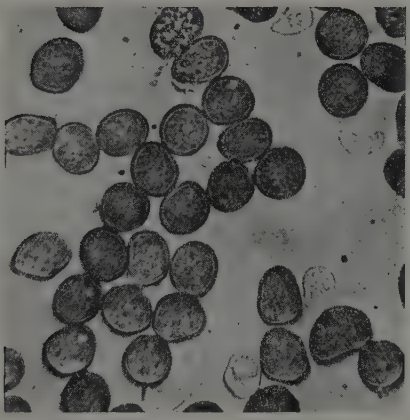


Fig. 1 – *T. Levis* Kühn (= *T. foetens* Berck. et Curt.) ingr. 700 (var. Mentana proveniente da Salerno).

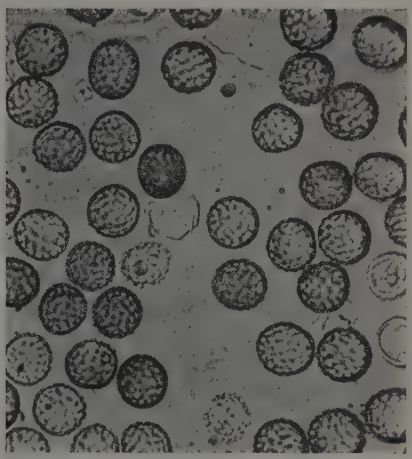


Fig. 2 – *T. triticoides* Savulescu: ingr. 600 (var. Virgilio proveniente da Lucca).

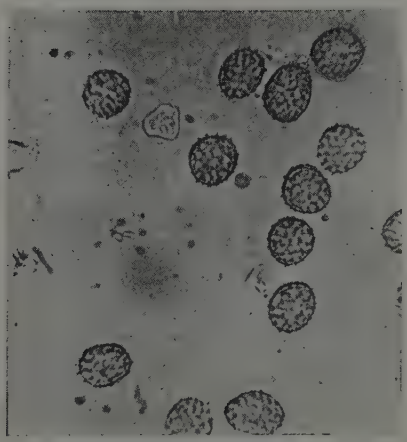


Fig. 3 – *T. tritici* (Bjerck) Winter: ingr. 600 (var. Roma proveniente da Teramo).

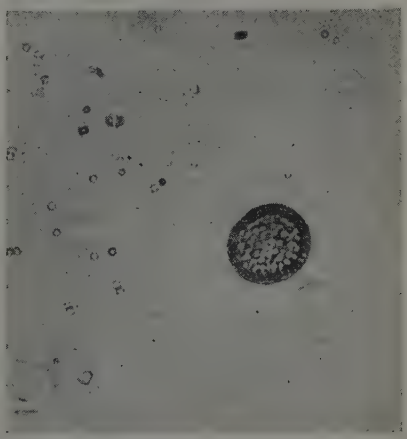


Fig. 4 – *T. intermedia* Gassner: ingr. 1000 (var. Salto proveniente da Bergamo).

specie può trovarsi sola o mista alla *T. intermedia* e *T. levis* (Bergamo) e alla *T. tritici* (Modena, Campobasso).

T. Tritici (Bjerk.) Winter. - Sempre tra le 80 provenienze, è presente in 12 di esse e prevalente nella zona di Teramo (var. Roma), a Pietramelara-Firenze (var. Frassineto), e a Campobasso (var. Cignarellone). Negli altri campioni è in percentuale molto ridotta (1–2%).

Ha clamidoconidi bruni, generalmente sferici, del diametro di μ 21,10-18,20, di dimensione quindi maggiore di tutte le quattro specie italiane. La parete è echinulata con le creste alte da μ 1,80-2,00; le areole, in numero di 35–50, sono larghe da μ 7,30 a 3,20 (fig. 3). Può trovarsi quasi sola come a Teramo (var. Roma) ma generalmente è mista alla specie *T. triticoides* in proporzione ridotta o al massimo del 50% (Campobasso). Può trovarsi anche assieme alla *T. levis* e alla *T. intermedia*.

T. intermedia Gassner. – Presente in 10 provenienze delle 80 e in prevalenza in nessuna. In proporzione ancora più ridotta della *T. tritici*, 0,50%. In generale ha clamidoconidi di grandezza quasi uguale a quelli della *T. levis* del diametro di μ 17,60–18,00. La parete è finamente echinulata con creste di altezza appena percettibile che può calcolarsi a circa μ 0,2–0,1 (fig. 4). Il numero delle areole è molto maggiore di quello osservato nelle specie echinulate precedenti e varia da 100 a 180. Sebbene in minor numero, possiamo trovare nella specie clamidoconidi di grandezza uguale o poco superiore a quelli della *T. tritici* del diametro di μ 21,10–22,20, come nella varietà di grano Frassineto (Pietramelara–Firenze)e in quella Rieti nella provincia omonima. Il Savulescu nelle sue ricerche non accenna a conidi di simile grandezza.

Finora non è stata da me mai trovata pura, ma sempre mista a una a due o a tutte e tre le altre specie e in percentu molto ridotta. Mai è stata osservata mescolanza di *T. intermedia* con sola *T. levis*, ma quando tale mescolanza si verifica è accompagnata almeno anche dalla *T. tritici*.

può quindi stabilire, in base al materiale fino ad ora esaminato, il seguente quadro riassuntivo per la morfologia, biometria, diffusione, prevalenza nelle infezioni delle specie di carie del frumento esistenti in Italia:

Specie	Altezze delle creste in μ	Numero delle areole	Diametro in μ	% di diffusione nelle 80 provenienze	% di prevalenza nelle infezioni
T. levis Kühn	—	—	17,28-18,00	100	83,75
T. triticoides Savulescu	0,5 -0,7	45- 55	18,25-20,40	25	11,30
T. tritici (Bjerk.) Winter	1,80-2,00	35- 50	21,10-18,20	15	3,70
T. intermedia Gassner	0,2 -0,1	100–180	17,60-18,00	12,5	1,25

BIBLIOGRAFIA

G. Gassner, *Ueber Auftreten und Verbreitung von Tillitia tritici und Tilletia foetens in der Turkei.* « Phytopathologische Zeitschrift », Berlin 1938, Bd. XI, Heft 5, S. 469–488, Abb. 1–2.

T. Savulescu, *Das Vorkommen und die Verbreitung der in Rumänien den Weizenstinkbrand hervorbringenden Tilletia-Arten.* « Phytopathologische Zeitschrift », Berlin 1942, Bd. XIV, Heft 2, S. 148–187, Abb. 1–7.

Biologia. — *Il fenomeno fotodinamico studiato con il metodo della parabiosi* [1]. Nota di E. Urbani, presentata [2] dal Corrisp. G. Cotronei.

Il meccanismo d'azione delle sostanze fotodinamiche è stato oggetto di numerosi studi che hanno avuto lo scopo di chiarire i molteplici aspetti del fenomeno fotodinamico indagando l'azione di varie sostanze fluorescenti.

Rimane sempre molto controversa la spiegazione del perchè tanti composti colorati che al buio o a debole luce si rivelano completamente inerti nei riguardi degli organismi più diversi, in presenza della luce, invece, si comportano in modo del tutto diverso riuscendo, per lo più, nocivi alla sostanza vivente [3] [4].

Uno degli aspetti che è stato oggetto di studio è quello riguardante i rapporti che intercorrerebbero tra l'azione fotodinamica e l'ossigeno e pur essendo anche qui i pareri discordi alcuni autori ammettono che l'azione fotodinamica possa aver luogo solo in presenza di questo elemento. Ciò è stato da me confermato nella emolisi da eosina e da altre sostanze fluorescenti [5]. Con una serie di ricerche sulle larve di Anfibi ho studiato i rapporti tra azione fotodinamica ed ossidazioni impiegando varie tecniche [6] e facendo uso, per le prime volte, di un metodo microrespirometrico.

Un secondo punto che è stato oggetto di studi di altri autori è quello del meccanismo d'azione delle sostanze fotodinamiche e come ho già detto la questione non è affatto chiara. Alcuni ammettono la formazione di un ipotetico fotocomposto tossico a spese delle sostanze coloranti in presenza della luce: Menke [7] avrebbe isolato dalla fluoresceina illuminata una foto-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « Battista Grassi » della Università di Roma diretto dal prof. G. Cotronei.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) G. Viale, *Le azioni biologiche delle radiazioni.* Treves, 1934.

(4) G. Guerrini, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1932, VII, 866.

(5) E. Urbani, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1946, VIII, 123.

(6) E. Urbani « Acta », 1945, 15, 131; « Ricerca e Ricostruzione », 1945, 6, 561.

(7) J. F. Menke, « Biol. Bull. », 1935, 68, 360.

fluoresceina attiva anche all'oscurità. Altri invece ricorrono ad ipotesi invero suggestive ma che abbisognano di una certa convalida sperimentale. Così Viale pensa ad una liberazione di energia da parte della sostanza fluorescente colpita dalla luce, energia che sarebbe responsabile dei vari fenomeni che si verificano a carico degli organismi sottoposti all'azione fotodinamica. Tra le ricerche che escludono la formazione di un fotocomposto tossico ricordo quelle molto brillanti di Smetana [8] e quelle anche belle di Rask, Norris e Howell [9].

Il primo ha compiuto un complesso studio sulla azione della ematoporfirina alla luce e fra l'altro ha unito in parabiosi ratti albini iniettati con ematoporfirina, quindi ne ha illuminato uno solo che è morto mentre l'altro è sopravvissuto. L'esperienza starebbe a mostrare che dalla ematoporfirina illuminata non si forma nessuna sostanza tossica che va in circolo.

Rask, Norris e Howell hanno disposto in serie due cuori perfusi con ematoporfirina in adatta concentrazione e ne hanno illuminato uno solo e solo su quello illuminato si è verificato lo *shock* ematoporfirinico mentre l'altro non ha risentito nessun effetto. Ciò starebbe a dimostrare che durante l'illuminazione del primo cuore nessuna sostanza si forma capace di passare attraverso il collegamento nel secondo cuore.

Ho pensato di estendere le sperienze di parabiosi alle larve di Anfibi applicando questo metodo della morfologia sperimentale allo stesso materiale usato nelle mie precedenti ricerche.

Parabiosi. – La tecnica della parabiosi è stata largamente usata in questo Istituto con intenti diversi (Cotronei e Urbani-Mistruzzi [10], Mistruzzi [11]) ed ho impiegato le stesse modalità usate dai precedenti Autori.

Ho sperimentato su due specie di Anuri: la *Rana esculenta* e l'*Hyla arborea* ottenendo gli stessi risultati.

Gli embrioni (dello stesso lotto) sono stati uniti per la coda allo stadio di bottone caudale avendo cura che la zona di unione fosse piuttosto ampia. I parabionti giunti allo stadio larvale, cioè quando il vitello è completamente riassorbito (Cotronei) sono stati posti in una soluzione di eosina 1/5.000 in acqua di fonte e tenuti a luce diffusa per 24-48 hh. durante le quali non hanno mostrato nessun segno di sofferenza. Quindi sono stati esposti alla luce solare diretta (ore antimeridiane del mese di maggio e giugno) avendo cura che la luce colpisse solamente uno dei parabionti rimanendo l'altro schermato da una leggera calotta di alluminio. Naturalmente sono state esposte alla luce solare due coppie di controllo una delle quali in eosina alla detta concentrazione e l'altra in acqua di fonte. Questa esperienza ripe-

(8) H. Smetana, « J. of exp. Med. », 1928, 47, 593.
(9) Rask, Norris e Howell, cit. da Viale.
(10) G. Cotronei e L. Urbani- Mistruzzi, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1946, 1, 869.
(11) L. Mistruzzi, « Acta », 1945, 15, 101.

tuta più volte ha dato i seguenti risultati. La morte della coppia in eosina nella quale tutti e due i parabionti sono illuminati avviene in circa un'ora e non è contemporanea, in genere, nei due soggetti in quanto uno muore prima e l'altro dopo.

Nella coppia con uno dei soggetti schermato si ha la morte del soggetto illuminato mentre l'altro conserva una vitalità normale e separato con un paio di forbicette dal suo compagno può continuare a vivere normalmente. Vi sono stati però dei casi nei quali la morte del parabionte illuminato è stata seguìta a distanza di qualche ora da quella del parabionte schermato. Ho pensato che ciò potesse essere dovuto a sofferenza del soggetto schermato costretto durante l'esposizione alla luce sotto la calotta di alluminio che benchè leggera esercita una certa pressione.

Fig. 1

Era perciò necessario abolire lo schermo in modo che i parabionti fossero liberi di muoversi e di nuotare per la durata dell'esperimento e ciò è stato fatto nel modo seguente.

Anzichè sensibilizzare i soggetti con eosina ho impiegato due coloranti vitali: il rosso-neutro e il solfato di bleu-Nilo che posseggono una spiccata attività fotodinamica. Dei due soggetti uno solo è stato colorato usando una tecnica molto semplice. In una piastra di paraffina sono stati scavati due pozzetti contigui separati soltanto da una sottile parete. La coppia da colorare è stata narcotizzata con alcool triclorobutilico 1/4.000, 1/6.000 e poi è stata disposta in modo che uno dei soggetti pescasse in un pozzetto ripieno di una soluzione del colorante alla concentrazione di 1/50.000 circa e l'altro nel secondo pozzetto pieno di acqua. In questo modo le code di unione venivano a poggiare sulla parete divisoria dei due pozzetti e in circa 30' uno dei soggetti assumeva la colorazione mentre l'altro, se l'operazione veniva eseguita con una certa accortezza, rimaneva completamente incoloro. Posti in acqua di fonte si aveva una parabiosi (fig. 1) nella quale uno dei soggetti era colorato in rosso o in bleu e l'altro incoloro.

Esposta la coppia alla luce solare diretta con i relativi controlli dopo circa 30' si aveva la morte del soggetto colorato mentre l'altro rimaneva

vitale. Separati i parabionti, quello non sensibilizzato presto cicatrizza la superficie di taglio e continua a vivere. Anche non operando la separazione il soggetto non colorato continua a vivere per diverse ore trascinandosi appresso con il nuoto il parabionte morto.

Queste esperienze di parabiosi su larve di Anfibi eseguite allo scopo di studiare il meccanismo di azione delle sostanze fotodinamiche hanno dato risultati che concordano pienamente con le osservazioni compiute da Smetana e da Rask, Norris e Howell.

Le presenti ricerche stanno a dimostrare che nella azione fotodinamica da eosina, rosso-neutro, solfato di bleu-Nilo non si ha formazione di fotocomposti tossici rapidamente diffusibili attraverso i tessuti e le connessioni vascolari esistenti tra due larve di Anfibi unite in parabiosi per la coda, o per lo meno se si formano di questi ipotetici fotocomposti essi non sono in quantità tale da causare la morte del parabionte non sensibilizzato.

Biologia. — *Sulla rigenerazione del midollo spinale dei Rettili* [1]. Nota di MARIA MAROTTA, presentata [2] dal Corrisp. G. COTRONEI.

Fraisse (1883) [3] e Barfurth (1891) [4] esaminando il meccanismo di rigenerazione della coda degli Urodeli, osservarono che la rigenerazione dei tessuti, compreso il midollo spinale, avviene per proliferazione dei tessuti del moncone. Gli stessi autori e Goldfarb (1891) [5], Raposo (1922) [6], Duesberg (1922-24-25) [7], prendendo in particolare considerazione i processi riguardanti il sistema nervoso, ammettono concordemente che la rigenerazione del midollo avvenga per moltiplicazione delle cellule che tappezzano il canale ependimale limitando quasi completamente a questa attività il processo rigenerativo. Recenti ricerche condotte da Stefanelli e Capriata [8] hanno messo in luce altri meccanismi che completano e chiariscono la rigenera-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «Battista Grassi» dell'Università di Roma, diretto dal prof. G. Cotronei.

(2) Nella seduta del 14 dicembre 1946.

(3) P. FRAISSE (1885), *Die Regeneration von Geweben und Organen bei den Wierbeltieren besonders bei Anphibien und Reptilien.* Fischer, Berlin.

(4) D. BARFURTH (1932), *Zur Regeneration der Gewebe.* «Arch. f. mikr. Anat.», 97.

(5) A. Y. GOLDFARB (1909), *The influence of the nervous system in Regeneration.* «J. Exper. Zool.», 7.

(6) L. R. RAPOSO, (1922), *Sur la régénération du système nerveux central et périphérique de la queue chez des Urodeles adultes.* «C. R. Soc. Biol.» 87.

(7) J. DUESBERG (1922), *Sur la régénération du sistème nerveuse central et des ganglions spinaux dans la queue des Anphibiens.* «C. R. Ass. Anat.», 17° Congr.

(8) A. STEFANELLI, A. CAPRIATA (1943), *La rigenerazione del midollo spinale nella coda rigenerata dei Tritoni.* «Ricerche di Morfologia», voll. 21-22.

zione midollare. Essi distinguono un processo degenerativo nelle prime 48 ore; successivamente un processo migratorio che porta alla chiusura del tubo beante, quindi un processo proliferativo e infine un processo differenziativo. Il processo proliferativo avviene a carico degli elementi migrati dalla zona ependimale del moncone che evidentemente si conservano in una condizione indifferenziata a carattere embrionale; ma la maggiore attività rimane localizzata all'apice del tubo nervoso neoformato che assume l'aspetto di un meristema apicale. Si forma così un lungo tubicino con andamento più o meno ondulato e con pareti sottili e lume ampio che è dilatato ad ampolla all'estremità caudale. Solo successivamente migrano lungo il midollo neoformato fibre nervose del moncone e, col differenziamento delle cellule nervose nuove, si formano fibre nervose che costituiscono la sostanza bianca del nuovo midollo; per migrazione di elementi dal tubo nervoso neoformato si formano anche i gangli spinali nuovi.

Nei Rettili invece la facoltà di rigenerazione sembra limitata. Le lucertole sono capaci di rigenerare la loro coda e questi fenomeni di rigenerazione sono conosciuti grazie ai lavori di Slotopolskj (1922)[9], Woodland (1922)[10], White (1925)[11]. Dai lavori di Provazeki (1901), Naville (1922-24), anche essi sulla rigenerazione della coda dei Rettili, risulta che tutti i tessuti della parte rigenerata derivano dal vecchio tessuto corrispondente. Duges (1929) osservò che lo scheletro neoformato è costituito da un tubo cartilagineo continuo. Gachet (1934), facendo esperimenti su vari Sauri ha osservato che il contenuto del tubo cartilagineo rappresenta la continuazione del midollo spinale della vecchia coda. Harrison (1898) ha dimostrato che nelle larve di Anuri il comportamento del sistema nervoso nella rigenerazione della coda costituisce una via di mezzo tra quello che si osserva negli Urodeli e nei Rettili; infatti all'innervazione della coda rigenerata partecipano tanto gli ultimi gangli della coda vecchia, quanto nuovi nervi che fanno capo al midollo integralmente rigenerato. In seguito Terni (1919)[12], che ha compiuto esperimenti sul *Gongylus*, ha osservato che lo scheletro rigenera sotto forma di un cilindro cartilagineo cavo, il quale percorre l'asse della nuova coda riducendosi a poco a poco di calibro. Nel lume del tubo cartilagineo è contenuto il cordone nervoso rigenerato, avvolto da uno strato di connettivo fibrillare. Nella zona periferica si trovano fascetti di cilindrassi nudi provenienti dalle fibre stroncate con l'amputazione della coda. Egli ritiene che queste fibre rigenerate terminino nel rigenerato nervoso stesso.

(9) B. Slotopolsky, B (1922) « Zool. Jahrts. (Anat.) », XLIII, 1922; « Pflügers Arch. », CXCIV, 1922.

(10) W. N. F. Woodland, (1922) « Quart. Journ. Micr. Sc. », LXV.

(11) Ch. P. White (1925), « Journ. Publ. Bact. Edinbourg », XXVIII.

(12) T. Terni, (1919) *Sulle correlazioni tra ampiezza del territorio di innervazione e grandezza delle cellule gangliari; Ricerche sui gangli spinali che innervano la coda rigenerata dei Sauri.* « Arch. It. Anat. Embr. », 17.

Quindi nella coda del *Gongylus* il midollo spinale non provvede all'innervazione della nuova coda che invece, secondo Terni, è assunta dalle ultime tre paia di nervi spinali del moncone superstite della coda vecchia.

In base a queste ricerche è risultato evidente l'interesse a riprendere i lavori su questo punto per indagare le modalità di rigenerazione del midollo così ridotto e prendere in considerazione le cause che ne limitano l'accrescimento e il differenziamento.

Gli esperimenti da me condotti sulle lucertole hanno chiarito alcuni punti di questa rigenerazione, mettendo in risalto alcuni fatti nuovi collegati alle ricerche di Stefanelli e Capriata sugli Urodeli [13]. Era interessante vedere se il meccanismo di rigenerazione del midollo degli Urodeli si ripetesse nei Sauri, anche se tale processo doveva limitarsi a una rigene-

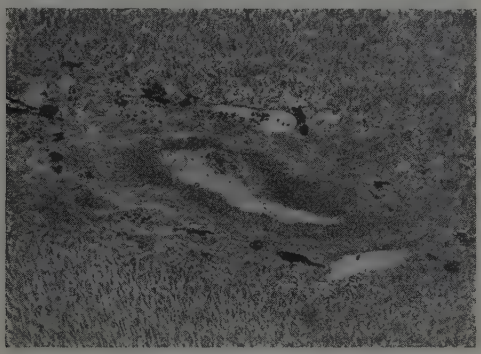


Fig. 1. – *Lacerta muralis*. Coda rigenerata da 10 giorni (luglio). Notare il lume ampio e irregolare del midollo neoformato, lo strato ependimale a più file e la sostanza bianca formata da fibre provenienti dal moncone.

razione meno cospicua. L'osservazione dei preparati di materiale rigenerato, prelevato a vari tempi da individui adulti di *Lacerta muralis*, hanno dimostrato come la rigenerazione del midollo nei Sauri sia invece più complessa di quello che era noto, e permettano di conciliare diverse opinioni sulla entità di tale rigenerazione.

Da queste mie prime osservazioni risulta che nei primi quindici giorni il midollo rigenera con una modalità che ricorda molto quella del midollo codale rigenerato dei Tritoni. Anche qui si osservano fenomeni migratori e di riproduzione cellulare a carico di elementi indifferenziati provenienti dalla zona ependimale. Anche qui si ha la proliferazione di fibre dal moncone nella porzione che si va neoformando. Il coagulo sanguigno che protegge la superficie di sezione del midollo, ben visibile nei primi due giorni,

(13) Ringrazio il prof. Alberto Stefanelli che mi ha guidata in queste ricerche.

viene poi assorbito e le cellule migranti si dispongono a chiudere la cavità ependimale beante venendo a delimitare una cavità comunicante con l'ependima, notevolmente ampia all'inizio e che successivamente va riducendosi di ampiezza. L'allungamento del tubo midollare neoformato avviene per attiva proliferazione di cellule delle pareti e dell'apice in modo molto simile a quello descritto negli Urodeli da Stefanelli e Capriata. La forma del midollo neoformato è molto irregolare e così pure la cavità del lume; la parete formata nei primi giorni da un solo strato di cellule diventa pluristratificata (fig. 1). Le fibre provenienti dal moncone rivestono questa zona cellulare venendo a costituire uno strato bianco abbastanza spesso. Circa al ventesimo

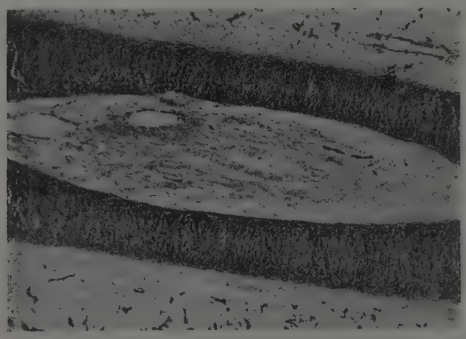


Fig. 2. – *Lacerta muralis*. Coda rigenerata da 30 giorni. Notare il tubo cartilagineo e la riduzione del midollo neoformato.

giorno incomincia, con un processo di condrificazione del connettivo del cono rigenerativo, a formarsi lo scheletro della nuova coda. Esso a differenza di quello degli Anfibi Urodeli, non si sviluppa metamerico ma bensì come un tubo di cartilagine fibrosa continuo, che riveste il midollo neoformato come un astuccio. Le suddivisioni metameriche sono invece presentate dalla muscolatura neoformata. Con l'estensione di questo processo e la completa chiusura del midollo rigenerato incominciano a verificarsi fenomeni involutivi nel midollo spinale che si era rigenerato. Le fibre provenienti dal moncone e che costituiscono la sostanza bianca del midollo neoformato, vanno limitandosi sino a scomparire completamente nelle code rigenerate da più tempo (3 mesi) (figg. 2-3). Le cellule ependimali che avevano raggiunto una stratificazione plurima si riducono successivamente a costituire una parete monostratificata cilindrica di elementi ependimali, e non si assiste a nessun differenziamento nervoso. Tale regressione va ricercata più che per una diretta compressione dell'astuccio cartilagineo sul midollo, dato che tra la cartilagine e il midollo

vi è un ampio spazio di tessuto connettivo lasso, nell'isolamento funzionale del midollo.

Le condizioni da me messe in evidenza fanno pensare che il diverso giudizio degli Autori sulla entità di rigenerazione del midollo caudale dei Sauri dipende dal tempo dall'atto operativo in cui è stata fatta l'osservazione e dalla stagione, dato che questo tempo è assai variabile nei vari periodi dell'anno.

Dalle nostre ricerche si desume che nella rigenerazione della coda dei Sauri il meccanismo di rigenerazione del midollo avviene con le stesse

Fig. 3. – *Lacerta muralis.* Coda rigenerata da 3 mesi. Notare il midollo neoformato ridotto a un solo strato di cellule ependimali cilindriche.

modalità studiate nel midollo spinale codale degli Anfibi Urodeli. Mentre però in questi il sistema scheletrico della coda si ripete metamericamente e il midollo neoformato contrae, con i prolungamenti di cellule nervose, rapporti con i territori d'innervazione della nuova coda neoformata, nei Sauri non c'è suddivisione metamerica e il sistema scheletrico, come abbiamo già detto, è costituito da un tubo di cartilagine fibrosa continuo. Questo procedimento esclude ogni possibilità funzionale al midollo rigenerato e assistiamo in un secondo tempo all'involuzione del midollo che in un primo tempo si era notevolmente rigenerato.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente rivolge un cordiale saluto ai nuovi Soci che sono stati chiamati a far parte dell'Accademia e comunica che tra essi i Soci Bompiani, Bonino, Carrelli, Carnera, Giorgi, Mario Giacomo Levi, Signorini, Ducceschi, Rovereto, Panichi e Trabacchi, hanno inviato ringraziamenti per la loro nomina a Soci Nazionali e i Soci Volta, Pistolesi, Chiarugi, Cantelli, Cotronei, Zagar, Bakunin, Boaga, Meneghetti, Beccari, Puntoni, Lombroso, d'Erasmo, Vernoni e Persico, hanno inviato ringraziamenti per la loro nomina a Soci Corrispondenti.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Armellini presenta in omaggio il suo volume dal titolo « Fondamenti scientifici dell'astronomia » e ne parla brevemente.

Il Presidente Castelnuovo ringrazia il Socio Armellini dell'omaggio fatto all'Accademia.

L'Accademico Segretario Bordoni presenta le opere giunte in dono, tra le quali segnala in particolar modo il II volume della Serie III dell'opera omnia di Leonardo Eulero.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci Armellini, Bargellini, Bompiani, Bordoni, Cotronei, Lombardi e Signorini.

L'Accademico Segretario Bordoni legge l'elenco delle Note inviate dai Soci prima della seduta.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Perrier C., « Sulla regola di Zambonini ».

Baffoni G., « Sulla trasformazione del sesso nei crostacei decapodi » (pres. dal Corrisp. G. Cotronei).

Battaglia E., « La " Semigamia ", singolare comportamento del nucleo spermatico nelle uova diploidi delle specie apomittiche del genere Rudbeckia (Asteraceae) e conseguente embriogenesi di tipo chimerico » (pres. dal Corrisp. A. Chiarugi).

Bellinzachi F., « Sulla interazione tra semi vegetali in germinazione ». Nota I (pres. dal Socio P. Rondoni).

Bianchi G., « Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. Sistema rame–mercurio e sistema ferro–mercurio » (pres. dal Socio O. Scarpa).

Bigi B., « La " piccola variazione " di una curva algebrica reale connessa con speciale riguardo al caso di Harnack ». Nota I (pres. dal Socio L. Berzolari).

Bigi B., « La " piccola variazione " di una curva algebrica reale connessa con speciale riguardo al caso di Harnack ». Nota II (pres. dal Socio L. Berzolari).

Delorenzi E., « Fenomeni di correlazione statistica nel numero delle cellule gangliari spinali nei due antimeri » (pres. dal Socio G. Levi).

Giolitti G., « Intorno all'azione dell'ormone follicolare sulle fermentazioni batteriche » (pres. dal Socio F. Silvestri).

Lovera G., « Sulla spaziatura dei granuli lungo traccie di particelle ionizzanti nelle lastre fotografiche » (pres. dal Corrisp. A. Pochettino).

Magenes E., « Sopra un problema di T. Sàtô per l'equazione differenziale $y'' - f(x, y, y')$ ». Nota I (pres. dal Corrisp. G. Sansone).

Magenes E., « Sopra un problema di T. Satô per l'equazione differenziale $y'' - f(x, y, y')$ ». Nota II (pres. dal Corrisp. G. Sansone).

Mignosi G., « Risoluzione apiristica dei sistemi di Equazioni Algebriche nei corpi finiti » (pres. dal Corrisp. M. Cipolla).

Nebbia G., « Ulteriori precisazioni sull'uso dei coefficienti di Coriolis nelle equazioni del moto di corrente » (pres. dal Socio U. Bordoni).

Reverberi G. e Minganti A., « Sul centro di differenziazione del cervello, situato nei blastomeri vegetativi anteriori dell'uovo di Ascidie dello stadio 8 » (pres. dal Corrisp. G. Cotronei).

Rollero A., « Punto flecnodale delle superficie » (pres. dal Socio E. Bompiani).

Vinaccia G., « Il poliseliometro Vinaccia » (pres. dal Socio G. Armellini).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 dicembre 1946

ARMELLINI Giuseppe. — *I fondamenti scientifici dell'Astronomia.* Milano, Editore Ulrico Hoepli, 1946. Pp. 320, in 8°, con 44 fig.

EULERUS Leongardus. — *Rechenkust, accesserunt Commentationes ad Physicam generalem pertinentes* (Opera omnia sub auspiciis Societatis scientiarum naturalium Helveticae, s. III, vol. II). Genevae, 1942. Pp. 429, in 4°.

U. B.

ERRATA CORRIGE

Nella Nota di RUFFO e CENNAMO, *Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno*, fasc. 3-4 (1946), a p. 415, riga 10 dopo la tabella II,

invece di: *glicogeno* leggi: *glicoso*

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

ABELE M., Studio energetico in regime transitorio di un bipolo lineare passivo, *1321*.

ABETTI G., Altezza della cromosfera nel 1943 ed andamento del ciclo solare, *27*.

AGOSTINELLI C., Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità, per i quali esiste la funzione lagrangiana. Nota I, *182*.

— Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità per i quali esiste la funzione lagrangiana. Nota II, *364*.

ALIBRANDI A., Comportamento di un riflesso condizionato motorio sotto l'azione dell'acetilcolina, *659*.

AMALDI E., BOCCIARELLI D., CACCIAPUOTI B. N. e TRABACCHI G. C., Effetti di diffrazione nello sparpagliamento dei neutroni veloci, *29*.

AMALDI E. e FERRETTI B., Contributo alla teoria dell'acceleratore ad induzione, *85*.

AMALDI U., Commemorazione del Socio T. LEVI-CIVITA, *1130*.

AMERIO A., Temperature e reazioni nucleari, *254*.

— Sulle pressioni interne del Sole e sulla causa delle protuberanze solari, *1018*.

AMERIO L., Sull'integrazione delle equazioni lineari di tipo ellittico, *175*.

— Sull'equazione del calore. Nota I, *346*.

— Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Nota I, *352*.

— Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Nota II, *505*.

AMERIO L., Sull'equazione del calore. Nota II, *544*.

AMPRINO R. e GODINA G., Ricerche comparative sulla struttura delle ossa dei Vertebrati, *648*.

AMPRINO R., vedi LEVI-MONTALCINI R.

AQUARO G., Su un problema riducibile di integrazione di una particolare equazione a derivate parziali, *530*.

— Sull'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie, *715*.

ARMELLINI G., Sul secondo problema fondamentale della Cosmogonia, *486*.

ARMELLINI CONTI GABRIELLA., La pioggia a Roma negli ultimi cento anni, *377*.

ASCOLI G., Nuclei isotropi e loro autofunzioni, *1167*.

B

BACCAREDDA M. e GIACOMINI A., Sulla compressibilità adiabatica degli isomeri etilenici determinata mediante gli ultrasuoni, *401*.

BAIADA E., Alcune considerazioni sull'esistenza della soluzione delle equazioni alle derivate parziali, *296*.

BARDUCCI I., Effetto di una cavità chiusa sulle autofrequenze di una piastra incastrata, *206*.

— Effetto della viscosità e della conduzione termica in un risuonatore acustico, *764*.

BARGELLINI G., Commemorazione del Corrispondente GIUSEPPE TOMMASI, *820*.

BARGELLINI G., DEL PIANTO E. e MARINI-BETTOLO G., Sull'attività antibatterica di due acidi lichenici: acido usnico ed acido vulpinico, *1252*.

BARSOTTI I., Studi sopra le algebre senza base finita, *1187*.

Bassi P., vedi Rostagni A.
Beneo E., Il problema strutturale del Monte Soratte (Lazio), *990*.
Berzolari L., Commemorazione del Corrispondente Annibale Comessatti, *810*.
Bianchi A., Commemorazione del Socio Giovanni D'Achiardi, *1214*.
— Commemorazione del Socio Giovanni Boeris, *1216*.
Bianchi G., Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi, *786*.
— Nuove esperienze nel trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi – Sistemi Rame-Stagno, Rame-Piombo, Rame-Cadmio, *1200*.
Birindelli C., Su una generalizzazione della convergenza in media. Nota I, *325*.
— Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazioni. Nota I, *515*.
— Su una generalizzazione della convergenza in media. Nota II, *526*.
— Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazioni. Nota II, *673*.
Boaga G., Sulla compensazione rigorosa per direzioni delle catene geodetiche, *199*.
— Su talune relazioni ricorrenti tra le matrici normali angolari, *389*.
Bocciarelli D., vedi Amaldi E.
Bompiani E., Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica, *16*.
— Le connessioni tensoriali, *478*.
— Connessioni del secondo ordine, *483*.
— Enti geometrici definiti da sistemi differenziali, *887*.
— Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno ∞^k rette, *1001*.
Bordoni P. G., Equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici, *1324*.
Bordoni P. G. e Gross W., Massa di radiazione di un diaframma rigido munito di schermo acustico chiuso, *395*.
Borsellino A. e Caldirola P., Sulla interazione elettromagnetica ritardata di due particelle di Dirac–Pauli, *969*.

C

Cacciapuoti B. N., vedi Amaldi E.
Caldirola P., Vedi Borsellino A.
Caligo D., Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato, *534*.
Caloi P., Onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso, stratificato, *745*.
Cambi E., Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficiente periodico reciproco di quello di Mathieu. Nota I, *1035*.
— Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficente periodico reciproco di quello di Mathieu. Nota II, *1181*.
Carrelli A., Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota I, *493*.
— Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota II, *907*.
— Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota III, *1012*.
— Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota IV, *1242*.
Cassinis G., Commemorazione del corrispondente Ubaldo Barbieri, *1222*.
— Sulla teoria degli strumenti goniometrici, *1233*.
Castelnuovo G., Per la ripresa dei lavori dell'Accademia, *3*.
— Per la morte di Federico Enriques, *671*.
— Per la inaugurazione della sala Tullio Levi-Civita, *1129*.
Castoldi L., Sulla curvatura media di una varietà immersa in un'altra, *928*.
— Caratterizzazione intrinseca degli spazi riemanniani in cui una funzione della distanza geodetica da un punto generico soddisfa l'equazione generalizzata di Laplace, *1028*.
— Sul potenziale di un doppio strato non uniforme, *1051*.
— Sopra alcune proprietà caratteristiche delle V_n totalmente geodetiche rispetto ad una V_m ambiente, *1064*.
Catani M. L., vedi Righini G.,
Cattaneo C., Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità. Nota I, *66*.

CATTANEO C., Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità. Nota II, *728*.
CESARI L., Sulla moltiplicazione delle serie doppie, *289*.
— Un complemento alla Nota «Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie », *292*.
— Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue, *509*.
— Sulle serie doppie di Fourier, *1173*.
— Un criterio per la misurabilità degli insiemi, *1256*.
CENNAMO C., vedi RUFFO A.
CHECCHIA-RISPOLI G., Nuove osservazioni geologiche sulla serie attraversata dal fiume Celone (Capitanata), *151*.
CHIRICO M., Azione combinata di stimolo meccanico (farina fossile) e chimico (3, 4-benzopirene) sul connettivo, *239*.
CICALA P., Le tensioni caratteristiche per il guscio cilindrico, *735*.
— Lo stato di tensione nel guscio cilindrico presso una accidentalità strutturale o di carico, *1069*.
CIMINO M., Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario eseguita in primo verticale. Nota I, *72*.
— Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, eseguita in primo verticale. Nota II, *383*.
— Una conferma del ciclo solare ventiduennale dedotta dalle oscillazioni dei diametri solari, *624*.
— Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario eseguita in primo verticale. Nota III, *628*.
— Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma. Nota I, *1295*.
CINQUINI S., Sopra l'esistenza dell'estremo nei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore, *500*.
— Sopra la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore, *586*.
CISOTTI U., Un singolare tensore doppio isotropo, *19*.
COLACEVICH A., Un nuovo tipo di telescopio astronomico, *610*.
— Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali. Nota I, *831*.
— Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali. Nota II, *952*.
CONTI S., Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A. O.). Nota I, *218*.
— Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A. O.). Nota II, *419*.
— Su alcune specie di melobesie (Corallinacee) del Miocene di Ponzone (Acqui), *1088*.
CORINALDESI E., Sulla misura della densità dei neutroni termici, *982*.
CORTELLESSA M. L., Ricerche sull'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale degli Anfibi, *1352*.
CORTINI G. e MOLINA F., Determinazione del numero medio di urti che un neutrone termico subisce in acqua prima della cattura, *774*.
COTRONEI G. e URBANI-MISTRUZZI L., La costituzione zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli, *869*.
CROCCO G. A., Sulla applicazione dell'energia atomica alla navigazione interplanetaria, *142*.
— Il superamento della barriera del suono in Aviazione. Nota I, *895*.
— Il superamento della barriera del suono in Aviazione. Nota II, *1006*.
— Il superamento della barriera del suono in aviazione. Nota III, *1155*.

D

D'ANCONA U., Ancora una volta in tema di fibre muscolari, miofibrille estrie, *805*.
DAL PIAZ G., Commemorazione del Socio CARLO FABRIZIO PARONA, *1217*.
DE LERMA B., Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni. Nota I, *1343*.
DELLA CORTE M., Sul secondo massimo della curva degli sciami della radiazione cosmica, *974*.
DEL PIANTO E. e MARINI-BETTOLO G. B., Nuove ricerche sull'azione batteriostatica dei chinoni, *783*.

DEL PIANTO E., vedi MARINI-BETTÒLO G. B.
— vedi BARGELLINI G.
DEOTTO R., L'azione del freddo sulla respirazione batterica. Nota II, *241*.
DULBECCO R., Sviluppo di gonadi in assenza di cellule sessuali nell'embrione di pollo. Sterilizzazione completa mediante esposizione a raggi γ allo stadio di linea primitiva, *1211*.
DULZETTO F., Osservazioni sulla deposizione di «Murex trunculus», *1356*.

F

FRACASTORO M. G., Sul meccanismo di formazione dell'immagine latente negli strati fotografici, *633*.
— La protuberanza eruttiva del 24 agosto 1946, *1198*.
FAEDO S., Sui problemi d'equilibrio della Fisica-Matematica, *343*.
FANO G., Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni, *463*.
FRANCHETTA A., Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche. Nota I, *49*.
— Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche. Nota II, *162*.
FRANCHETTI S. e GIOVANNOZZI M., Sullo spettro dei raggi β del potassio, *1078*.
FERRETTI B., vedi AMALDI E.
FICHERA G., Sull'integrabilità in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado, *540*.
FLORENZANO G., Un caso di svernamento allo stato conidico di Mycosphaerella sentina (Fuck.) Schroet. su foglie morte di pero, *437*.
FRONTALI N., Trapianto dell'occhio tra embrioni e larve irradiati con raggi X e larve normali, *865*.

G

GALAFASSI V. E., Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali. Nota I, *827*.
— Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali. Nota II, *922*.
GEROLA F. M., Escreti fungini e mitosi cellulari, *801*.
GHIZZETTI A., Sopra due particolari problemi misti di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace, *40*.
— Sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati, *214*.
— Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito, *691*.
GIACOMINI A., vedi BACCAREDDA M.
GIALANELLA L., Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere. Nota II, *78*.
— Sulla distribuzione dei poli delle orbite dei piccoli pianeti, *193*.
— Fotometria visuale e indice del colore della «Nova Aquilae 1945», *616*.
GIOVANNOZZI M., vedi FRANCHETTI S.
GIULIANO L., Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano, *1264*.
GODINA G., vedi AMPRINO R.
GOIDÀNICH G., «Peyronellaea», nuovo genere di deuteromiceti (Nota preliminare), *449*.
— Un interessante tipo di butteratura parassitaria delle mele, *654*.
— Sulle cause dei cedimenti nella pavimentazione del Palazzo Corsini, sede dell'Accademia Nazionale dei Lincei, *872*.
GOLA G., La nutrizione dei meristemi e l'ingiallimento dei tessuti verdi, *262*.
— Commemorazione del Corrispondente NAZZARENO STRAMPELLI, *1224*.
— Commemorazione del Socio ENRICO CARANO, *1225*.
— Commemorazione del Corrispondente LIONELLO PETRI, *1226*.
GRASSO V., Le specie Tilletia del frumento esistenti in Italia, *1362*.
GRIOLI G., Relazioni quantitative per gli autovalori di un'equazione integrale omogenea di seconda specie, *522*.
— Vibrazioni e pressioni critiche delle piastre anulari soggette a pressione radiale, *599*.
GROSS W., vedi BORDONI P. G.
GROSSETTI E., Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi di notevole viscosità, *1315*.

J

JANNONE G., Contributi alla conoscenza morfo-biologica e sistematica dell'ortotterofauna dell'Eritrea. – IV. Notizie preliminari sull'evoluzione biologica durante l'anno della « Symbella biplagiata » Bolivar (« Orthop., Eumastacidae ») vivente nelle regioni di Altopiano, *426*.

K

KRALL G., Sicurezza rispetto ad una associazione dei tre casi di instabilità di Eulero, di Michell-Prandtl e di Reissner, *592*.

— Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose. Nota I, *937*.

— Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose. Nota II, *1272*.

— Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una volta autoportante. Nota I, *1281*.

L

LEVI G., Espansione in superficie ed accrescimento individuale delle cellule, *267*.

— Commemorazione del Socio GIULIO CHIARUGI, *1218*.

LEVI-MONTALCINI R., Ricerche sperimentali sulla determinazione del placode otico nell'embrione di pollo, *443*.

— Ricerca sperimentale sull'origine dei gangli del glosso-faringeo e del vago nell'embrione di pollo, *1349*.

LEVI-MONTALCINI R. e AMPRINO R., Ricerche sperimentali sull'origine dei neuroni del ganglio ciliare nel pollo, *439*.

LIBERTI A., vedi SARTORI G.

LOMBARDO-RADICE L., Gli automoduli primitivi delle algebre legate a gruppi abeliani di ordine finito, *686*.

LORETI F., Striatura trasversale della fibra muscolare e precipitazione ritmica, *434*.

LORIA G., Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonali, *7*.

LOVERA G., Sulle coincidenze triple accidentali, *964*.

M

MAXIA A., Geometria affine di alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali studiati da L. Bianchi, *169*.

MAXIA C., Sopra alcuni calcari a Nord di Roma, *107*.

— Nuova formazione pleistocenica di facies limnica presso Rignano Flaminio (Tuscia Romana), *1334*.

MANACORDA T., Soluzioni periodiche di una equazione differenziale non lineare, *1046*.

MARCANTONI A., Su alcune formule esplicite nella compensazione per direzioni delle catene di triangoli e dei sistemi centrali semplici, *1306*.

MARCOLINI B. M., Sul pigmento di alcuni lamellibranchi; ricerche sui carotenoidi dei Pecten e dei Cardium, 115.

MARINI-BETTÒLO G. B. e DEL PIANTO E., L'azione batteriostatica dei chinoni e il meccanismo d'azione di alcune sostanze antibiotiche, *90*.

MARINI-BETTÒLO G. B., vedi DEL PIANTO E.

— vedi BARGELLINI G.

MAROTTA M., Sulla rigenerazione del midollo spinale dei Rettili, *1367*.

MAZZA L., Sulle lastre fotografiche per l'ultravioletto estremo, *1331*.

MERLI L., Sulla convergenza in media della derivata del polinomio interpolante di Lagrange, *322*.

— Sulla approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi, *1175*.

MINEO C., Su una condizione necessaria per la stratificazione d'un astro fluido rotante in equilibrio relativo, *21*.

MINEO M., Sopra una classe di curve e sopra certe rappresentazioni equivalenti delle superficie, *62*.

— Superficie d'equilibrio terrestri chiuse, *1073*.

MOLINA F., Vedi CORTINI G.

MONTALENTI G., Sui cromosomi e il numero dei chiasmi nella spermatogenesi di « Psychoda » sp. (Dipt. Psychodidae), *120*.

MONTEROSSO B. e RONSISVALLE C., Note araneologiche – XXIII. Partenogenesi in « Tetragnatha extensa » (L.), *1103*.

MORELLI C., Le anomalie gravimetriche in funzione delle deviazioni della verticale, *846*.

MORETTI G., Il getto piano turbolento studiato con la teoria del trasporto, *1189*.

O

OPALSKI W., Sur le mouvement du centre de gravité du systeme de deux corps rayonnants, *840*.

P

PANICHI U., Un nuovo polarizzatore, *1094*.

PENSA A., Commemorazione del Socio ERCOLE GIACOMINI, *881*.

PERRI T., Azione della corrente elettrica continua su embrioni di Anfibi in esperienze di parabiosi, *112*.

— Sull'ibridazione tra « Bufo viridis » e « Bufo vulgaris ». Esperienze di trapianto tra ibridi e normali. Nota I, *995*.

PERUCCA E. e RADICATI L. A., Nuova formulazione del principio di Huygens-Fresnel, *901*.

PETTINEO B., Sull'esistenza di funzioni di accumulazione di un insieme di funzioni continue, *301*.

— Estensione di una classe di serie divergenti, *680*.

— Sulle funzioni di accumulazione approssimate di un insieme di funzioni continue, *916*.

— Interdipendenza tra serie convergenti e serie divergenti, *934*.

POMPILJ G., Sui piani tripli con un fascio irrazionale, *306*.

— Sui piani tripli birazionalmente identici, *318*.

POMPILJ G., Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti. Nota I, *576*.

— Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli, *580*.

— Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti. Nota II, *719*.

R

RADICATI L. A., Vedi PERUCCA E.

RAUNICH L., Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*) di fronte ai coloranti vitali. – I. Emazie, *1108*.

— Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*) di fronte ai coloranti vitali. – II. Leucociti, *1207*.

RIGHINI G. e CATANI M. L., Righe proibite del Sodio nello spettro solare, *374*.

RITTMANN A., Sulla esistenza di colate riolitiche post–alpine in Sila, *1206*.

RONDONI P., Commemorazione del Socio BENEDETTO MORPURGO, *662*.

RONSISVALLE C., Vedi MONTEROSSO B.

ROLLERO A., Sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto, *1055*.

— Sulla determinazione del riferimento per lo studio proiettivo–differenziale delle superficie, *1059*.

ROSTAGNI A e BASSI P., Vacuometro radiometrico a filo, *960*.

RUFFO A. e CENNAMO C., Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno. Nota I, *409*.

— Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno. Nota II, *413*.

— Il meccanismo dell'inibizione da florizina sul sistema enzimatico di riduzione dell'acido ossalacetico, *643*.

RUSSO A., Mutazioni e varietà fenotipiche di alcuni Echinodermi, *272*.

— Valore biologico dei globuli di deutoplasma nell'ovocite (in rapporto alle recenti vedute su la struttura del

citosplasma ed all'ultima ricerca micrografica di C. Golgi), *281*.

Russo A., Prodotto delle Tonnare della Sicilia Orientale nell'ultimo decennio e sua diminuzione nel dopo guerra, *1020*.

S

Sacchetti A., L'orientamento fisiologico del femore umano nelle sue normali condizioni morfomeccaniche, *791*.

— Sulla variabilità nelle normali condizioni morfomeccaniche del femore umano, *797*.

Sacco F., Le fratture e le rughe della Crosta terrestre. Nota I, *146*.

— Le fratture e le rughe della Crosta terrestre. Nota II, *257*.

— Commemorazione del Corrispondente Augusto Stella, *816*.

Salini U., Un teorema sopra gli spigoli di Green di una superficie, *58*.

— Determinazione unitaria di enti proiettivi legati ad un punto di una superficie, *553*.

Sansone G., Sulla sommabilità delle serie trigonometriche di Fourier, *45*.

— Condizioni sufficienti di esistenza e limitazioni delle derivate normali al contorno nel problema di Dirichlet per un cerchio, *1042*.

Santoni A., Ricerche nella costituzione chimica della cornea in condizioni normali e patologiche, *232*.

Sartori G. e Liberti A., Ricerche polarografiche sul sistema allossana-acido dialurico, *94*.

Scarpa O., L'effetto Volta e il calcolo termochimico della forza elettromotrice delle pile, *35*.

Sconzo P., Nuovi elementi, perturbati e migliorati, delle orbite di due pianetini, *949*.

Scorza Dragoni G., Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un automeomorfismo del piano, *156*.

— Un'osservazione sui sistemi di equazioni algebriche, *332*.

— A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni, *697*.

Scorza Dragoni G., Ancora sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni, *918*.

— Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate, *1163*.

Sebastião e Silva José, Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche. Nota I, *335*.

— Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche. Nota II, *548*.

— Sull' analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche, *709*.

Segre B., Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche. Nota I, *313*.

— Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche. Nota II, *559*.

— Sui sistemi continui di ipersuperficie algebriche, *564*.

Signorini A., Estensione della nozione di ellisse centrale d'inerzia ai fini della Dinamica dei solidi, *137*.

Signorini R., Autoctonia e alloctonia dei terreni dell'Appennino Centrale e Settentrionale, *99*.

— Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo nell'Appennino Romagnolo, *853*.

— Il lembo di ricoprimento del Monte Comero e del Carnaio nell'Appennino Romagnolo, *860*.

Silva G., Curvatura relativa a una data direzione o ad un punto dato di una linea qualsiasi, *251*.

— Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso. Nota I, *466*.

— Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso. Nota II, *472*.

Sobrero L., Sulla elaborazione dei dati della fotoelasticità per la ricerca degli sforzi principali, *753*.

— I « segmenti » e le loro applicazioni alla fotoelasticità, *759*.

STEFANELLI A., Ricerche di morfologia sperimentale sul differenziamento specifico generale e particolare delle cellule nervose, *1113*.

SUCCI F., Osservazioni sulla R «Coronae Borealis». *739*.

T

TIZZANO A., Sui rapporti tra potére battericida e concentrazione dei disinfettanti, *225*.

TOLOTTI C., Proprietà di media dello stress nelle lastre curve comunque spesse in equilibrio, *187*.

— Sulla struttura delle funzioni bi-iperarmoniche in tre variabili indipendenti, *359*.

— Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite. Nota I, *369*.

— Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite. Nota II, *605*.

TONELLI L., Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di Calcolo delle Variazioni, *247*.

TORTORICI P., Sulla risoluzione numerica delle equazioni in generale e in particolare di talune notevoli che si presentano in matematica finanziaria, *582*.

TRABACCHI G. C., vedi AMALDI E.

U

URBANI E., Osservazioni sulla emolisi fotodinamica e ricerche sulla alterazione fotodinamica della ossiemoglobina, *123*.

— Il fenomeno fotodinamico studiato con il metodo della parabiosi, *1364*.

URBANI E. e URBANI-MISTRUZZI L., L'assunzione di ossigeno in embrioni di Anfibi trattati con dosi letali di raggi Roentgen, *1097*.

URBANI-MISTRUZZI L., vedi COTRONEI G.

URBANI-MISTRUZZI L., vedi Urbani E.

V

VINACCIA G., Sull'effetto antieliotermico delle superficie curve, *743*.

— Nuovo sistema per il calcolo rapido del soleggiamento urbanistico ed edile. Termoeliografometria, *1301*.

VIOLA T., Per la storia del teorema di Desargues sui triangoli omologici, *570*.

— Sulla definizione della lunghezza d'una curva, *724*.

VOLPATO M., Un criterio per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio, *704*.

INDICE PER MATERIE

A

Antropologia. — L'orientamento fisiologico del femore umano nelle sue normali condizioni morfomeccaniche. A. SACCHETTI, *791*.

— Sulla variabilità nelle normali condizioni morfomeccaniche del femore umano. A. SACCHETTI, *797*.

Astronomia. — Altezza della cromosfera nel 1943 ed andamento del ciclo solare. G. ABETTI, *27*.

— Sul secondo problema fondamentale della Cosmogonia. G. ARMELLINI, *486*

— La pioggia a Roma negli ultimi cento anni. GABRIELLA ARMELLINI CONTI. *377*.

— Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, eseguita in primo verticale. Nota I. – M. CIMINO, *72*.

— Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, eseguita in primo verticale. Nota II. – M. CIMINO, *383*.

— Una conferma del ciclo solare ventiduennale dedotta dalle oscillazioni dei diametri solari. M. CIMINO, *624*.

— Nuova determinazione della latitudine dell'osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario eseguita in primo verticale. Nota III. – M. CIMINO, *628*.

— Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma. Nota I. - M. CIMINO, *1295*.

— Un nuovo tipo di telescopio astronomico. A. COLACEVICH, *610*.

— Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali. Nota I. – A. COLACEVICH, *831*.

— Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali. Nota II. A. COLACEVICH, *952*.

— La protuberanza eruttiva del 24 agosto 1946. M. G. FRACASTORO, *1198*.

— Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere. Nota II. – L. GIALANELLA, *78*.

— Sulla distribuzione dei poli delle orbite dei piccoli pianeti. L. GIALANELLA, *193*.

— Fotometria visuale e indice del colore della « Nova Aquilae 1945 ». L. GIALANELLA, *616*.

— Sur le mouvement du centre de gravité du systeme de deux corps rayonnants. W. OPALSKI, *840*.

— Righe proibite del Sodio nello spettro solare. G. RIGHINI e M. L. CATANI, *374*.

— Nuovi elementi, perturbati e migliorati, delle orbite di due pianetini. P. SCONZO, *949*.

— Osservazioni sulla R « Coronae Borealis ». F. SUCCI, *739*.

— Sull'effetto antieliotermico delle superficie curve. G. VINACCIA, *743*.

— Nuovo sistema per il calcolo rapido del soleggiamento urbanistico ed edile. Termoeliografometria. G. VINACCIA, *1301*.

B

Biologia. — Ricerche comparative sulla struttura delle ossa dei Vertebrati. R. AMPRINO e G. GODINA, *648*.

— Ricerche sull'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale degli Anfibi. M. L. CORTELLESSA, *1352*.

— La costituzione zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli. G. COTRONEI e L. URBANI-MISTRUZZI, *869*.

— Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni. Nota I. – B. De Lerma, *1343*.
— Sviluppo di gonadi in assenza di cellule sessuali nell'embrione di pollo. – Sterilizzazione completa mediante esposizione a raggi γ allo stadio di linea primitiva. R. Dulbecco, *1211*.
— Trapianto dell'occhio tra embrioni e larve irradiati con raggi X e larve normali. N. Frontali, *865*.
— « Peyronellaea », nuovo genere di deuteromiceti (Nota preliminare). G. Goidànich, *449*.
— Un interessante tipo di butteratura parassitaria delle mele. G. Goidànich, *654*.
— Sulle cause dei cedimenti nella pavimentazione del Palazzo Corsini, sede dell'Accademia Nazionale dei Lincei. G. Goidànich, *872*.
— Espansione in superficie ed accrescimento individuale delle cellule. G. Levi, *267*.
— Ricerche sperimentali sull'origine dei neuroni del ganglio ciliare nel pollo. R. Levi-Montalcini e R. Amprino, *439*.
— Ricerche sperimentali sulla determinazione del placode otico nell'embrione di pollo. R. Levi-Montalcini, *443*.
— Ricerca sperimentale sull'origine dei gangli del glosso-faringeo e del vago nell'embrione di pollo. R. Levi-Montalcini, *1349*.
— Sul pigmento di alcuni lamellibranchi: ricerche sui carotenoidi dei Pecten e dei Cardium. B. M. Marcolini, *115*.
— Sulla rigenerazione del midollo spinale dei Rettili. M. Marotta, *1367*.
— Azione della corrente elettrica continua su embrioni di Anfibi in esperienze di parabiosi. T. Perri, *112*.
— Sull'ibridazione tra « Bufo viridis » e « Bufo vulgaris ». Esperienze di trapianto tra ibridi e normali. Nota I. – T. Perri, *995*.
— Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*) di fronte ai coloranti vitali. I. – Emazie. L. Raunich, *1108*.
— Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*) di fronte ai coloranti vitali. II. – Leucociti. L. Raunich, *1207*.
— Valore biologico dei globuli di deutoplasma nell'ovocite (in rapporto alle recenti vedute su la struttura del citosplama ed all'ultima ricerca micrografica di C. Golgi). A. Russo, *281*.
— Prodotto delle Tonnare della Sicilia Orientale nell'ultimo decennio e sua diminuzione nel dopo guerra. A. Russo, *1020*.
— Ricerche nella costituzione chimica della cornea in condizioni normali e patologiche. A. Santoni, *232*.
— Ricerche di morfologia sperimentale sul differenziamento specifico generale e particolare delle cellule nervose. A. Stefanelli, *1113*.
— Sui rapporti tra potere battericida e concentrazione dei disinfettanti. A. Tizzano, *225*.
— Il fenomeno fotodinamico studiato con il metodo della parabiosi. E. Urbani, *1364*.
— L'assunzione di ossigeno in embrioni di Anfibi trattati con dosi letali di raggi Roentgen. E. Urbani e L. Urbani-Mistruzzi, *1097*.

C

Calendario delle Sedute Accademiche, *1119*.
Chimica. — Sulla compressibilità adiabatica degli isomeri etilenici determinata mediante gli ultrasuoni. M. Baccheredda e A. Giacomini, *401*.
— Sull'attività antibatterica di due acidi lichenici: acido usnico ed acido vulpinico. G. Bargellini, E. Del Pianto e G. B. Marini-Bettolo, *1252*.
— Nuove ricerche sull'azione batteriostatica dei chinoni. E. Del Pianto e G. B. Marini – Bettolo, *783*.
— L'azione batteriostatica dei chinoni e il meccanismo d'azione di alcune sostanze anatibiotiche. G. B. Marini-Bettolo e E. Del Pianto, *90*.

— Sulle lastre fotografiche per l'ultravioletto estremo. L. MAZZA, *1331*.
— Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno. Nota I. – A. RUFFO e C. CENNAMO, *409*.
— Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno. Nota II. – A. RUFFO e C. CENNAMO, *413*.
— Il meccanismo dell'inibizione da florizina sul sistema enzimatico di riduzione dell'acido ossalacetico. A. RUFFO e C. CENNAMO, *643*.
— Ricerche polarografiche sul sistema allossana-acido dialurico. G. SARTORI e A. LIBERTI, *94*.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio TULLIO LEVI-CIVITA. U. AMALDI, *1130*.
— Commemorazione del Corrispondente GIUSEPPE TOMMASI. – G. BARGELLINI, *820*.
— Commemorazione del Corrispondente ANNIBALE COMESSATTI. – L. BERZOLARI, *810*.
— Commemorazione del Socio GIOVANNI D'ACHIARDI. – A. BIANCHI, *1214*.
— Commemorazione del Socio GIOVANNI BOERIS. – A. BIANCHI, *1216*.
— Commemorazione del Corrispondente UBALDO BARBIERI. – G. CASSINIS, *1222*.
— Per la morte di FEDERICO ENRIQUES. – G. CASTELNUOVO, *671*.
— Per la inaugurazione della sala T. LEVI-CIVITA. – G. CASTELNUOVO, *1129*.
— Commemorazione del Socio CARLO FABRIZIO PARONA. – G. DAL PIAZ, *1217*.
— Commemorazione del Corrispondente NAZZARENO STRAMPELLI. – G. GOLA, *1224*.
— Commemorazione del Socio ENRICO CARANO. – G. GOLA, *1225*.
— Commemorazione del Corrispondente LIONELLO PETRI. – G. GOLA, *1226*.
— Commemorazione del Socio GIULIO CHIARUGI. – G. LEVI, *1218*.
— Commemorazione del Socio ERCOLE GIACOMINI. – A. PENSA, *881*.
— Commemorazione del Socio BENEDETTO MORPURGO. – P. RONDONI, *662*.
— Commemorazione del Corrispondente AUGUSTO STELLA. – F. SACCO, *168*.

Convegni Scientifici, *1118*.

E

Elettrochimica. — Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi. G. BIANCHI, *786*.
— Nuove esperienze nel traporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi – Sistemi Rame-Stagno, Rame-Piombo, Rame-Cadmio. G. BIANCHI, *1200*.

F

Fisica. — Studio energetico in regime transitorio di un bipolo lineare passivo. M. ABELE, *1321*.
— Effetti di diffrazione nello sparpagliamento dei neutroni veloci. E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. N. CACCIAPUOTI e G. C. TRABACCHI, *29*.
— Contributo alla teoria dell'acceleratore ad induzione. E. AMALDI e B. FERRETTI, *85*.
— Temperature e reazioni nucleari. A. AMERIO, *254*.
— Sulle pressioni interne del Sole e sulla causa delle protuberanze solari. A. AMERIO, *1018*.
— Effetto di una cavità chiusa sulle autofrequenze di una piastra incastrata. I. BARDUCCI, *206*.
— Effetto della viscosità e della conduzione termica in un risuonatore acustico. I. BARDUCCI, *764*.
— Equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici. P. G. BORDONI, *1324*.
— Massa di radiazione di un diaframma rigido munito di schermo acustico chiuso. P. G. BORDONI e W. GROSS, *395*.
— Sulla interazione elettromagnetica ritardata di due particelle di Dirac-Pauli. A. BORSELLINO e P. CALDIROLA, *969*.
— Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota I. – A. CARRELLI, *493*.
— Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota II. – A. CARRELLI, *907*.

Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota III. – A. CARRELLI, *1012*.
- Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota IV. – A. CARRELLI, *1242*.
- Sulla misura della densità dei neutroni termici. E. CORINALDESI, *982*.
- Determinazione del numero medio di urti che un neutrone termico subisce in acqua prima della cattura. G. CORTINI e F. MOLINA, *774*.

Sul secondo massimo della curva degli sciami della radiazione cosmica. M. DELLA CORTE, *974*.

Sul meccanismo di formazione dell'immagine latente negli strati fotografici. M. G. FRACASTORO, *633*.
- Sullo spettro dei raggi β del potassio. S. FRANCHETTI e M. GIOVANNOZZI, *1078*.
- Sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati. A. GHIZZETTI, *214*.

Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi di notevole viscosità. E. GROSSETTI, *1315*.
- Sulle coincidenze triple accidentali. G. LOVERA, *964*.
- Nuova formulazione del principio di Huygens-Fresnel. E. PERUCCA e L. A. RADICATI, *901*.
- Vacuometro radiometrico a filo. A. ROSTAGNI e P. BASSI, *960*
- L'effetto Volta e il calcolo termochimico della forza elettromotrice delle pile. O. SCARPA, *35*.
— (Fisica Matematica). – Sulla elaborazione dei dati della fotoelasticità per la ricerca degli sforzi principali. L. SOBRERO, *753*.
— — I «segmenti» e le loro applicazioni alla fotoelasticità. L. SOBRERO, *759*.

Fisiologia. — Comportamento di un riflesso condizionato motorio sotto l'azione dell'acetilcolina. A. ALIBRANDI, *659*.

Osservazioni sulla emolisi fotodinamica e ricerche sulla alterazione fotodinamica della ossiemoglobina. E. URBANI, *123*.

Fisiologia vegetale. — Escreti fungini e mitosi cellulari. F. M. GEROLA, *801*.
— — La nutrizione dei meristemi e l'ingiallimento dei tessuti verdi. G. GOLA, *262*.

G

Geodesia. — Sulla compensazione rigorosa per direzioni delle catene geodetiche. G. BOAGA, *199*.

Su talune relazioni ricorrenti fra le matrici normali angolari. G. BOAGA, *389*.
— Sulla teoria degli strumenti goniometrici. G. CASSINIS, *1233*.
— Su alcune formule esplicite nella compensazione per direzioni delle catene di triangoli e dei sistemi centrali semplici. A. MARCANTONI, *1306*.
— Superficie d'equilibrio terrestri chiuse. M. MINEO, *1073*.
- Le anomalie gravimetriche in funzione delle deviazioni della verticale. C. MORELLI, *846*.

Geofisica. — Onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso, stratificato. P. CALOI, *745*.

Geologia. — Il problema strutturale del Monte Soratte (Lazio). E. BENEO, *990*.
- Nuove osservazioni geologiche sulla serie attraversata dal fiume Celone (Capitanata). G. CHECCHIA-RISPOLI, *151*.
- Sopra alcuni calcari a Nord di Roma. C. MAXIA, *107*.
— Nuova formazione pleistocenica di facies limnica presso Rignano Flaminio (Tuscia Romana). C MAXIA, *1334*.
— Sulla esistenza di colate riolitiche postalpine in Sila. A. RITTMANN, *1206*.
— Le fratture e le rughe della Crosta terrestre. Nota I. - F. SACCO, *146*.
— Le fratture e le rughe della Crosta terrestre. Nota II. - F. SACCO, *257*.
- Autoctonia e alloctonia dei terreni dell'Appennino Centrale e Settentrionale. R. SIGNORINI, *99*.

Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo nell'Appennino Romagnolo. R. SIGNORINI, *853*.
— Il lembo di ricoprimento del Monte Comero e del Carnaio nell'Appennino Romagnolo. R. SIGNORINI, *860*.

Geometria. — Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni. G. FANO, *463*.
— Sui piani tripli con un fascio irrazionale. G. POMPILJ, *306*.
— Sui piani tripli birazionalmente identici. G. POMPILJ, *318*.
— Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti. Nota I. – G. POMPILJ, *576*.
— Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli. G. POMPILJ, *580*.
— Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti. Nota II. – G. POMPILJ, *719*.
— Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche. Nota I. – B. SEGRE *313*.
— Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche. Nota II. – B. SEGRE, *559*.
— Sui sistemi continui di ipersuperficie algebriche. B. SEGRE, *564*.
— Per la storia del teorema di Desargues sui triangoli omologici. T. VIOLA, *570*.
— Sulla definizione della lunghezza d'una curva. T. VIOLA, *724*.
Inaugurazione della «Sala T. Levi-Civita», G. CASTELNUOVO, *1129*.
Istologia. — Ancora una volta in tema di fibre muscolari, miofibrille e strie. U. D'ANCONA, *805*.

M

Matematica. — Sull'integrazione delle equazioni lineari di tipo ellittico. L. AMERIO, *175*.
— Sull'equazione del calore. Nota I. L. AMERIO, *346*.
— Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Nota I. – L. AMERIO, *352*.
— Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Nota II. – L. AMERIO, *505*.
— Sull'equazione del calore. Nota II. – L. AMERIO, *544*.
— Su un problema riducibile di integrazione di una particolare equazione a derivate parziali. G. AQUARO, *530*.
— Sull'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie. G. AQUARO, *715*.
— Nuclei isotropi e loro autofunzioni. G. ASCOLI, *1167*.
— Alcune considerazioni sull'esistenza della soluzione delle equazioni alle derivate parziali. E. BAIADA, *296*.
— Studi sopra le algebre senza base finita. I. BARSOTTI, *1187*.
— Su una generalizzazione della convergenza in media. Nota I. – C. BIRINDELLI, *325*.
— Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazione. Nota I. – C. BIRINDELLI, *515*.
— Su una generalizzazione della convergenza in media. Nota II. – C. BIRINDELLI, *526*.
— Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazioni. Nota II. – C. BIRINDELLI, *673*.
— Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica. E. BOMPIANI, *16*.
— Le connessioni tensoriali. E. BOMPIANI, *478*.
— Connessioni del secondo ordine. E. BOMPIANI, *483*.
— Enti geometrici definiti da sistemi differenziali. E. BOMPIANI, *887*.
— (Geometria). – Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno ∞^k rette. E. BOMPIANI, *1001*.
— Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato. D. CALIGO, *534*.
— Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficiente periodico reciproco di quello di Mathieu. Nota I. – E. CAMBI, *1035*.
— Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficiente periodico

reciproco di quello di Mathieu. Nota II. – E. CAMBI, *1181*.
— Sulla curvatura media di una varietà immersa in un'altra. L. CASTOLDI, *928*.
— (Geometria). – Caratterizzazione intrinseca degli spazi riemanniani in cui una funzione della distanza geodetica da un punto generico soddisfa l'equazione generalizzata di Laplace. L. CASTOLDI, *1028*.
— Sul potenziale di un doppio strato non uniforme. L. CASTOLDI, *1051*.
— Sopra alcune proprietà caratteristiche della V_n totalmente geodetiche rispetto ad una V_m ambiente. L. CASTOLDI, *1064*.
— Sulla moltiplicazione delle serie doppie. L. CESARI, *289*.
— Un complemento alla Nota «Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie». L. CESARI, *292*.
— Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue. L. CESARI, *509*.
— Sulle serie doppie di Fourier. L. CESARI, *1173*.
— Un criterio per la misurabilità degli insiemi. L. CESARI, *1256*.
— Sopra l'esistenza dell'estremo nei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore. S. CINQUINI, *500*.
— Sopra la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore. S. CINQUINI, *586*.
— Sui problemi d'equilibrio della Fisica-Matematica. S. FAEDO, *343*.
— Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche. Nota I. – A. FRANCHETTA, *49*.
— Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche. Nota II. – A. FRANCHETTA, *162*.
— Sull'integrabilità in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado. G. FICHERA, *540*.
— Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali. Nota I. – V. E. GALAFASSI, *827*.
— Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali. Nota II. – V. E. GALAFASSI, *922*.
— Sopra due particolari problemi misti di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace. A. GHIZZETTI, *40*.
— Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito. A. GHIZZETTI, *691*.
— Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano. L. GIULIANO, *1264*.
— Relazioni quantitative per gli autovalori di un'equazione integrale omogenea di seconda specie. G. GRIOLI, *522*.
— Gli automoduli primitivi delle algebre legate a gruppi abeliani di ordine finito. L. LOMBARDO-RADICE, *686*.
— Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonali. G. LORIA, *7*.
— Geometria affine di alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali studiati da L. Bianchi. A. MAXIA, *169*.
— Soluzioni periodiche di una equazione differenziale non lineare. T. MANACORDA, *1046*.
— Sulla convergenza in media della derivata del polinomio interpolante di Lagrange. L. MERLI, *322*.
— Sulla approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi. L. MERLI, *1175*.
— Sopra una classe di curve e sopra certe rappresentazioni equivalenti delle superficie. M. MINEO, *62*.
— Sull'esistenza di funzioni di accumulazione di un insieme di funzioni continue. B. PETTINEO, *301*.
— Estensione di una classe di serie divergenti. B. PETTINEO, *680*.
— Sulle funzioni di accumulazione approssimate di un insieme di funzioni continue. B. PETTINEO, *916*.
— Interdipendenza tra serie convergenti e serie divergenti. B. PETTINEO, *934*.
— Sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto. A. ROLLERO, *1055*.

— Sulla determinazione del riferimento per lo studio proiettivo-differenziale delle superficie. A. ROLLERO, *1059*.
— Un teorema sopra gli spigoli di Green di una superficie. U. SALINI, *58*.
— Determinazione unitaria di enti proiettivi legati ad un punto di una superficie. U. SALINI, *553*.
— Sulla sommabilità delle serie trigonometriche di Fourier. G. SANSONE, *45*.
— Condizioni sufficienti di esistenza e limitazioni delle derivate normali al contorno nel problema di Dirichlet per un cerchio. G. SANSONE, *1042*.
— Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo del piano. G. SCORZA DRAGONI, *156*.
— Un'osservazione sui sistemi di equazioni algebriche. G. SCORZA DRAGONI, *332*.
— A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni. G. SCORZA DRAGONI, *697*.
— Ancora sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni. G. SCORZA DRAGONI, *918*.
— Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate. G. SCORZA DRAGONI, *1163*.
— Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche. Nota I. – SEBASTIÃO e SILVA JOSÉ, *335*.
— Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche. Nota II. – SEBASTIÃO e SILVA JOSÉ, *548*.
— Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche. SEBASTIÃO e SILVA JOSÉ, *709*.
— Curvatura relativa a una data direzione o ad un punto dato di una linea qualsiasi. G. SILVA, *251*.
— Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso. Nota I. – G. SILVA, *466*.
— Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso. Nota II. – G. SILVA, *472*.
— Sulla struttura delle funzioni bi-iperarmoniche in tre variabili indipendenti. C. TOLOTTI, *359*.
— Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di Calcolo delle Variazioni, L. TONELLI, *247*.
— Sulla risoluzione numerica delle equazioni in generale e in particolare di talune notevoli che si presentano in matematica finanziaria. P. TORTORICI, *582*.
— Un criterio per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio. M. VOLPATO, *704*.

Meccanica. — Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità, per i quali esiste la funzione lagrangiana. Nota I. – C. AGOSTINELLI, *182*.
— Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità per i quali esiste la funzione lagrangiana. Nota II. – C. AGOSTINELLI, *364*.
— Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità. Nota I. – C. CATTANEO, *66*.
— Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità. Nota II. – C. CATTANEO, *728*.
— Le tensioni caratteristiche per il guscio cilindrico. P. CICALA, *735*.
— Lo stato di tensione nel guscio cilindrico presso una accidentalità strutturale o di carico. P. CICALA, *1069*.
— Un singolare tensore doppio isotropo. U. CISOTTI, *19*.
— Sulla applicazione dell'energia atomica alla navigazione interplanetaria. G. A. CROCCO, *142*.
— Il superamento della barriera del suono in Aviazione. Nota I. – G. A. CROCCO, *895*.
— Il superamento della barriera del suono in Aviazione. Nota II. – G. A. CROCCO, *1006*.
— Il superamento della barriera del suono in aviazione. Nota III. – G. A. CROCCO, *1155*.

— Vibrazioni e pressioni critiche delle piastre anulari soggette a pressione radiale. G. GRIOLI, *599*.

— Sicurezza rispetto ad una associazione dei tre casi di instabilità di Eulero, di Michell-Prandtl e di Reissner. G. KRALL, *592*.

— Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose. Nota I. – G. KRALL, *937*.

— Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose. Nota II. – G. KRALL, *1272*.

— Moltiplicatore critico λ_{cr} d'una distribuzione di carico su una volta autoportante. Nota I. – G. KRALL, *1281*.

— Su una condizione necessaria per la stratificazione d'un astro fluido rotante in equilibrio relativo. C. MINEO, *21*.

— Il getto piano turbolento studiato con la teoria del trasporto. G. MORETTI, *1189*.

— Estensione della nozione di ellisse centrale d'inerzia ai fini della Dinamica dei solidi. A. SIGNORINI, *137*.

— Proprietà di media dello stress nelle lastre curve comunque spesse in equilibrio. C. TOLOTTI, *187*.

— Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite. Nota I. – C. TOLOTTI, *369*.

— Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite. Nota II. – C. TOLOTTI, *605*.

Mineralogia. — Un nuovo polarizzatore. U. PANICHI, *1094*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *133, 461, 669, 824, 1121, 1231, 1374*.

P

Paleontologia. – Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A. O.). Nota I. – S. CONTI, *218*.

— Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A. O.) Nota II. - S. CONTI, *419*.

— Su alcune specie di melobesie (Corallinacee) del Miocene di Ponzone (Acqui). S. Conti, *1088*.

Parole pronunciate dal Presidente,

— Per la ripresa dei lavori dell'Accademia *3*.

Patologia. — Azione combinata di stimolo meccanico (farina fossile) e chimico (3, 4–benzopirene) sul connettivo. M. CHIRICO, *239*.

— L'azione del freddo sulla respirazione batterica. Nota II. – R. DEOTTO, *241*.

Patologia vegetale. — Un caso di svernamento allo stato conidico di Mycosphaerella sentina (Fuck.) Schroet. su foglie morte di pero. G. FLORENZANO, *437*.

— Le specie Tilletia del frumento esistenti in Italia. V. GRASSO, *1362*.

Personale Accademico, *666, 1116, 1229, 1372*.

Plichi suggellati, *1229*.

Presentazione di libri, *1117, 1229, 1372*.

Presentazione di Note e Memorie, *130, 457, 667, 823, 1117, 1230, 1372*.

R

Relazioni di Commissioni, *1116*.

S

Stato della pubblicazione degli Atti Accademici, *6*.

Z

Zoologia. — Osservazioni sulla deposizione di «Murex trunculus». L. F. DULZETTO, *1356*.

— Contributi alla conoscenza morfo–biologica e sistematica dell'ortotterofauna dell' Eritrea. – IV. Notizie preliminari sull' evoluzione biologica durante l'anno della «Symbella bipla-

giata » Bolivar (« Orthop., Eumastacidae ») vivente nelle regioni di Altopiano. G. JANNONE, *426*.

— Striatura trasversale della fibra muscolare e precipitazione ritmica. F. LORETI, *434*.

— Sui cromosomi e il numero dei chiasmi nella spermatogenesi di « Psychoda » sp. (Dipt. Psychodidae). G. MONTALENTI, *120*.

— Note araneologiche. - XXIII. Parte nogenesi in « Tetragnatha extensa » (L.) B. MONTEROSSO e C. RONSISVALLE, *1103*.

— Mutazioni e varietà fenotipiche di alcuni Echinodermi. A. RUSSO, *272*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1.

GENNAIO 1946.

Parole pronunciate dal Presidente (per la ripresa dei lavori dell'Accademia) Pag. 3
Stato della pubblicazione degli Atti accademici 6

NOTE DI SOCI

G. LORIA. – Sulla scomposizione di un intero nella somma di numeri poligonali . 7
E. BOMPIANI. – Ricerche sugli spazi lineari di una ipersuperficie algebrica . . 16
U. CISOTTI. – Un singolare tensore doppio isotropo 19
C. MINEO. – Su una condizione necessaria per la stratificazione d'un astro fluido rotante in equilibrio relativo 21
G. ABETTI. – Altezza della cromosfera nel 1943 ed andamento del ciclo solare . 27
E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. N. CACCIAPUOTI e G. C. TRABACCHI. – Effetti di diffrazione nello sparpagliamento dei neutroni veloci 29
O. SCARPA. – L'effetto Volta e il calcolo termochimico della forza elettromotrice delle pile 35

NOTE PRESENTATE DA SOCI

A. GHIZZETTI. – Sopra due particolari problemi misti di Dirichlet–Neumann per l'equazione di Laplace (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) . . . . . Pag. 40
G. SANSONE. – Sulla sommabilità delle serie trigonometriche di Fourier (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 45
A. FRANCHETTA. – Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche. Nota I (pres. dal Socio *F. Enriques*) 49
U. SALINI. – Un teorema sopra gli spigoli di Green di una superficie (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 58
M. MINEO. – Sopra una classe di curve e sopra certe rappresentazioni equivalenti delle superficie (pres. dal Corrisp. *M. De Franchis*) 62
C. CATTANEO. – Su un teorema fondamentale della teoria delle onde di discontinuità. Nota I (pres. dal Corrisp. *A. Signorini*) 66
M. CIMINO. – Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario eseguita in primo verticale. Nota I (pres. dal Socio *G. Armellini*) 72
L. GIALANELLA. – Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere. Nota II (pres. dal Socio *G. Armellini*) 78

E. Amaldi e B. Ferretti. – Contributo alla teoria dell'acceleratore ad induzione (pres. dal Corrisp. *G. C. Trabacchi*) . . . . . Pag. 85
G. B. Marini-Bettolo e F. Del Pianto. – L'azione batteriostatica dei chinoni e il meccanismo d'azione di alcune sostanze antibiotiche (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 90
G. Sartori e A. Liberti. – Ricerche polarografiche sul sistema allossana-acido dialurico (pres. dal Corrisp. *G. Bargellini*) 94
R. Signorini. – Autoctonia e alloctonia dei terreni dell'Appennino Centrale e Settentrionale (pres. dal Corrisp. *G. Checchia-Rispoli*) 99
C. Maxia. – Sopra alcuni calcari a Nord di Roma (pres. dal Corrisp. *G. Checchia-Rispoli*) 107
T. Perri. – Azione della corrente elettrica continua su embrioni di Anfibi in esperienze di parabiosi (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 112
B. M. Marcolini. – Sul pigmento di alcuni lamellibranchi; ricerche sui carotenoidi dei Pecten e dei Cardium (pres. dal Corrisp. *G. Brunelli*) 115
G. Montalenti. – Sui cromosomi e il numero dei chiasmi nella spermatogenesi di « Psychoda » sp. (Dipt. Psychodidae) (pres. dal Socio *F. Silvestri*) . . . 120
E. Urbani. – Osservazioni sulla emolisi fotodinamica e ricerche sulla alterazione fotodinamica della ossiemoglobina (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 123
Note presentate nella seduta del 12 gennaio 1946 e che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli 130

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

Presentate nella seduta del 12 gennaio 1946 . . . . . Pag. 133

FASCICOLO 2.

Febbraio 1946.

NOTE DI SOCI

A. Signorini. – Estensione della nozione di ellisse centrale d'inerzia ai fini della Dinamica dei solidi . . . . . Pag. 137
G. A. Crocco. – Sulla applicazione dell'energia atomica alla navigazione interplanetaria 142
F. Sacco. – Le fratture e le rughe della Crosta terrestre. Nota I 146
G. Checchia-Rispoli. – Nuove osservazioni geologiche sulla serie attraversata dal fiume Celone (Capitanata) 151

NOTE PRESENTATE DA SOCI

G. Scorza Dragoni. – Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un automeomorfismo del piano (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) . . . . . Pag. 156
A. Franchetta. – Sui punti doppi isolati delle superficie algebriche. Nota II (pres. dal Socio *F. Enriques*) 162
A. Maxia. – Geometria affine di alcuni sistemi di equazioni a derivate parziali studiati da L. Bianchi (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 169

L. Amerio. – Sull'integrazione delle equazioni lineari di tipo ellittico (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) . . . . . Pag. 175
C. Agostinelli. – Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità, per i quali esiste la funzione lagrangiana. Nota I (pres. dal Socio *U. Amaldi*) 182
C. Tolotti. – Proprietà di media dello stress nelle lastre curve comunque spesse in equilibrio (pres. dal Corrisp. *A. Signorini*) 187
L. Gialanella. Sulla distribuzione dei poli delle orbite dei piccoli pianeti (pres. dal Socio *G. Armellini*) 193
G. Boaga. – Sulla compensazione rigorosa per direzioni delle catene geodetiche (pres. dal Socio *G. Cassinis*) 199
I. Barducci. – Effetto di una cavità chiusa sulle autofrequenze di una piastra incastrata (pres. dal Socio *U. Bordoni*) 206
A. Ghizzetti. – Sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) . . . 214
S. Conti. – Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A. O.). Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Rovereto*) 218
A. Tizzano. – Sui rapporti tra potere battericida e concentrazione dei disinfettanti (pres. dal Socio *D. De Blasi*) 225
A. Santoni. – Ricerche nella costituzione chimica della cornea in condizioni normali e patologiche (pres. dal Socio *G. Quagliarello*) 232
M. Chirico. – Azione combinata di stimolo meccanico (farina fossile) e chimico (3, 4–benzopirene) sul connettivo (pres. dal Socio *P. Rondoni*) 239
R. Deotto. – L'azione del freddo sulla respirazione batterica. Nota II (pres. dal Socio *P. Rondoni*) 241

FASCICOLO 3–4.

Marzo–Aprile 1946.

NOTE DI SOCI

L. Tonelli. – Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di Calcolo delle Variazioni . . . . . Pag. 247
G. Silva. – Curvatura relativa a una data direzione o ad un punto dato di una linea qualsiasi 251
A. Amerio. – Temperature e reazioni nucleari 254
F. Sacco. – Le fratture e le rughe della Crosta terrestre. Nota II 257
G. Gola. – La nutrizione dei meristemi e l'ingiallimento dei tessuti verdi . . . 262
G. Levi. – Espansione in superficie ed accrescimento individuale delle cellule . 267
A. Russo. – Mutazioni e varietà fenotipiche di alcuni Echinodermi 272
A. Russo. – Valore biologico dei globuli di deutoplasma nell'ovocite (in rapporto alle recenti vedute su la struttura del citosplasma ed all'ultima ricerca micrografica di C. Golgi) 281

NOTE PRESENTATE DA SOCI

L. Cesari. – Sulla moltiplicazione delle serie doppie (pres. dal Corrisp. *L. Tonelli*) 289
L. Cesari. – Un complemento alla Nota «Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie» (pres. dal Corrisp. *L. Tonelli*) . . 292

E. Baiada. – Alcune considerazioni sull'esistenza della soluzione delle equazioni alle derivate parziali (pres. dal Corrisp. *L. Tonelli*) . . . . . Pag. 296
B. Pettineo. – Sull'esistenza di funzioni di accumulazione di un insieme di funzioni continue (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 301
G. Pompilj. – Sui piani tripli con un fascio irrazionale (pres. dal Socio. *G. Castelnuovo*) 306
B. Segre. – Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 313
G. Pompilj. – Sui piani tripli birazionalmente identici (pres. dal Socio *F. Enriques*) 318
L. Merli. – Sulla convergenza in media della derivata del polinomio interpolante di Lagrange (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 322
C. Birindelli. – Su una generalizzazione della convergenza in media. Nota I (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) 325
G. Scorza Dragoni. – Un'osservazione sui sitemi di equazioni algebriche (pres. dal Socio *M. Picone*) 332
Sebastião e Silva José. – Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche. Nota I (pres.dal Corrisp. *M. Picone*) 335
S. Faedo. – Sui problemi d'equilibrio della Fisica-Matematica (pres. dal Corrisp. *M. Picone* 343
L. Amerio. – Sull'equazione del calore. Nota I (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) . 346
L. Amerio. – Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) 352
C. Tolotti. – Sulla struttura delle funzioni bi-iperarmoniche in tre variabili indipendenti (pres. dal Socio *M. Picone*) 359
C. Agostinelli. – Sui problemi dinamici con forze funzioni lineari delle velocità per i quali esiste la funzione lagrangiana. Nota II (pres. dal Socio *U. Amaldi*) 364
C. Tolotti. – Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite. Nota I (pres. dal Corrisp. *A. Signorini*) 369
G. Righini e M. L. Catani. – Righe proibite del Sodio nello spettro solare (pres. dal Socio *G. Abetti*) 374
Gabriella Armellini Conti. – La pioggia a Roma negli ultimi cento anni (pres. dal Socio *G. Armellini*) 377
M. Cimino. – Nuova determinazione della latitudine dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, eseguita in primo verticale. Nota II (pres. dal Socio *G. Armellini*) 383
G. Boaga. – Su talune relazioni ricorrenti fra le matrici normali angolari (pres. dal Socio *G. Cassinis*) 389
P. G. Bordoni e W. Gross. – Massa di radiazione di un diaframma rigido munito di schermo acustico chiuso (pres. dal Socio *M. Picone*) 395
M. Baccaredda e A. Giacomini. – Sulla compressibilità adiabatica degli isomeri etilenici determinata mediante gli ultrasuoni (pres. dal Socio *U. Bordoni*) 401
A. Ruffo e C. Cennamo. – Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno. Nota I (pres. dal Socio *G. Quagliarello*) 409
A. Ruffo e C. Cennamo. – Metabolismo dei fosfati durante l'ossidazione biologica del glicoso e del glicogeno. Nota II (pres. dal Socio *G. Quagliariello*) 413
S. Conti. – Le corallinacee fossili delle isole Dahlac (A. O.) Nota II (pres. dal Corrisp. *G. Rovereto*) 419

G. Jannone – Contributi alla conoscenza morfo-biologica e sistematica dell'ortotterofauna dell'Eritrea. – IV. Notizie preliminari sull'evoluzione biologica durante l'anno della « Symbella biplagiata » Bolivar (« Orthop., Eumastacidae ») vivente nelle regioni di Altopiano (pres. dal Socio *F. Silvestri*) . . . . . Pag. 426
F. Loreti. – Striatura trasversale della fibra muscolare e precipitazione ritmica (pres. dal Corrisp. *A. Pensa*) 434
G. Florenzano. – Un caso di svernamento allo stato conidico di Mycosphaerella sentina (Fuck.) Schroet. su foglie morte di pero (pres. dal Corrisp. *G. Negri*) 437
R. Levi-Moltalcini e R. Amprino. – Ricerche sperimentali sull'origine dei neuroni del ganglio ciliare nel pollo (pres. dal Socio *G. Levi*) 439
R. Levi-Moltalcini. – Ricerche sperimentali sulla determinazione del placode otico nell'embrione di pollo (pres. dal Socio *G. Levi*) 443
G. Goidànich. – « Peyronellaea », nuovo genere di deuteromiceti (Nota preliminare) (pres. dal Corrisp. *L. Petri*) 449
Note presentate nella seduta del 18 aprile 1946, e che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli 457

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 18 aprile 1946 . . . . . Pag. 461

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1946.

NOTE DI SOCI

G. Fano. – Sulla forma cubica generale dello spazio a 4 dimensioni . . Pag. 463
G. Silva. – Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso. Nota I 466
G. Silva. – Linee che hanno costante la curvatura relativa a una data direzione o a un punto fisso. Nota II 472
E. Bompiani. – Le connessioni tensoriali 478
E. Bompiani. – Connessioni del secondo ordine 483
G. Armellini. – Sul secondo problema fondamentale della Cosmogonia . . . 486
A. Carrelli. – Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota I 491

NOTE PRESENTATE DA SOCI

S. Cinquini. – Sopra l'esistenza dell'estremo nei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore (pres. dal Socio *U. Amaldi*) . Pag. 500
L. Amerio. – Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali. Nota II (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) 505
L. Cesari. – Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) 509

C. BIRINDELLI. – Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazione. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . Pag. 515
G. GRIOLI. – Relazioni quantitative per gli autovalori di un'equazione integrale omogenea di seconda specie (pres. dal Socio *M. Picone*) 522
C. BIRINDELLI. – Su una generalizzazione della convergenza in media. Nota II (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) 526
G. AQUARO. – Su un problema riducibile di integrazione di una particolare equazione a derivate parziali (pres. dal Socio *M. Picone*) 530
D. CALIGO. – Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato (pres. dal Socio *M. Picone*) 534
G. FICHERA. – Sull'integrabilità in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado (pres. dal Socio *M. Picone*) 540
L. AMERIO. – Sull'equazione del calore. Nota II (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) 544
SEBASTIÃO e SILVA JOSÉ. – Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche. Nota II (pres. dal Corrisp. *M. Picone*) 548
U. SALINI. – Determinazione unitaria di enti proiettivi legati ad un punto di una superficie (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 553
B. SEGRE. – Un'estensione delle varietà di Veronese, ed un principio di dualità per forme algebriche. Nota II (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 559
B. SEGRE. – Sui sistemi continui di ipersuperficie algebriche (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 564
T. VIOLA. – Per la storia del teorema di Desargues sui triangoli omologici (pres. dal Socio *F. Enriques*) 570
G. POMPILJ. – Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti. Nota I (pres. dal Socio *F. Enriques*) 576
G. POMPILJ. – Sulla rappresentazione algebrica dei piani multipli (pres. dal Socio *F. Enriques*) 580
P. TORTORICI. – Sulla risoluzione numerica delle equazioni in generale e in particolare di talune notevoli che si presentano in matematica finanziaria (pres. dal Socio *M. Picone*) 582
S. CINQUINI. – Sopra la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore (pres. dal Socio *U. Amaldi*) . . . 586
G. KRALL. – Sicurezza rispetto ad una associazione dei tre casi di instabilità di Eulero, di Michell-Prandtl e di Reissner (pres. dal Socio *C. Somigliana*) . . 592
G. GRIOLI. – Vibrazioni e pressioni critiche delle piastre anulari soggette a pressione radiale (pres. dal Socio *M. Picone*) 599
C. TOLOTTI. – Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite. Nota II (pres. dal Corrisp. *A. Signorini*) 605
A. COLACEVICH. – Un nuovo tipo di telescopio astronomico (pres. dal Socio *G. Abetti*) 610
L. GIALANELLA. – Fotometria visuale e indice del colore della « Nuova Aquilae 1945 » (pres. dal Socio *G. Armellini*) 616
M. CIMINO. – Una conferma del ciclo solare ventiduennale dedotta dalle oscillazioni dei diametri solari (pres. dal Socio *G. Armellini*) 624
M. CIMINO. – Nuova determinazione della latitudine dell'osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario eseguita in primo verticale. Nota III (pres. dal Socio *G. Armellini*) 628
M. G. FRACASTORO. – Sul meccanismo di formazione dell'immagine latente negli strati fotografici (pres. dal Socio *G. Abetti*) 633
A. RUFFO e C. CENNAMO. – Il meccanismo dell'inibizione da florizina sul sistema enzimatico di riduzione dell'acido ossalacetico (pres. dal Socio *G. Quagliariello*) 643

R. Amprino e G. Godina. – Ricerche comparative sulla struttura delle ossa de Vertebrati (pres. dal Socio *G. Levi*) . . . . . Pag. 648
G. Goidànich. – Un interessante tipo di butteratura parassitaria delle mele (pres. dal Corrisp. *L. Petri*) 654
A. Alibrandi. – Comportamento di un riflesso condizionato motorio sotto l'azione dell'acetilcolina (pres. dal Corrisp. *C. Ciaccio*) 659

P. Rondoni. – Commemorazione del Socio *Benedetto Morpurgo* 662

Personale Accademico 666
Note presentate nella seduta del 18 maggio 1946 e che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli 667

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 18 maggio 1946 . . . . . Pag. 669

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1946.

Parole pronunciate dal Presidente (per la morte di Federico Enriques). Pag. 671
C. Birindelli. – Sul calcolo dell'integrale di Lebesgue del prodotto di due funzioni e applicazioni. Nota II (pres. dal Socio *M. Picone*) 673
B. Pettineo. – Estensione di una classe di serie divergenti (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 680
L. Lombardo-Radice. – Gli automoduli primitivi delle algebre legate a gruppi abeliani di ordine finito (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 686
A. Ghizzetti. – Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 691
G. Scorza Dragoni. – A proposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 697
M. Volpato. – Un criterio per l'esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 704
Sebastião e Silva José. – Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche (pres. dal Socio *M. Picone*) 709
G. Aquaro. – Sull'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie (pres. dal Socio *M. Picone*) 715
G. Pompilj. – Sulla equivalenza numerativa degli elementi uniti di una trasformazione cremoniana tra piani sovrapposti. Nota II (pres. dal Socio *F. Enriques*) 719
T. Viola. – Sulla definizione della lunghezza d'una curva (pres. dal Socio *M. Picone*) 724
C. Cattaneo. – Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità. Nota II (pres. dal Corrisp. *A. Signorini*) 728
P. Cicala. – Le tensioni caratteristiche per il guscio cilindrico (pres. dal Corrisp. *M. Panetti*) 735

F. Succi. – Osservazioni sulla R «Coronae Borealis» (pres. dal Socio *G. Armellini*) . . . . . Pag. 739
G. Vinaccia. – Sull'effetto antieliotermico delle superficie curve (pres. dal Socio *G. Armellini*) 743
P. Caloi. – Onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso, stratificato (pres. dal Socio *F. Vercelli*) 745
L. Sobrero. – Sulla elaborazione dei dati della fotoelasticità per la ricerca degli sforzi principali (pres. dal Socio *M. Picone*) 753
L. Sobrero. – I «segmenti» e le loro applicazioni alla fotoelasticità (pres. dal Socio *M. Picone*) 759
I. Barducci. – Effetto della viscosità e della conduzione termica in un risuonatore acustico. Nota I (pres. dal Socio *U. Bordoni*) 764
G. Cortini e F. Molina. – Determinazione del numero medio di urti che un neutrone termico subisce in acqua prima della cattura (pres. dal Corrisp. *G. C. Trabacchi*) 774
E. Del Pianto e G. B. Marini Bettòlo. – Nuove ricerche sull'azione batteriostatica dei chinoni (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 783
G. Bianchi. – Nuove esperienze sul trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi (pres. dal Corrisp. *O. Scarpa*) 786
A. Sacchetti. – L'orientamento fisiologico del femore umano nelle sue normali condizioni morfomeccaniche (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 791
A. Sacchetti. – Sulla variabilità nelle normali condizioni morfomeccaniche del femore umano (pres. dal Corrisp. *S. Sergi*) 797
F. M. Gerola. – Escreti fungini e mitosi cellulari (pres. dal Socio *G. Gola*) . . 801
U. D'Ancona. – Ancora una volta in tema di fibre muscolari, miofibrille e strie (pres. dal Socio *G. Gola*) 805

L. Berzolari. – Commemorazione del Corrispondente Annibale Comessatti 810
F. Sacco. – Commemorazione del Corrispondente Augusto Stella 816
G. Bargellini. – Commemorazione del Corrispondente Giuseppe Tommasi . 820

Note presentate nella seduta del 15 giugno 1946 e che saranno pubblicate nei prossimi fascicoli 823

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 15 giugno 1946 . . . . . Pag. 824

FASCICOLO 7–8.

Ferie Luglio–Agosto 1946.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

V. E. Galafassi. – Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali. Nota I (pres. dal Socio *L. Berzolari*) . . . . . Pag. 827
A. Colacevich. – Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali. Nota I (pres. dal Socio *G. Abetti*) 831

W. Opalski. – Sur le mouvement du centre de gravité du système de deux corps rayonnants (pres. dal Socio *G. Armellini*) . . . . . Pag. 840
C. Morelli. – Le anomalie gravimetriche in funzione delle deviazioni della verticale (pres. dal Socio *G. Cassinis*) 846
R. Signorini. – Il lembo di ricoprimento del Monte Fumaiolo nell'Appennino Romagnolo (pres. dal Corrisp. *G. Checchia-Rispoli*) 853
R. Signorini. – Il lembo di ricoprimento del Monte Comero e del Carnaio nell'Appennino Romagnolo (pres. dal Corrisp. *G. Checchia-Rispoli*) . . . 860
N. Frontali. – Trapianto dell'occhio tra embrioni e larve irradiati con raggi X e larve normali (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 865
G. Cotronei e L. Urbani-Mistruzzi. – La costituzione zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri ed Urodeli (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 869
G. Goidànich. – Sulle cause dei cedimenti nella pavimentazione del Palazzo Corsini, sede dell'Accademia Nazionale dei Lincei (pres. dal Socio *D. De Blasi*) 872

A. Pensa. – Commemorazione del Socio Ercole Giacomini 881

FASCICOLO 9.

Ferie Settembre 1946.

NOTE DI SOCI

E. Bompiani. – Enti geometrici definiti da sistemi differenziali . . . . Pag. 887
G. A. Crocco. – Il superamento della barriera del suono in Aviazione Nota I 895
E. Perucca e L. A. Radicati. – Nuova formulazione del principio di Huygens-Fresnel (pres. dal Socio *E. Perucca*) 901
A. Carrelli. – Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota II 907

NOTE PRESENTATE DA SOCI

B. Pettineo. – Sulle funzioni di accumulazione approssimate di un insieme di funzioni continue (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) . . . . . Pag. 916
G. Scorza Dragoni. – Ancora sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 918
V. E. Galassi. – Sulle curve algebriche reali delle rigate razionali a generatrici reali. Nota II (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 922
L. Castoldi. – Sulla curvatura media di una varietà immersa in un'altra (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 928
B. Pettineo. – Interdipendenza tra serie convergenti e serie divergenti (pres. dal Socio *M. Picone*) 934
G. Krall. – Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose. Nota I (pres. dal Socio *C. Somigliana*) 937

P. Sconzo. – Nuovi elementi, perturbati e migliorati, delle orbite di due pianetini (pres. dal Socio *G. Armellini*) . . . . . Pag. 949
A. Colacevich. – Il supposto ammasso del Sole ed i moti stellari preferenziali. Nota II (pres. dal Socio *G. Abetti*) 952
A. Rostagni e P. Bassi. – Vacuometro radiometrico a filo (pres. dal Socio *E. Perucca*) 960
G. Lovera. – Sulle coincidenze triple accidentali (pres. dal Corrisp. *A. Pochettino*) 964
A. Borsellino e P. Caldirola. – Sulla interazione elettromagnetica ritardata di due particelle di Dirac–Pauli (pres. dal Corrisp. *A. Amerio*) . . . 969
M. Della Corte. – Sul secondo massimo della curva degli sciami della radiazione cosmica (pres. dal Corrisp. *L. Tieri*) 974
E. Corinaldesi. – Sulla misura della densità dei neutroni termici (pres. dal Corrisp. *G. C. Trabacchi*) 982
E. Beneo. – Il problema strutturale del Monte Soratte (Lazio) (pres. dal Corrisp. *G. Checchia–Rispoli*) 990
T. Perri. – Sull'ibridazione tra « Bufo viridis » e « Bufo vulgaris ». Esperienze di trapianto tra ibridi e normali. Nota I (pres. dal Socio *F. Silvestri*) . . 995

FASCICOLO 10.

Ottobre 1946.

NOTE DI SOCI

E. Bompiani. – Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno ∞^k rette Pag. 1001
G. A. Crocco. – Il superamento della barriera del suono in Aviazione. Nota II 1006
A. Carrelli. – Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota III 1012
A. Amerio. – Sulle pressioni interne del Sole e sulla causa delle protuberanze solari 1018
A. Russo. – Prodotto delle Tonnare della Sicilia Orientale nell'ultimo decennio e sua diminuzione nel dopo guerra 1020

NOTE PRESENTATE DA SOCI

L. Castoldi. – Caratterizzazione intrinseca degli spazi riemanniani in cui una funzione della distanza geodetica da un punto generico soddisfa l'equazione generalizzata di Laplace (pres. dal Socio *L. Berzolari*) . . . . Pag. 1028
F. Cambi. – Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficiente periodico reciproco di quello di Mathieu. Nota I (pres. dal Socio *U. Bordoni*) 1035
G. Sansone. – Condizioni sufficienti di esistenza e limitazioni delle derivate normali al contorno nel problema di Dirichlet per un cerchio (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 1042
T. Manacorda. – Soluzioni periodiche di una equazione differenziale non lineare (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 1046
L. Castoldi. – Sul potenziale di un doppio strato non uniforme (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 1051

A. Rollero. – Sugli sviluppi canonici di una superficie nell'intorno di un suo punto (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) . . . . . Pag. 1055
A. Rollero. – Sulla determinazione del riferimento per lo studio proiettivo-differenziale delle superficie (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 1059
L. Castoldi. – Sopra alcune proprietà caratteristiche delle V_n totalmente geodetiche rispetto ad una V_m ambiente (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) . . 1064
P. Cicala. – Lo stato di tensione nel guscio cilindrico presso una accidentalità strutturale o di carico (pres. dal Corrisp. *M. Panetti*) 1069
M. Mineo. – Superficie d'equilibrio terrestri chiuse (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 1073
S. Franchetti e M. Giovannozzi. – Sullo spettro dei raggi β del potassio (pres. dal Corrisp. *L. Tieri*) 1078
S. Conti. – Su alcune specie di melobesie (Corallinacee) del Miocene di Ponzone (Acqui) (pres. dal Corrisp. *G. Rovereto*) 1088
U. Panichi. – Un nuovo polarizzatore (pres. dal Socio *A. Bianchi*) 1094
E. Urbani e L. Urbani-Mistruzzi. – L'assunzione di ossigeno in embrioni di Anfibi trattati con dosi letali di raggi Roentgen (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 1097
B. Monterosso e C. Ronsisvalle. – Note araneologiche – XXIII. Partenogenesi in « Tetragnatha extensa » (L.) (pres. dal Socio *A. Russo*) 1103
L. Raunich. – Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*) di fronte ai coloranti vitali. – I. Emazie (pres. dal Socio *A. Pensa*) . 1108
A. Stefanelli. – Ricerche di morfologia sperimentale sul differenziamento specifico generale e particolare delle cellule nervose (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 1113

Personale accademico 1116
Relazioni di Commissioni 1116
Presentazione di Note e Memorie 1117
Presentazione di libri 1117
Convegni scientifici 1118
Calendario delle Sedute accademiche 1119

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 16 ottobre 1946 . . . . . Pag. 1121

FASCICOLO 11.

NOVEMBRE 1946.

Per la inaugurazione della « Sala T. Levi-Civita ». Parole del Presidente G. Castelnuovo . . . . . Pag. 1129
U. Amaldi. – Commemorazione del Socio T. Levi-Civita 1130

NOTE DI SOCI

G. A. Crocco. – Il superamento della barriera del suono in aviazione. Nota III . . . . . Pag. 1155

NOTE PRESENTATE DA SOCI

G. Scorza Dragoni. – Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) . . . . . Pag. 1163
G. Ascoli. – Nuclei isotropi e loro autofunzioni (pres. dal Socio *M. Picone*) . 1167
L. Cesari. – Sulle serie doppie di Fourier (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . 1173
L. Merli. – Sull'approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 1175
E. Cambi. – Una equazione differenziale del secondo ordine a coefficiente periodico reciproco di quello di Mathieu. Nota II (pres. dal Socio *U. Bordoni*) . 1181
I. Barsotti. – Studi sopra le algebre senza base finita (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 1187
G. Moretti. – Il getto piano turbolento studiato con la teoria del trasporto (pres. dal Corrisp. *M. Panetti*) 1189
M. G. Fracastoro. – La protuberanza eruttiva del 24 agosto 1946 (pres. dal Socio *G. Abetti*) 1198
G. Bianchi. – Nuove esperienze nel trasporto elettrico degli ioni nei metalli liquidi e solidi – Sistemi Rame-Stagno, Rame-Piombo, Rame-Cadmio (pres. dal Corrisp. *O. Scarpa*) 1200
A. Rittmann. – Sulla esistenza di colate riolitiche post-alpine in Sila (pres. dal Socio *R. Fabiani*) 1206
L. Raunich. – Emazie e leucociti di Lampreda di ruscello (*Petromyzon planeri*) di fronte ai coloranti vitali. – II. Leucociti (pres. dal Socio *A. Pensa*) 1207
Dulbecco. – Sviluppo di gonadi in assenza di cellule sessuali nell'embrione di pollo. – Sterilizzazione completa mediante esposizione a raggi γ allo stadio di linea primitiva (pres. dal Socio *G. Levi*) 1211

A. Bianchi. – Commemorazione del Socio Giovanni D'Achiardi . . Pag. 1214
A. Bianchi. – Commemorazione del Socio Giovanni Boeris 1216
G. Dal Piaz. – Commemorazione del Socio Carlo Fabrizio Parona . . . 1217
G. Levi. – Commemorazione del Socio Giulio Chiarugi 1218
G. Cassinis. – Commemorazione del Corrispondente Ubaldo Barbieri . . 1222
G. Gola. – Commemorazione del Corrispondente Nazzareno Strampelli . . 1224
G. Gola. – Commemorazione del Socio Enrico Carano 1225
G. Gola. – Commemorazione del Corrispondente Lionello Petri 1226

Personale Accademico 1229
Plichi suggellati 1229
Presentazione di libri 1229
Presentazione di Note e Memorie 1230

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 16 novembre 1946 . . . . . Pag. 1231

FASCICOLO 12.

DICEMBRE 1946.

NOTE DI SOCI

G. CASSINIS. – Sulla teoria degli strumenti goniometrici . . . . . Pag. 1233
A. CARRELLI. – Sulla polarizzazione della luce del cielo. Nota IV 1242
G. BARGELLINI, E. DEL PIANTO e G. B. MARINI-BETTÒLO. – Sull'attività antibatterica di due acidi lichenici: acido usnico ed acido vulpinico (pres. dal Socio *G. Bargellini*) 1252

NOTE PRESENTATE DA SOCI

L. CESARI. - Un criterio per la misurabilità degli insiemi (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 1256
L. GIULIANO. – Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano (pres. dal Corrisp. *E. Bompiani*) 1264
G. KRALL. – Vibrazioni di uno scafo elastico galleggiante su un fluido sede di propagazioni ondose. Nota II (pres. dal Socio *G. Somigliana*) 1272
G. KRALL. – Moltiplicatore critico d'una distribuzione di carico su una volta autoportante (pres. dal Socio G. *Somigliana*) 1281
M. CIMINO. – Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma. Nota I (pres. dal Socio *G. Armellini*) 1295
G. VINACCIA. – Nuovo sistema per il calcolo del soleggiamento urbanistico ed edile. Termoeliografometria (pres. dal Socio *G. Armellini*) 1301
A. MARCANTONI. – Su alcune formule esplicite nella compensazione per direzioni delle catene di triangoli e dei sistemi centrali semplici (pres. dal Socio *G. Cassinis*) 1306
E. GROSSETTI. – Sull'assorbimento delle onde ultrasonore da parte di miscugli di liquidi di notevole viscosità. Nota I (pres. dal Corrisp. *A. Carrelli*) . . 1315
M. ABELE. – Studio energetico in regime transitorio di un bipolo lineare passivo (pres. dal Socio *E. Perucca*). 1321
P. G. BORDONI. – Equazioni generali dei trasduttori elettromeccanici (pres. dal Socio *A. Signorini*). 1324
L. MAZZA. – Sulle lastre fotografiche per l'ultravioletto estremo (pres. dal Corrisp. *L. Rolla*) 1331
C. MAXIA. – Nuova formazione pleistocenica di facies limnica presso Rignano Flaminio (Tuscia Romana) (pres. dal Corrisp. *G. Checchia-Rispoli*) . . . 1334
B. DE LERMA. – Ricerche spettrofotometriche sulla luce emessa da batteri fotogeni. Nota I (pres. dal Corrisp. *U. Pierantoni*) 1343
R. LEVI MONTALCINI. – Ricerca sperimentale sull'origine dei gangli del glosso-faringeo e del vago nell'embrione di pollo (pres. dal Socio *G. Levi*) . . . 1349
M. L. CORTELLESSA. – Ricerche sull'influenza della tionina sullo sviluppo embrionale degli Anfibi (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 1352
F. DULZETTO. – Osservazioni sulla deposizione di «Murex trunculus» (pres. dal Socio *A. Russo*) 1356

V. GRASSO. – Le specie di Tilletia del frumento esistenti in Italia (pres. dal Corrisp. *G. Negri*) . . . . . Pag. 1362
E. URBANI. – Il fenomeno fotodinamico studiato con il metodo della parabiosi (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 1364
M. MAROTTA. – Sulla rigenerazione del midollo spinale dei Rettili (pres. dal Corrisp. *G. Cotronei*) 1367

Personale Accademico 1372
Presentazione di Libri 1372
Presentazione di Note e Memorie 1372

Opere pervenute in dono all'Accademia, presentate nella seduta del 14 dicembre 1946 1374

Errata Corrige 1374

Indice per autori. 1375
Indice per materie 1385
Indici dei fascicoli 1394

3 8198 304 934 928
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO